

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Прикладной функциональный анализ Б1.В.ОД.1

Направление подготовки: 01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Плещинский Н.Б.

**Рецензент(ы):**

Бахтиева Л.У.

### **СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Плещинский Н. Б.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 925115

Казань  
2015

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Плещинский Н.Б. Кафедра прикладной математики отделение прикладной математики и информатики , Nikolai.Pleshchinskii@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины являются: формирование математической культуры, развитие системного математического мышления. Дисциплина является обобщением на бесконечно-мерный случай идей алгебры, математического анализа и геометрии. Идеи, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают почти все области математики, объединяя ее в единое целое.

Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины, используются обучаемыми при изучении профессиональных дисциплин, а также при выполнении квалификационных работ.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

1. Формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании;
2. Ознакомление системы понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;
3. Формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.1 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.04.02 Прикладная математика и информатика и относится к обязательные дисциплины. Осваивается на 1 курсе, 1 семестр.

Требования к входным знаниям и умениям магистранта - знание идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины, используются в дальнейшем при освоении дисциплин математического и естественно-научного, профессионального циклов.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-1 (общекультурные компетенции)	способность владеть культурой мышления, умение аргументировано и ясно строить устную и письменную речь;
ОК-2 (общекультурные компетенции)	способность уважительно и бережно относиться к историческому наследию и культурным традициям, толерантность в восприятии социальных и культурных различий;
ПК-1 (профессиональные компетенции)	способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов, теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат;
ОК-3 (общекультурные компетенции)	способность понимать движущие силы и закономерности исторического процесса; роль насилия и ненасилия в истории, место человека в историческом процессе, политической организации общества;
ОК-4 (общекультурные компетенции)	способность понимать и анализировать мировоззренческие, социально и лично значимые философские проблемы;
ОК-5 (общекультурные компетенции)	способность понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдать основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны;

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

разделы функционального анализа, которые традиционно используются при исследовании свойств дифференциальных уравнений с частными производными, при построении численных методов решения задач математической физики, и знакомство с которыми необходимо для математика-прикладника.

2. должен уметь:

практически решать примеры по функциональному анализу.

3. должен владеть:

курсами по нелинейным уравнениям с частными производными и по численным методам решения уравнений математической физики.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

полное ознакомление с теорией и методами функционального анализа.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 1 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Системы множеств	1		0	0	5	домашнее задание
2.	Тема 2. Понятие меры	1		0	0	5	домашнее задание
3.	Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса	1		0	0	5	домашнее задание
4.	Тема 4. Измеримые функции	1		0	0	5	домашнее задание
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	1		0	0	4	домашнее задание
6.	Тема 6. Интеграл Лебега	1		0	0	4	контрольная работа домашнее задание
7.	Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	1		0	0	4	домашнее задание
8.	Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	1		0	0	4	домашнее задание контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	1		0	0	0	экзамен
	Итого			0	0	36	

#### 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Системы множеств

#### лабораторная работа (5 часа(ов)):

Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.

### Тема 2. Понятие меры

#### лабораторная работа (5 часа(ов)):

Основные свойства меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.

### Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса

#### лабораторная работа (5 часа(ов)):

Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой.

### Тема 4. Измеримые функции

#### лабораторная работа (5 часа(ов)):

Сходимость почти всюду. Сходимость почти равномерная (по Егорову). Сходимость по мере.

### Тема 5. Интеграл Лебега

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Основные свойства интеграла: линейность, интегрирование неравенств, интегрируемость ограниченной и мажорируемой функции.

### Тема 6. Интеграл Лебега

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Интеграл Лебега на прямой. Сравнение с собственным и несобственным интегралом Римана. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства Лебега.

### Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Пространство линейных ограниченных операторов.

### Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

#### лабораторная работа (4 часа(ов)):

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора.

## 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Системы множеств	1		подготовка домашнего задания	13	домашнее задание
2.	Тема 2. Понятие меры	1		подготовка домашнего задания	13	домашнее задание
3.	Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса	1		подготовка домашнего задания	13	домашнее задание
4.	Тема 4. Измеримые функции	1		подготовка домашнего задания	13	домашнее задание
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	1		подготовка домашнего задания	14	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
6.	Тема 6. Интеграл Лебега	1		подготовка домашнего задания	7	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	7	контрольная работа
7.	Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	1		подготовка домашнего задания	14	домашнее задание
8.	Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	1		подготовка домашнего задания	7	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	7	контрольная работа
	Итого				108	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Системы множеств**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: кольца и полукольца; минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Решение задач: построение колец множеств на прямой и на плоскости.

### **Тема 2. Понятие меры**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Решение задач: построение продолжений мер с полуколец на минимальные кольца множеств на прямой и плоскости.

### **Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: сигма-алгебра измеримых множеств. Решение задач: построение классов измеримых множеств с помощью процедуры Лебега с использованием различных функций, порождающих меру.

### **Тема 4. Измеримые функции**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: сходимости почти всюду, почти равномерная (по Егорову) и по мере; связь между ними. Решение задач: исследование класса измеримых функций и его замкнутости относительно арифметических операций, предельного перехода, вычисления верхних граней.

### **Тема 5. Интеграл Лебега**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: счетная аддитивность интеграла Лебега. Решение задач: построение примеров последовательностей функций, сходящихся в среднем, по мере, равномерно и взаимосвязь между этими типами сходимости.

### **Тема 6. Интеграл Лебега**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: предельный переход под знаком интеграла Лебега. Решение задач: сравнение норм различных пространств Лебега (неравенства вложения).

контрольная работа , примерные вопросы:

Примеры вопросов: 1. Найти меру Лебега подмножества отрезка  $[0,1]$ , состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 1 встречается раньше, чем цифра 2. 2. Доказать, что мощность множества измеримых по Лебегу подмножеств отрезка  $[0,1]$  больше мощности континуума. 3. Доказать, что всякое множество, расположенное на прямой (даже если множество является неизмеримым на прямой) измеримо на плоскости, которая проходит через эту прямую. 4. Доказать, что всякая точка разрыва функции с ограниченным изменением, есть точка разрыва первого рода. 5. Доказать, что сходимости в среднем влечет сходимости по мере.

### **Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве**

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: пространства Лебега, их полнота и сепарабельность. Решение задач: изучение полноты/неполноты функциональных пространств с различными нормировками; исследование ограниченности оператора дифференцирования в различных парах пространств.

### **Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве**



домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: ортогональное разложение гильбертова пространства; ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Решение задач: построение общих видов линейных ограниченных функционалов в банаховых пространствах последовательностей и функций.

контрольная работа , примерные вопросы:

Примеры вопросов: 1. Доказать, что линейал непрерывно дифференцируемых функций не является подпространством пространства непрерывных функций. 2. Доказать, что скалярное произведение непрерывно относительно сходимости по норме. 3. Доказать, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. 4. Построить скалярное произведение в нормированном пространстве, норма которого удовлетворяет равенству параллелограмма. 5. Привести примеры ортогональных систем в гильбертовом пространстве Лебега на отрезке.

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Тематика домашних самостоятельных работ:

Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарьян К.С., Сифуэнтэс П. Действительный анализ в задачах. - М.: Физматлит, 2005. 416 с.

Вопросы к экзамену.

Часть 1. Теория меры и интеграл Лебега.

1. Определение кольца и полукольца множеств, перечисление их свойств.
2. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.
3. Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры.
4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
5. Перечисление основных свойств меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.
6. Определение внешней меры и измеримого множества.
7. Алгебра измеримых множеств.
8. Определения и базовые свойства измеримых функций.
9. Критерий измеримости функции через предел простых функций.
10. Эквивалентные функции, измеримость.
11. Сходимость почти всюду, измеримость предела.
12. Сходимость почти всюду, "почти равномерная" (по Егорову) и по мере. Связь между ними.
13. Определение интеграла Лебега от простой функции.
14. Общее определение интеграла Лебега и его корректность.
15. Перечисление основных свойств интеграла: линейность, интегрирование неравенств, интегрируемость ограниченной и мажорируемой функции.
16. 1-ая теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега (прямое утверждение).
17. Формулировка 2-ой теоремы о счетной аддитивности интеграла Лебега (обратное утверждение).
18. Формулировка результата об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
19. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
20. Формулировка теорем Б. Леви и Фату.

Часть 2.

1. Определения и примеры нормированных пространств.
2. Последовательности в нормированном пространстве, открытые и замкнутые множества. Сепарабельные и полные пространства (пространства Банаха).
3. Теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах.
4. Линейалы и подпространства нормированного пространства.

5. Скалярное произведение. Примеры евклидовых пространств. Сходимости, ограниченность. Гильбертовы пространства.
6. Ортогональное разложение гильбертова пространства.
7. Ортогональные системы и ряды Фурье.
8. Линейные операторы в нормированных пространствах; непрерывность и ограниченность
9. Пространство линейных непрерывных операторов; определение, полнота.
10. Обратный оператор. Лемма о существовании обратного линейного оператора к линейному оператору.
11. Обратный оператор. Две теоремы об ограниченности обратного оператора.
12. Линейные непрерывные функционалы, сопряженное пространство.
13. Теорема Хана-Банаха (формулировка) и следствия.
14. Теорема Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.
15. Второе сопряженное пространство.
16. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

### 7.1. Основная литература:

1. Сидоров, А. М. Функциональный анализ: [учебное пособие] / А. М. Сидоров. - Казань: Казанский университет, 2010. - 139 с.
2. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. Сборник задач по функциональному анализу. - СПб.: Лань, 2012. - 192с. ЭБС "Лань":  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3175](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3175)
3. Леонтьева Т. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=377270>
4. Смолин Ю. Н. Введение в теорию функций действительной переменной [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. - М.: ФЛИНТА, 2012. - 517 с.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=457005>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Луговая, Г. Д. Функциональный анализ: Специальные курсы: учебное пособие / Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев. - Москва: URSS: Издательство ЛКИ, 2008. - 256 с.
2. Шерстнев, Анатолий Николаевич (д-р физ.-мат. наук ; 1938 -) . Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / А. Н. Шерстнев .? Изд. 5-е .? Электронные данные (1 файл: 2,66 Мб) .? (Казань : Казанский государственный университет, 2009) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый .?  
[http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf)
3. Канторович, Леонид Витальевич. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов .? М. : Физматгиз, 1959 .? 684с.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Википедия - <http://ru.wikipedia.org>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.exponenta.ru>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Портал ресурсов по математике, алгоритмике и ИТ - <http://algotlist.manual.ru/>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Прикладной функциональный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" и магистерской программе Математическое моделирование .

Автор(ы):

Плещинский Н.Б. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Бахтиева Л.У. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.