

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**Программа дисциплины**

Основы функционального анализа Б1.В.ОД.5

Направление подготовки: 15.03.03 - Прикладная механика

Профиль подготовки: Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Гумеров Р.Н. , Луговая Г.Д.

**Рецензент(ы):**

Насыров С.Р. , Гарифьянов Фархат Нургаязович

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Насыров С. Р.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 817221015

Казань  
2015

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Гумеров Р.Н. Кафедра математического анализа отделение математики , Renat.Gumerov@kpfu.ru ; доцент, к.н. (доцент) Луговая Г.Д. Кафедра математического анализа отделение математики , Galina.Lugovaya@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Функциональный анализ" являются: получение базовых знаний по функциональному анализу: мера Лебега, продолжение меры с полукольца на сигма-алгебру, описание мер на борелевской алгебре числовой прямой, измеримые функции, сходимости почти всюду, конструкция интеграла Лебега, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, интеграл Лебега-Стилтьеса, метрические пространства, пополнение метрического пространства, метод сжимающих отображений и его применения, критерий компактности метрического пространства, нормированные и банаховы пространства, линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха), гильбертовы пространства, теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, самосопряженные, унитарные операторы; ортопроекторы, компактные операторы, спектр эрмитова и унитарного оператора, строение спектра компактного оператора (теорема Рисса-Шаудера), спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора, приложения к интегральным уравнениям Фредгольма (теоремы Фредгольма), интегральные уравнения с симметрическим ядром. При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями методов функционального анализа в механике.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.5 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 15.03.03 Прикладная механика и относится к обязательные дисциплины. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр.

Дисциплина входит в базовую часть профессионального цикла.

Получаемые знания необходимы для понимания и освоения курсов теории вероятностей, математической статистики, методов оптимизации, а также профильных дисциплин направления механики и математического моделирования.

Слушатели должны владеть знаниями по дисциплинам математический анализ, алгебра.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-11 (общекультурные компетенции)	фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности
ОК-14 (общекультурные компетенции)	способность к анализу и синтезу
ОК-6 (общекультурные компетенции)	способность применять знания на практике

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2 (профессиональные компетенции)	умение понять поставленную задачу
ПК-3 (профессиональные компетенции)	умение формулировать результат
ПК-4 (профессиональные компетенции)	умение строго доказать утверждение

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные понятия и результаты по функциональному анализу ( мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, приложения к интегральным уравнениям Фредгольма (теоремы Фредгольма).

2. должен уметь:

Уметь вычислять интегралы Лебега. Уметь применять метод сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов.

Применять к интегральным уравнениям теорию Фредгольма.

3. должен владеть:

методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

1. Знать: основные понятия и результаты по функциональному анализу ( мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, теоремы Фредгольма.

2. Уметь вычислять интеграл Лебега. Уметь применять принцип сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов

3. Владеть: методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.	4	1-4	4	8	0	домашнее задание
2.	Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.	4	5-9	4	10	0	домашнее задание контрольная работа
3.	Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.	4	10-13	4	8	0	домашнее задание
4.	Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода	4	14-17	4	8	0	домашнее задание контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	экзамен
	Итого			16	34	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Системы множеств. Минимальное кольцо. Сигма-кольцо. Сигма алгебра.(2) Мера на полукольце. Сигма-аддитивная мера. Внешняя мера.(2) Измеримые по Лебегу множества. Мера Лебега(2) Измеримые функции.(2) Различные виды сходимости. Теорема Егорова.(1) Интеграл Лебега(2). Предельный переход под знаком интеграла.(1) Абсолютная непрерывность. Неравенство Чебышева. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Теорема Лузина.(1) Заряды. Теорема Радона-Никодима. Теорема Фубини. Мера Лебега-Стилтьеса.(1)

**практическое занятие (8 часа(ов)):**

Операции над множествами(4) Меры(4)

**Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Полные метрические пространства. Теоремы Бэра, о пополнении. Принцип вложенных шаров(3) Компактность и предкомпактность. Сепарабельность.(3) Принцип сжимающих отображений. Приложения(3) Нормированные и банаховы пространства(3)

**практическое занятие (10 часа(ов)):**

Примеры метрических пространства(4) Принцип сжимающих отображений(2) Примеры нормированных пространств(4)

**Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Линейные операторы и функционалы.(2) Основные принципы линейного анализа(3) Унитарные и гильбертовы пространства(1) Ограниченные линейные функционалы на гильбертовом пространстве(2) Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве(2)

**практическое занятие (8 часа(ов)):**

Вычисление норм(4) Примеры и свойства гильбертовых пространств(4)

**Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Компактные операторы. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора.(4) Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.(4)

**практическое занятие (8 часа(ов)):**

Спектры(4) Уравнения(4)

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.	4	1-4	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
2.	Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.	4	5-9	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
3.	Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.	4	10-13	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание
4.	Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода	4	14-17	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
	Итого				40	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

лекции, лабораторные занятия, контрольные работы, коллоквиум, зачёт и экзамен. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому лабораторному занятию. В каждом семестре проводятся контрольные работы (на лабораторных занятиях). Зачет выставляется по положительным результатам выполнения контрольных работ и самостоятельной работы в течении семестра, а также успешной сдачи теоретического материала по прилагаемой программе. К экзамену допускаются студенты, показавшие положительные результаты по текущей работе в течение семестра.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.

домашнее задание , примерные вопросы:

меры на системах множеств, продолжение меры с полукольца на кольцо, измеримые по Лебегу множества, мера Лебега , множества лебеговой меры нуль, мера Лебега-Стилтьеса, описание мер на борелевской алгебре числовой прямой, абсолютно непрерывные и сингулярные меры, измеримые функции, различные типы сходимости, конструкция интеграла Лебега и его свойства, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, заряды, меры в произведениях множеств.

### Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.

домашнее задание , примерные вопросы:

метрические пространства, пополнение метрического пространства, теоремы о вложенных шарах и Бэра, принцип сжимающих отображений и его применения, вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах, непрерывные функции на компактных пространствах, нормированные и банаховы пространства

контрольная работа , примерные вопросы:

Метрические и нормированные пространства. Принцип сжимающих отображений.

### **Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.**

домашнее задание , примерные вопросы:

линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха) предгильбертовы и гильбертовы пространства, их изоморфизмы, теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, билинейные формы и их связь с операторами, сопряженные, самосопряженные, унитарные операторы, алгебра операторов в гильбертовом пространстве, ортопроекторы, конечномерные и компактные операторы, резольвента и спектр ограниченного оператора, строение спектра компактного оператора (теорема Рисса-Шаудера), спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора

### **Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода**

домашнее задание , примерные вопросы:

Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма.

контрольная работа , примерные вопросы:

Операторные уравнения.

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

все виды текущего контроля успеваемости и аттестации по итогам освоения дисциплины оцениваются по 100-балльной рейтинговой системе, принятой к КФУ. Экзамены оцениваются переводом набранных по дисциплине баллов в оценки: неудовлетворительно, посредственно, удовлетворительно, хорошо, очень хорошо, отлично. Варианты контрольных заданий и программы зачёта и экзамена приведены в приложениях 1 и 2. Распределение баллов по видам контроля приведены в приложении 3. Методические рекомендации приведены в приложении 4.

Образцы контрольных работ.

#### **I. Мера и интеграл**

1. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  является инъекцией тогда и только тогда, когда  $f^{-1}(f(A))=A$  для любого подмножества  $A \subset X$ .
2. Пусть задана мера на кольце.  $E$  и  $F$  - множества из этого кольца,  $G$  - их симметрическая разность. Доказать, что мера пересечения множества  $E$  с множеством  $G$  равна разности меры множества  $E$  и меры пересечения  $E$  и  $F$ .
3. Доказать измеримость функции  $\text{sign}(\cos(x^2))$ , заданной на вещественной оси.
4. Вычислить интеграл Лебега по интервалу  $(1;2)$  от функции  $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}(x-1)}$ .

#### **II. Метрические и нормированные пространства.**

1. Доказать полноту и сепарабельность метрического пространства  $l_1$ .
2. Используя принцип сжимающих отображений показать, что система линейных уравнений  $x=0.5y+1; y=0.25x-2$  в вещественной плоскости имеет единственное решение и укажите приближенный метод ее решения.
3. Доказать, что функционал  $f((x_k))=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})x_k$  является непрерывным на  $l_1$  и вычислить его норму.



4. Доказать, что оператор  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]: x(t) \mapsto t^2 x(0)$  ограничен и вычислить его норму.

Вопросы за 5 семестр.

1. Системы множеств.
2. Меры на системах множеств. Продолжение меры с полукольца на кольцо.
3. Внешняя мера.
5. Измеримые по Лебегу множества.
6. Мера Лебега.
7. Измеримые функции.
8. Различные типы сходимости.
9. конструкция интеграла Лебега и его свойства
10. теоремы о предельном переходе под знаком интеграла
- 11, заряды,
12. меры в произведениях множеств.
13. пополнение метрического пространства,
- 14 теоремы о вложенных шарах и Бэра,
- 15 принцип сжимающих отображений и его применения
- 16 вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах,
- 17 непрерывные функции на компактных пространствах

Вопросы за 6 семестр.

1. Нормированные и банаховы пространства. Пополнение.
2. линейные операторы и функционалы. Ограниченность. Норма.
3. теорема Хана-Банаха,
4. теорема Банаха-Штейнгауза
5. теорема Банаха
6. Сопряженное пространство
7. Ряды в нормированных пространствах.
8. Унитарные и гильбертовы пространства. Элемент наилучшего приближения. Процесс ортогонализации. Основные классы операторов.
9. Ряды Фурье
10. Функционалы в гильбертовом пространстве. Алгебра ограниченных линейных операторов.
11. Сопряженный оператор.
12. Компактные операторы. Их свойства.
13. Спектр и резольвента оператора.
14. Спектральная теория для компактного самосопряженного оператора.
15. Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.

### 7.1. Основная литература:

1. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Издание 7-е. Москва: Физматлит, 2006. 572 с
2. Задачи и упражнения по функциональному анализу: учебное пособие для студентов мат. спец. вузов / А. Б. Антонец, П. Н. Князев, Я. В. Радыно; Под ред. С. Г. Крейна. Издание 3-е, стереотипное. Москва: URSS: [КомКнига], [2006]. 208 с.

3. Конспект лекций по математическому анализу. Издание пятое./А.Н.Шерстнев.-Казань: КГУ, 2009. -[http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-ИММ/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-ИММ/05_33_2009_000165.pdf).

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М.: Физматлит, 2009. - 572 с.

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2206](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206)

5. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с. - ISBN 978-5-16-006429-1 <http://www.znaniium.com/bookread.php?book=377270>

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Функциональный анализ: [учебное пособие] / А. М. Сидоров. Казань: Казанский университет, 2010. 139с.

2. Насыров С.Р. Метрические и линейные нормированные пространства. "Задачи к лабораторным занятиям по курсу

"Функциональный анализ и интегральные уравнения"

Казань: КГУ, 1998. 31 с

[http://kpfu.ru//staff\\_files/F1714458496/FA\\_exercises.pdf](http://kpfu.ru//staff_files/F1714458496/FA_exercises.pdf)

## 7.3. Интернет-ресурсы:

архив учебных материалов ВШЭ - [http://math.hse.ru/courses\\_math/bac3-11-fa](http://math.hse.ru/courses_math/bac3-11-fa)

кафедра математики физ. фак-та МГУ - [http://matematika.phys.msu.ru/stud\\_spec/127](http://matematika.phys.msu.ru/stud_spec/127)

учебные материалы мех-мата МГУ - <http://www.mexmat.net/materials/6/>

Функциональный анализ 3 курс Викиконспекты -

<http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B>

электронная библиотека К(П)ФУ - <http://www.ksu.ru/f5/index.php?id=7>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Основы функционального анализа" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

функциональный анализ: учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, доступ студентов к компьютеру с Internet.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 15.03.03 "Прикладная механика" и профилю подготовки Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры .

Автор(ы):

Гумеров Р.Н. \_\_\_\_\_

Луговая Г.Д. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Насыров С.Р. \_\_\_\_\_

Гарифьянов Фархат Нургаязович \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.