

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Талорский Д.А.



\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

**Программа дисциплины**  
**Теория мартингалов Б3.В.3**

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Теория вероятностей и математическая статистика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Халиуллин С.Г.

**Рецензент(ы):**

Гумеров Р.Н.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 952316

Казань  
2016

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Халиуллин С.Г. кафедры математической статистики отделение прикладной математики и информатики ,  
Samig.Haliullin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Теория мартингалов" являются: формирование математической культуры студентов, развитие системного математического мышления. Дисциплина предполагает углубленное изучение методов исследования случайных последовательностей, образующих мартингал, непрерывные мартингалы.

Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины "Теория мартингалов" используются обучаемыми при изучении профессиональных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

1. формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании бакалавра;
2. ознакомление системы понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;
3. формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.В.3 Профессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к вариативной части. Осваивается на 3 курсе, 5 семестр.

Дисциплина "Теория мартингалов" входит в вариативную часть профессионального цикла подготовки бакалавра по направлению "010400.62 Прикладная математика и информатика". Раздел В.3. ООП.

Логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов "Теория вероятностей и математическая статистика", "Теория случайных процессов".

Требования к входным знаниям и умениям студента - знание идей и методов теории вероятностей, теории случайных процессов, математической статистики.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины "Теория мартингалов" будут использоваться в дальнейшей учебе для освоения курсов "Стохастический анализ", "Волатильность финансового рынка".

Дисциплина читается на 3 курсе обучения.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
(ПК-9) (профессиональные компетенции)	способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности;

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
(ПК-1) (профессиональные компетенции)	способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой;
(ПК-2) (профессиональные компетенции)	способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
(ПК-6) (профессиональные компетенции)	способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
(ПК-8) (профессиональные компетенции)	способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

1) В области научно-исследовательской деятельности:

(ПК-1) способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой;

(ПК-2) способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;

2. должен уметь:

2) В проектной и производственно-технологической деятельности:

(ПК-6) способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (ПК-6);

(ПК-8) способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

3. должен владеть:

3) В организационно-управленческой деятельности:

(ПК-9) способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности;

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать способность и готовность применять на практике основные методы теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

- 86 баллов и более - "отлично" (отл.);  
 71-85 баллов - "хорошо" (хор.);  
 55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);  
 54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.	6	1	0	2	0	
2.	Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.	6	2	0	2	0	
3.	Тема 3. Конечные мартингалы.	6	3	0	2	0	
4.	Тема 4. Моменты остановки.	6	4	0	2	0	
5.	Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.	6	5	0	2	0	
6.	Тема 6. Дискретные вероятные пространства	6	6	0	2	0	
7.	Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.	6	7	0	2	0	
8.	Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.	6	8-10	0	6	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
9.	Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.	6	11-12	0	4	0	
10.	Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.	6	13-14	0	4	0	
11.	Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.	6	15-16	0	4	0	
12.	Тема 12. Непрерывные мартингалы.	6	17-18	0	4	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	экзамен
	Итого			0	36	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Построение разбиений. Разбиения, порожденные случайными величинами. Алгебры, порожденные разбиениями. Связь между разбиениями и алгебрами.

##### Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Условная вероятность относительно разбиения. Два подхода к определению условных математических ожиданий относительно разбиения. УМО относительно случайной величины. Свойства.

##### Тема 3. Конечные мартингалы.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Построение конечных мартингалов. Применение свойств мартингалов для получения новых результатов. Теоремы теории вероятностей, доказываемые с помощью мартингалов.

##### Тема 4. Моменты остановки.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Определение марковских моментов и моментов остановки. Свойства и применение моментов остановки для задач оптимальной остановки наблюдений.

##### Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Теорема Дуба о разложении субмартингала (супермартингала). Понятие о неупреждающей последовательности.

##### Тема 6. Дискретные вероятные пространства

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Обобщающее занятие по темам 1-5.

**Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Основные различия в определении УМО в конечном и бесконечном случаях.

**Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.**

**практическое занятие (6 часа(ов)):**

Общее определение мартингала. Существование и свойства мартингала.

**Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.**

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Связь между понятиями мартингала, обобщенного мартингала и мартингального преобразования. Разбор соответствующей теоремы. Примеры.

**Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.**

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Марковский момент. Доказательство тождества Вальда.

**Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.**

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Теорема о числе пересечений случайной последовательностью (мартингалом) некоторого заданного уровня.

**Тема 12. Непрерывные мартингалы.**

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Определение мартингала в непрерывном времени. Некоторые свойства.

### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.	6	1	чтение дополнительной литературы по элементарной теории вероятностей	2	письменный отчет
2.	Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.	6	2	чтение дополнительной литературы по элементарной теории вероятностей	2	письменный отчет
3.	Тема 3. Конечные мартингалы.	6	3	решение задач по теории условных математических ожиданий и конечным мартингалам	2	домашняя контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
4.	Тема 4. Моменты остановки.	6	4	чтение дополнительной литературы по оптимальной остановке в дискретном случае	2	письменный отчет
5.	Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.	6	5	расширение понятия мартингала, теоремы о разложении супермартингала	2	письменный отчет
6.	Тема 6. Дискретные вероятные пространства	6	6	подготовка к контрольной точке по пройденному материалу	2	контрольная точка
7.	Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.	6	7	чтение дополнительной литературы по теории условных математических ожиданий и мартингалам в общем сл	4	письменный отчет
8.	Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.	6	8-10	разбор доказанных на занятиях теорем	4	письменный отчет
9.	Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.	6	11-12	разбор доказанных на занятиях теорем	4	письменный отчет
10.	Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.	6	13-14	разбор доказанных на занятиях теорем	4	письменный отчет
11.	Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.	6	15-16	разбор доказанных на занятиях теорем	4	письменный отчет



N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
12.	Тема 12. Непрерывные мартингалы.	6	17-18	чтение дополнительной литературы по теории условных математических ожиданий и мартингалам в общем сл	4	подготовка к контрольной точке
	Итого				36	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Конечное вероятностное пространство, разбиения и алгебры.

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Дискретные вероятностные пространства - конечный случай". Исследовать связь между разбиениями и алгебрами на конечном множестве.

### Тема 2. Условные вероятности и условные математические ожидания.

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Условные математические ожидания". Исследовать два подхода к определению условного математического ожидания. Исследовать свойства условных математических ожиданий.

### Тема 3. Конечные мартингалы.

домашняя контрольная работа, примерные вопросы:

контрольная работа с решением задач на тему "Условные вероятности и условные математические ожидания".

#### **Тема 4. Моменты остановки.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Конечные мартингалы". Исследовать понятие конечного мартингала, дать полное описание. Уметь применять технику мартингалов для решения задач.

#### **Тема 5. Понятия супермартингала и субмартингала.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Субмартингалы и супермартингалы". Теорема Дуба о разложении.

#### **Тема 6. Дискретные вероятные пространства**

контрольная точка, примерные вопросы:

контрольная работа с решением задач по темам 1-5. Решение задач, доказательство микротеорем.

#### **Тема 7. Общие понятия условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Общие понятия об условных математических ожиданиях". УМО относительно сигма-подалгебр.

#### **Тема 8. Последовательности случайных величин, образующие мартингал, супермартингал и субмартингал.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Субмартингалы, супермартингалы в общих вероятностных пространствах". Какие свойства мартингала переносятся на общий случай? Какие не переносятся?

#### **Тема 9. Стохастические и предсказуемые последовательности, обобщенный мартингал, локальный мартингал, мартингальное преобразование.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Различные характеристики мартингала".

#### **Тема 10. Замена времени на случайный момент. Тождество Вальда.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Основные результаты теории мартингалов в дискретном времени". Использование тождества Вальда для получения свойств "безобидной" игры.

#### **Тема 11. Сходимость субмартингалов и мартингалов.**

письменный отчет, примерные вопросы:

реферат по теме "Предельные теоремы" для мартингалов (субмартингалов).

#### **Тема 12. Непрерывные мартингалы.**

подготовка к контрольной точке, примерные вопросы:

контрольная работа с решением задач по темам 7-11.

#### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Всего по текущей работе студент может набрать 50 баллов.

Студент допускается к экзамену, если он набрал по текущей работе не менее 27,5 баллов.

Минимальное количество баллов по каждому из видов текущей работы составляет половину от максимального.

Вопросы к экзамену.

1. Условные вероятности относительно разбиения, свойства.
2. Условное математическое ожидание относительно разбиения и его основные свойства.
3. Телескопическое свойство условных математических ожиданий.

4. Конечные мартиггалы, примеры.
5. Описание конечных мартиггалов.
6. Моменты остановки. Теорема о среднем случайной величины со случайным индексом.
7. Теорема о баллотировке.
8. Субмартиггалы и супермартиггалы, теорема Дуба о разложении.
9. Условные математические ожидания относительно сигма-алгебр: определение и существование.
10. Свойства условных математических ожиданий относительно сигма-алгебры.
11. Последовательности случайных величин, образующих мартиггал (субмартиггал, супермартиггал). Примеры мартиггалов.
12. Понятие о справедливой (благоприятной, неблагоприятной) игре. Средняя продолжительность игры.
13. Обобщенный мартиггал, локальный мартиггал, мартиггальное преобразование, их связь.
14. Пример разложения Дуба.
15. Сохранение свойства мартиггала при замене времени на случайный момент.
16. Тождество Вальда и его применение для вычисления вероятности выигрыша и средней продолжительности игры.
17. Теорема Дуба о числе пересечений случайной последовательностью некоторого уровня.
18. Теорема Дуба о сходимости субмартиггала (мартиггала) с вероятностью единица.

### 7.1. Основная литература:

1. Ширяев А.Н. Вероятность, [Кн. 2]. Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартиггалы, марковские цепи, , 2004г.
2. Ширяев А. Н. Вероятность - 2. - [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев. Москва: МЦНМО, 2007. - 416 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9449](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9449)
3. Ширяев А.Н. Вероятность, [Кн. 1]. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы, , 2004г. (4 экз)
4. Ширяев А. Н. Вероятность - 1. - [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев. Москва: МЦНМО, 2007. - 552 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9448](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9448)
5. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. - СПб.: Лань, 2011. - 256с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2026](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2026)
6. Боровков А.А. Математическая статистика.- СПб.: Лань, 2010. - 704 с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3810](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3810)

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Свешников А.А. Прикладные методы теории вероятностей.- СПб.: Лань, 2012. - 480 с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3184](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3184)
2. Свешников А.А. Прикладные методы теории марковских процессов.- СПб.: Лань, 2007. - 192 с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=590](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=590)
3. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций.- СПб.: Лань, 2011. - 464с. ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=656](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=656)

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- дополнительная литература - <http://lib.mexmat.ru/books/48601>  
место мартиггалов в теории вероятностей - [http://www.krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/matematika/VEROYATNOSTE\\_TEORIYA.html?page=0,10](http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/VEROYATNOSTE_TEORIYA.html?page=0,10)  
некоторые применения мартиггалов - [http://bookzie.com/book\\_860\\_glava\\_27\\_4.3.\\_PRAVOVOE\\_REGULIROVANIE\\_NA.html](http://bookzie.com/book_860_glava_27_4.3._PRAVOVOE_REGULIROVANIE_NA.html)

финансы и матрингалы - [http://nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/\\_\\_\\_12265.pdf](http://nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/___12265.pdf)

что такое мартингал - <http://articles.mql4.com/ru/288>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Теория мартингалов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

П

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Теория вероятностей и математическая статистика .

Автор(ы):

Халиуллин С.Г. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Гумеров Р.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.