

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Дифференциальная геометрия и неевклидовы пространства Б1.В.ОД.9

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика, информатика и информационные технологии в билингвальной татарско-русской среде

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Зарипов Ф.Ш.

**Рецензент(ы):**

Сушков С.В.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Агафонов А. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Зарипов Ф.Ш. кафедра высшей математики и математического моделирования отделение педагогического образования , Farhat.Zaripov@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Для освоения знаний по основным разделам классической математитки.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ОД.9 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр.

На 4 семестре, после освоения аналитической геометрии и основных разделов математического анализа.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
СПК-10 (профессиональные компетенции)	способен понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности, роль и место математики в системе наук, значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике, общекультурное значение математики, владеет основными положениями истории развития математики, эволюции математических идей и концепциями современной математической науки
СПК-11 (профессиональные компетенции)	владеет современными формализованными математическими, информационно-логическими и логико-семантическими моделями и методами представления, сбора и обработки информации для учебных целей
СПК-12 (профессиональные компетенции)	моделирования явлений и процессов, способен пользоваться построением математических моделей для решения практических проблем, понимать критерии качества математических исследований, принципы экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий, умением исследовать класс моделей, к которому принадлежит полученная модель конкретной ситуации, применяя математическую теорию
СПК-8 (профессиональные компетенции)	владеет основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
СПК-9 (профессиональные компетенции)	владеет культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой, способен понимать общую структуру математического знания, взаимосвязь между различными математическими дисциплинами, реализовывать основные методы математических рассуждений на основе общих методов научного исследования и опыта решения учебных и научных проблем, пользоваться языком математики и математической терминологией, корректно выражать и аргументировано обосновывать имеющиеся знания

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные понятия и методы дифференциальной геометрии и неевклидовых пространств, формулировки утверждений и методы их доказательства, основные области их приложений, в том числе в компьютерном моделировании геометрических объектов и явлений.

2. должен уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальной геометрии и неевклидова пространства, доказывать утверждения.

3. должен владеть:

математическим аппаратом дифференциальной геометрии и неевклидовых пространств, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Понимать идеи, цели и задачи предмета, его связь с другими математическими дисциплинами.

#### **4. Структура и содержание дисциплины/ модуля**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### **4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю**

##### **Тематический план дисциплины/модуля**

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практи- ческие занятия	Лабора- торные работы	
1.	Тема 1. Дифференциальная геометрия кривых	4	1-4	12	0	20	Письменная работа
2.	Тема 2. Дифференциальная геометрия поверхностей	4	4-8	12	0	20	
3.	Тема 3. Неевклидовы геометрии	4	8-12	12	0	14	
.	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	Экзамен
	Итого			36	0	54	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Дифференциальная геометрия кривых

#### *лекционное занятие (12 часа(ов)):*

1. Предмет курса дифференциальной геометрии. Векторная функция скалярного аргумента. Дифференцирование и интегрирование векторных функций скалярного аргумента. Годограф векторной функции. Векторные функции со специальными свойствами (Теоремы о векторных функциях постоянной длины, постоянного направления и параллельной постоянной плоскости).

#### *лабораторная работа (20 часа(ов)):*

Кривые в пространстве. Параметризованная кривая. Касательная и нормаль к кривой. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности. Особые точки. Неявное задание кривой. Геометрический смысл кривизны и кручения. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения кривой.

### Тема 2. Дифференциальная геометрия поверхностей

#### *лекционное занятие (12 часа(ов)):*

1. Различные способы задания поверхности. Касательные прямые и касательные плоскости к кривой. Нормаль к поверхности. Криволинейные координаты. Линии на поверхности. 2. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Нахождение угла между кривыми на поверхности. Вычисление площади поверхности. Изгибание и наложимость. Понятие о внутренней геометрии поверхности и метрическом тензоре поверхности. (2) 3. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна линий на поверхности. (2) 4. Инварианты пары квадратичных форм. Главные кривизны и направления кривизн. Гауссова и средняя кривизны. Свойства второй квадратичной формы. Локальные свойства поверхности (Формула Эйлера и теоремы). 5. Изгибание и наложимость. Предмет внутренней геометрии поверхности. Нормальная и геодезические кривизны. Символы Кристоффеля. Уравнения геодезических. Классификация точек поверхности. 6. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро.

#### *лабораторная работа (20 часа(ов)):*

Различные способы задания поверхности. Касательные прямые и касательные плоскости к кривой. Нормаль к поверхности. Криволинейные координаты. Линии на поверхности.

### Тема 3. Неевклидовы геометрии

#### *лекционное занятие (12 часа(ов)):*

Внутренняя геометрия сферы. Отношение длины окружности на сфере к ее радиусу. Линии на сфере. 2. Стереографическая проекция сферы на плоскость. Геодезическая и нормальная кривизна параллелей и меридианов. Геодезические на сфере. Сумма углов геодезического треугольника на сфере. 3. Внутренняя геометрия псевдосферы. Отношение длины окружности на псевдосфере к ее радиусу. Линии на псевдосфере. Стереографическая проекция псевдосферы на плоскость. Геодезические линии на псевдосфере. 4. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. 5. Метрический тензор и алгебра тензоров. 6. Риманова метрика и римановы пространства.

**лабораторная работа (14 часа(ов)):**

Внутренняя геометрия сферы. Отношение длины окружности на сфере к ее радиусу. Линии на сфере.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Дифференциальная геометрия кривых	4	1-4	подготовка к письменной работе	15	Письменная работа
2.	Тема 2. Дифференциальная геометрия поверхностей	4	4-8	подготовка к письменной работе	15	Письменная работа
3.	Тема 3. Неевклидова геометрии	4	8-12	подготовка к письменной работе	6	Письменная работа
	Итого				36	

**5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;

- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи;

**6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

## **Тема 1. Дифференциальная геометрия кривых**

Письменная работа , примерные вопросы:

1. Предмет курса дифференциальной геометрии. Векторная функция скалярного аргумента. Дифференцирование и интегрирование векторных функций скалярного аргумента. Годограф векторной функции. Векторные функции со специальными свойствами(Теоремы о векторных функциях постоянной длины, постоянного направления и параллельной постоянной плоскости). (2)
2. Кривые в пространстве. Параметризованная кривая. Касательная и нормаль к кривой. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности. Особые точки. Неявное задание кривой. (2)
3. Соприкосновение кривых. Соприкосновение кривой и поверхности. Соприкасающаяся плоскость. (2)
4. Основной (сопровождающий) трехгранник кривой, заданной параметрически. Длина дуги как параметр. Натуральная параметризация кривой. (2)
5. Вывод формул Серре-Френе. Примеры. Разложение производных по натуральному параметру. (2)
6. Геометрический смысл кривизны и кручения. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения кривой. (2)

## **Тема 2. Дифференциальная геометрия поверхностей**

Письменная работа , примерные вопросы:

1. Различные способы задания поверхности. Касательные прямые и касательные плоскости к кривой. Нормаль к поверхности. Криволинейные координаты. Линии на поверхности. (2)
2. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Нахождение угла между кривыми на поверхности. Вычисление площади поверхности. Изгибание и наложимость. Понятие о внутренней геометрии поверхности и метрическом тензоре поверхности. (2)
3. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна линий на поверхности. (2)
4. Инварианты пары квадратичных форм. Главные кривизны и направления кривизн. Гауссова и средняя кривизны. Свойства второй квадратичной формы. Локальные свойства поверхности (Формула Эйлера и теоремы). (2)
5. Изгибание и наложимость. Предмет внутренней геометрии поверхности. Нормальная и геодезические кривизны. Символы Кристоффеля. Уравнения геодезических. Классификация точек поверхности. (2)
6. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро. (2)

## **Тема 3. Неевклидовы геометрии**

Письменная работа , примерные вопросы:

1. Внутренняя геометрия сферы. Отношение длины окружности на сфере к ее радиусу. Линии на сфере. (2)
2. Стереографическая проекция сферы на плоскость. Геодезическая и нормальная кривизна параллелей и меридианов. Геодезические на сфере. Сумма углов геодезического треугольника на сфере. (2)
3. Внутренняя геометрия псевдосферы. Отношение длины окружности на псевдосфере к ее радиусу. Линии на псевдосфере. Стереографическая проекция псевдосферы на плоскость. Геодезические линии на псевдосфере. (2)
4. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. (2)
5. Метрический тензор и алгебра тензоров. (2)
6. Риманова метрика и римановы пространства. (2)

## **Итоговая форма контроля**

экзамен (в 4 семестре)

Примерные вопросы к экзамену:

1. Векторная функция скалярного аргумента. Годограф векторной функции. Векторные функции со специальными свойствами(Теоремы о векторных функциях постоянной длины, постоянного направления и параллельной постоянной плоскости).
2. Кривые в пространстве. Параметризованная кривая. Касательная и нормаль к кривой. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности. Особые точки. Неявное задание кривой.
3. Соприкосновение кривых. Соприкосновение кривой и поверхности. Соприкасающаяся плоскость.
4. Основной (сопровождающий) трехгранник кривой, заданной параметрически. Длина дуги как параметр. Натуральная параметризация кривой. (2)

5. Вывод формул Серре-Френе. Примеры. Разложение производных по натуральному параметру.
6. Геометрический смысл кривизны и кручения. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения кривой.
7. Различные способы задания поверхности. Касательные прямые и касательные плоскости к кривой. Нормаль к поверхности. Криволинейные координаты. Линии на поверхности.
8. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Нахождение угла между кривыми на поверхности. Вычисление площади поверхности. Изгибание и наложимость. Понятие о внутренней геометрии поверхности и метрическом тензоре поверхности.
9. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна линий на поверхности.
10. Инварианты пары квадратичных форм. Главные кривизны и направления кривизн. Гауссова и средняя кривизны. Свойства второй квадратичной формы. Локальные свойства поверхности (Формула Эйлера и теоремы).
11. Изгибание и наложимость. Предмет внутренней геометрии поверхности. Нормальная и геодезические кривизны.
12. Символы Кристоффеля. Уравнения геодезических. Классификация точек поверхности.
13. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро.
14. Внутренняя геометрия сферы. Отношение длины окружности на сфере к ее радиусу. Линии на сфере.
15. Стереографическая проекция сферы на плоскость. Геодезическая и нормальная кривизна параллелей и меридианов.
16. Геодезические на сфере. Сумма углов геодезического треугольника на сфере.
17. Внутренняя геометрия псевдосферы. Отношение длины окружности на псевдосфере к ее радиусу. Линии на псевдосфере. Стереографическая проекция псевдосферы на плоскость. Геодезические линии на псевдосфере.
18. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского.
19. Метрический тензор и алгебра тензоров.
20. Риманова метрика и римановы пространства.

### 7.1. Основная литература:

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии./ Изд-во Лань, 2010. - 512с. - ISBN 978-5-8114-0966-2. - <http://e.lanbook.com/view/book/617/>
2. Розендорн Э.Р. Задачи по дифференциальной геометрии./ Изд-во Физматлит, 2008. - 144с. - ISBN: 978-5-9221-0821-8- <http://e.lanbook.com/view/book/2295/>
3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии ./ Изд-во Лань, 2010. - 512с. - ISBN978-5-8114-0966-2. <http://e.lanbook.com/view/book/617/>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Шаров, Г.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.С. Шаров, А.М. Шелехов, М.А. Шестакова. - Электрон. дан. - Москва : МЦНМО, 2005. - 112 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9440>
2. Скопенков, А.Б. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие - Электрон. дан. - Москва : МЦНМО, 2010. - 72 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9416>



### 3. Сизый, С.В. Лекции по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие

- Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2007. - 346 с. - Режим доступа:

<https://e.lanbook.com/book/2320>

#### 7.3. Интернет-ресурсы:

[http://l49-60-100.cn.ru/www.ph4s.ru/book\\_mat\\_difgeom.html](http://l49-60-100.cn.ru/www.ph4s.ru/book_mat_difgeom.html) -

<http://www.twirpx.com/files/mathematics/algebra/difgeo/>

книги по дифференциальной геометрии и неевклидовым пространствам -

[http://l49-60-100.cn.ru/www.ph4s.ru/book\\_mat\\_difgeom.html](http://l49-60-100.cn.ru/www.ph4s.ru/book_mat_difgeom.html)

литература по дифференциальной геометрии - <https://eek.diary.ru/p165971703.htm>

Учебные материалы по дифференциальной геометрии МГУ -

<http://dfgm.math.msu.su/materials.php>

электронная библиотека по дифференциальной геометрии и тензорному анализу -

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm>

#### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Дифференциальная геометрия и неевклидовы пространства" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "БиблиоРоссика", доступ к которой предоставлен студентам. В ЭБС "БиблиоРоссика" представлены коллекции актуальной научной и учебной литературы по гуманитарным наукам, включающие в себя публикации ведущих российских издательств гуманитарной литературы, издания на английском языке ведущих американских и европейских издательств, а также редкие и малотиражные издания российских региональных вузов. ЭБС "БиблиоРоссика" обеспечивает широкий законный доступ к необходимым для образовательного процесса изданиям с использованием инновационных технологий и соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен студентам. Электронная библиотечная система "Консультант студента" предоставляет полнотекстовый доступ к современной учебной литературе по основным дисциплинам, изучаемым в медицинских вузах (представлены издания как чисто медицинского профиля, так и по естественным, точным и общественным наукам). ЭБС предоставляет вузу наиболее полные комплекты необходимой литературы в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов с соблюдением авторских и смежных прав.

#### Ресурсы ИММ

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 44.03.05 "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)" и профилю подготовки Математика, информатика и информационные технологии в билингвальной татарско-русской среде .

Автор(ы):

Зарипов Ф.Ш. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Сушков С.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.