

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Теория мартингалов Б1.В.ОД.6

Направление подготовки: 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Теория вероятностей и математическая статистика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Халиуллин С.Г.

**Рецензент(ы):**

Гумеров Р.Н.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2015

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Халиуллин С.Г. кафедры математической статистики отделение прикладной математики и информатики ,  
Samig.Haliullin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Теория мартингалов" являются: формирование математической культуры студентов, развитие системного математического мышления. Дисциплина предполагает углубленное изучение методов исследования случайных последовательностей, образующих мартингал, непрерывные мартингалы.

Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины "Теория мартингалов" используются обучаемыми при изучении профессиональных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

1. формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании бакалавра;
2. ознакомление системы понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;
3. формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.6 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.02 Прикладная математика и информатика и относится к обязательные дисциплины. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Дисциплина "Теория мартингалов" входит в вариативную часть профессионального цикла подготовки бакалавра по направлению "010400.62 Прикладная математика и информатика". Раздел В.3. ООП.

Логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов "Теория вероятностей и математическая статистика", "Теория случайных процессов".

Требования к входным знаниям и умениям студента - знание идей и методов теории вероятностей, теории случайных процессов, математической статистики.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины "Теория мартингалов" будут использоваться в дальнейшей учебе для освоения курсов "Стохастический анализ", "Волатильность финансового рынка".

Дисциплина читается на 3 курсе обучения.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
(ПК-9) (профессиональные компетенции)	способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности;

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
(ПК-1) (профессиональные компетенции)	способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой;
(ПК-2) (профессиональные компетенции)	способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
(ПК-6) (профессиональные компетенции)	способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
(ПК-8) (профессиональные компетенции)	способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

1) В области научно-исследовательской деятельности:

(ПК-1) способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой;

(ПК-2) способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;

2. должен уметь:

2) В проектной и производственно-технологической деятельности:

(ПК-6) способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (ПК-6);

(ПК-8) способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

3. должен владеть:

3) В организационно-управленческой деятельности:

(ПК-9) способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности;

4. должен демонстрировать способность и готовность:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать способность и готовность применять на практике основные методы теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

- 86 баллов и более - "отлично" (отл.);  
 71-85 баллов - "хорошо" (хор.);  
 55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);  
 54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.	6	1	0	0	3	
2.	Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.	6	2	0	0	3	
3.	Тема 3. Конечные мартингалы.	6	3	0	0	3	
4.	Тема 4. Моменты остановки.	6	4	0	0	3	
5.	Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.	6	5	0	0	3	
6.	Тема 6. Общие вероятные пространства	6	6	0	0	3	
7.	Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.	6	7	0	0	3	
8.	Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.	6	8-10	0	0	9	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
9.	Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.	6	11-12	0	0	6	
10.	Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.	6	13-14	0	0	6	
11.	Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.	6	15-16	0	0	6	
12.	Тема 12. Непрерывные мартингалы.	6	17-18	0	0	6	
	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	экзамен
	Итого			0	0	54	

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.

###### *лабораторная работа (3 часа(ов)):*

Построение конечных вероятностных пространств и их разбиений. Исследование связи разбиений и алгебр на конечном вероятностном пространстве.

##### Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.

###### *лабораторная работа (3 часа(ов)):*

Определение условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно разбиений и изучение их свойств.

##### Тема 3. Конечные мартингалы.

###### *лабораторная работа (3 часа(ов)):*

Определение мартингалов. Свойства и примеры мартингалов.

##### Тема 4. Моменты остановки.

###### *лабораторная работа (3 часа(ов)):*

Моменты остановки относительно последовательности разбиений, их свойства.

##### Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.

###### *лабораторная работа (3 часа(ов)):*

Определение субмартингалов и супермартингалов. Теорема Дуба о разложении.

##### Тема 6. Общие вероятные пространства

###### *лабораторная работа (3 часа(ов)):*

Определение и свойства абстрактных вероятностных пространств.

##### Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.

**лабораторная работа (3 часа(ов)):**

Определение условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-подалгебр и изучение их свойств.

**Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.**

**лабораторная работа (9 часа(ов)):**

Общее определение мартингалов на фильтрованном вероятностном пространстве, свойства и примеры.

**Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.**

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Доказательство эквивалентности понятий обобщенного мартингала, локального мартингала и мартингал-преобразования. Игровые практики, использующие мартингальную стратегию.

**Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.**

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Более глубокие свойства мартингалов. Тождество Ввальда.

**Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.**

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Теоремы о сходимости мартингалов, супермартингалов.

**Тема 12. Непрерывные мартингалы.**

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Общее понятие непрерывного мартингала.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.	6	1	чтение дополнительной литературы по элементарной теории вероятностей	3	письменный отчет
2.	Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.	6	2	чтение дополнительной литературы по элементарной теории вероятностей	3	письменный отчет
3.	Тема 3. Конечные мартингалы.	6	3	решение задач по теории условных математических ожиданий и конечным мартингалам	3	домашняя контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
4.	Тема 4. Моменты остановки.	6	4	чтение дополнительной литературы по оптимальной остановке в дискретном случае	3	письменный отчет
5.	Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.	6	5	расширение понятия мартингала, теоремы о разложении супермартингала	3	письменный отчет
6.	Тема 6. Общие вероятные пространства	6	6	подготовка к контрольной точке по пройденному материалу	3	контрольная точка
7.	Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.	6	7	чтение дополнительной литературы по теории условных математических ожиданий и мартингалам в общем сл	3	письменный отчет
8.	Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.	6	8-10	разбор доказанных на занятиях теорем	9	письменный отчет
9.	Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.	6	11-12	разбор доказанных на занятиях теорем	6	письменный отчет
10.	Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.	6	13-14	разбор доказанных на занятиях теорем	6	письменный отчет
11.	Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.	6	15-16	разбор доказанных на занятиях теорем	6	письменный отчет



N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
12.	Тема 12. Непрерывные мартингалы.	6	17-18	чтение дополнительной литературы по теории условных математических ожиданий и мартингалам в общем сл	6	подготовка к контрольной точке
	Итого				54	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Конечные вероятностные пространства и построения над ними"

### Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Условные математические ожидания относительно разбиений"

### Тема 3. Конечные мартингалы.

домашняя контрольная работа , примерные вопросы:

контрольная работа с решением задач по теории конечных вероятностных пространств

### Тема 4. Моменты остановки.

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Марковские моменты и моменты остановки"

#### **Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.**

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Разложение Дуба субмартингала (супермартингала)"

#### **Тема 6. Общие вероятные пространства**

контрольная точка , примерные вопросы:

контрольная работа с решением задач по теории конечных мартиггалов

#### **Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.**

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Общее понятие условного математического ожидания"

#### **Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартиггал, супермартингал и субмартингал.**

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Общее понятие мартиггала"

#### **Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартиггал, локальный мартиггал, мартиггальное преобразование.**

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Мартиггальное преобразование"

#### **Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.**

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Тождество Вальда"

#### **Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартиггалов.**

письменный отчет , примерные вопросы:

реферат по теме "Среднее число пересечений заданного уровня мартиггалом"

#### **Тема 12. Непрерывные мартигалы.**

подготовка к контрольной точке , примерные вопросы:

контрольная работа с решением задач по общей теории мартиггалов

#### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Всего по текущей работе студент может набрать 50 баллов.

Студент допускается к экзамену, если он набрал по текущей работе не менее 27,5 баллов.

Минимальное количество баллов по каждому из видов текущей работы составляет половину от максимального.

1. Что такое разбиение?
2. Как определяется условная вероятность относительно разбиения?
3. Как определяется условное математическое ожидание относительно разбиения?
4. Какие свойства имеет условное математическое ожидание?
5. Можно ли разбиению сопоставить некоторую алгебру?
6. Можно ли сопоставить алгебре некоторое разбиение?
7. Что такое мартиггал?
8. Сделать вывод из примера 1 - какие последовательности образуют мартиггал?
9. Сделать вывод из примера 2 - какие последовательности образуют мартиггал?
10. Дать полное описание конечных мартиггалов.

11. Для каких последовательностей случайных величин применимо разложение Дуба?
12. Что такое квадратичная вариация мартингала?
13. Что такое мартингал-разность?
14. Как связаны мартингал и мартингал-разность?
15. Что такое мартингальное преобразование и локальный мартингал?
16. Что дает определение мартингального преобразования?
17. Общее определение условного математического ожидания и его свойства. Существование условного математического ожидания.
18. Общее определение мартингала.
19. Марковские моменты и их свойства. Примеры.
20. Теорема о замене времени на случайный момент.
21. Тождество Вальда.
22. Теоремы о сходимости мартингалов.
23. Понятие непрерывного мартингала. Примеры.

### 7.1. Основная литература:

1. Ширяев А. Н. Вероятность - 1. - [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев. - Москва: МЦНМО, 2007. - 552 с.  
ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9448](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9448)
2. Ширяев А. Н. Вероятность - 2. - [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев. - Москва: МЦНМО, 2007. - 416 с.  
ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9449](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9449)
3. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей: учебное пособие. - М.: МЦНМО, 2006. - 416 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/9447/>
4. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени. - М.: МЦНМО, 2010. - 560 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/9302/>
5. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. - М.: Физматлит, 2011. - 620 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/2742/>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Чжун К.Л., АитСахлия Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. - 455 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/50548/>
2. Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей и случайные процессы. - м.: МЦНМО, 2014. - 408 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/56404/>
3. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. - М.: МЦНМО, 2014. - 294 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/56414/>
4. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. - 320 с.  
ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/8716/>
5. Свешников А.А. Прикладные методы теории вероятностей.- СПб.: Лань, 2012. - 480 с.  
ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3184](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3184)

6. Свешников А.А. Прикладные методы теории марковских процессов.- СПб.: Лань, 2007. - 192 с.

ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=590](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=590)

7. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций.- СПб.: Лань, 2011. - 464 с.

ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=656](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=656)

### **7.3. Интернет-ресурсы:**

дополнительная литература - <http://lib.mexmat.ru/books/48601>

место мартиггалов в теории вероятностей -

[http://www.krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/matematika/VEROYATNOSTE\\_TEORIYA.html?page=0,10](http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/VEROYATNOSTE_TEORIYA.html?page=0,10)

некоторые применения мартиггалов -

[http://bookzie.com/book\\_860\\_glava\\_27\\_4.3.\\_PRAVOVOE\\_REGULIROVANIE\\_NA.html](http://bookzie.com/book_860_glava_27_4.3._PRAVOVOE_REGULIROVANIE_NA.html)

финансы и матрингалы - [http://nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/\\_\\_\\_12265.pdf](http://nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/___12265.pdf)

что такое мартиггал - <http://articles.mql4.com/ru/288>

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Теория мартиггалов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

П

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Теория вероятностей и математическая статистика .

Автор(ы):

Халиуллин С.Г. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Гумеров Р.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.