

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Д.А. Таюрский

» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Основы численных методов линейной алгебры Б1.В.ОД.5

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Глазырина Л.Л.

**Рецензент(ы):**

Карчевский М.М.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 937818

Казань  
2018

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Глазырина Л.Л. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики, Ludmila.Glazyrina@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Данный курс посвящен вопросам построения методов решения систем линейных алгебраических систем уравнений.

Рассматриваются прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений, возникающих в различных областях науки и инженерных приложениях.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.5 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 2 курсе, 3, 4 семестры.

Для освоения дисциплины "Основы численных методов линейной алгебры" необходимо знать такие дисциплины как "Математический анализ", "Алгебра", уметь программировать, понимать алгоритмы сложных программ. Этот курс необходим при изучении таких дисциплин как "Численные методы", "Методы конечных элементов", "Методы решения больших разреженных систем линейных уравнений", а так же дисциплин связанных с решением линейных алгебраических систем уравнений.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-11 (профессиональные компетенции)	Готовность применять знания и навыки управления информацией
ПК-12 (профессиональные компетенции)	Способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальной математики
ПК-9 (профессиональные компетенции)	Способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные понятия, приемы и методы вычислительной математики

2. должен уметь:

- применять численные методы для решения систем линейных уравнений
- применять численные методы для решения проблемы собственных значений
- применять численные методы для решения нелинейных уравнений
- применять численные методы для решения систем нелинейных уравнений

3. должен владеть:

математическим аппаратом решения задач вычислительной математики

4. должен демонстрировать способность и готовность:  
применять полученные знания в своей профессиональной деятельности.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных(ые) единиц(ы) 216 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 3 семестре; экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Основы программирования в MatLab. Оболочка MatLab.	3	1-2	0	0	4	Письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Числовые данные в MatLab.	3	3-4	0	0	4	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Матрицы в MatLab и операции над ними	3	5-6	0	0	4	Письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Основы программирования в MatLab	3	7-9	0	0	6	Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Источники СЛАУ большой размерности. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	3	10-12	0	0	6	Отчет

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
6.	Тема 6. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод коллокации.	3	12-14	0	0	6	Отчет
7.	Тема 7. Источники СЛАУ большой размерности. Численное решение интегральных уравнений.	3	15-17	0	0	6	Контрольная работа Отчет
8.	Тема 8. Решение линейных алгебраических систем. Прямые методы. Решение СЛАУ с треугольными матрицами.	3		0	0	4	Отчет
9.	Тема 9. Метод исключения Гаусса	3		0	0	6	Отчет
10.	Тема 10. Метод факторизации	3		0	0	4	Отчет
11.	Тема 11. Компактные схемы факторизации.	3		0	0	4	Отчет
12.	Тема 12. QR разложение матрицы.	3		0	0	4	Отчет
13.	Тема 13. Решение систем линейных алгебраических уравнений с ленточными матрицами.	3		0	0	4	Отчет
14.	Тема 14. Разреженные системы линейных алгебраических уравнений	3		0	0	4	Отчет
15.	Тема 15. Чувствительность систем линейных алгебраических уравнений к ошибкам данных.	3		0	0	6	Контрольная работа

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
16.	Тема 16. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	4		0	0	4	
17.	Тема 17. Простейшие итерационные методы	4		0	0	4	
18.	Тема 18. Метод Зейделя. Метод релаксации.	4		0	0	4	
19.	Тема 19. Выбор параметров итерационных методов	4		0	0	4	
20.	Тема 20. Методы вариационного типа.	4		0	0	6	
21.	Тема 21. Вычисление собственных чисел и векторов матриц	4		0	0	6	
22.	Тема 22. Решение нелинейных уравнений. Нули скалярных функций.	4		0	0	4	
23.	Тема 23. Решение систем нелинейных уравнений.	4		0	0	4	
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	Зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	Экзамен
	Итого			0	0	108	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Основы программирования в MatLab. Оболочка MatLab.

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Обзор пунктов меню MatLab. Командное окно и рабочее пространство. Help-система. Настраиваемые параметры оболочки (preferences). Редактор текстов. Написание и исполнение простой программы.

### Тема 2. Числовые данные в MatLab.

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Числовые данные. О стандарте IEC/IEEE арифметики (плавающая система, плавающая арифметика, округления). Специальные числа (realmax, realmin, eps, inf, NaN, pi, i, j).

### Тема 3. Матрицы в MatLab и операции над ними

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Создание векторов, матриц, способ хранения матриц в MatLab. Векторная адресация. Арифметические операции над матрицами. Логические операции и отношения. Операции над массивами (size, min, max, sum, prod, tril, trilu, ?). Преобразование матриц (rot90, fliplr, flipud,...). Специальные и тестовые матрицы (hilb, gallery). Строковые переменные и операции над ними (num2str, ?)

#### **Тема 4. Основы программирования в MatLab**

##### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

m-файлы. Операторы if, for, while, ? Скрипты и функции. Векторизованные функции. Структура проекта и обмен данными между функциями. Сохранение данных в бинарных и текстовых файлах (save, load, fprintf). Двумерная графика (plot). Экспорт графики. Элементарные математические функции (векторизованные, abs, sin, log, ?). p-Нормы векторов и их вычисление.

#### **Тема 5. Источники СЛАУ большой размерности. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

##### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Нахождение решения линейного дифференциального уравнения с краевыми условиями общего вида. Метод конечных разностей. Понятие о разностных отношениях. Применение их для краевой задачи. Реализация метода конечных разностей для краевой задачи. Сборка матрицы и правой части для системы линейных алгебраических уравнений.

#### **Тема 6. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод коллокации.**

##### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Основная идея метода коллокации. Применения метода для краевой задачи. Реализация метода коллокации для краевой задачи. Сборка матрицы и правой части для системы линейных алгебраических уравнений. Программная реализация. (Решение системы стандартными методами Matlab). Сравнение метода конечных разностей и метода коллокации по времени и по погрешности.

#### **Тема 7. Источники СЛАУ большой размерности. Численное решение интегральных уравнений.**

##### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Задача численного интегрирования. Квадратурные формулы прямоугольников. Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Программная реализация метода квадратур на основе составных формул прямоугольников для решения интегральных уравнений Фредгольма при произвольно заданном ядре.

#### **Тема 8. Решение линейных алгебраических систем. Прямые методы. Решение СЛАУ с треугольными матрицами.**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Расчетные формулы. Трудоемкость. Программирование в MatLab строчно и столбцово ориентированных алгоритмов решения систем  $Lx=b$  и  $Ux=b$  в виде m-функций. Понятие о тестовой СЛАУ. Решение тестовых систем из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ( $x=L\backslash b$ ,  $x=U\backslash b$ ).

#### **Тема 9. Метод исключения Гаусса**

##### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Матрицы с диагональным доминированием по строкам и/или столбцам. Положительно определенные матрицы. Матричная формулировка метода исключения Гаусса. Метод исключения Гаусса с выбором ведущего элемента. Программирование в MatLab с выбором ведущего элемента по столбцу. Вычисление определителя; Решение тестовых задач, сравнение с соответствующими функциями MatLab.

#### **Тема 10. Метод факторизации**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**



Единственность разложения  $A=LU$ . MatLab-функция `lu`. Вычисление определителя и обратной матрицы. Решение тестовых СЛАУ из библиотеки `gallery` разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и/или с MatLab решением ( $x=A\backslash b$ ).

#### **Тема 11. Компактные схемы факторизации.**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Разложение Холецкого. MatLab-функции `lu`, `chol`. Программирование методов. Решение тестовых СЛАУ из библиотеки `gallery` разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ( $x=A\backslash b$ ).

#### **Тема 12. QR разложение матрицы.**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства. QR разложение. MatLab-функция `qr`. Программирование методов. Решение тестовых СЛАУ из библиотеки `gallery` разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ( $x=A\backslash b$ ).

#### **Тема 13. Решение систем линейных алгебраических уравнений с ленточными матрицами.**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Метод прогонки решения 3-х диагональных СЛАУ. Решение тестовых СЛАУ из библиотеки `gallery` разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ( $x=A\backslash b$ ). (Метод исключения Гаусса, `lu`, `qr`, `chol` на выбор)

#### **Тема 14. Разреженные системы линейных алгебраических уравнений**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

О разреженных матрицах (PM). Примеры: ленточная матрица; разреженная матрица, полученная из 3-х диагональной симметричными перестановками. Компактное хранение и изображение PM в MatLab. Обзор библиотеки `Sparse Matrices`. Создание случайных тестовых матриц (`sprand`, `sprandn`, `sprandsym`). Функция `sparse`. Создание диагональных матриц (`spdiags`, `gallery('tridiag',c,d,e)`). Функции факторизации (`lu`, `chol`). Решение симметричных и несимметричных тестовых разреженных систем большой размерности командой  $x=A\backslash b$  (матрицы `sprand`, `wathen` из `gallery`, из `delsq`). Решение систем с одной матрицей и разными правыми частями

#### **Тема 15. Чувствительность систем линейных алгебраических уравнений к ошибкам данных.**

##### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Нормы векторов и матриц. Подчиненные нормы матрицы. Вычисление норм 1, 2 и  $\infty$  матрицы. Функции `norm`, `normest`. Оценки чувствительности СЛАУ. Понятие об обусловленности СЛАУ. MatLab-функции `cond`, `condest`. Вычисление обусловленности конкретных матриц (`hilb`, `gallery('minij',n),?`) и экспериментальная проверка оценок устойчивости.

#### **Тема 16. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Понятие об итерационных методах для систем линейных алгебраических уравнений. Канонический вид двухслойных итерационных методов. Критерии сходимости.

#### **Тема 17. Простейшие итерационные методы**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Методы Якоби, Зейделя и их сходимость. Программирование метода Якоби, решение тестовых задач. Измерение погрешности и времени решения (количества итераций).

#### **Тема 18. Метод Зейделя. Метод релаксации.**

##### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**



Метод релаксации и сходимость. Метод Зейделя, как частный случай метода релаксации. Программирование метода релаксации, решение тестовых задач. Экспериментальное определение оптимального итерационного параметра метода релаксации. Измерение погрешности и времени решения (количества итераций)

### **Тема 19. Выбор параметров итерационных методов**

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Оптимальный параметр метода Рундсона ( $B=E, A=A^T > 0$ ). Выбор оптимального параметра в общем случае ( $B=B^T > 0$ ). Программная реализация двухслойного метода. Экспериментальная проверка выбора  $B=diag(A)$  и оптимального параметра при решении интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным положительным факторизованным ядром. О способах выбора матрицы предобуславливания  $B$  ( $B=diag(A)$ , неполное LU разложение).

### **Тема 20. Методы вариационного типа.**

#### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Метод минимальных невязок. Метод минимальных поправок. Метод наискорейшего спуска (МНС). Сходимость МНС с предобуславливанием. Программная реализация МНС. Функции `minres`, `symmlq`. Решение тестовых задач при различном выборе предобуславливателя и оценка эффективности. Понятие о методе сопряженных градиентов. Расчетные формулы, программная реализация. Функции `rsg` и `gmres`.

### **Тема 21. Вычисление собственных чисел и векторов матриц**

#### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Основные сведения. Характеристический многочлен, собственные подпространства, алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел. Частичная проблема. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение следующих по порядку собственных чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом. Программная реализация методов. Сравнение теоретических и экспериментально полученных оценок скорости сходимости. Полная проблема. Метод Якоби. Сходимость. Программная реализация метода Якоби. Решение тестовых задач. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц). Решение тестовых задач. Функции `eig` и `eigs`.

### **Тема 22. Решение нелинейных уравнений. Нули скалярных функций.**

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Метод деления отрезка пополам. Метод простой итерации и его линейная и нелинейная сходимость. Методы хорд, секущих и Ньютона и их сходимость. MatLab-функция `fzero` и об алгоритме Деккера-Брента. Программная реализация методов хорд, секущих и Ньютона, решение тестовых задач, сравнение с функцией `fzero`.

### **Тема 23. Решение систем нелинейных уравнений.**

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Двухслойные стационарные и нестационарные методы. Метод Ньютона. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих. Программная реализация метода, решение тестовых задач.

## **4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Основы программирования в MatLab. Оболочка MatLab.	3	1-2	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
2.	Тема 2. Числовые данные в MatLab.	3	3-4	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
3.	Тема 3. Матрицы в MatLab и операции над ними	3	5-6	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
4.	Тема 4. Основы программирования в MatLab	3	7-9	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
5.	Тема 5. Источники СЛАУ большой размерности. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	3	10-12	подготовка к отчету	8	отчет
6.	Тема 6. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод коллокации.	3	12-14	подготовка к отчету	8	отчет
7.	Тема 7. Источники СЛАУ большой размерности. Численное решение интегральных уравнений.	3	15-17	подготовка к контрольной работе	4	контрольная работа
				подготовка к отчету	4	отчет
8.	Тема 8. Решение линейных алгебраических систем. Прямые методы. Решение СЛАУ с треугольными матрицами.	3		подготовка к отчету	4	отчет
9.	Тема 9. Метод исключения Гаусса	3		подготовка к отчету	6	отчет
10.	Тема 10. Метод факторизации	3		подготовка к отчету	4	отчет
11.	Тема 11. Компактные схемы факторизации.	3		подготовка к отчету	4	отчет
12.	Тема 12. QR разложение матрицы.	3		подготовка к отчету	4	отчет
13.	Тема 13. Решение систем линейных алгебраических уравнений с ленточными матрицами.	3		подготовка к отчету	4	отчет

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
14.	Тема 14. Разреженные системы линейных алгебраических уравнений	3		подготовка к отчету	4	отчет
15.	Тема 15. Чувствительность систем линейных алгебраических уравнений к ошибкам данных.	3		подготовка к контрольной работе	8	контрольная работа
	Итого				90	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается в виде лекций. Причем конспект лекций, который остается у

студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины

на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Основы программирования в MatLab. Оболочка MatLab.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Как представляются действительные числа при вычислениях в системе MatLAB? 2. Как изменить формат представления действительных чисел в командном окне? 3. Каким образом объявляются переменные в языке MatLAB? 4. Как сделать так, чтобы результат действий, записанных в очередной строке а) выводился в командное окно; б) не выводился на экран? 5. Какую роль играет системная переменная ans? 6. Как вернуть в командную строку ранее введенную команду? Выполнить задание по вариантам. Вычислите указанное арифметическое выражение.

### Тема 2. Числовые данные в MatLab.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Как ввести значения комплексного числа, и в каком виде оно выведется на экран? 2. Как на языке MatLAB обеспечить сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень? 3. Какие функции работы с комплексными числами предусмотрены в языке MatLAB? Выполнить задания. Задание 1. Проведите вычисления по заданной формуле при заданных значениях параметров. Укажите необходимую последовательность действий. Сравните полученный результат с приведенным ответом. Задание 2. Найдите корни квадратного уравнения  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  при заданных значениях коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$

### **Тема 3. Матрицы в MatLab и операции над ними**

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Как вводятся векторы в языке MatLAB? Какими функциями можно формировать векторы в языке MatLAB? 2. Какие функции MatLAB разрешают преобразовывать вектор поэлементно? 3. С помощью каких средств в MatLAB осуществляются основные операции с векторами? 4. Как вводятся матрицы в системе MatLAB? 5. Какие функции имеются в MatLAB для формирования матриц определенного вида? 6. Как сформировать матрицу: а) по заданным векторам ее строк? б) по заданным векторам ее столбцов? в) по заданным векторам ее диагоналей? 7. Какие функции поэлементного преобразования матрицы есть в MatLAB? 8. Как осуществляются в MatLAB обычные матричные операции? 9. Как решить в MatLAB систему линейных алгебраических уравнений?

### **Тема 4. Основы программирования в MatLab**

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Для чего создаются программы в среде MatLAB? 2. Чем отличаются файл-функции от Script-файлов? Какова сфера применения каждого из этих видов файлов? 3. Что понимается под понятием "функция функций"? Какие наиболее употребительные стандартные функции функций есть в MatLAB? 4. Как создать M-файл процедуры или функции? 5. Какие основные правила написания текстов M-файлов в языке MatLAB? 6. Какие средства управления ходом вычислительного процесса предусмотрены в языке MatLAB? 7. Как можно организовать вычисления по циклу в языке MatLAB? 8. Как организовать вывод таблицы результатов вычислений в командное окно MatLAB? 9. Как осуществить сложные (многооператорные) вычисления в режиме калькулятора?

### **Тема 5. Источники СЛАУ большой размерности. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Реализация метода конечных разностей для краевой задачи. Сборка матрицы и правой части для системы линейных алгебраических уравнений. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Оценка погрешности метода.

### **Тема 6. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод коллокации.**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Реализация метода коллокации для краевой задачи. Сборка матрицы и правой части для системы линейных алгебраических уравнений. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Оценка погрешности метода. Сравнение с методом конечных разностей.

### **Тема 7. Источники СЛАУ большой размерности. Численное решение интегральных уравнений.**

контрольная работа , примерные вопросы:

Дать развернутый ответ на вопрос. 1. Разности вперед, назад, центральные, погрешности. 2. Метод конечных разностей для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, погрешности. 3. Метод коллокации для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. 4. Квадратурные формулы левых, правых, центральных прямоугольников. Оценки погрешности. 5. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Оценки погрешности.

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация метода квадратур на основе составных формул прямоугольников для решения интегральных уравнений Фредгольма при произвольно заданном ядре. Сборка матрицы и правой части для системы линейных алгебраических уравнений. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Оценка погрешности метода.

### **Тема 8. Решение линейных алгебраических систем. Прямые методы. Решение СЛАУ с треугольными матрицами.**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений для верхне и нижне-треугольных матриц из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 9. Метод исключения Гаусса**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса с выбором ведущего элемента для матриц из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 10. Метод факторизации**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений методом факторизации для матриц из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 11. Компактные схемы факторизации.**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений компактными методами факторизации для симметричных матриц из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 12. QR разложение матрицы.**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений методом QR разложения для матриц из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 13. Решение систем линейных алгебраических уравнений с ленточными матрицами.**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки для матриц из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB, методом исключения Гаусса с выбором ведущего элемента, компактными схемами факторизации и QR разложения. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 14. Разреженные системы линейных алгебраических уравнений**

отчет , примерные вопросы:

Задание по вариантам. Оформление в виде отчета по лабораторной работе. Программная реализация решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами и нет из библиотеки gallery. Решение системы с помощью стандартных функций MatLAB. Сравнение по времени и по погрешности.

### **Тема 15. Чувствительность систем линейных алгебраических уравнений к ошибкам данных.**



контрольная работа , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1.Нормы векторов и матриц. 2. Подчиненные нормы матрицы. 3.Евклидова норма. 4. Относительная погрешность. 5. Абсолютная погрешность. 6. Понятие об обусловленности СЛАУ. 7. Чувствительность СЛАУ к ошибкам данных.

**Тема 16. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений**

зачет и экзамен

**Тема 17. Простейшие итерационные методы**

зачет и экзамен

**Тема 18. Метод Зейделя. Метод релаксации.**

зачет и экзамен

**Тема 19. Выбор параметров итерационных методов**

зачет и экзамен

**Тема 20. Методы вариационного типа.**

зачет и экзамен

**Тема 21. Вычисление собственных чисел и векторов матриц**

зачет и экзамен

**Тема 22. Решение нелинейных уравнений. Нули скалярных функций.**

зачет и экзамен

**Тема 23. Решение систем нелинейных уравнений.**

зачет и экзамен

**Итоговая форма контроля**

зачет и экзамен

**Итоговая форма контроля**

зачет и экзамен

Примерные вопросы к :

Вопросы к экзамену по курсу "Основы численных методов линейной алгебры"

Теоретическая часть

1. Метод конечных разностей для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разности вперед, назад, центральные, погрешности.
2. Метод коллокации для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Квадратурные формулы левых, правых, центральных прямоугольников. Оценки погрешности.
4. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Оценки погрешности.
5. Решение СЛАУ с треугольными матрицами L и U. Расчетные формулы. Трудоемкость.
6. Метод исключения Гаусса (МИГ). Расчетные формулы. Трудоемкость. МИГ с выбором ведущего элемента.
7. Метод исключения Гаусса (МИГ). Условия осуществимости. Матрицы с диагональным доминированием по строкам и/или столбцам. Положительно определенные матрицы.
8. Метод факторизации  $A=LU$ . Единственность разложения. Трудоемкость.
9. Компактные схемы факторизации. Метод Холесского. Единственность разложения. Трудоемкость.
10. Метод отражений. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства. QR разложение.
11. Решение СЛАУ с ленточными матрицами. Метод прогонки решения 3-х диагональных СЛАУ. Расчетные формулы. Трудоемкость.

12. Вычисление определителя и обратной матрицы с помощью метода Гаусса и методов факторизации.
13. Разреженные СЛАУ. О разреженных матрицах (PM). Примеры.
14. Чувствительность СЛАУ к ошибкам данных. Нормы векторов и матриц. Подчиненные нормы матрицы. Оценки чувствительности СЛАУ. Понятие об обусловленности СЛАУ.
15. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Метод Зейделя и Якоби. Сходимость. Оценка погрешности.
16. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Канонический вид двухслойных ИМ. Критерии сходимости
17. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Метод релаксации. Сходимость.
18. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Оптимальный параметр метода Ричардсона ( $B=E, A=A'>0$ ). Выбор оптимального параметра в общем случае ( $B=B'>0$ ).
19. Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы.
20. Методы вариационного типа. Метод минимальных поправок. Метод минимальных невязок(ММН). ММН с предобуславливанием.
21. Методы вариационного типа. Метод наискорейшего спуска (МНС). Сходимость МНС. МНС с предобуславливанием.
22. Методы вариационного типа. Метод сопряженных градиентов(МСГ). МСГ с предобуславливанием.
23. Вычисление собственных чисел. Метод прямой итерации. Сходимость. Метод обратной итерации. Метод обратной итерации со сдвигом.
24. Вычисление собственных чисел. Метод вращений(Якоби). Сходимость.
25. Методы решения нелинейных уравнений. Метод деления отрезка пополам. Метод простой итерации. Сходимость.
26. Методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод хорд. Метод секущих.
27. Методы решения систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Метод Ньютона.

#### Лабораторная часть.

1. Сборка системы уравнений для метода конечных разностей для дифференциального уравнения с краевыми условиями первого рода. Решение системы стандартным методом Matlab.
2. Сборка системы уравнений для метода коллокации для дифференциального уравнения с краевыми условиями первого рода. Сборка решения с помощью метода коллокации.
3. Нахождение интеграла с помощью квадратурных формул левых, правых, центральных прямоугольников. Оценки погрешности.
4. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
5. Решение СЛАУ с треугольными матрицами L и U.
6. Метод исключения Гаусса с выбором ведущего элемента.
7. Метод факторизации. Matlab функция lu. Нахождение определителя матрицы.
8. Компактные схемы факторизации. Matlab функция chol. Нахождение обратной матрицы.
9. Метод отражений. Matlab функция qr. Сравнение стандартного метода matlab, функции lu и qr.
10. Метод прогонки решения 3-х диагональных СЛАУ. Создание разреженных матриц.
11. Чувствительность СЛАУ к ошибкам данных. Улучшение решения с помощью невязки.
12. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Метод Зейделя и Якоби.
13. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Метод релаксации.
14. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Оптимальный параметр метода Ричардсона ( $B=E, A=A'>0$ ).
15. Итерационные методы (ИМ) решения СЛАУ. Выбор оптимального параметра в общем случае ( $B=B'>0$ ).



16. Методы вариационного типа. Метод наискорейшего спуска (МНС). МНС с предобуславливанием ( $B=\text{diag}(A)$ ).

17. Методы вариационного типа. Метод минимальных невязок(ММН). ММН с предобуславливанием. (функция  $\text{gmres}$ ,  $A=A'>0$ ,  $B=\text{chol}(A)$ )

18. Методы вариационного типа. Метод сопряженных градиентов(МСГ). МСГ с предобуславливанием(функция  $\text{psg}$ ,  $A=A'>0$ ,  $B=\text{chol}(A)$ )

Примерные экзаменационные билеты

Билет ♦ 1

1. Метод факторизации  $A=LU$ . Единственность разложения. Трудоемкость.

2. Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы.

3. Решить систему уравнений  $Ax=b$ , где  $A$  - заданная верхнетреугольная квадратная матрица,  $b$  заданный вектор столбец. Написать функцию нахождения решения с помощью столбцово ориентированного алгоритма.

Билет ♦ 2

1. Метод коллокации для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод Зейделя. Сходимость. Оценка погрешности.

3. Решить систему уравнений  $Ax=b$ , где  $A$  - заданная квадратная матрица,  $b$  заданный вектор столбец. Написать функцию нахождения решения методом Зейделя. Начальное приближение считать нулевым вектором, количество итераций и нужную погрешность передавать как параметры, на выходе получить решение и количество итераций потребовавшихся для этого.

Билет ♦ 3

1. Решение СЛАУ с треугольными матрицами  $L$  и  $U$ . Расчетные формулы. Трудоемкость.

2. Итерационные методы решения СЛАУ. Оптимальный параметр стационарного явного итерационного метода( $B=E$ ,  $A=A'>0$ ), сходимость.

3. Решить систему уравнений  $Ax=b$ , где  $A$  - заданная нижнетреугольная квадратная матрица,  $b$  заданный вектор столбец. Написать функцию нахождения решения с помощью столбцово ориентированного алгоритма.

Билет ♦ 4

1. Решение СЛАУ с ленточными матрицами. Метод прогонки решения 3-х диагональных СЛАУ. Расчетные формулы. Трудоемкость.

2. Вычисление собственных чисел. Метод прямой итерации. Сходимость. Метод обратной итерации. Метод обратной итерации со сдвигом.

3. Решить систему уравнений  $Ax=b$ , где  $A$  - заданная трехдиагональная квадратная матрица,  $b$  заданный вектор столбец. Написать функцию нахождения решения методом прогонки.

Билет ♦ 5

1. Метод исключения Гаусса (МИГ). Расчетные формулы. Трудоемкость. МИГ с выбором ведущего элемента.

2. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод релаксации. Сходимость.

3. Решить систему уравнений  $Ax=b$ , где  $A$  - заданная квадратная матрица,  $b$  заданный вектор столбец. Написать функцию нахождения решения методом релаксации. Начальное приближение считать нулевым вектором, количество итераций, итерационный параметр и нужную погрешность передавать как параметры, на выходе получить решение и количество итераций потребовавшихся для этого.

## 7.1. Основная литература:

1. Квасов Б.И. Численные методы анализа и линейной алгебры. Использование Matlab и Scilab [Электронный ресурс] : учеб. пособие - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2016.- 328 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/71713>.
2. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. - Электрон. дан. - СПб. : Лань, 2009.- 736 с. - <http://e.lanbook.com/book/400>
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - Электрон. дан. - М. : Издательство 'Лаборатория знаний', 2015. - 639 с. - <http://e.lanbook.com/book/70767>
4. Срочко В.А. Численные методы. Курс лекций. [Электронный ресурс] : учеб. пособие - Электрон. дан. - СПб. : Лань, 2010. - 208 с. - <http://e.lanbook.com/book/378>
5. Шевцов Г.С. Численные методы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.С. Шевцов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мызникова. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2011. - 496 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/1800>.

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Амосов А.А. Вычислительные методы. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. - Электрон. дан. - СПб. : Лань, 2014. - 672 с. <http://e.lanbook.com/book/42190>
2. Глазырина Л. Л. Введение в численные методы: 3. учебное пособие / Л. Л. Глазырина, М. М. Карчевский; Казан. федер. ун-т.-Казань: Казанский университет, 2012.- 121 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. - Электрон. дан. - М. : Издательство 'Лаборатория знаний', 2015. - 243 с. - <http://e.lanbook.com/book/70743>
4. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. [Электронный ресурс] : учеб. пособие - Электрон. дан. - М. : Физматлит, 2008.- 288 с. - <http://e.lanbook.com/book/2297>

## 7.3. Интернет-ресурсы:

пакет прикладных программ matlab - <http://matlab.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Портал ресурсов по естественно-научным дисциплинам - <http://en.edu.ru/>  
Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Основы численных методов линейной алгебры" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Для обеспечения учебного процесса необходима доска, мел(маркер), компьютеры с установленным пакетом Matlab, а так же выходом в интернет.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Глазырина Л.Л. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Карчевский М.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.