

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.



\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

**Программа дисциплины**  
**Математический анализ Б1.Б.7**

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Лапин А.В. , Сидоров А.М.

**Рецензент(ы):**

Гумеров Р.Н.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 936617

Казань  
2017

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Лапин А.В. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики ,  
avlapine@mail.ru ; доцент, к.н. (доцент) Сидоров А.М. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Anatoly.Sidorov@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоение дисциплины "Математический анализ 1" являются: формирование математической культуры студентов, фундаментальная подготовка студентов в области математического анализа, овладение современным аппаратом математического анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.7 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 1, 2 курсах, 1, 2, 3, 4 семестры.

Дисциплина "Математический анализ 1" входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла подготовки бакалавра по направлению "Прикладная математика". Логическая и содержательно - методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Дисциплине "Математический анализ" предшествует общематематическая подготовка в объеме средней общеобразовательной школы или технического колледжа,

Освоение данной дисциплины как предшествующей необходимо при изучении следующих дисциплин:

- Теория вероятностей и математическая статистика;
- Дифференциальные уравнения;
- Уравнения математической физики;
- Численные методы;

и остальные специальные дисциплины, курсы по выбору.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	готовность к самостоятельной работе
ПК-11 (профессиональные компетенции)	готовность применять знания и навыки управления информацией
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность и готовность настраивать и тестировать и осуществлять проверку вычислительной техники

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- основные понятия и методы элементарной математики, геометрии, алгебры и начал математического анализа;

- основные понятия линейной алгебры;

2. должен уметь:

- производить действия с числами;

- использовать основные алгебраические тождества для преобразования алгебраических выражений;

- использовать тригонометрические тождества для преобразования тригонометрических выражений;

- решать линейные и квадратичные уравнения и неравенства;

- решать тригонометрические уравнения;

- выполнять геометрические построения;

- доказывать математические утверждения;

- вычислять определители;

- выполнять действия над матрицами;

3. должен владеть:

- приемами вычислений на калькуляторе инженерного типа;

- навыками использования математических справочников.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять на практике основные методы математического анализа.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 27 зачетных(ые) единиц(ы) 972 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет и экзамен в 1 семестре; зачет и экзамен во 2 семестре; зачет и экзамен в 3 семестре; зачет и экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Теория вещественных чисел	1		6	0	5	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Числовые последовательности	1		6	0	5	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Предел функции в точке	1		6	0	13	Письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Непрерывность функции в точке	1		6	0	4	Контрольная работа Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Производная и дифференциал функции одной переменной	1		8	0	10	Письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Производные и дифференциалы высших порядков	1		4	0	4	Письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Основные теоремы для дифференцируемых функций	1		4	0	2	Письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Формула Тейлора	1		6	0	7	Письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Исследование функций с помощью производной	1		4	0	14	Контрольная работа Письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Неопределенный интеграл	1		4	0	8	Письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Определённый интеграл Римана и его свойства	2		10	0	4	Письменное домашнее задание
12.	Тема 12. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Тейлора	2		6	0	2	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
13.	Тема 13. Геометрические приложения интеграла Римана	2		4	0	10	Контрольная работа Письменное домашнее задание
14.	Тема 14. Несобственный интеграл	2		6	0	6	Письменное домашнее задание
15.	Тема 15. Числовые ряды	2		2	0	2	Письменное домашнее задание
16.	Тема 16. Сходимость знакопостоянных рядов	2		4	0	6	Письменное домашнее задание
17.	Тема 17. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды	2		4	0	6	Письменное домашнее задание
18.	Тема 18. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.	2		6	0	6	Письменное домашнее задание
19.	Тема 19. Степенные ряды	2		4	0	6	Письменное домашнее задание
20.	Тема 20. Евклидово пространство	2		4	0	2	Письменное домашнее задание
21.	Тема 21. Отображения в евклидовых пространствах	2		4	0	4	Письменное домашнее задание
22.	Тема 22. Дифференцируемость отображения. Частные производные.	2		6	0	8	Письменное домашнее задание
23.	Тема 23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.	2		6	0	4	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
24.	Тема 24. Локальный экстремум функции многих переменных	2		6	0	6	Контрольная работа Письменное домашнее задание
25.	Тема 25. Экстремум, условный экстремум функции многих переменных.	3		14	0	10	Контрольная работа Письменное домашнее задание
26.	Тема 26. Интегралы, зависящие от параметра.	3		14	0	11	Письменное домашнее задание
27.	Тема 27. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.	3		15	0	11	Письменное домашнее задание
28.	Тема 28. Элементы теории поля.	3		14	0	11	Письменное домашнее задание
29.	Тема 29. Ряды и интеграл Фурье	3		15	0	11	Контрольная работа Письменное домашнее задание
30.	Тема 30. Системы множеств	4		5	0	5	Письменное домашнее задание
31.	Тема 31. Понятие меры	4		5	0	5	Письменное домашнее задание
32.	Тема 32. Мера Лебега, мера Лебега Стильеса	4		5	0	5	Письменное домашнее задание
33.	Тема 33. Измеримые функции	4		5	0	5	Письменное домашнее задание
34.	Тема 34. Интеграл Лебега	4		8	0	8	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
35.	Тема 35. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	4		4	0	4	Письменное домашнее задание
36.	Тема 36. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	4		4	0	4	Письменное домашнее задание
37.	Тема 37. Комплексные числа и действия над ними	4		2	0	2	Письменное домашнее задание
38.	Тема 38. Функции на множестве комплексных чисел	4		2	0	2	Письменное домашнее задание
39.	Тема 39. Элементарные функции и отображения	4		2	0	2	Письменное домашнее задание
40.	Тема 40. Интегральное исчисление функций комплексного переменного	4		4	0	4	Письменное домашнее задание
41.	Тема 41. Представление аналитической функции рядами	4		4	0	4	Письменное домашнее задание
42.	Тема 42. Особые точки	4		4	0	4	Контрольная работа Письменное домашнее задание
	Тема . Итоговая форма контроля	1		0	0	0	Экзамен Зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	2		0	0	0	Экзамен Зачет

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	Экзамен Зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	Экзамен Зачет
	Итого			252	0	252	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Теория вещественных чисел

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Элементы теории множеств. Действительные числа. Свойство непрерывности. Аксиома Архимеда. Точные грани множества. Отображения, способы их задания. Обратная функция. Топология числовой прямой

#### **лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Метод математической индукции. Бином Ньютона. Операции над множествами.

### Тема 2. Числовые последовательности

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Монотонные последовательности: признак сходимости, теорема Кантора о вложенных отрезках, теоремы Больцано-Вейерштрасса, верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Монотонные последовательности: признак сходимости, теорема Кантора о вложенных отрезках, теоремы Больцано-Вейерштрасса, верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности

#### **лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Решение задач на применение критерия Коши и теоремы Вейерштрасса, вычисление пределов числовых последовательностей

### Тема 3. Предел функции в точке

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Предел функции: определения по Коши и Гейне, эквивалентность определений, различные типы пределов, пределы монотонных функций, критерий Коши существования предела функции

#### **лабораторная работа (13 часа(ов)):**

Вычисление пределов функций по определению, с помощью эквивалентностей и "замечательных" пределов

#### **Тема 4. Непрерывность функции в точке**

##### ***лекционное занятие (6 часа(ов)):***

Непрерывность функции в точке: свойства функций непрерывных в точке, непрерывность сложной функции. Основные теоремы о функциях непрерывных на отрезке. Непрерывность элементарных функций.

##### ***лабораторная работа (4 часа(ов)):***

Исследование функций на непрерывность. Построение эскизов графиков функций.

#### **Тема 5. Производная и дифференциал функции одной переменной**

##### ***лекционное занятие (8 часа(ов)):***

Производная функции одной переменной: определение, вычисление производных от элементарных функций. Критерий существования производной в точке. Правила вычисления производной: производная суммы, произведения и частного; производная обратной функции; производная сложной функции. Дифференциал функции: критерий дифференцируемости функции; свойства дифференциала. Геометрический смысл производной и дифференциала. Односторонние и бесконечные производные. Дифференцирование параметрически заданных функций.

##### ***лабораторная работа (10 часа(ов)):***

Техника дифференцирования.

#### **Тема 6. Производные и дифференциалы высших порядков**

##### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

##### ***лабораторная работа (4 часа(ов)):***

Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.

#### **Тема 7. Основные теоремы для дифференцируемых функций**

##### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Основные теоремы для дифференцируемых функций: теорема Ферма; теорема Ролля о нулях производной; теорема Лагранжа, следствия; обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).

##### ***лабораторная работа (2 часа(ов)):***

Решение задач на применение теорем Ролля, Лагранжа и Коши.

#### **Тема 8. Формула Тейлора**

##### ***лекционное занятие (6 часа(ов)):***

Формула Тейлора: с остаточным членом в форме Лагранжа; с остаточным членом в форме Пеано; теорема о единственности разложения по формуле Тейлора; разложение элементарных функций в ряд Маклорена; вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Правило Лопиталья.

##### ***лабораторная работа (7 часа(ов)):***

Разложение функций по формуле Тейлора. Вычисление пределов по правилу Лопиталья.

#### **Тема 9. Исследование функций с помощью производной**

##### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Исследование функций с помощью производной: возрастание и убывание функции, монотонность функции, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, асимптоты.

##### ***лабораторная работа (14 часа(ов)):***

Исследование функций с помощью производной.

#### **Тема 10. Неопределенный интеграл**

##### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Неопределенный интеграл: определение, теорема об общем виде первообразной, свойства определенного интеграла. Интегрирование с помощью замены переменной. Формула интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических функций.

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Техника интегрирования.

**Тема 11. Определённый интеграл Римана и его свойства**

**лекционное занятие (10 часа(ов)):**

Определённый интеграл Римана: задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, определение, необходимое условие интегрируемости функции. Интегральные суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости функции. Классы интегрируемых функций. Свойства интеграла Римана.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.

**Тема 12. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Тейлора**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Интеграл с переменным верхним пределом, свойства (непрерывность, дифференцируемость, существование первообразной непрерывной функции). Вычисление определенных интегралов: формула Ньютона - Лейбница, замена переменной, формула интегрирования по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Оценка интегралов с помощью теоремы о среднем

**Тема 13. Геометрические приложения интеграла Римана**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Площадь криволинейной трапеции в декартовой и полярной системах координат. Длина дуги плоской и пространственной кривой. Объем и площадь поверхности тела вращения.

**лабораторная работа (10 часа(ов)):**

Вычисление площадей, длин дуг, объёмов, площадей поверхностей вращения с помощью интеграла Римана.

**Тема 14. Несобственный интеграл**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Определение. Сходимость. Критерий Коши. Арифметические свойства. Признаки сравнения. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Интеграл с несколькими особенностями. Интеграл в смысле главного значения.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Вычисление несобственных интегралов. Исследование интегралов на сходимость, на абсолютную и условную сходимость.

**Тема 15. Числовые ряды**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Числовые ряды: необходимое условие сходимости числового ряда, свойства сходящихся числовых рядов, критерий Коши сходимости числового ряда.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Числовые ряды: необходимое условие сходимости числового ряда, свойства сходящихся числовых рядов, критерий Коши сходимости числового ряда.

**Тема 16. Сходимость знакопостоянных рядов**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Ряды с неотрицательными членами: критерий сходимости числового ряда с неотрицательными членами; теорема сравнения. Признаки сходимости числового ряда с неотрицательными членами: интегральный признак, признак Даламбера, радикальный признак Коши, следствие.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Исследование сходимости числовых рядов со знакопостоянными членами.

**Тема 17. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды: определение, свойства сходящихся рядов. Знакопередающиеся ряды, теорема Лейбница. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов. Теорема Римана, иллюстрирующий пример.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Исследование числовых рядов на абсолютную и условную сходимость.

**Тема 18. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Сходимость функциональных последовательностей и рядов. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Нахождение области сходимости функциональных рядов. Исследование функциональных рядов и последовательностей на равномерную сходимость.

**Тема 19. Степенные ряды**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Свойства степенных рядов.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Нахождение радиуса и интервала сходимости степенных рядов. Разложение функции в степенные ряды.

**Тема 20. Евклидово пространство**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Понятие  $n$ -мерного евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость последовательностей в  $n$ -мерном пространстве. Открытые и замкнутые множества.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Проверка аксиом нормы, вычисление пределов векторных последовательностей.

**Тема 21. Отображения в евклидовых пространствах**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Предел и непрерывность функций, заданных в  $D$ : пределы функции в точке, по множеству, по направлению, повторные пределы; непрерывность функции в точке, непрерывность сложной функции. Свойства непрерывных функций на компакте: теорема Вейерштрасса, теорема Кантора, теорема Больцано-Коши.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вычисление пределов отображений. Исследование отображений на непрерывность.

**Тема 22. Дифференцируемость отображения. Частные производные.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Частные производные и дифференцируемость функций в  $D$ : определение частной производной в  $D$ ; необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции в точке; дифференцируемость сложной функции; первый дифференциал, его свойства; формула конечных приращений. Касательная плоскость, вектор нормали к графику функции; производная по направлению, градиент. Производные и дифференциалы высших порядков, теорема Шварца. Инвариантность дифференциалов высших порядков относительно замены переменных. Формула Тейлора.

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Вычисление производных и дифференциалов функций.

**Тема 23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о смешанных производных. формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано для функций многих переменных.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вычисление частных производных и дифференциалов высших порядков. Замена переменных в выражениях, содержащих обыкновенные и частные производные.

**Тема 24. Локальный экстремум функции многих переменных**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие существования экстремума в точке; необходимое условие существования локального минимума (локального максимума) в точке; достаточное условие существования экстремума в точке.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Исследование функций на локальный экстремум.

**Тема 25. Экстремум, условный экстремум функции многих переменных.**

**лекционное занятие (14 часа(ов)):**

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано для функций многих переменных. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Понятие условного экстремумам функции. Метод Лагранжа нахождения условного экстремума.

**лабораторная работа (10 часа(ов)):**

Решение задач на нахождение локального экстремума функции. Решение задач на нахождение условного экстремума функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции в области.

**Тема 26. Интегралы, зависящие от параметра.**

**лекционное занятие (14 часа(ов)):**

Понятие собственного интеграла, зависящего от параметра. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость по параметру собственного интеграла. Формула Лейбница. Понятие несобственного интеграла, зависящего от параметра. Равномерная сходимости несобственного интеграла по параметру. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость несобственного интеграла по параметру. Вычисление интегралов Дирихле и Эйлера-Пуассона. Эйлера-Пуассона. Эйлера-Пуассона. Эйлера-Пуассона. Эйлера-Пуассона.

**лабораторная работа (11 часа(ов)):**

Решение задач на нахождение области сходимости интегралов и исследование на равномерную сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Вычисление интегралов путём дифференцирования и интегрирование по параметру. Вычисление интегралов с помощью интегралов Дирихле, Эйлера-Пуассона и бета- и гамма-функций Эйлера.

**Тема 27. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.**

**лекционное занятие (15 часа(ов)):**

Мера Жордана в  $n$ -мерном пространстве и её свойства. Определение и свойства кратного интеграла Римана. Криволинейные интегралы первого и второго родов и их свойства. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Поверхностные интегралы первого и второго родов и их свойства. Вычисление кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Вычисление площадей и объёмов с помощью двойных и тройных интегралов.

**лабораторная работа (11 часа(ов)):**

Вычисление кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Вычисление площадей и объёмов с помощью двойных и тройных интегралов.

**Тема 28. Элементы теории поля.**

**лекционное занятие (14 часа(ов)):**

Градиент. Дивергенция и вихрь векторного поля. Поток вектора через поверхность. Циркуляция вектора. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Соленоидальные и потенциальные векторные поля.

**лабораторная работа (11 часа(ов)):**

Решение задач на нахождение основных объектов теории поля.

**Тема 29. Ряды и интеграл Фурье**

**лекционное занятие (15 часа(ов)):**

Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке. Понятие интеграла Фурье. Представление функции в виде интеграла Фурье. Понятие преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье.

**лабораторная работа (11 часа(ов)):**

Решение задач на разложение функций в тригонометрический ряд Фурье и представление функций интегралом Фурье.

**Тема 30. Системы множеств**

**лекционное занятие (5 часа(ов)):**

Кольца и алгебры. Операции в кольце множеств. Полукольца и полуалгебры. Свойства полуколец.

**лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.

**Тема 31. Понятие меры**

**лекционное занятие (5 часа(ов)):**

Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.

**лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Основные свойства меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.

**Тема 32. Мера Лебега, мера Лебега Стильеса**

**лекционное занятие (5 часа(ов)):**

Внешняя мера. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега. Сигма-алгебра измеримых множеств.

**лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой.

**Тема 33. Измеримые функции**

**лекционное занятие (5 часа(ов)):**

Определения и базовые свойства измеримых функций. Простые функции и критерий измеримости. Теорема Егорова.

**лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Сходимость почти всюду. Сходимость почти равномерная (по Егорову). Сходимость по мере.

**Тема 34. Интеграл Лебега**

**лекционное занятие (8 часа(ов)):**

Теоремы Лебега, Б. Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла.

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Интеграл Лебега на прямой. Сравнение с собственным и несобственным интегралом Римана. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства Лебега.

**Тема 35. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Определения и примеры пространств. Сходящиеся последовательности, открытые и замкнутые множества. Сепарабельные пространства. Полные пространства.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Пространство линейных ограниченных операторов.

### **Тема 36. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортогональное разложение пространства. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора.

### **Тема 37. Комплексные числа и действия над ними**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Различные подходы к определению комплексных чисел, арифметические операции над комплексными числами

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

алгебраическая форма записи комплексных чисел, модуль, аргумент, тригонометрическая и показательная формы, арифметические операции над комплексными числами, корень из комплексного числа.

### **Тема 38. Функции на множестве комплексных чисел**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Комплексные последовательности, предел и непрерывность функций на множестве комплексных чисел, два вида дифференцируемости, условия Коши-Римана

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

предел, непрерывность и дифференцируемость функций КП, проверка условий Коши-Римана, восстановление аналитической функции.

### **Тема 39. Элементарные функции и отображения**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Элементарные функции: степенная, корень, показательная, логарифмическая, тригонометрические. Определения и свойства.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Вычисление значений элементарных функций, отображения, осуществляемые функциями.

### **Тема 40. Интегральное исчисление функций комплексного переменного**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Интеграл от функции комплексного переменного: определения, свойства. Теорема Коши для многосвязной и односвязной области. Аналитичность функции  $F(z)$ . Общий вид первообразной. Интегральная формула Коши. Принцип максимума модуля, лемма Шварца. Производные высших порядков. Неравенства Коши. Теоремы Мореры и Лиувилля.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Интегральное исчисление функций комплексного переменного. Вычисление интегралов от функций КП, первообразная, вычисление интегралов с использованием интегральной формулы Коши. Контрольная работа.

### **Тема 41. Представление аналитической функции рядами**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Представление аналитической функции в круге рядом Тейлора. Теорема Вейерштрасса. Теорема единственности аналитической функции. Нули аналитической функции и их свойства. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в кольцо функции в ряд Лорана.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Основные разложения. Нахождение порядка нулей аналитических функций с помощью разложения в ряд. Разложение функций в ряд Лорана.

### **Тема 42. Особые точки**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Виды особых точек и их характеристика. Теорема Сохоцкого. Вычеты. Связь вычетов с коэффициентами ряда Лорана. Теорема Коши о вычетах и ее приложения.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Особые точки

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Теория вещественных чисел	1		выполнение домашнего задания	10	письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Числовые последовательности	1		выполнение домашнего задания	14	письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Предел функции в точке	1		выполнение домашнего задания	14	письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Непрерывность функции в точке	1		выполнение домашнего задания выполнение домашнего задания	12	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	4	контрольная работа
5.	Тема 5. Производная и дифференциал функции одной переменной	1		выполнение домашнего задания выполнение домашнего задания	16	письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Производные и дифференциалы высших порядков	1		выполнение домашнего задания	14	письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Основные теоремы для дифференцируемых функций	1		выполнение домашнего задания	10	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
8.	Тема 8. Формула Тейлора	1		выполнение домашнего задания выполнение домашнего задания выполнение домашнего задания	14	письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
9.	Тема 9. Исследование функций с помощью производной	1		выполнение домашнего задания	16	письменное домашнее задание
				выполнение домашнего задания		
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
10.	Тема 10. Неопределенный интеграл	1		выполнение домашнего задания	16	письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Определённый интеграл Римана и его свойства	2		подготовка домашнего задания	7	письменное домашнее задание
12.	Тема 12. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Тейлора	2		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
13.	Тема 13. Геометрические приложения интеграла Римана	2		подготовка домашнего задания	5	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
14.	Тема 14. Несобственный интеграл	2		подготовка домашнего задания	6	письменное домашнее задание
15.	Тема 15. Числовые ряды	2		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
16.	Тема 16. Сходимость знакопостоянных рядов	2		подготовка домашнего задания	5	письменное домашнее задание
17.	Тема 17. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды	2		подготовка домашнего задания	5	письменное домашнее задание
18.	Тема 18. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.	2		подготовка домашнего задания	6	письменное домашнее задание
19.	Тема 19. Степенные ряды	2		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	1	контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
20.	Тема 20. Евклидово пространство	2		подготовка домашнего задания	3	письменное домашнее задание
21.	Тема 21. Отображения в евклидовых пространствах	2		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
22.	Тема 22. Дифференцируемость отображения. Частные производные.	2		подготовка домашнего задания	7	письменное домашнее задание
23.	Тема 23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.	2		подготовка домашнего задания	5	письменное домашнее задание
24.	Тема 24. Локальный экстремум функции многих переменных	2		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
25.	Тема 25. Экстремум, условный экстремум функции многих переменных.	3		подготовка домашнего задания	8	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
26.	Тема 26. Интегралы, зависящие от параметра.	3		подготовка домашнего задания	11	письменное домашнее задание
27.	Тема 27. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.	3		подготовка домашнего задания	11	письменное домашнее задание
28.	Тема 28. Элементы теории поля.	3		подготовка домашнего задания	11	письменное домашнее задание
29.	Тема 29. Ряды и интеграл Фурье	3		подготовка домашнего задания	8	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	3	контрольная работа
30.	Тема 30. Системы множеств	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
31.	Тема 31. Понятие меры	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
32.	Тема 32. Мера Лебега, мера Лебега Стилтьеса	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
33.	Тема 33. Измеримые функции	4		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
34.	Тема 34. Интеграл Лебега	4		подготовка домашнего задания	3	письменное домашнее задание
35.	Тема 35. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	4		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
36.	Тема 36. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	4		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
37.	Тема 37. Комплексные числа и действия над ними	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
38.	Тема 38. Функции на множестве комплексных чисел	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
39.	Тема 39. Элементарные функции и отображения	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
40.	Тема 40. Интегральное исчисление функций комплексного переменного	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
41.	Тема 41. Представление аналитической функции рядами	4		подготовка домашнего задания	1	письменное домашнее задание
42.	Тема 42. Особые точки	4		подготовка домашнего задания	0,5	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	0,5	контрольная работа
	Итого				289	

## **5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Теория вещественных чисел**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач методом математической индукции. Доказательство свойств точных граней числовых множеств.

### **Тема 2. Числовые последовательности**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление пределов числовых последовательностей. Решение задач на теорему Вейерштрасса, критерий Коши.

### **Тема 3. Предел функции в точке**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление пределов основных элементарных функций.

### **Тема 4. Непрерывность функции в точке**

контрольная работа , примерные вопросы:

1-2. Найти предел последовательности 3. Найти предел рациональной функции в точке 4. Найти предел тригонометрической функции в точке 5-6. Найти пределы трансцендентных функций в точке

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач на исследование функций на непрерывность. Нахождение точек разрыва функций, исследование характера этих точек.

### **Тема 5. Производная и дифференциал функции одной переменной**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач на понятие производной и дифференциала. Техника дифференцирования. Производная обратной функции. Производная функций, заданных параметрически неявно.

### **Тема 6. Производные и дифференциалы высших порядков**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление производных и дифференциалов высших порядков. Формула Лейбница.

### **Тема 7. Основные теоремы для дифференцируемых функций**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Найти производную функции в точке 2. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя 3. Вычислить предел функции, используя формулу Тейлора 4. Исследовать функцию и построить график

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач на применение теорем Ролля, Лагранжа и Коши.

### **Тема 8. Формула Тейлора**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Разложение функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для вычисления пределов.

### **Тема 9. Исследование функций с помощью производной**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Найти производную функции в точке 2. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя 3. Вычислить предел функции, используя формулу Тейлора 4. Исследовать функцию и построить график

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование функций на возрастание и убывание. Нахождение точек перегиба. Экстремумы функций. Построение графиков функций по характерным точкам.

### **Тема 10. Неопределенный интеграл**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Техника интегрирования.

### **Тема 11. Определённый интеграл Римана и его свойства**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление интеграла по определению

### **Тема 12. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Тейлора**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление определённых интегралов Римана.

### **Тема 13. Геометрические приложения интеграла Римана**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Вычисление площади плоской фигуры 2. Вычисление длины дуги плоской или пространственной кривой 3. Вычисление площади поверхности тела вращения 4. Вычисление объема тела вращения 5. Вычисление объема тела при известном поперечном сечении 1. Вычислить неопределенный интеграл, используя замену переменной 2. Вычислить неопределенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям 3. Вычислить неопределенный интеграл, используя различные приемы интегрирования. 4. Найти площадь плоской фигуры 5. Найти длину дуги 6. Найти объем тела вращения

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление площадей, длин дуг, объёмов, площадей поверхностей вращения с помощью определённых интегралов.

### **Тема 14. Несобственный интеграл**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление несобственных интегралов. Исследование несобственных интегралов на сходимость, абсолютную и условную сходимость.

### **Тема 15. Числовые ряды**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Необходимое условие сходимости числового ряда, свойства сходящихся числовых рядов, критерий Коши сходимости числового ряда.

### **Тема 16. Сходимость знакопостоянных рядов**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование сходимости числовых рядов со знакопостоянными членами.

### **Тема 17. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование числовых рядов на абсолютную и условную сходимость.

### **Тема 18. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Нахождение области сходимости функциональных рядов. Исследование функциональных рядов и последовательностей на равномерную сходимость.

### **Тема 19. Степенные ряды**

контрольная точка , примерные вопросы:

1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл 2. Исследовать на сходимость знакопостоянный числовой ряд 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимости числовой ряд 4. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд 5. Найти область сходимости степенного ряда. 6. Разложить функцию в степенной ряд

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Нахождение радиуса и интервала сходимости степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды.

### **Тема 20. Евклидово пространство**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Понятие n-мерного евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость последовательностей в n-мерном пространстве. Открытые и замкнутые множества.

### **Тема 21. Отображения в евклидовых пространствах**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление пределов отображений. Исследование отображений на непрерывность.

### **Тема 22. Дифференцируемость отображения. Частные производные.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление частных производных и дифференциалов функций.

### **Тема 23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление частных производных и дифференциалов функций высших порядков. Замена переменных в выражениях, содержащих обыкновенные производные, в выражениях, содержащих частные производные.

### **Тема 24. Локальный экстремум функции многих переменных**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Вычислить частные производные, проверив равенство 2. Найти дифференциал первого и второго порядка неявной функции 3. Преобразовать выражение, сделав замену переменных 4. Исследовать на экстремум функцию многих переменных

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование функций на локальный экстремум.

### **Тема 25. Экстремум, условный экстремум функции многих переменных.**

контрольная работа , примерные вопросы:

Исследование функций на локальный экстремум. Исследование функций на условный экстремум. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции в области.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано для функций многих переменных. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Понятие условного экстремума функции. Метод Лагранжа нахождения условного экстремума.

### **Тема 26. Интегралы, зависящие от параметра.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Теоремы о непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости собственного интеграла, зависящего от параметра и их обобщения. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости, собственном и несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интеграл Дирихле. Бета- и гамма-функции Эйлера и их свойства. График гамма-функции.

### **Тема 27. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Внутренние и внешние меры Жордана и их свойства. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства меры Жордана. Свойства множеств, измеримых по Жордану. Приведение измеримых множеств. Теорема об измеримости правильного множества. Теорема о графике. Интегральные суммы Дарбу. Теорема Дарбу-Римана. Свойства кратного интеграла Римана. Первая и вторая теоремы Фубини. Замена переменных в кратном интеграле. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат. Кривые в  $n$ -мерном пространстве. Гладкие кривые. Ориентация кривой. Для на кривой. Касательный вектор. Параметризация с помощью длины дуги кривой. Криволинейные интегралы первого и второго родов и их свойства. Физический смысл криволинейных интегралов первого и второго родов.. Формула Грина. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Гладкая поверхность. Касательная плоскость и нормаль. Ориентация поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго родов и их свойства.

### **Тема 28. Элементы теории поля.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Градиент. Дивергенция и вихрь векторного поля. Поток вектора через поверхность. Циркуляция вектора. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Соленоидальные и потенциальные векторные поля.

### **Тема 29. Ряды и интеграл Фурье**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Поменять порядок интегрирования в двойном интеграле 2. Вычислить работу поля вдоль кривой 3. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода 4. Найти поток поля через заданную поверхность 5. Разложить в ряд Фурье функцию

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке. Комплексная запись тригонометрического ряда Фурье. Интеграл Фурье. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке. Комплексная запись тригонометрического ряда Фурье. Интеграл Фурье. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье.

### **Тема 30. Системы множеств**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование систем множеств для выявления свойств структур полукольца, кольца и алгебры

### **Тема 31. Понятие меры**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

выполнение упражнений на понятие меры на полукольце и кольце

### **Тема 32. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление меры Лебега и меры Лебега-Стилтьеса указанных множеств

### **Тема 33. Измеримые функции**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
проверка свойств измеримых функций; виды сходимости

### **Тема 34. Интеграл Лебега**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
Вычисление интеграла Лебега указанных функций

### **Тема 35. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
Упражнения на свойства нормы, проверка линейности операторов и функционалов

### **Тема 36. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
отыскание сопряженного оператора в гильбертовом пространстве, проверка самосопряженности оператора

### **Тема 37. Комплексные числа и действия над ними**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
операции над комплексными числами в различной форме

### **Тема 38. Функции на множестве комплексных чисел**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
вычисление значений комплексных функций

### **Тема 39. Элементарные функции и отображения**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
построение функций, осуществляющих отображение между заданными множествами

### **Тема 40. Интегральное исчисление функций комплексного переменного**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
Вычисление интегралов от комплексных функций различными способами

### **Тема 41. Представление аналитической функции рядами**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
Разложение аналитической функции в ряд Тейлора и ряд Лорана

### **Тема 42. Особые точки**

контрольная работа , примерные вопросы:  
1. Вычислить интеграл Лебега. 2. Проверка линейности операторов и функционалов. 3. Вычисление комплекснозначного выражения. 4. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора и ряд Лорана. 5. Выявление особых точек функции и их характера.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:  
Выявление особых точек и их характера

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

Примерные вопросы к экзамену:

1 семестр

Множества. Операции над множествами. Функция. Образ и прообраз множества при отображении. Биекция. Равномощные множества. Счетные множества и их свойства. График числовой функции. Функции, заданные неявно. Обратная функция. Монотонная функция и обратная к ней. Операции над числовыми функциями.

Аксиоматическое определение действительных чисел. Точная верхняя и точная нижняя грани числового множества. Характеристическое свойство точной верхней грани. Топология числовой прямой (окрестности, проколотые окрестности, открытые и замкнутые множества, предельные и изолированные точки множества). Теорема Вейерштрасса. Расширенная числовая прямая.

Предел числовой последовательности. Подпоследовательность. Свойство подпоследовательностей сходящейся последовательности. Элементарные свойства предела последовательности (единственность, свойство "зажатой" последовательности, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические свойства). Сходимость монотонных ограниченных последовательностей. Лемма о вложенных отрезках. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности. Число  $e$ . Фундаментальные последовательности и критерий Коши. Теорема Кантора о несчетности множества действительных чисел. Пределы в расширенной числовой прямой.

Предел функции в точке. Эквивалентность определений. Свойства предела: единственность, свойство "зажатой" функции, ограниченность функции в окрестности точки существования предела, арифметические свойства, критерий Коши существования предела функции в точке, свойство сохранения знака. Первый и второй замечательные пределы. Асимптотические равенства. Эквивалентные функции и их свойства. Основные эквивалентности.

Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных в точке функций: ограниченность в окрестности точки непрерывности, сохранение знака, арифметические свойства, непрерывность суперпозиции. Точки разрыва. Свойства непрерывной на отрезке функции: ограниченность, достижение точных граней, обращение функции в нуль, свойство промежуточных значений. Равномерная непрерывность. Лемма о подпоследовательности. Непрерывность обратной функции.

## II. Дифференцирование.

Касательная к кривой. Дифференцируемость функции в точке. Определение производной функции в точке. Касательное отображение. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Однозначная определенность производной. Арифметические свойства операции дифференцирования. Дифференцирование суперпозиции функций. Дифференцирование обратной функции. Таблица производных элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ролля и Коши, формула Лагранжа. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Локальная формула Тейлора. Единственность представления функции локальной формулой Тейлора. Формулы Тейлора для основных элементарных функций. Возрастание и убывание функций на отрезке. Необходимое условия локального экстремума. Достаточные условия локального экстремума (2 условия). Выпуклость кривой в точке. Точки перегиба. Асимптоты.

## 2 семестр

Задача, приводящие к понятию интеграла Римана. Определения интеграла Римана (на языке последовательностей, на языке " $\square$  -  $\square$ "). Необходимое условие интегрируемости функции. Множества лебеговой меры нуль и их свойства. Теорема Лебега (формулировка). Интегрируемость монотонной функции. Свойства интеграла Римана: линейность, интегрируемость произведения и модуля. Свойство аддитивности интеграла Римана относительно области интегрирования. Свойства интеграла, связанные с неравенствами. Теорема о среднем. Свойство непрерывности интеграла как функции своего верхнего предела. Теорема о существовании первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Формула интегрирования по частям и замена переменной в интеграле Римана. Верхний и нижний интегралы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу интегрируемости функций. Интегрируемость непрерывной функции. Геометрические приложения интеграла Римана.

Несобственные интегралы: определение, свойства, критерий Коши, формула Ньютона-Лейбница. Интегралы от неотрицательных функций: признаки сравнения. Абсолютно сходящиеся интегралы. Признаки Дирихле и Абеля.

Евклидовы пространства (основные понятия). Топология евклидова пространства. Компактные множества в евклидовых пространствах. Критерий компактности, теорема Вейерштрасса. Векторные последовательности. Характеризация замкнутых множеств и предельных точек в терминах последовательностей. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Предел отображения в точке, равносильность определений, свойства. Непрерывные отображения. Свойства непрерывных функций на компактных множествах: ограниченность и равномерная непрерывность, достижение точных граней, достижение промежуточных значений.

Числовые ряды: определение, арифметические свойства, критерий Коши, необходимое условие сходимости. Ряд Лейбница. Признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, признак Раабе. Абсолютно сходящиеся ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Связь несобственных интегралов с рядами. Интегральный признак сходимости ряда.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей, критерий равномерной сходимости, непрерывность предельной функции. Равномерная сходимость функциональных рядов: критерий Коши, признак Вейерштрасса, признаки Дирихле и Абеля. Операции над функциональными рядами. Степенные ряды: первая теорема Абеля, формулы для нахождения радиуса сходимости. Вторая теорема Абеля. Дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора.

Линейные отображения в евклидовых пространствах и их представление матрицей. Обратимые линейные отображения. Норма линейного отображения и ее свойства. Касательное отображение и его свойства: однозначность, непрерывность дифференцируемого отображения, дифференцируемость сложной функции. Частные производные. Матрица Якоби, формула полной производной. Арифметические свойства функций многих переменных. Условия дифференцируемости отображений. Касательная плоскость. Непрерывно дифференцируемые отображения. Непрерывные вектор-функции. Интеграл от непрерывной вектор-функции. Необходимое условие локального экстремума. Оценочная формула Лагранжа. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости частных производных от порядка дифференцирования. Достаточные условия локального экстремума.

### 3 семестр

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано для функций многих переменных. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Понятие условного экстремумам функции. Метод Лагранжа нахождения условного экстремума.

Теоремы о непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости собственного интеграла, зависящего от параметра и их обобщения. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости, собственном и несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интеграл Дирихле. Бета- и гамма-функции Эйлера и их свойства. График гамма-функции.

Внутренние и внешние меры Жордана и их свойства. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства меры Жордана. Свойства множеств, измеримых по Жордану. Приведение измеримых множеств. Теорема об измеримости правильного множества. Теорема о графике. Интегральные суммы Дарбу. Теорема Дарбу-Римана. Свойства кратного интеграла Римана. Первая и вторая теоремы Фубини. Замена переменных в кратном интеграле. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат. Кривые в  $n$ -мерном пространстве. Гладкие кривые. Ориентация кривой. Дл на кривой. Касательный вектор. Параметризация с помощью длины дуги кривой. Криволинейные интегралы первого и второго родов и их свойства. Физический смысл криволинейных интегралов первого и второго родов.. Формула Грина. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Гладкая поверхность. Касательная плоскость и нормаль. Ориентация поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго родов и их свойства.

Градиент. Дивергенция и вихрь векторного поля. Поток вектора через поверхность. Циркуляция вектора. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Соленоидальные и потенциальные векторные поля.

Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке. Комплексная запись тригонометрического ряда Фурье. Интеграл Фурье.

Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье.

4 семестр

Вопросы к экзамену.

Часть 1. Теория меры и интеграл Лебега.

1. Определение кольца и полукольца множеств, перечисление их свойств.
2. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.
3. Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Перечисление основных свойств меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.
6. Определение внешней меры и измеримого множества.
7. Алгебра измеримых множеств.
8. Определения и базовые свойства измеримых функций.
9. Критерий измеримости функции через предел простых функций.
10. Эквивалентные функции, измеримость.
11. Сходимость почти всюду, измеримость предела.
12. Сходимость почти всюду, "почти равномерная" (по Егорову) и по мере. Связь между ними.
13. Определение интеграла Лебега от простой функции.
14. Общее определение интеграла Лебега и его корректность.
15. Перечисление основных свойств интеграла: линейность, интегрирование неравенств, интегрируемость ограниченной и мажорируемой функции.
16. 1-ая теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега (прямое утверждение).
17. Формулировка 2-ой теоремы о счетной аддитивности интеграла Лебега (обратное утверждение).
18. Формулировка результата об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
19. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
20. Формулировка теорем Б. Леви и Фату.

Часть 2.

1. Определения и примеры нормированных пространств.
2. Последовательности в нормированном пространстве, открытые и замкнутые множества. Сепарабельные и полные пространства (пространства Банаха).

3. Теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах.
4. Линеалы и подпространства нормированного пространства.
5. Скалярное произведение. Примеры евклидовых пространств. Сходимость, ограниченность. Гильбертовы пространства.
6. Ортогональное разложение гильбертова пространства.
7. Ортогональные системы и ряды Фурье.
8. Линейные операторы в нормированных пространствах; непрерывность и ограниченность
9. Пространство линейных непрерывных операторов; определение, полнота.
10. Обратный оператор. Лемма о существовании обратного линейного оператора к линейному оператору.
11. Обратный оператор. Две теоремы об ограниченности обратного оператора.
12. Линейные непрерывные функционалы, сопряженное пространство.
13. Теорема Хана-Банаха (формулировка) и следствия.
14. Теорема Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.
15. Второе сопряженное пространство.
16. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

Определение комплексных чисел и действия с ними. Комплексные последовательности. Функции на множестве комплексных чисел. Кривые и области. Два вида дифференцируемости, условия Коши-Римана. Элементарные функции: степенная, корень  $n$ -ой степени, показательная, логарифмическая, тригонометрические. Интеграл от функции комплексного переменного: определения, свойства. Теорема Коши (для односвязной и многосвязной областей). Аналитичность функции  $F(z)$ . Общий вид первообразной. Интегральная формула Коши. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Производные высших порядков. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры. Представление аналитической в круге функции рядом Тейлора. Теорема Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема единственности аналитической функции. Нули аналитической функции и их свойства. Область сходимости билотерного ряда. Разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Виды особых точек и их характеристики. Теорема Сохоцкого. Вычет относительно изолированной особой точки, правила вычисления вычетов, логарифмический вычет, приложение теории вычетов.

### 7.1. Основная литература:

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - М.: Физматлит, 2010. - 496 с. - URL: [https://e.lanbook.com/book/2226#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2226#book_name)
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2010. - 336 с. ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/48167#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/48167#book_name)
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - СПб.: Лань, 2009. - 432с ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/322#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/322#book_name)
4. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М.: Бинوم, 2015. - 365 с. ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/70732#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/70732#book_name)

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / А. Н. Шерстнев. - Изд. 5-е. - Казань : Казанский государственный университет, 2009. - URL: [http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf)
2. Сидоров А.М. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. [Электронный ресурс] : Учебные пособия. - Казань: КФУ, 2015. - 104 с. - URL: [https://e.lanbook.com/book/72824#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/72824#book_name)
3. Турилова Е.А. Элементы теории функций комплексного переменного. - Казань, 2009. URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/09-IVMIT/09\\_66\\_2009\\_000115.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/09-IVMIT/09_66_2009_000115.pdf)
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. - СПб.: Лань, 2015. - 448 с. ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/65055#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/65055#book_name)
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 2. - СПб.: Лань, 2008. - 464 с. ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/411#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/411#book_name)
6. Злобина С.В., Посицельская Л.Н. Математический анализ в задачах и упражнениях. - М.: Физматлит, 2009. - 360 с. ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/2377#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2377#book_name)
7. Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. - М.: МЦНМО, 2008. - 136 с. ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/9343#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/9343#book_name)

## 7.3. Интернет-ресурсы:

Википедия - <http://ru.wikipedia.org>

Интернет-ресурсы по математике - <http://exponenta.ru>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Портал ресурсов по математике, алгоритмике и ИТ - <http://algolist.manual.ru/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Математический анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Лекции по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Лапин А.В. \_\_\_\_\_

Сидоров А.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Гумеров Р.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.