

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.



\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

### Программа дисциплины

Дополнительные главы математического анализа Б1.В.ОД.5

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Лапин А.В. , Сидоров А.М.

**Рецензент(ы):**

Гумеров Р.Н.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 927117

Казань  
2017

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Лапин А.В. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , avlapine@mail.ru ; доцент, к.н. (доцент) Сидоров А.М. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Anatoly.Sidorov@kpfu.ru

## **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины "Дополнительные главы математического анализа" являются: формирование математической культуры студентов, развитие системного математического мышления. Дисциплина является обобщением на бесконечно-мерный случай идей алгебры, математического анализа и геометрии. Идеи, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают почти все области математики, объединяя ее в единое целое.

Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины "Дополнительные главы математического анализа" используются обучаемыми при изучении профессиональных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

1. формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании бакалавра;
2. ознакомление системы понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;
3. формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

## **2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования**

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.5 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 2 курсе, 3, 4 семестры.

Дисциплина 'Дополнительные главы математического анализа' входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла подготовки бакалавра по направлению 'Прикладная математика'.

Логическая и содержательно - методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов 'Математический анализ', 'Алгебра и геометрия'.

Требования к входным знаниям и умениям студента - знание идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины 'Дополнительные главы математического анализа' будут использоваться в дальнейшем при освоении следующих дисциплин математического и естественно-научного, профессионального циклов: 'Методы оптимизации', 'Численные методы', 'Уравнения математической физики' и др.

## **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля**

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-10 (профессиональные компетенции)	готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способность применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов
ПК-12 (профессиональные компетенции)	способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способность и готовность решать проблемы, брать на себя ответственность
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

разделы функционального анализа, которые традиционно используются при исследовании свойств дифференциальных уравнений с частными производными, при построении численных методов решения задач математической физики, и знакомство с которыми необходимо для математика-прикладника.

2. должен уметь:

практически решать примеры по функциональному анализу.

3. должен владеть:

курсами по нелинейным уравнениям с частными производными и по численным методам решения уравнений математической физики.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

полное ознакомление с теорией и методами функционального анализа.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных(ые) единиц(ы) 216 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 3 семестре; экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Системы множеств	4		3	0	3	
2.	Тема 2. Понятие меры	4		2	0	2	
3.	Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса	4		3	0	3	
4.	Тема 4. Измеримые функции	4		2	0	2	
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	4		4	0	4	
6.	Тема 6. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	4		2	0	2	
7.	Тема 7. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	4		2	0	2	
8.	Тема 8. Криволинейные и поверхностные интегралы	3		12	0	8	Письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Элементы теории поля	3		12	0	5	Контрольная работа Письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Ряды и интегралы Фурье	3		12	0	5	Контрольная работа Письменное домашнее задание
·	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	Зачет
·	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	Экзамен

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
	Итого			54	0	36	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Системы множеств

#### **лекционное занятие (3 часа(ов)):**

Кольца и алгебры. Операции в кольце множеств. Полукольца и полуалгебры. Свойства полуколец.

#### **лабораторная работа (3 часа(ов)):**

Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.

### Тема 2. Понятие меры

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Основные свойства меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.

### Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса

#### **лекционное занятие (3 часа(ов)):**

Внешняя мера. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега. Сигма-алгебра измеримых множеств.

#### **лабораторная работа (3 часа(ов)):**

Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой.

### Тема 4. Измеримые функции

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определения и базовые свойства измеримых функций. Простые функции и критерий измеримости. Теорема Егорова.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Сходимости почти всюду. Сходимость почти равномерная (по Егорову). Сходимость по мере.

### Тема 5. Интеграл Лебега

#### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Теоремы Лебега, Б. Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла.

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Интеграл Лебега на прямой. Сравнение с собственным и несобственным интегралом Римана. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства Лебега.

### Тема 6. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определения и примеры пространств. Сходящиеся последовательности, открытые и замкнутые множества. Сепарабельные пространства. Полные пространства.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Пространство линейных ограниченных операторов.

### Тема 7. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортогональное разложение пространства. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора.

**Тема 8. Криволинейные и поверхностные интегралы**

**лекционное занятие (12 часа(ов)):**

Криволинейные интегралы первого и второго родов и их свойства. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Поверхностные интегралы первого и второго родов и их свойства.

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов. Вычисление площадей и объемов

**Тема 9. Элементы теории поля**

**лекционное занятие (12 часа(ов)):**

Градиент. Дивергенция и вихрь векторного поля. Поток вектора через поверхность. Циркуляция вектора. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Соленоидальные и потенциальные векторные поля.

**лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Решение задач на нахождение основных объектов теории поля.

**Тема 10. Ряды и интегралы Фурье**

**лекционное занятие (12 часа(ов)):**

Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке. Понятие интеграла Фурье. Представление функции в виде интеграла Фурье. Понятие преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье.

**лабораторная работа (5 часа(ов)):**

Решение задач на разложение функций в тригонометрический ряд Фурье и представление функций интегралом Фурье.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
8.	Тема 8. Криволинейные и поверхностные интегралы	3		подготовка домашнего задания	30	письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Элементы теории поля	3		подготовка домашнего задания	14	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	16	контрольная работа
10.	Тема 10. Ряды и интегралы Фурье	3		подготовка домашнего задания	14	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	16	контрольная работа
	Итого				90	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

**Тема 1. Системы множеств**

**Тема 2. Понятие меры**

**Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса**

**Тема 4. Измеримые функции**

**Тема 5. Интеграл Лебега**

**Тема 6. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве**

**Тема 7. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве**

**Тема 8. Криволинейные и поверхностные интегралы**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов 1 и 2 рода в различных случаях

**Тема 9. Элементы теории поля**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Смена порядка интегрирования в двойном интеграле 2. Вычисление площади фигуры 3. Вычисление объема тела с использованием двойного или тройного интеграла 4. Вычисление криволинейного интеграла 5. Вычисление поверхностного интеграла 1 рода 6. Нахождение потока поля через заданную поверхность

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление криволинейных, поверхностных и кратных интегралов с помощью формул Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского, решение различных задач теории поля

**Тема 10. Ряды и интегралы Фурье**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Разложить функцию в ряд Фурье
2. Разложить функцию в ряд Фурье по синусам или по косинусам
3. Получить интеграл Фурье для заданной функции

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке.

Комплексная запись тригонометрического ряда Фурье. Интеграл Фурье.

**Тема . Итоговая форма контроля**

**Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

3 семестр

Гладкие кривые. Ориентация кривой. Длительность на кривой. Касательный вектор. Параметризация с помощью длины дуги кривой. Криволинейные интегралы первого и второго родов и их свойства. Физический смысл криволинейных интегралов первого и второго родов.. Формула Грина. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Гладкая поверхность. Касательная плоскость и нормаль. Ориентация поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго родов и их свойства.

Градиент. Дивергенция и вихрь векторного поля. Поток вектора через поверхность. Циркуляция вектора. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Соленоидальные и потенциальные векторные поля.

Понятие тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана. Формула Дирихле. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке. Комплексная запись тригонометрического ряда Фурье. Интеграл Фурье.

4 семестр

Часть 1. Теория меры и интеграл Лебега.

1. Определение кольца и полукольца множеств, перечисление их свойств.
2. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.
3. Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Перечисление основных свойств меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.
6. Определение внешней меры и измеримого множества.
7. Алгебра измеримых множеств.
8. Определения и базовые свойства измеримых функций.
9. Критерий измеримости функции через предел простых функций.
10. Эквивалентные функции, измеримость.
11. Сходимость почти всюду, измеримость предела.
12. Сходимость почти всюду, "почти равномерная" (по Егорову) и по мере. Связь между ними.
13. Определение интеграла Лебега от простой функции.
14. Общее определение интеграла Лебега и его корректность.
15. Перечисление основных свойств интеграла: линейность, интегрирование неравенств, интегрируемость ограниченной и мажорируемой функции.
16. 1-ая теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега (прямое утверждение).
17. Формулировка 2-ой теоремы о счетной аддитивности интеграла Лебега (обратное утверждение).
18. Формулировка результата об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

19. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

20. Формулировка теорем Б. Леви и Фату.

Часть 2.

1. Определения и примеры нормированных пространств.

2. Последовательности в нормированном пространстве, открытые и замкнутые множества. Сепарабельные и полные пространства (пространства Банаха).

3. Теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах.

4. Линейные и подпространства нормированного пространства.

5. Скалярное произведение. Примеры евклидовых пространств. Сходимость, ограниченность. Гильбертовы пространства.

6. Ортогональное разложение гильбертова пространства.

7. Ортогональные системы и ряды Фурье.

8. Линейные операторы в нормированных пространствах; непрерывность и ограниченность

9. Пространство линейных непрерывных операторов; определение, полнота.

10. Обратный оператор. Лемма о существовании обратного линейного оператора к линейному оператору.

11. Обратный оператор. Две теоремы об ограниченности обратного оператора.

12. Линейные непрерывные функционалы, сопряженное пространство.

13. Теорема Хана-Банаха (формулировка) и следствия.

14. Теорема Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.

15. Второе сопряженное пространство.

16. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

### 7.1. Основная литература:

1. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / А. Н. Шерстнев. - Изд. 5-е. - Казань : Казанский государственный университет, 2009. - URL:

[http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf)

2. Сидоров А.М. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

[Электронный ресурс] : Учебные пособия. - Казань: КФУ, 2015. - 104 с. - URL:

[https://e.lanbook.com/book/72824#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/72824#book_name)

3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 2. - СПб.: Лань, 2008. - 464 с.

ЭБС 'Лань': [https://e.lanbook.com/book/411#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/411#book_name)

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. - М.: Физматлит, 2009. - 504 с. - URL:

[https://e.lanbook.com/book/2227#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2227#book_name)

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Википедия - <http://ru.wikipedia.org>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.exponenta.ru>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Портал ресурсов по математике, алгоритмике и ИТ - <http://algolist.manual.ru/>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Дополнительные главы математического анализа" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Лапин А.В. \_\_\_\_\_

Сидоров А.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Гумеров Р.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.