

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Минзарипов Р.Г.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Уравнения математической физики БЗ.В.1

Направление подготовки: 010800.62 - Механика и математическое моделирование

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Салехова И.Г.

**Рецензент(ы):**

Астафьева Л.К.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой:

Протокол заседания кафедры No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2013

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Салехова И.Г. Кафедра дифференциальных уравнений отделение математики , llysia.Salekhova@kpfu.ru

### **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины "Уравнения математической физики" являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области уравнений в частных производных;
- 2) овладение аналитическими методами математической физики;
- 3) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях;
- 4) приобретение навыков математического моделирования процессов и объектов, разработки математических методов решения задач механики.

### **2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования**

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.В.1 Профессиональный" основной образовательной программы 010800.62 Механика и математическое моделирование и относится к вариативной части. Осваивается на 3 курсе, 5, 6 семестры.

Дисциплина "Уравнения математической физики" является продолжением курса "Дифференциальных уравнений" в базовой части цикла профессиональных дисциплин.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, алгебра, дифференциальные уравнения.

Освоение дисциплины "Уравнения математической физики" необходимо при последующем изучении дисциплин (модулей) "Численные методы", "Механика сплошных сред", специальных курсов.

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля**

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные понятия теории уравнений в частных производных, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

2. должен уметь:

решать задачи теоретического характера в области уравнений в частных производных.

3. должен владеть:

математическим аппаратом уравнений в частных производных, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

### **4. Структура и содержание дисциплины/ модуля**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных(ые) единиц(ы) 252 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### **4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю** **Тематический план дисциплины/модуля**

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Постановка задач математической физики. Корректность постановок задач математической физики. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка смешанной задачи (задачи Коши-Адамара) и задачи Коши для уравнения колебаний струны. Уравнение колебаний мембраны, колебание упругого тела. Общее уравнение колебаний. Колебание балки. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задач для уравнения теплопроводности. Задача распространения тепла в однородном стержне. Уравнение диффузии. Уравнение конвективной диффузии. Общее уравнение диффузии. Стационарное тепловое поле. Уравнение Пуассона, Лапласа. Постановка граничных задач. Вывод уравнения неразрывности. Уравнение пьезопроводности. Движение несжимаемой однородной жидкости. Задача обтекания твердого тела. Корректность постановок задач математической физики. Пример Адамара.	5	1-3	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Классификация и приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка в случае n независимых переменных. Классификация и приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных.	5	4-6	0	0	0	
3.	Тема 3. Задача Коши. Понятие характеристики. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Роль характеристик в постановке задачи Коши. Теорема Коши-Ковалевской.	5	7-8	0	0	0	
4.	Тема 4. Формулы Грина для самосопряженного дифференциального оператора. Задача на собственные значения. Свойства собственных значений и собственных функций.	5	9-11	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
5.	Тема 5. Уравнения гиперболического типа. Смешанная задача для уравнения колебаний. Постановка смешанной задачи. Общая схема решения смешанной задачи для однородного уравнения колебаний методом Фурье. Свободные колебания конечной струны ,закрепленной на концах.(решение задачи методом Фурье, обоснование решения, физическая интерпретация решения). Решение задачи для неоднородного уравнения. Случай неоднородных граничных условий Вывод энергетического равенства смешанной задачи для уравнения колебаний. Вывод априорных оценок для решения смешанной задачи. Теоремы единственности и устойчивости.	5	12-15	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
6.	Тема 6. Задача Коши для волнового уравнения. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом усреднения. Физическая интерпретация решения. Метод спуска. Колебание бесконечной мембраны. Физическая интерпретация. Колебание бесконечной струны. Физическая интерпретация. Применение формулы Даламбера к задачам о колебаниях полубесконечной и конечной струны. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения. Теоремы единственности и устойчивости задачи Коши. Метод Римана решения задачи Коши.	5	16-18	0	0	0	



N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
7.	Тема 7. Уравнения параболического типа. Смешанная задача для уравнения диффузии. Постановка смешанной задачи для уравнения диффузии. Принцип максимума и минимума для уравнения диффузии. Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной при граничных условиях первого рода. Метод Фурье решения смешанной задачи. Распространение тепла в конечном стержне с концами, поддерживаемыми при нулевой температуре (решение задачи методом Фурье, физическая интерпретация, функция Грина).	6	1-3	0	0	0	
8.	Тема 8. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Постановка задачи. Единственность решения задачи. Задача распространения тепла в неограниченном стержне Решение задачи с помощью функции Грина.	6	4-5	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
9.	Тема 9. Уравнения эллиптического типа. Постановка граничных задач для стационарного типа. Постановка граничных задач для стационарного уравнения, для уравнения Пуассона. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление дважды непрерывно-дифференцируемых в замкнутой области функций.	6	6	0	0	0	
10.	Тема 10. Свойства гармонических функций.	6	7-8	0	0	0	
11.	Тема 11. Задача Дирихле. Теоремы единственности и устойчивости решений задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона. Метод функции Грина решения задачи Дирихле. Методы построения функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара. Поведение гармонических функций и их производных на бесконечности.	6	9-12	0	0	0	
12.	Тема 12. Задача Неймана. Постановка задачи Неймана. Корректность задачи Неймана.	6	13	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
13.	Тема 13. Теория потенциалов. Потенциалы простого, двойного слоя, Ньютонов потенциал. Свойства потенциалов. Применение потенциалов к решению задач Дирихле и Неймана.	6	14	0	0	0	
14.	Тема 14. Метод интегральных преобразований. Понятие преобразований Лапласа, Фурье, Меллина. Применение интегральных преобразований к решению задач.	6	15	0	0	0	
15.	Тема 15. Обобщенные решения краевых задач. Обобщенные функции. Операции над обобщенными функциями (напомнить сведения, даваемые в курсе функционального анализа) Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Обобщенные решения краевых задач.	6	16	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
16.	Тема 16. Некоторые дополнительные сведения. Уравнения смешанного типа. Примеры задач, приводящих к уравнениям смешанного типа. Метод вычислительного эксперимента решения задач математической физики. Современные проблемы теории уравнений с частными производными.	6	17	0	0	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	экзамен
	Итого			0	0	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Постановка задач математической физики. Корректность постановок задач математической физики. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка смешанной задачи (задачи Коши-Адамара) и задачи Коши для уравнения колебаний струны. Уравнение колебаний мембраны, колебание упругого тела. Общее уравнение колебаний. Колебание балки. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задач для уравнения теплопроводности. Задача распространения тепла в однородном стержне. Уравнение диффузии. Уравнение конвективной диффузии. Общее уравнение диффузии Стационарное тепловое поле. Уравнение Пуассона, Лапласа. Постановка граничных задач. Вывод уравнения неразрывности. Уравнение пьезопроводности. Движение несжимаемой однородной жидкости. Задача обтекания твердого тела. Корректность постановок задач математической физики. Пример Адамара.**

**Тема 2. Классификация и приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка в случае  $n$  независимых переменных. Классификация и приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных.**

**Тема 3. Задача Коши. Понятие характеристики. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Роль характеристик в постановке задачи Коши. Теорема Коши-Ковалевской.**

**Тема 4. Формулы Грина для самосопряженного дифференциального оператора. Задача на собственные значения. Свойства собственных значений и собственных функций.**

**Тема 5. Уравнения гиперболического типа. Смешанная задача для уравнения колебаний. Постановка смешанной задачи. Общая схема решения смешанной задачи для однородного уравнения колебаний методом Фурье. Свободные колебания конечной струны, закрепленной на концах. (решение задачи методом Фурье, обоснование решения, физическая интерпретация решения). Решение задачи для неоднородного уравнения. Случай неоднородных граничных условий Вывод энергетического равенства смешанной задачи для уравнения колебаний. Вывод априорных оценок для решения смешанной задачи. Теоремы единственности и устойчивости.**

**Тема 6. Задача Коши для волнового уравнения. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом усреднения. Физическая интерпретация решения. Метод спуска. Колебание бесконечной мембраны. Физическая интерпретация. Колебание бесконечной струны. Физическая интерпретация. Применение формулы Даламбера к задачам о колебаниях полубесконечной и конечной струны. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения. Теоремы единственности и устойчивости задачи Коши. Метод Римана решения задачи Коши.**

**Тема 7. Уравнения параболического типа. Смешанная задача для уравнения диффузии. Постановка смешанной задачи для уравнения диффузии. Принцип максимума и минимума для уравнения диффузии. Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной при граничных условиях первого рода. Метод Фурье решения смешанной задачи. Распространение тепла в конечном стержне с концами, поддерживаемыми при нулевой температуре (решение задачи методом Фурье, физическая интерпретация, функция Грина).**

**Тема 8. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Постановка задачи. Единственность решения задачи. Задача распространения тепла в неограниченном стержне Решение задачи с помощью функции Грина.**

**Тема 9. Уравнения эллиптического типа. Постановка граничных задач для стационарного типа. Постановка граничных задач для стационарного уравнения, для уравнения Пуассона Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление дважды непрерывно-дифференцируемых в замкнутой области функций.**

**Тема 10. Свойства гармонических функций.**

**Тема 11. Задача Дирихле. Теоремы единственности и устойчивости решений задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона. Метод функции Грина решения задачи Дирихле. Методы построения функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара. Поведение гармонических функций и их производных на бесконечности.**

**Тема 12. Задача Неймана. Постановка задачи Неймана. Корректность задачи Неймана.**

**Тема 13. Теория потенциалов. Потенциалы простого, двойного слоя, Ньютонов потенциал. Свойства потенциалов. Применение потенциалов к решению задач Дирихле и Неймана.**

**Тема 14. Метод интегральных преобразований. Понятие преобразований Лапласа, Фурье, Меллина. Применение интегральных преобразований к решению задач.**

**Тема 15. Обобщенные решения краевых задач. Обобщенные функции. Операции над обобщенными функциями (напомнить сведения, даваемые в курсе функционального анализа) Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Обобщенные решения краевых задач.**

**Тема 16. Некоторые дополнительные сведения. Уравнения смешанного типа. Примеры задач, приводящих к уравнениям смешанного типа. Метод вычислительного эксперимента решения задач математической физики. Современные проблемы теории уравнений с частными производными.**

## **5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

Активные и интерактивные формы проведения занятий.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

**Тема 1. Постановка задач математической физики. Корректность постановок задач математической физики. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка смешанной задачи (задачи Коши-Адамара) и задачи Коши для уравнения колебаний струны. Уравнение колебаний мембраны, колебание упругого тела. Общее уравнение колебаний. Колебание балки. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задач для уравнения теплопроводности. Задача распространения тепла в однородном стержне. Уравнение диффузии. Уравнение конвективной диффузии. Общее уравнение диффузии. Стационарное тепловое поле. Уравнение Пуассона, Лапласа. Постановка граничных задач. Вывод уравнения неразрывности. Уравнение пьезопроводности. Движение несжимаемой однородной жидкости. Задача обтекания твердого тела. Корректность постановок задач математической физики. Пример Адамара.**

**Тема 2. Классификация и приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка в случае  $n$  независимых переменных. Классификация и приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных.**

**Тема 3. Задача Коши. Понятие характеристики. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Роль характеристик в постановке задачи Коши. Теорема Коши-Ковалевской.**

**Тема 4. Формулы Грина для самосопряженного дифференциального оператора. Задача на собственные значения. Свойства собственных значений и собственных функций.**

**Тема 5. Уравнения гиперболического типа. Смешанная задача для уравнения колебаний. Постановка смешанной задачи. Общая схема решения смешанной задачи для однородного уравнения колебаний методом Фурье. Свободные колебания конечной струны, закрепленной на концах. (решение задачи методом Фурье, обоснование решения, физическая интерпретация решения). Решение задачи для неоднородного уравнения. Случай неоднородных граничных условий. Вывод энергетического равенства смешанной задачи для уравнения колебаний. Вывод априорных оценок для решения смешанной задачи. Теоремы единственности и устойчивости.**

**Тема 6. Задача Коши для волнового уравнения. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом усреднения. Физическая интерпретация решения. Метод спуска. Колебание бесконечной мембраны. Физическая интерпретация. Колебание бесконечной струны. Физическая интерпретация. Применение формулы Даламбера к задачам о колебаниях полубесконечной и конечной струны. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения. Теоремы единственности и устойчивости задачи Коши. Метод Римана решения задачи Коши.**

**Тема 7. Уравнения параболического типа. Смешанная задача для уравнения диффузии. Постановка смешанной задачи для уравнения диффузии. Принцип максимума и минимума для уравнения диффузии. Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной при граничных условиях первого рода. Метод Фурье решения смешанной задачи. Распространение тепла в конечном стержне с концами, поддерживаемыми при нулевой температуре (решение задачи методом Фурье, физическая интерпретация, функция Грина).**

**Тема 8. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Постановка задачи. Единственность решения задачи. Задача распространения тепла в неограниченном стержне. Решение задачи с помощью функции Грина.**

**Тема 9. Уравнения эллиптического типа. Постановка граничных задач для стационарного типа. Постановка граничных задач для стационарного уравнения, для уравнения Пуассона. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление дважды непрерывно-дифференцируемых в замкнутой области функций.**

## **Тема 10. Свойства гармонических функций.**

**Тема 11. Задача Дирихле. Теоремы единственности и устойчивости решений задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона. Метод функции Грина решения задачи Дирихле. Методы построения функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара. Поведение гармонических функций и их производных на бесконечности.**

**Тема 12. Задача Неймана. Постановка задачи Неймана. Корректность задачи Неймана.**

**Тема 13. Теория потенциалов. Потенциалы простого, двойного слоя, Ньютонов потенциал. Свойства потенциалов. Применение потенциалов к решению задач Дирихле и Неймана.**

**Тема 14. Метод интегральных преобразований. Понятие преобразований Лапласа, Фурье, Меллина. Применение интегральных преобразований к решению задач.**

**Тема 15. Обобщенные решения краевых задач. Обобщенные функции. Операции над обобщенными функциями (напомнить сведения, даваемые в курсе функционального анализа) Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Обобщенные решения краевых задач.**

**Тема 16. Некоторые дополнительные сведения. Уравнения смешанного типа. Примеры задач, приводящих к уравнениям смешанного типа. Метод вычислительного эксперимента решения задач математической физики. Современные проблемы теории уравнений с частными производными.**

**Тема . Итоговая форма контроля**

**Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся по 2 контрольные работы (на семинарах). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ. В конце 6 семестра экзамен.

### **7.1. Основная литература:**

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М., "Наука", 2003, 398с.
2. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Нижний Новгород, Издательство Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2007, 421с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1977, 735с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., "Высшая школа", 1970, 710с.
5. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., "Наука", 2001, 271с.
6. Салехова И.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". Казань, КГУ, 1982, 48с.
7. Салехова И.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". Казань, КГУ, 1983, 38с.
8. Салехова И.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". Казань, КГУ, 1990, 38с.
9. Салехова И.Г., Аблаева С.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". Казань, КГУ, 1999, 64с.
10. Салехова И.Г., Аблаева С.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". Казань, КГУ, 2007, 148с.
11. Салехова И.Г., Аблаева С.Г. Методическое пособие для проведения практических занятий по курсу "Уравнения математической физики". Казань, КФУ, 2010, 149с.

## **7.2. Дополнительная литература:**

- 1.Петровский И.Г.Лекции об уравнениях с частными производными. М., "Физматгиз",1961,303с.
- 2.Крикунов Ю.М.Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. Казань, КГУ,1970,209 с.
- 3.БудакБ.М.,Самарский А,А., Тихонов А.Н.Сборник задач по математической физике. М., "Наука",1988,687с.

## **7.3. Интернет-ресурсы:**

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану**

Освоение дисциплины "Уравнения математической физики" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010800.62 "Механика и математическое моделирование" и профилю подготовки Общий профиль .



Автор(ы):

Салехова И.Г. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Астафьева Л.К. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.