МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт вычислительной математики и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.

______________ "__" ______________20___ г.

подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины

Прикладной функциональный анализ Б1.В.ОД.1

Направление подготовки: 01.04.02 - Прикладная математика и информатика
Профиль подготовки: Методы прикладной математической статистики
Квалификация выпускника: магистр
Форма обучения: очное
Язык обучения: русский

Автор(ы):
Сидоров А.М.
Рецензент(ы):
Турилова Е.А.

СОГЛАСОВАНО:
Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.
Протокол заседания кафедры No ___ от "____" ___________ 201__г
Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:
Протокол заседания УМК No ____ от "____" ___________ 201__г

Регистрационный No 937517

Казань
2017

Содержание

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Сидоров А.М. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Anatoly.Sidorov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоение дисциплины являются: формирование математической культуры, развитие системного математического мышления. Дисциплина является обобщением на бесконечно-мерный случай идей алгебры, математического анализа и геометрии. Идеи, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают почти все области математики, объединяя ее в единое целое.

Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины, используются обучаемыми при изучении профессиональных дисциплин, а также при выполнении квалификационных работ.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

1. Формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании;
2. Ознакомление системы понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;
3. Формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.1 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.04.02 Прикладная математика и информатика и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 1 курсе, 1 семестр.

Требования к входным знаниям и умениям магистранта - знание идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины, используются в дальнейшем при освоении дисциплин математического и естественно-научного, профессионального циклов.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-1 (общекультурные компетенции)	способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу
ОК-2 (общекультурные компетенции)	готовность действовать в нестандартных ситуациях, нести социальную и этическую ответственность за принятые решения
ОК-3 (общекультурные компетенции)	готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала
ОПК-4 (профессиональные компетенции)	способность использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-11 (профессиональные компетенции)	способность разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способность разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности
ПК-6 (профессиональные компетенции)	способность организовывать процессы корпоративного обучения на основе технологий и развития корпоративных баз знаний
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность к преподаванию математических дисциплин и информатики в образовательных организациях основного общего, среднего общего, среднего профессионального и высшего образования

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

разделы функционального анализа, которые традиционно используются при исследовании свойств дифференциальных уравнений с частными производными, при построении численных методов решения задач математической физики, и знакомство с которыми необходимо для математика-прикладника.

2. должен уметь:

практически решать примеры по функциональному анализу.

3. должен владеть:

курсами по нелинейным уравнениям с частными производными и по численным методам решения уравнений математической физики.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

полное ознакомление с теорией и методами функционального анализа.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 1 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);
71-85 баллов - "хорошо" (хор.);
55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);
54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Понятие метрического пространства. Примеры. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Принцип сжатых отображений Банаха. Примеры.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Понятие гильбертова пространства. Примеры.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Ортогональность. Теорема о проекции вектора на подпространство.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Линейные операторы. Непрерывность, ограниченность, норма оператора.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
8.	Тема 8. Обратные операторы. Теорема Банаха.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Теорема Хана-Банаха и ее следствие.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Сопряженное пространство. Рефлексивные пространства. Слабая сходимость в линейных нормированных пространствах.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
12.	Тема 12. Понятие сопряженного оператора. Самосопряженные операторы. Теорема Рэлея.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
13.	Тема 13. Вполне непрерывные операторы.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
14.	Тема 14. Резольвентное множество и спектр линейного ограниченного оператора.	1		2	0	0	Письменное домашнее задание
.	Тема . Итоговая форма контроля	1		0	0	0	Экзамен
	Итого			28	0	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Понятие метрического пространства. Примеры. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Неравенства Гельдера и Минковского для сумм, рядов и интегралов. Примеры метрических и линейных нормированных пространств. Сходимость в метрическом пространстве.

Тема 2. Принцип сжатых отображений Банаха. Примеры.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Доказательство принципа сжатых отображения Банаха. Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Тема 3. Понятие гильбертова пространства. Примеры.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение предгильбертова и гильбертова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Примеры гильбертовых пространств.

Тема 4. Ортогональность. Теорема о проекции вектора на подпространство.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Доказательство теоремы Леви о проекции вектора на подпространство.

Тема 5. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Понятие ортонормированной системы. Примеры ортонормированных систем. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

Тема 6. Линейные операторы. Непрерывность, ограниченность, норма оператора.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение линейного ограниченного оператора. Примеры линейных ограниченных операторов.

Тема 7. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

Тема 8. Обратные операторы. Теорема Банаха.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Понятие обратного оператора. Теоремы об обратных операторах. Примеры.

Тема 9. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение линейного ограниченного функционала. Примеры. Доказательство теоремы Рисса.

Тема 10. Теорема Хана-Банаха и ее следствие.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Доказательство теоремы Хана-Банаха и ее следствия. Пример.

Тема 11. Сопряженное пространство. Рефлексивные пространства. Слабая сходимость в линейных нормированных пространствах.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Понятие сопряженного пространства. Понятие рефлексивного пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивного пространства. Понятие слабой сходимости.

Тема 12. Понятие сопряженного оператора. Самосопряженные операторы. Теорема Рэлея.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение сопряженного и само сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Примеры. Доказательство теоремы Рэлея.

Тема 13. Вполне непрерывные операторы.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение и основные свойства вполне непрерывных операторов. Примеры.

Тема 14. Резольвентное множество и спектр линейного ограниченного оператора.
лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение резольвентного множества и спектра линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра линейного ограниченного оператора.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Понятие метрического пространства. Примеры. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
2.	Тема 2. Принцип сжатых отображений Банаха. Примеры.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
3.	Тема 3. Понятие гильбертова пространства. Примеры.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
4.	Тема 4. Ортогональность. Теорема о проекции вектора на подпространство.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
5.	Тема 5. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
6.	Тема 6. Линейные операторы. Непрерывность, ограниченность, норма оператора.	1		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
7.	Тема 7. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.	1		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
8.	Тема 8. Обратные операторы. Теорема Банаха.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
9.	Тема 9. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.	1		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
10.	Тема 10. Теорема Хана-Банаха и ее следствие.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
11.	Тема 11. Сопряженное пространство. Рефлексивные пространства. Слабая сходимость в линейных нормированных пространствах.	1		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
12.	Тема 12. Понятие сопряженного оператора. Самосопряженные операторы. Теорема Рэлея.	1		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
13.	Тема 13. Вполне непрерывные операторы.	1		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
14.	Тема 14. Резольвентное множество и спектр линейного ограниченного оператора.	1		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
	Итого				44	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствие с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому мате-риалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).

2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;

- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Понятие метрического пространства. Примеры. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.

домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка выполнимости аксиом метрики и нормы для данных пространств. Является ли ρ метрикой на X, если 1. $X=R,\rho(x,y)=\sqrt{(|x-y|)}$; 2. $X=R,\rho(x,y)=|x-y|^2$; 3. $X=R,\rho(x,y)=\min\{1,|x-y|\}$; 4. $X=R,\rho(x,y)=|\tan^{(-1)}x-\tan^{(-1)}y|$; 5. $X=R^2,\rho(x,y)=|x_1-y_1|+2|x_2-y_2|$ для $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in R^2$; 6. $X=R^2,\rho(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ для $(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in R^2$; 7. $X=R^n,\rho(x,y)=\sum_{k=1}^n |x_k-y_k|$ для $x=(x_1,?,x_n),y=(y_1,?,y_n)\in R^n$; 8. $X=R^n,\rho(x,y)=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n (x_k-y_k)^2/k^2\right)}$ для $x=(x_1,?,x_n),y=(y_1,?,y_n)\in R^n$; 9. X- множество всевозможных последовательностей $x=(x_n)$ действительных чисел, для которых $\sum_{n=1}^\infty x_n^2<+\infty$, $\rho(x,y)=\sqrt{\left(\sum_{n=1}^\infty 1/n\,(x_n-y_n)^2\right)}$ для $x=(x_n),y=(y_n)\in X$; 10. X - множество всех непрерывных на отрезке [a,b] функций, $\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}(e^t|x(t)-y(t)|)$ для $x=x(t),y=y(t)\in X$; 11. X - множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке [a,b] функций, $\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x'(t)-y'(t)|$ для $=x(t),y=y(t)\in X$.

Тема 2. Принцип сжатых отображений Банаха. Примеры.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1.Пусть $Ax=x+1/x$, $x\in(1;+\infty)$. Является ли A отображением сжатия ? 2.Пусть $Ax=-x(t)$, $x(t)\in C[0,1]$. Имеет ли A неподвижную точку ? 3.Пусть $Ax=|x(t)|$, $x(t)\in C[0,1]$. Имеет ли A неподвижную точку ? 4. Пусть функция f(x,y) определена на множестве $[a,b]\times R$, непрерывна и обладает такой производной по y, что $0<c\le f_y'(x,y)\le d<+\infty$. Пусть $Ay=y(x)-1/d\, f(x,y(x))$? отображение пространства C[a,b] в себя. Является ли A отображением сжатия ? 5.Пусть функция f(x,y) дифференцируема на отрезке [0,1], причём $0\le f(x)\le 1$, $0\le f'(x)\le 1/2$. Имеет ли уравнение $f(x,y)=x$ решение ? 6.Пусть $f(x)\in C[a,b]$. Имеет ли уравнение $y+1/2\sin y+f(x)=0$ единственное решение $y=y(x)\in C[a,b]$? 7.Уравнение $f(x)=\lambda\int_0^x e^{(x-t)} f(t)\, dt$ имеет в пространстве $C[0,\pi]$ решение $f(x)=0$. Будет ли это решение единственным ?

Тема 3. Понятие гильбертова пространства. Примеры.

домашнее задание , примерные вопросы:

ЭЛЕКТРОННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КФУ

Проверка выполнимости аксиом скалярного произведения для данных пространств. 1.Является ли в линейном пространстве непрерывных на отрезке [a,b] функций отображение f(x,y)=∫_a^b▒〖x(t)y(t) □(24&dt)〗 скалярным произведением ? 2.Является ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке [a,b] функций отображение f(x,y)=∫_a^b▒(x(t)y(t)+x^' (t) y^' (t) □(24&dt)) скалярным произведением ? 3.Является ли в линейном пространстве R^" отображение f(x,y)=∑_(k=1)^n▒(x_k+y_k) , где x=(x_1,?,x_n), y=(y_1,?,y_n), скалярным произведением ? 4.Пусть α=(α_n) ? фиксированная последовательность положительных чисел, X ? линейное пространство всех числовых последовательностей x=(x_n) таких, что сходится ряд ∑_(n=1)^∞▒〖α_n x_n^2 〗. Пусть (x,y)=∑_(n=1)^∞▒〖α_n x_n y_n 〗, где, x=(x_n),y=(y_n)∈X. Установив, что отображение (x,y) является скалярным произведением в X, ответить на вопрос: является ли X с этим скалярным произведением гильбертовым пространством ? 5.Является ли линейное нормированное пространство l^2 предгильбертовым пространством ?

Тема 4. Ортогональность. Теорема о проекции вектора на подпространство.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Пусть M={x=(x_k)∈l^2 ├| ∑_(k=1)^n▒〖x_k=0〗┤ }, где n ? фиксированное число. Является ли M подпространством гильбертова пространства l^2 ? 2. Пусть M ? произвольное множество гильбертова пространства H. Верно ли, что M=M^(⊥⊥) ? 3. Пусть M ? подпространство гильбертова пространства H. Верно ли, что M=M^(⊥⊥) ? 4. Пусть M_1 и M_2 ? два множества в гильбертовом пространстве H, причём M_1⊂M_2. Верно ли, что M_1^⊥⊂M_2^⊥ ? 5. В предгильбертовом пространстве всех непрерывных на отрезке [-1,1] функций со скалярным произведением (x,y)=∫_(-1)^1▒〖x(t)y(t) □(24&dt)〗 рассмотрим множество M, состоящее из функций, равных нулю в точке t=0. Верно ли, что M^⊥ состоит из функций этого пространства таких, что x(t)=0 для всех t∈[-1,1] ?

Тема 5. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

домашнее задание , примерные вопросы:

1. Является ли ортогональной в гильбертовом пространстве H система (l_n), если 1.1 H=l^2,l_n=(〖(0,?,0,)〗┬(n-1) 1,0,?),n∈N; 1.2 H=L^2 [a,b],l_n (t)=1/√(b-a) e^(2πin(t-a)/(b-a)),n=0,1,2,?; 1.3 H=L^2 [0,π],lnt sin〖(2n-1) 1/2,n=1,2,?〗 ? 2. Пусть α_n ? коэффициенты Фурье функции x(t)=t^λt по системе l_n (t)=e^2πint, n∈Z, гильбертова пространства L^2 [0,1]. Верно ли, что α_n=(e^λ-1)/(λ-2πin), где λ≠2πin ?

Тема 6. Линейные операторы. Непрерывность, ограниченность, норма оператора.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Пусть E ? линейное нормированное пространство. Является ли оператор A:E→E линейным, если 1.1 E=l^2,Ax=(0,x_1,x_2,?),x=(x_1,x_2,?)∈l^2; 1.2 E=l^2,Ax=(x_2,x_3,?),x=(x_1,x_2,?)∈l^2; 1.3 E=l^2,Ax=(x_1,x_2^2,x_3^3,?,x_n^n,?),x=(x_1,x_2,〖?,x〗_n,?)∈l^2; 1.4 E=L^2 [0,2π],(Ax)(t)=∫_0^2π▒sin〖(t+τ)x(τ) □(24&dτ). 2. Является ли оператор A:C[0,1]→C[0,1], где (Ax)(t)=x(t^(1/7)) непрерывным ? 3. Является ли оператор A:L^2 [0,1]→L^2 [0,1], где (Ax)(t)=t∫_0^1▒x(τ)dτ ? 4. Является ли оператор A:C[0,1]→C[0,1], где (Ax)(t)=∫_0^t▒〖x^2 (τ)dτ〗 непрерывным ?

Тема 7. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Сходится ли последовательность (A_n)⊂L(l^2), где A_n x=(x_1/n,?x_k/n,?) для x=(x_k)∈l^2, к нулевому оператору по норме ? 2. Сходится ли последовательность (A_n)⊂L(l^2), где A_n x=(〖(0,?0)〗┬n,x_1,x_2,?) для x= (x_k)∈l^2 поточечно ? 3. Сходится ли последовательность (A_n)⊂L(l^2), где A_n x=(x_(n+1),x_(n+2),?) для x= (x_k)∈l^2 поточечно ? 4. Сходится ли последовательность (A_n)⊂L(C[0,1]), где (A_n x)(t)=t^" (1-t)x(t) для x=x(t)∈C[0,1], к нулевому оператору по норме ? 5. Сходится ли последовательность (A_n)⊂L(C[0,1]), где (A_n x)(t)=x(t^(1+1/n)) для x=x(t)∈C[0,1] и единичному оператору по норме ? 6. Сходится ли последовательность (A_n)⊂L(C[0,1]), где (A_n x)(t)=n∫_t^(t+1/n)▒x(τ)dτ для x=x(t)∈C[0,1] к единичному оператору поточечно ?

Тема 8. Обратные операторы. Теорема Банаха.

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач на нахождение обратных операторов. 1. Пусть A и B ? линейные операторы в линейном пространстве E, причём операторы A и BA имеют обратные. Существует ли оператор B^(-1) ? 2. Пусть A ? оператор в C[0,1], действующий по формуле (Ax)(t)=∫_0^t▒x(τ)dτ, t∈[0,1]. Существует ли оператор A^(-1) ? 3. Существует ли ограниченный обратный оператор к оператору A:l^2→l^2, если для x=(x_k)∈l^2 3.1 Ax=(x_3,x_1,x_2,x_4,x_5,?); 3.2 Ax=(x_1+2x_2,x_1-x_2,x_3,x_4,?) ? 4. Пусть A ? оператор в C[-1,1], действующий по формуле (Ax)(t)=x(t^2), t∈[-1,1]. Существует ли A^(-1) ?

Тема 9. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1.Является ли f(x) линейным функционалом на линейном нормированном пространстве E, если 1.1 f(x)=∫_0^1▒x^2 (t)dt, E=L^2 [0,1]; 1.2 f(x)=∫_0^1▒x(t) sint dt, E=C[0,1]; 1.3 f(x)=x(t_0), t_0∈[0,1], E=C[0,1]; 1.4 f(x)=∫_0^1▒x(t^2)dt, E=C[0,1]; 1.5 f(x)=∫_0^1▒t|x(t)|dt, E=C[0,1] ? 2. Является ли f(x) ограниченным функционалом на линейном нормированном пространстве E, если 2.1 f(x)=‖x‖, E=C[0,1]; 2.2 f(x)=∫_0^1▒x(t) sin^2t dt, E=L^2 [0,1]; 2.3 f(x)=∫_0^1▒t|x(t)|dt, E=C[0,1] ?

Тема 10. Теорема Хана-Банаха и ее следствие.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Пусть E ? линейное пространство всех упорядоченных пар x=(x_1,x_2) вещественных чисел с нормой ‖x‖=|x_1 |+|x_2 |. Пусть на линеале L={x=(x_1,x_2)∈E ├|x_1+2x_2=0┤ } задан функционал f_0 (x)=x_1/3. Является ли функционал f(x)=2/9 (x_1-x_2) продолжением f_0 на все E с сохранением нормы ? 2. Пусть x_0 (t)∈C[0,1] фиксировано, L={λx_0 (t)}, где λ∈R. На L задан функционал f_0 формулой f_0 (x)=λ, если x=λx_0. По теореме Хана-Банаха f_0 может быть продолжен на всё пространство C[0,1] с сохранением нормы. Однозначно ли такое продолжение, если 2.1 x_0 (t)=t; 2.2 x_0 (t)=1-2t ?

Тема 11. Сопряженное пространство. Рефлексивные пространства. Слабая сходимость в линейных нормированных пространствах.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1.Является ли подпространство рефлексивного пространства рефлексивным ? 2. Пусть E ? рефлексивное линейное нормированное пространство, M ? подпространство в E, M^⊥={f∈E^* ├|f(x)=0 для любого x∈M┤ }. Верно ли, что (M^⊥)^⊥=M ? 3. Является линейное пространство со всех сходящихся к нулю числовых последовательностей x=(x_k) с нормой ‖x‖=max┬(k∈N)|x_k | рефлексивным пространством ? 4. Сходится ли слабо в пространстве l^2 последовательность x_n=((0,?,0)┬(n-1),1,1/2,1/3, ?) ?

Тема 12. Понятие сопряженного оператора. Самосопряженные операторы. Теорема Рэлея.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Пусть H ? гильбертово пространство, A,B∈L(H). Какое из следующих утверждений верно 1.1 (AB)^*=A^* B^*, 1.2 (AB)^*=B^* A^* ? 2. Пусть H ? комплексное гильбертово пространство, A∈L(H). Верно ли, что оператор λ(A+A^*), где λ∈R, является самосопряжённым ? 3. Пусть A∈L(H). Верно ли, что ‖A^2 ‖=‖A‖^2 ? 4. Пусть (λ_n) ? ограниченная последовательность вещественных чисел, оператор A:l^2→l^2 задан формулой Ax=(λ_1 x_1,λ_2 x_2,?) для x=(x_1,x_2,?)∈l^2. Является ли оператор A самосопряжённым ? 5. Является ли оператор A:L^2 [0,1]→L^2 [0,1] самосопряжённым, если 5.1 (Ax)(t)=∫_0^1▒e^(s+t) x(s)ds; 5.2 (Ax)(t)=∫_0^t▒x(s)ds; 5.3 (Ax)(t)=tx(t) ?

Тема 13. Вполне непрерывные операторы.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Является ли вполне непрерывным оператор A:C[0,1]→C[0,1], если 1.1 (Ax)(t)=∫_0^1▒x(s)/√((t-s)^2) ds; 1.2 (Ax)(t)=∫_0^1▒x(s^2)ds; 1.3 (Ax)(t)=tx(t); 1.4 (Ax)(t)=∫_0^t▒sx(s)ds ? 2. Пусть C^2 [0,1] ? пространство дважды дифференцируемых на [0,1] функций с нормой ‖x‖=∑_(k=0)^2▒max┬(t∈[0,1])|x^((k)) (t)| . Оператор A:C^2 [0,1]→C[0,1] задан формулой (Ax)(t)=x^' (t). Является A вполне непрерывным ?

Тема 14. Резольвентное множество и спектр линейного ограниченного оператора.

домашнее задание , примерные вопросы:

Ответить на вопросы. 1. Пусть X ? банахово пространство, оператор A∈L(X) и существует A^(-1)∈L(X). Справедливо ли утверждение: если λ∈σ(A^(-1)), то 1/λ∈σ(A) ? 2. Пусть оператор A задан в вещественном пространстве C[-π,π] формулой (Ax)(t)=x(-t). Верно ли, что любое число, не равное ?1, является собственным значением оператора A ? 3. Пусть оператор A задан в комплексном пространстве C[0,2π] формулой (Ax)(t)=e^it x(t). Верно ли, что σ(A)={λ∈C ├||λ|=1┤ } ? 4. Пусть оператор A:C[0,1]→C[0,1] задан формулой (Ax)(t)=tx(t). Верно ли, что σ(A)=[0,1] ? 5. Пусть оператор A:C[0,1]→C[0,1] задан формулой (Ax)(t)=∫_0^t▒x(s)ds. Верно ли, что остаточный спектр оператора A состоит из единственной точки 0 ?

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

Вопросы к экзамену.

1. Неравенство Гельдера и Минковского для сумм рядов и интегралов.
2. Метрическое пространство (МП).
3. Предел последовательности в МП.
4. Внутренняя точка множества в МП.
5. Открытое множенство в МП.
6. Предельная точка множества в МП.
7. Замыкание множества в МП.
8. Замкнутое мнгожество в МП.
9. Фундаментальная последовательность в МП.
10. Полное МП.
11. Изометричные метрические пространства.
12. Пополнение МП.
13. Всюду плотное множество в МП.
13. Всюду плотное множество в МП.
13. Всюду плотное множество в МП.
13. Всюду плотное множество в МП.

13. Всюду плотное множество в МП.
13.Всюду плотное множество в МП.
13. Сепарабельные МП.
14. Компактное множество в МП.
15. Оператор сжатия в МП.
16. Неподвижная точка оператора.
13. Всюду плотные и нигде не плотные множества в МП.

7.1. Основная литература:

1. Сидоров А.М. Функциональный анализ: [учебное пособие]/ А.М. Сидоров.-Казань: Казанский университет, 2010.- 140 с.; 21.-Библиогр.: с. 4 (4 назв.).-ISBN 978-5-98180-834-0((в пер.)).

2. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа. [Электронный ресурс]/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев.-Электрон.дан.-СПб.:Лань, 2009.-272с.-Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/245?

category_pk=911#book_name

3. Треногин, В.А. Функциональный анализ. [Электронный ресурс] - Электрон. дан. - М. : Физматлит, 2007. - 488 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/59471 - Загл. с экрана.

4. Гуревич А.П., Корнеев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу.-СПб.: Лань, 2012.-192с. https://e.lanbook.com/book/3175#book_name

7.2. Дополнительная литература:

1. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа. .-СПб.:Лань, 2015.-400с.-Режим доступа https://e.lanbook.com/book/67481?category_pk=911#book_name

2. Бородин, П.А. Задачи по функциональному анализу. [Электронный ресурс] / П.А. Бородин, А.М. Савчук, И.А. Шейпак. - Электрон. дан. - М. : МЦНМО, 2017. - 336 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/92693 - Загл. с экрана.

7.3. Интернет-ресурсы:

Википедия - http://ru.wikipedia.org

Портал математических интернет-ресурсов - http://www.math.ru/

Портал математических интернет-ресурсов - http://www.exponenta.ru

Портал математических интернет-ресурсов - http://www.allmath.com/

Портал ресурсов по математике, алгоритмике и ИТ - http://algolist.manual.ru/

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Прикладной функциональный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" и магистерской программе Методы прикладной математической статистики .

Автор(ы):
Сидоров А.М. ____________________
"__" _________ 201 __ г.

Рецензент(ы):
Турилова Е.А. ____________________
"__" _________ 201 __ г.