

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Теория вероятностей и математическая статистика Б1.Б.10

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Володин И.Н. , Симушкин С.В. , Халиуллин С.Г.

**Рецензент(ы):**

Лапин А.В.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 982816

Казань  
2016

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Володин И.Н. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Igor.Volodin@kpfu.ru ; доцент, к.н. (доцент) Симушкин С.В. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Sergey.Simushkin@kpfu.ru ; доцент, к.н. (доцент) Халиуллин С.Г. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Samig.Haliullin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины является систематическое изучение методов теории вероятностей и математической статистики, которые используются в качестве математических моделей широкого круга процессов физики, техники, экономики и других разделов естествознания. Особое внимание уделяется вероятностным моделям реальных явлений и статистическим методам идентификации этих моделей.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.10 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 2, 3 курсах, 4, 5 семестры.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается в 4-5 семестре для студентов обучающихся по направлению "Прикладная математика".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин "Алгебра и геометрия", "Математический анализ 1", "Дифференциальные уравнения".

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	готовность к самостоятельной работе
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность и готовность настраивать, тестировать и осуществлять проверку вычислительной техники и программных средств

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- основные принципы построения вероятностных моделей и методов принятия статистических решений

2. должен уметь:

- ориентироваться в классических и современных методах доказательства предельных теорем теории вероятностей и выводе распределения статистик - функций отклонения выборочных данных

3. должен владеть:

- теоретическими знаниями, связанными с основными законами теории вероятностей и теории статистического вывода

- навыками построения вероятностных моделей реальных явлений и навыки обработки статистических данных

- применять полученные знания в своей профессиональной деятельности

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных(ые) единиц(ы) 252 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 4 семестре; экзамен в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Элементарная теория вероятностей	4		6	0	4	письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Вероятностное пространство	4		6	0	4	письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Условная вероятность и независимость событий	4		6	0	4	письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения	4		6	0	4	письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений.	4		6	0	4	письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
6.	Тема 6. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение.	4		6	0	4	контрольная работа письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Векторные случайные величины. Моментные характеристики многомерных распределений.	4		6	0	4	письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Сходимость случайных величин и функций распределения. Законы Больших Чисел. Метод характеристических функций	4		6	0	4	письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Предельные теоремы теории вероятностей. Введение в теорию случайных процессов.	4		6	0	4	контрольная работа письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Проблема статистического вывода. Основные этапы статистического исследования. Достаточные статистики	5		9	0	4	письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Оценка параметров. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Доверительные интервалы	5		9	0	5	письменное домашнее задание коллоквиум
12.	Тема 12. Статистическая проверка гипотез. Наиболее мощные критерии.	5		9	0	5	письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
13.	Тема 13. Проверка модельных предположений. Критерии согласия.	5		9	0	4	курсовая работа по дисциплине письменное домашнее задание
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	экзамен
	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	экзамен
	Итого			90	0	54	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Элементарная теория вероятностей

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Исторические корни теории вероятностей и ее гносеология. Случайность, устойчивость частот с иллюстрацией на реальных (моделированных) данных. Пространство элементарных исходов. Примеры. Распределение вероятностей на конечных или счетных пространствах элементарных исходов (задание вероятности). Построение вероятностной модели (вывод распределения вероятностей). Понятие события и вычисление его вероятности. Гипергеометрическое распределение вероятностей. Примеры. Геометрические вероятности.

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Решение задач на классическую схему задания вероятности. Вывод формул для числа элементарных исходов в различных схемах выбора из генеральной совокупности.

### Тема 2. Вероятностное пространство

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Булева алгебра событий. Вероятностная интерпретация теоретико-множественных операций. Несовместные события. Примеры булевых алгебр. Вероятность на булевой алгебре (нормируемость, конечная аддитивность, непрерывность). Свойства вероятности. Определение вероятности с заменой аксиомы конечной аддитивности и непрерывности на сигма-аддитивность. Эквивалентность этих определений. Булева сигма-алгебра. Сигма-алгебра, порожденная булевой алгеброй. Определения измеримого и вероятностного пространств. Определения события как измеримого множества.

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вывод формул для операций с событиями (объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность). Формулы сложения, Пуанкаре и Варинга.

### Тема 3. Условная вероятность и независимость событий

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Условная вероятность события. Независимость двух событий. Несовместность и независимость. Независимость семейства событий. Попарная независимость и независимость в совокупности (пирамидка Бернштейна). Независимость сигма-подалгебр. Пример независимых булевых подалгебр. Схема испытаний Бернулли. Биномиальное распределение вероятностей. Аппроксимация гипергеометрического распределения биномиальным распределением. Формула полной вероятности. Примеры. Формула Байеса. Пример со статистическим контролем качества.

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Применение формул условной вероятности. Формула умножения вероятностей. Гипергеометрическая модель. Выбор из генеральной совокупности Формула полной вероятности и формула Байеса.

#### **Тема 4. Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения**

##### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Случайные величины на вероятностном пространстве и распределение случайной величины, индуцированное распределение на этом пространстве. Борелевская прямая. Функция распределения. Примеры. Свойства функции распределения. Единственность определения распределения на борелевской прямой с помощью функции распределения. Гипергеометрическое распределение. Биномиальное распределение. Примеры. Распределение Пуассона (модель радиоактивного распада). Равномерное распределение на отрезке. Показательное распределение (модель отказа изделия, не подверженного старению и износу). Геометрическое распределение. Показательное распределение как предел-аппроксимация геометрического при малом  $p$ .

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Схема Бернулли. Биномиальная и мультиномиальная модели. Асимптотика. Распределение функций от случайных величин.

#### **Тема 5. Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений.**

##### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Дискретный тип распределений. Функция вероятностей. Непрерывный тип распределения. Функция плотности. Запись функции распределения в виде интеграла от функции плотности. Определение среднего значения, дисперсии, стандартного отклонения и моды. Свойства числовых характеристик. Дискретно-непрерывный тип. Понятие сингулярного распределения. Носитель распределения. Вычисление среднего значения и дисперсии случайных величин с биномиальным, пуассоновским, равномерным и показательным распределениями. Вероятностные модели, приводящие к распределениями Парето и Коши. Отсутствие моментов у этих распределений. Неравенство Чебышёва и правило "трех сигм".

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вычисление моментов, квантилей основных дискретных и непрерывных моделей.

#### **Тема 6. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение.**

##### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Необходимость нахождения асимптотики биномиального распределения при неограниченном увеличении числа испытаний и постоянной вероятности успеха на примерах построения вероятностных моделей "ошибок измерений" (определение видимой звездной величины и определение общего содержания серы в дизельном топливе). Закон больших чисел Бернулли (слабая форма). Вычисление асимптотики биномиальной вероятности (функции плотности биномиального распределения по считающей мере) с помощью формулы Стирлинга. Локальная и интегральная теоремы Муавра--Лапласа; некоторые аспекты ее использования (предостережение о невозможности ее использования в области "больших отклонений"). Нормальное распределение; свойства его функций плотности и распределения, вычисление центральных моментов и характеристик формы (асимметрия и эксцесс).

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Применение предельных теорем Пуассона и Муавра-Лапласа для вычисления вероятностей в биномиальной модели. Применение теоремы Слуцкого для вывода асимптотических распределений.

#### **Тема 7. Векторные случайные величины. Моментные характеристики многомерных распределений.**

##### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**



Определение случайного вектора. Распределение векторной с.в.; задание распределения с помощью функции плотности. Частные (маргинальные) распределения компонент. Равномерное распределение в круге. Определение сигма-подалгебры, порожденной случайной величиной. Независимость случайных величин как независимость порожденных ими сигма-алгебр. Критерий независимости. Среднее от произведения и дисперсия от суммы независимых случайных величин. Независимость функций от независимых случайных величин. Формула свертки(распределение суммы двух независимых случайных величин). Теорема сложения для нормального распределения. Векторы средних и дисперсий. Матрица ковариаций. Неравенство Шварца (неравенство Коши--Буняковского для интегралов Лебега по вероятностной мере). Коэффициент корреляции как мера линейной связности двух случайных величин. Соотношение независимости и некоррелированности на примере равномерного распределения в круге. Вычисление ковариаций от суммы независимых случайных векторов. Мультиномиальное распределение; вычисление его вектора средних и матрицы корреляций. Многомерное нормальное распределение как аппроксимация мультиномиального распределения при большом числе испытаний (многомерная предельная теорема Муавра--Лапласа; без доказательства). Эквивалентность некоррелированности и независимости для случайных величин с нормальными распределениями. Эллипс рассеяния и его роль в в теории стрельб. Определение условного распределения для дискретных и непрерывных распределений через условные плотности. Условное математическое ожидание и его свойства. Наилучший среднеквадратический прогноз одной случайной величины посредством значений другой. Наилучший прогноз в случае нормального распределения. Прямые регрессии и их положение относительно эллипса рассеяния.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вычисление коэффициентов корреляции. Построение линии регрессии.

**Тема 8. Сходимость случайных величин и функций распределения. Законы Больших Чисел. Метод характеристических функций**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Сходимость почти наверное. Сходимость по вероятности Закон больших чисел Чебышева. Теоремы типа Слуцкого. Слабая сходимость распределений и ее соотношение со сходимостью по вероятности (пример, когда слабая сходимость не влечет сходимость по вероятности, и доказательство того, что слабая сходимость к постоянной влечет сходимость по вероятности). Определение характеристической функции. Свойства х.ф. Вычисление х.ф. для некоторых вероятностных моделей.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вычисление моментов с помощью характеристической функции. Вывод предельного закона.

**Тема 9. Предельные теоремы теории вероятностей. Введение в теорию случайных процессов.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**



Формулировка критерия слабой сходимости (теорема непрерывности для х.ф.). Леммы (теоремы) Хелли и Хелли-Брея. Доказательство теоремы непрерывности. Закон больших чисел Хинчина. Усиленный закон больших чисел Колмогорова (без доказательства). Пример с распределением Коши (нарушение закона больших чисел при несуществовании среднего). Центральная предельная теорема для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом. Понятие асимптотической нормальности. Вероятностные модели роста. логарифмически-нормальное распределение. Распределение Бирнбаума--Сондерса. Распределение Вейбулла. Определение случайной функции. Примеры (точечные процессы (поток событий), ветвящиеся процессы, броуновское движение в капилляре и на плоскости, случайное поле). Задание распределения на пространстве траекторий случайного процесса. Теорема Колмогорова. Пуассоновский процесс. Постулаты стационарности, независимости приращений и ординарности. Вывод конечномерных распределений процесса Пуассона. Распределение промежутков между появлениями событий в процессе Пуассона. Вероятностные модели старения и износа. Связь процесса Пуассона с равномерным распределением (распределение моментов появления событий в заданном промежутке времени при условии, что на этом промежутке появилось фиксированное число событий). Винеровский процесс. Дискретный аналог броуновского движения. Вывод конечномерных распределений винеровского процесса. Распределение момента достижения винеровским процессом заданного уровня. Случайные блуждания по дискретной решетке на плоскости. Принцип отражения Дезире Андре. Вывод дискретного аналога момента достижения и и вычисление его асимптотики при уменьшении размера шага блуждания.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Решение задач на равномерное распределение на прямой и в пространстве.

**Тема 10. Проблема статистического вывода. Основные этапы статистического исследования. Достаточные статистики**

**лекционное занятие (9 часа(ов)):**

Предмет математической статистики. Примеры: аттестация партии дизельного топлива, выявление эффективности нового медицинского препарата (проверка гипотез, определение процедуры приемки и отклонения, выбор критического числа "неуспешных" испытаний по заданному уровню значимости). Основная задача математической статистики как построение решающих правил, минимизирующих величину средних потерь, или вычисление этой величины (вычисление функции риска) для заданных правил принятия решения. Строгое определение случайной выборки, выборочного пространства, статистической структуры и статистики (измеримой функции от случайной выборки). Распределение выборки. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения и ее распределение. Выборочные моменты, выборочные квантили. Гистограмма. Асимптотическое распределение выборочных моментов. Вычисление среднего значения выборочной дисперсии (важность устранения смещения оценки при оценке параметра по совокупности архивных выборок). Строгое определение достаточной статистики. Теорема факторизации Неймана (критерий достаточности). Примеры.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Первичная обработка данных. Построение гистограммы, вариационного ряда, эмпирической функции распределения. Вычисление выборочных характеристик.

**Тема 11. Оценка параметров. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Доверительные интервалы**

**лекционное занятие (9 часа(ов)):**

Постановка задачи оценки параметра; основная задача теории оценивания. Состоятельность оценок и их несмещенность. Метод моментов. Примеры с оценкой параметров биномиального и гамма распределений. Состоятельность и асимптотическая нормальность оценок по методу моментов. Пример с оценкой надежности объекта в рамках модели показательного распределения долговечности. Эвристическое оправдание метода принятия решения на основе максимального правдоподобия с примером по оценке параметров нормального распределения.. Определение функции правдоподобия; уравнение правдоподобия. Примеры на применение метода максимального правдоподобия: (1) оценка параметра положения равномерного распределения, (2) оценка параметров гамма-распределения, (3) оценка параметров структурированного среднего при нормальном распределении отклика (регрессия с фиксированными неслучайными значениями регрессора), (4) оценка параметров двумерного нормального распределения. Состоятельность оценок максимального правдоподобия. Неравенство Йенсена. Асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия. Информация по Фишеру и её свойства. Неравенство Рао--Крамера. Определение эффективной оценки в классе несмещенных оценок и ее соотношение с оптимальной оценкой. Оптимальность оценки максимального правдоподобия. Определение доверительной области, доверительного уровня, доверительного коэффициента и доверительного интервала. Построение доверительного интервала для: а) среднего значения нормального распределения; б) дисперсии нормального распределения; в) параметров биномиального и г) пуассоновского распределений.

#### **лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Построение доверительных интервалов для вероятности события, среднего значения, дисперсии.

### **Тема 12. Статистическая проверка гипотез. Наиболее мощные критерии.**

#### **лекционное занятие (9 часа(ов)):**

Понятие гипотезы (простой и сложной). Критерий, критическая область, критическая функция, уровень значимости, размер критерия, функция мощности, вероятности ошибок первого и второго рода, мощность критерия. Равномерно наиболее мощные критерии -- основная задача теории проверки гипотез. Общий принцип построения критериев заданного уровня на основе оценки тестируемого параметра. Проверка гипотезы о среднем нормального распределения при известной дисперсии; планирование объема испытаний с введением зоны безразличия. Проверка гипотез о дисперсии нормального распределения при неизвестном среднем. Проверка гипотезы о среднем значении нормального распределения при неизвестной дисперсии (одновыборочный критерий Стьюдента). Сравнение средних значений двух нормальных распределений при общей неизвестной дисперсии (двухвыборочный критерий Стьюдента). Сравнение дисперсий двух нормальных распределений с неизвестными средними (двухвыборочный критерий Фишера). Проверка гипотезы о вероятности успеха в испытаниях Бернулли. Двойственность задач доверительного оценивания и проверки гипотез. Наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы при простой альтернативе (критерий отношения правдоподобия, лемма Неймана--Пирсона). Использование леммы Неймана--Пирсона при построении равномерно наиболее мощных критериев на примере проверки надежности объектов при показательном распределении долговечности. Равномерно наиболее точные доверительные границы.

#### **лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Сравнение двух групп данных по критериям Стьюдента, Вилкоксона, рангов, Фишера. Проверка независимости по коэффициенту корреляции.

### **Тема 13. Проверка модельных предположений. Критерии согласия.**

#### **лекционное занятие (9 часа(ов)):**

Критерий согласия хи-квадрат для проверки простой гипотезы (вероятностная модель с известными значениями параметров). Вывод распределения статистики критерия. Критерий согласия хи-квадрат при неизвестных значениях параметров. Распределение статистики при подстановке оценок параметров по методу минимума расхождения хи-квадрат и методу максимального правдоподобия (без доказательств). Критерий независимости хи-квадрат (таблицы сопряженности признаков). Критерий однородности хи-квадрат.

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Проверка нормальности данных. Проверка однородности двух групп по критерию хи-квадрат (таблица однородности). Проверка независимости двух признаков по таблице сопряженности.

#### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Элементарная теория вероятностей	4		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Вероятностное пространство	4		подготовка домашнего задания	6	письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Условная вероятность и независимость событий	4		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения	4		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений.	4		подготовка домашнего задания	6	письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение.	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	1	контрольная работа
7.	Тема 7. Векторные случайные величины. Моментные характеристики многомерных распределений.	4		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Сходимость случайных величин и функций распределения. Законы Больших Чисел. Метод характеристических функций	4		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
9.	Тема 9. Предельные теоремы теории вероятностей. Введение в теорию случайных процессов.	4		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
10.	Тема 10. Проблема статистического вывода. Основные этапы статистического исследования. Достаточные статистики	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Оценка параметров. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Доверительные интервалы	5		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
				подготовка к коллоквиуму	2	коллоквиум
12.	Тема 12. Статистическая проверка гипотез. Наиболее мощные критерии.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
13.	Тема 13. Проверка модельных предположений. Критерии согласия.	5		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
				подготовка к курсовой работе по дисциплине	1	курсовая работа по дисциплине
Итого					45	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных и практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика" на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Элементарная теория вероятностей**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

В каких ситуациях применима классическая модель вероятностного пространства? Привести примеры ошибочного применения классической схемы. Дайте интерпретацию биномиальных коэффициентов. Решить задачи их первой темы основного задачника.

### **Тема 2. Вероятностное пространство**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Описать элементы вероятностного пространства. Привести свойства вероятностной меры. Привести примеры неклассических пространств. Решить некоторые задачи на различные сочетания событий из второй темы основного задачника.

### **Тема 3. Условная вероятность и независимость событий**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса. Привести несколько примеров, показывающих несоответствие понятий независимости в совокупности и попарной независимости. Решить задачи на биномиальную модель.

### **Тема 4. Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Привести свойства функции распределения. Обязана ли функция распределения быть всюду непрерывной слева (справа). Привести пример вывода функции распределения на основе физических предположений. Решить задачи из шестой темы основного задачника.

### **Тема 5. Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Привести основные свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины. Дать графическую иллюстрацию дискретной и непрерывной моделей. Решить задачи на вычисление моментов случайных величин.

### **Тема 6. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение.**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Найти вероятность события в схеме гипергеометрической модели. 2. Найти условную вероятность по формуле Байеса или полную вероятность сложного события. 3. Найти вероятность события при независимых испытаниях в схеме Бернулли (биномиальная и геометрическая модели). 4. Вычислить дисперсию случайной величины (дискретной или непрерывной).

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Сформулировать закон больших чисел и теорему Муавра-Лапласа. Привести вид функции плотности нормального закона и его числовых характеристик. Решить задачи на применение теорем Пуассона и Муавра-Лапласа

### **Тема 7. Векторные случайные величины. Моментные характеристики многомерных распределений.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:



Дать определение случайного вектора и его функции распределения. Дать определение линии среднеквадратической регрессии. Привести неравенство Коши-Буняковского. Решить задачи на вычисление коэффициента корреляции, построения свертки, нахождение функции плотности случайного вектора.

### **Тема 8. Сходимость случайных величин и функций распределения. Законы Больших Чисел. Метод характеристических функций**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Дать определения различных типов сходимости случайных величин. Привести связь между различными типами сходимости. В чем различие законов больших чисел Бернулли, Хинчина, Колмогорова. На чем основано применение метода характеристических функций для вывода предельных теорем. Решить задачи на вычисление моментов с помощью характеристических функций. Вывести предельные распределения для некоторых случайных величин.

### **Тема 9. Предельные теоремы теории вероятностей. Введение в теорию случайных процессов.**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Найти распределение функции от случайной величины (вектора) 2. Найти вероятность в схеме Бернулли с использованием предельных теорем Пуассона и Муавра-Лапласа. 3. Найти вид распределения случайной величины или её моменты с помощью метода характеристических функций.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Сформулировать Центральную Предельную Теорему. Дать определение случайной функции. Сформулировать постулаты процесса Пуассона и броуновского движения. Какой процесс называется гауссовским?

### **Тема 10. Проблема статистического вывода. Основные этапы статистического исследования. Достаточные статистики**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Дать определение выборки. В чем различие между выборкой и выборочными данными, статистикой и результатом её применения. Что такое вероятностная модель эксперимента? Дать интуитивную интерпретацию понятию достаточной статистики. Провести первичную статистическую обработку данных курсового проекта.

### **Тема 11. Оценка параметров. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Доверительные интервалы**

коллоквиум , примерные вопросы:

Знать основные определения и утверждения общего курса теории вероятностей из списка основных вопросов. Уметь решать практические задачи из основного списка задач.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Дать понятия оценки и оценочной функции. Привести эвристические доводы в пользу методов моментов и максимального правдоподобия оценки параметров. Как определяются доверительные границы для параметров модели. Что такое опорная функция?

### **Тема 12. Статистическая проверка гипотез. Наиболее мощные критерии.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Сформулировать задачу проверки гипотез по результатам статистических измерений. Дать определения вероятностей ошибок первого и второго рода, мощности критерия. Сформулировать утверждение леммы Неймана-Пирсона. Какая вероятностная модель имеет монотонное отношение правдоподобия?

### **Тема 13. Проверка модельных предположений. Критерии согласия.**

курсовая работа по дисциплине , примерные вопросы:

Сдать отчет по курсовому проекту по математической статистике

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Описать способ проверки модельных предположений с помощью критериев Хи-квадрат и Колмогорова. Обосновать применимость критерия типа Хи-квадрат для проверки гипотезы независимости признаков



## Тема . Итоговая форма контроля

## Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена.

Билет I.

1. Вероятностное пространство. Эквивалентность свойств непрерывности вероятности и сигма-аддитивности.
2. Вероятностная модель статистического эксперимента. Статистическая структура. Достаточные статистики.

Билет II.

1. Условная вероятность и независимость событий. Попарная независимость и независимость в совокупности.
2. Выборка, выборочные среднее и дисперсия, вариационный ряд, гистограмма. Теорема Гливленко-Кантелли.

Билет III.

1. Формулы полной вероятности и Байеса.
2. Статистическая оценка. Основные требования к оценкам. Качества выборочного среднего и выборочной дисперсии как оценок истинного среднего и дисперсии.

Билет IV.

1. Случайная величина. Типы случайных величин. Теорема о соотношении между совокупностью случайных величин и множеством функций распределения.
2. Метод моментов. Пример с гамма-моделью.

Билет V.

1. Свойства функции распределения.
2. Метод максимального правдоподобия. Пример с нормальной моделью.

Билет VI.

1. Функция плотности. Свойства.
2. Средне-квадратический риск. Неравенство Рао-Крамера. Эффективность оценок. Асимптотическая эффективность.

Билет VII.

1. Случайный вектор. Функция распределения, плотность. Частные распределения.
2. Доверительное множество. Доверительный интервал. Доверительная граница. Метод опорной функции.

Билет VIII.

1. Независимость случайных величин. Критерии независимости через функцию распределения и плотность.
2. Теорема Фишера о совместном распределении выборочного среднего и выборочной дисперсии при выборе из нормального распределения.

Билет IX.

1. Математическое ожидание случайной величины (схема определения). Способы вычисления для различных типов сл.в.
2. Доверительные интервалы для среднего значения нормального распределения.

Билет X.

1. Свойства среднего значения и дисперсии случайной величины.
2. Доверительные интервалы для дисперсии нормального распределения.

Билет XI.

1. Числовые характеристики случайной величины - медиана, мода, асимметрия, эксцесс, квантили распределения.

2. Асимптотические доверительные интервалы. Пример с моделью Бернулли.

Билет XII.

1. Коэффициент корреляции. Свойства.

2. Проверка гипотез. Простая и сложная гипотеза. Критерий, критическая область, функция мощности, уровень значимости, вероятности ошибок I и II рода.

Билет XIII.

1. Уравнение линейной регрессии в двумерном случае.

2. Одновыборочный критерий Стьюдента.

Билет XIV.

1. Закон больших чисел Чебышева.

2. Двухвыборочный критерий Стьюдента.

Билет XV.

1. Теоремы Муавра-Лапласа.

2. Критерий Фишера проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных совокупностей.

Билет XVI.

1. Теорема Пуассона.

2. Наиболее мощный критерий проверки двух простых гипотез.

Билет XVII.

1. Многомерное нормальное распределение.

2. Равномерно наиболее мощный критерий для моделей с монотонным отношением правдоподобия.

Билет XVIII.

1. Типы сходимости случайных величин. Соотношения между ними.

2. Критерий хи-квадрат в случае полностью определенного гипотетического распределения.

Билет XIX.

1. Характеристическая функция случайной величины. Свойства.

2. Критерий хи-квадрат для параметрической модели.

Билет XX.

1. Теорема единственности для характеристических функций.

2. Проверка независимости двух величин - критерий сопряженности.

Билет XXI.

1. Теоремы непрерывности для характеристических функций.

2. Критерий однородности хи-квадрат.

Билет XXII.

1. Закон Больших Чисел Хинчина и Колмогорова.

2. Асимптотическое распределение оценок по методу максимального правдоподобия.

Билет XXIII.

1. Центральная Предельная Теорема.

2. Асимптотическое распределение оценок по методу моментов.

Билет XXIV.

1. Случайный процесс. Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова.

2. Асимптотическое распределение выборочной медианы.

## Билет XXV.

1. Процесс Пуассона. Постулаты и конечномерные распределения.
2. Найти достаточную статистику для нормальной модели с двумя параметрами.

### Примерные задачи на контрольной работе по ТВ

- 1 Какова вероятность того, что на выборах победит планируемая тройка лидеров из девяти зарегистрированных кандидатов на выборные должности, если предположить, что из девяти человек отбирают случайно трех на три должности?
2. Студент два раза извлекает по одному билету из 34-х предложенных на экзамене. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он подготовил 30 билетов и первый раз вытянул неудачный билет?
3. В классе обучаются 20 девочек и 10 мальчиков. К уроку не выполнили домашнее задание 4 девочки и 3 мальчика. Наудачу вызванный ученик оказался неподготовленным к уроку. Какова вероятность того, отвечать был вызван мальчик?
- 4 Вероятность своевременного прибытия поезда равна 0.95. Найти вероятность того, что из пяти прибывших поездов четыре поезда придут вовремя.
- 5 Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0.7. Составить закон распределения числа попаданий при одном выстреле.  
Найти математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.
- 6 Декан факультета вызвал через старосту трех студентов из пяти задолженников. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал к декану наудачу выбранных троих студентов из этой пятерки.  
Какова вероятность того, что к декану явятся вызванные им студенты?
- 7 Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна 0.3.  
Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.
- 8 В школе 60% учащихся - девочки. Известно, что 80% девочек и 75% мальчиков имеют по одному билету в театр. Из всех учеников случайно выбрали одного. Оказалось, что у этого ученика есть билет. Какова вероятность, что это была девочка? Мальчик?
- 9 Вероятность того, что изделие не пройдет контроля, равна 0.125.  
Какова вероятность того, что среди 12 изделий не будет ни одного забракованного контролером?
- 10 Вероятность того, стрелок попадет в цель при одном выстреле, равна 0.8.  
Стрелку выдано пять патронов, и стрельба производится до первого попадания либо до окончания патронов.  
Составить закон распределения числа использованных патронов. Найти мат.ожидание и дисперсию.

### 7.1. Основная литература:

1. Володин, Игорь Николаевич (д-р физ.-мат. наук ; 1937-) . Лекции по теории вероятностей и математической статистике [Текст: электронный ресурс] : [учебник] для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010200 "Прикладная математика и информатика" и по направлению 510200 "Прикладная математика и информатика" / И. Н. Володин ; Казан. гос. ун-т, Каф. мат. статистики .? Электронные данные (1 файл: 1,5 Мб) .? (Казань : Казанский федеральный университет, 2013). - Режим доступа: открытый.  
<URL:http://libweb.ksu.ru/ebooks/09\_66%20\_ds006.pdf>.

2. Симушкин, Сергей Владимирович (канд. физ.-мат. наук ; 1956-) . Задачи по теории вероятностей [Текст: электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Симушкин, Л. Н. Пушкин .? Электронные данные (1 файл: 1,48 Мб) .? (Казань : Казанский федеральный университет, 2014) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый .

<URL:<http://libweb.ksu.ru/ebooks/publicat/0-787673.pdf>>.

3 .Ширяев А. Н. Вероятность - 1. - [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев.?Москва: МЦНМО, 2007. - 552 с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9448](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9448)

4. Ширяев А. Н. Вероятность - 2. - [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев. - Москва: МЦНМО, 2007. - 416 с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9449](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9449)

5. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей: учебное пособие. - М.: МЦНМО, 2006. - 416 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/9447/>

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. - СПб.: Лань, 2011. - 256с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2026](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2026)

2. Боровков А.А. Математическая статистика.- СПб.: Лань, 2010. - 704 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3810](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3810)

3. Свешников А.А. Прикладные методы теории вероятностей.- СПб.: Лань, 2012. - 480 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3184](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3184)

4. Ширяев А.Н., Эрлих И.Г., Яськов П.А. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1. - М.: МЦНМО, 2014. - 648 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/56417/>

5. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. - М.:Физматлит, 2005. - 400 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/59319/>

## 7.3. Интернет-ресурсы:

Краткий справочник по математике - <http://matembook.chat.ru/>

Портал математических интернет ресурсов - <http://www.math.ru>

Портал математических интернет ресурсов - <http://www.allmath.com>

Сайт с материалами по естественно-научным дисциплинам - <http://en.endu.ru>

Сайт с учебными материалами по математическим наукам - <http://www.exponenta.ru>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Лекции по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером), практические занятия по дисциплине проводятся в компьютерном классе.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Володин И.Н. \_\_\_\_\_

Симушкин С.В. \_\_\_\_\_

Халиуллин С.Г. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Лапин А.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.