

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт физики



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.



\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

### Программа дисциплины

Теория представления групп и алгебр Ли с приложениями Б1.В.ДВ.6

Направление подготовки: 03.04.02 - Физика

Профиль подготовки: Теоретическая и математическая физика

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Бахматов И.В. , Патрин Е.В.

**Рецензент(ы):**

Даишев Р.А.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Сушков С. В.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института физики:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 643617

Казань  
2017

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) научный сотрудник, к.н. Бахматов И.В. НИЛ Космология Институт физики , IVBahmatov@kpfu.ru ; ассистент, к.н. Патрин Е.В. Кафедра теории относительности и гравитации Отделение физики , Evgeny.Patrin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины Б1.В.ДВ.6 Теория представлений групп и алгебр Ли с приложениями являются получение знаний по основам теории представлений алгебр и групп Ли и их приложениям к классическим и квантовым системам.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.6 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 03.04.02 Физика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Дисциплина(М.2.ДВ.4) входит в вариативную часть профессионального цикла (М.2) как дисциплина по выбору. Для освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: теории групп и алгебр Ли элементов римановой и симплектической геометрий и основ функционального анализа с одной стороны и теоретической механики, квантовой механики и статистической физики и термодинамики с другой.

Освоение дисциплины необходимо для изучения дисциплин, связанных с квантовой теорией поля на искривлённых пространствах-времени (а также с квантовой гравитацией), и для успешной профессиональной деятельности.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                     | Расшифровка приобретаемой компетенции  |
|--------------------------------------|--|
| ОК-1<br>(общекультурные компетенции) | способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу   |
| ок-5                                 | способность порождать новые идеи (креативность);   |
| опк-6                                | способность использовать знание современных проблем и новейших достижений физики в научно исследовательской работе   |
| пк-1                                 | способность самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта |
| пк-2                                 | способность применять на практике базовые профессиональные навыки;   |
| пк-3                                 | способность принимать участие в разработке новых методов и методических подходов в научно-инновационных исследованиях и инженерно-технологической деятельности   |
| пк-6                                 | способностью свободно владеть разделами физики, необходимыми для решения научно-инновационных задач (в соответствии с профилем подготовки);  |
| пк-7                                 | способность свободно владеть профессиональными знаниями для анализа и синтеза физической информации (в соответствии с профилем подготовки);  |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:
2. должен уметь:
3. должен владеть:
4. должен продемонстрировать способность и готовность:

использовать теоретические основы теории представлений групп и алгебр Ли при решении конкретных физических и математических задач, применять навыки построения квантовых систем по классическим системам с искривлённым фазовым пространством с использованием теории представлений и их исследованию; строить присоединённые, коприсоединённые и индуцированные представления различных конкретных групп и алгебр Ли, строить орбиты коприсоединённых представлений конкретных групп Ли и уметь строить по орбитам унитарные представления; .

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля         |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|-----------------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                                   |
| 1. | Тема 1.<br>Топологические<br>пространства и<br>непрерывные<br>отображения.      | 3       | 1-2                | 1   | 1                       | 0                      | Письменное<br>домашнее<br>задание |
| 2. | Тема 2. Гладкие<br>многообразия и<br>гладкие отображения.                       | 3       | 2-5                | 3   | 3                       | 0                      | Письменное<br>домашнее<br>задание |
| 3. | Тема 3. Группы и<br>алгебры Ли. Группы Ли<br>и некоторые<br>конструкции с ними. | 3       | 6-8                | 2   | 2                       | 0                      | Письменное<br>домашнее<br>задание |

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля         |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|-----------------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                                   |
| 4. | Тема 4.<br>Представления групп<br>Ли (линейные,<br>унитарные,<br>проективные), и<br>некоторые<br>конструкции с ними | 3       | 9-13               | 4   | 3                       | 0                      | Письменное<br>домашнее<br>задание |
| 5. | Тема 5. Некоторые<br>приложения теории<br>представлений групп и<br>алгебр Ли.                                       | 3       | 13-18              | 4   | 3                       | 0                      | Письменное<br>домашнее<br>задание |
|    | Тема . Итоговая<br>форма контроля   | 3       |                    | 0   | 0                       | 0                      | Экзамен                           |
|    | Итого   |         |                    | 14  | 12                      | 0                      |                                   |

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.

#### **лекционное занятие (1 часа(ов)):**

Предварительные сведения. Топологические пространства и непрерывные отображения. Топология, окрестности, фактор-топология, индуцированная топология, базы и предбазы топологии, примеры. Гомеоморфизмы, прямое произведение топологических пространств.

#### **практическое занятие (1 часа(ов)):**

Задачи на построение топологий на конечных множествах и описание непрерывных отображений на полученных топологических пространствах.

### Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.

#### **лекционное занятие (3 часа(ов)):**

Гладкие многообразия и гладкие отображения. Карты и атласы. Прямое произведение гладких многообразий. Подмногообразия, алгебры гладких функций на многообразиях, гладкие отображения, диффеоморфизмы. Касательный вектор, касательные и кокасательные пространства, касательные и кокасательные расслоения. Векторные и ковекторные поля. Прямые суммы и тензорные произведения расслоений. Тензорные расслоения. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, поведение векторных полей и дифференциальных форм при отображениях. Производная Ли.

#### **практическое занятие (3 часа(ов)):**

Построение атласов на сфере, торе, проективном пространстве

### Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Группы и алгебры Ли. Группы Ли и подгруппы Ли в группе Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные группы Ли, прямое и полупрямое произведения групп. Алгебры Ли, алгебра Ли векторных полей на многообразии, связь между группами Ли и алгебрами Ли, экспонента и логарифм, подалгебры и идеалы алгебр Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли, коалгебры, коумножение в коалгебре.

#### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Построение группового умножения и отображений коумножения и обращения в карте для некоторых групп.

### Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Теория представлений. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), сплетающие операторы, эквивалентные представления, подпредставления, фактор - представления групп Ли. Приводимые и вполне приводимые представления групп Ли, присоединённое и коприсоединённое представления групп Ли представления алгебр Ли. Связь между представлениями группы Ли и её алгеброй Ли, присоединённое и коприсоединённое представления алгебры Ли, прямые суммы и тензорные произведения представлений. Индуцированные представления.

**практическое занятие (3 часа(ов)):**

Построение примеров представлений и сплетающих операторов.

**Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли. Орбиты коприсоединённого представления группы Ли как фазовые пространства систем классической механики. Построение по орбите унитарного представления (метод орбит), обобщение на неоднородную ситуацию (геометрическое квантование).

**практическое занятие (3 часа(ов)):**

Построение примеров орбит. Квантование плоского фазового пространства.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

| N  | Раздел Дисциплины   | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1. | Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.                                    | 3       | 1-2             | подготовка домашнего задания          | 6                      | домашнее задание                      |
| 2. | Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.   | 3       | 2-5             | подготовка домашнего задания          | 20                     | домашнее задание                      |
| 3. | Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.                            | 3       | 6-8             | подготовка домашнего задания          | 16                     | домашнее задание                      |
| 4. | Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними | 3       | 9-13            | подготовка домашнего задания          | 20                     | домашнее задание                      |
| 5. | Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.                              | 3       | 13-18           | подготовка домашнего задания          | 20                     | домашнее задание                      |
|    | Итого   |         |                 |                                       | 82                     |                                       |

**5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

интернет-технологии, использование систем аналитических вычислений.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.**

домашнее задание, примерные вопросы:

Предварительные сведения. Топологические пространства и непрерывные отображения. Топология, окрестности, фактор-топология, индуцированная топология, базы и предбазы топологии, примеры. Гомеоморфизмы, прямое произведение топологических пространств.

### **Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.**

домашнее задание, примерные вопросы:

Гладкие многообразия и гладкие отображения. Карты и атласы. Прямое произведение гладких многообразий. Подмногообразия, алгебры гладких функций на многообразиях, гладкие отображения, диффеоморфизмы. Касательный вектор, касательные и кокасательные пространства, касательные и кокасательные расслоения. Векторные и ковекторные поля. Прямые суммы и тензорные произведения расслоений. Тензорные расслоения. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, поведение векторных полей и дифференциальных форм при отображениях. Производная Ли.

### **Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.**

домашнее задание, примерные вопросы:

Группы и алгебры Ли. Группы Ли и подгруппы Ли в группе Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные группы Ли, прямое и полупрямое произведения групп. Алгебры Ли, алгебра Ли векторных полей на многообразии, связь между группами Ли и алгебрами Ли, экспонента и логарифм, подалгебры и идеалы алгебр Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли, коалгебры, коумножение в коалгебре.

### **Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними**

домашнее задание, примерные вопросы:

Теория представлений. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), сплетающие операторы, эквивалентные представления, подпредставления, фактор-представления групп Ли. Приводимые и вполне приводимые представления групп Ли, присоединённое и коприсоединённое представления групп Ли представления алгебр Ли. Связь между представлениями группы Ли и её алгеброй Ли, присоединённое и коприсоединённое представления алгебры Ли, прямые суммы и тензорные произведения представлений. Индуцированные представления.

### **Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.**

домашнее задание, примерные вопросы:

Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли. Орбиты коприсоединённого представления группы Ли как фазовые пространства систем классической механики. Построение по орбите унитарного представления (метод орбит), обобщение на неоднородную ситуацию (геометрическое квантование).

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

#### **ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ/ЗАЧЕТУ**

1. Топология, окрестности, фактор-топология, индуцированная топология, базы и предбазы топологии.
2. Гомеоморфизмы, прямое произведение топологических пространств.
3. Карты и атласы. Прямое произведение гладких многообразий.
4. Подмногообразия, алгебры гладких функций на многообразиях, гладкие отображения, диффеоморфизмы.

5. Касательный вектор, касательные и кокасательные пространства, касательные и кокасательные расслоения. Векторные и ковекторные поля.
6. Прямые суммы и тензорные произведения расслоений. Тензорные расслоения.
7. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, поведение векторных полей и дифференциальных форм при отображениях. Производная Ли.
8. Группы Ли и подгруппы Ли в группе Ли.
9. Полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные группы Ли.
10. Прямое и полупрямое произведения групп.
11. Алгебры Ли, подалгебры и идеалы алгебр Ли, алгебра Ли векторных полей на многообразии.
12. Связь между группами Ли и алгебрами Ли.
13. Полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли.
14. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), сплетающие операторы, эквивалентные представления.
15. Подпредставления, фактор - представления групп Ли, приводимые и вполне приводимые представления групп Ли.
16. Связь между представлениями групп Ли и их алгебр Ли.
17. Прямые суммы и тензорные произведения представлений.
18. Присоединенное и коприсоединенное представления групп и алгебр Ли.
19. Орбиты коприсоединенного представления группы Ли.
20. Построение по орбите унитарного представления.

### 7.1. Основная литература:

- Хамермеш, М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам : перевод с английского / М. Хамермеш ; Пер. Ю. А. Данилова. - Издание 3-е. - Москва: Либроком, 2010. - 584 с.
- Наймарк М.А. Теория представлений групп. - М. Физматлит, 2010. - 576 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/2751/>
- Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - М.: Лань, 2009. - 288 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/177/>

### 7.2. Дополнительная литература:

- Ляпин Е. С., Аизенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп: Учебное пособие. 2-е изд., стер. СПб.: Издательство "Лань", 2010. - 272 с. <http://e.lanbook.com/view/book/528/>
- Молев А.И. Янгианы и классические алгебры Ли. - М.: Изд-во МЦНМО, 2009. - 534с.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ -  
<http://old.kpfu.ru/f6/k6/index.php?id=1>
- Теория представлений групп. Наймарк М.А. - <http://e.lanbook.com/view/book/2751/>
- Электронная библиотека - <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>
- Электронная библиотека - <http://znanium.com/>
- Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета - <http://lib.mexmat.ru/allbooks.php>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)



Освоение дисциплины "Теория представления групп и алгебр Ли с приложениями" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

учебные аудитории Института физики

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 03.04.02 "Физика" и магистерской программе Теоретическая и математическая физика .

Автор(ы):

Патрин Е.В. \_\_\_\_\_

Бахматов И.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Даишев Р.А. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.