Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского. 2014 год
5 класс. Решения задач.

1. Учительница проверяла домашнее задание. Она вызывала к доске по списку через одного, начиная с первого человека по алфавиту. Девятым к доске вышел Вася. Он отвечал так плохо, что учительница рассердилась и после него вызывала по списку уже всех оставшихся 8 человек. Сколько человек в классе?

Решение. До Васи по списку вышло 8 человек, и еще 8 было пропущено. Значит, Вася — 17-й в списке. После него еще 8 человек, поэтому всего в классе 25 учеников.

2. Бабушка напекла пирожков для внуков, сосчитала и думает: «По сколько же пирожков дать каждому внуку? Если дать каждому по пять пирожков, то у меня не хватит трех пирожков, а если дать каждому по четыре, то у меня останутся три пирожка».

Сколько внуков было у бабушки?

Ответ. 6.

Решение 1 (уравнение). Пусть у бабушки x внуков, тогда

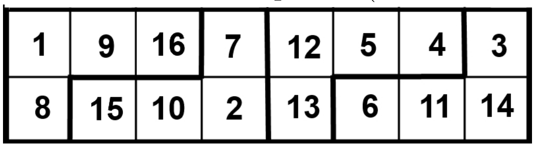
$$5x - 3 = 4x + 3 \;\Rightarrow\; x = 6.$$

Решение 2 (без уравнений). Раздадим каждому внуку по четыре пирожка. Тогда еще 3 пирожка останется в запасе. Раздадим их троим внукам. Теперь чтобы каждый внук получил по 5 пирожков, нам не хватает еще трех пирожков, значит, еще три внука осталось без пятого пирожка. Поэтому всего внуков $3 + 3 = 6$.

3. Разделите полоску на 4 одинаковые (совпадающие по форме) части так, чтобы все части имели одну и ту же сумму входящих в них чисел.

1	9	16	7	12	5	4	3
8	15	10	2	13	6	11	14

Решение: См. рисунок. Сумма чисел в каждой части должна быть равна $(1+9+16+7+12+5+4+3+8+15+10+2+13+6+11+14)/4 = 34$.



4. Карлсон открыл школу, и 1 сентября во всех трех первых классах было по три урока: Курощение, Низведение и Дуракаваляние. Один и тот же предмет в двух классах одновременно идти не может. Курощение в 1Б было первым уроком. Учитель Дуракаваляния похвалил учеников 1Б: «У вас получается еще лучше, чем у 1А». Низведение на втором уроке было не в 1А. В каком классе валяли дурака на последнем уроке? Свой ответ обоснуйте.

Ответ. 1Б.

Решение. Из условия задачи следует, что Дуракаваляние в 1Б было либо на втором, либо на третьем уроке. Предположим, что оно было на втором уроке. В 1А оно было раньше, то есть на первом уроке. Так как Низведение на втором уроке было не в 1А, то в 1А оно было на третьем уроке. Так как в 1Б первым уроком было Курощение, то Низведение там тоже могло быть только третьим уроком. Противоречие. Значит, Дуракаваляние было на третьем уроке в 1Б.

5. Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить хотя бы одну настоящую монету из 5 одинаковых по внешнему виду монет, если известно, что среди этих монет 3 настоящих и 2 фальшивых, одна из которых легче, а другая тяжелее настоящих монет?

Решение. Можно. Заметим, что если мы положим на каждую чашу весов по монете, и весы покажут равенство, то обе эти монеты — настоящие. Первым взвешиванием положим на весы первую и вторую монеты. Если они равны, то мы нашли две настоящих монеты. Если не равны, уберем их и положим третью и четвертую. Если они равны, то мы нашли настоящую. Если они тоже не равны, то в каждом из взвешиваний участвовала фальшивая монета. Следовательно, оставшаяся пятая — настоящая.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского. 2014 год
6 класс. Решения задач.

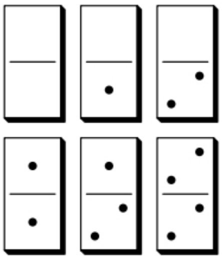
1. Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того как Чип принес 425 орехов, а Дейл — 368 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза меньше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

Ответ. 444.

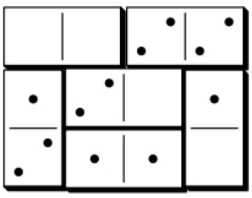
Решение 1 (уравнение). Пусть Чипу осталось запасти x орехов, тогда Дейлу осталось запасти $4x$ орехов. Получим уравнение $425+x=368+4x$, откуда $3x=57$, $x=19$. Значит, они должны запасти по $425+19=444$ орехов.

Решение 2 (без уравнений). Чтобы сравняться с Чипом, Дейл должен запасти утроенное количество орехов, которое осталось запасти Чипу. Разница между ними $425-368=57$, поэтому Чипу осталось найти 19 орехов.

2. Из шести костяшек домино, изображенных на рисунке, сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трех строчках точек было поровну и во всех четырех столбцах точек было тоже поровну.



Решение. Один из возможных ответов показан на рисунке. Всего точек 12, значит, в каждой строчке будет по 4, а в каждом столбике по 3. Пустую доминошку и доминошку с четырьмя точками нельзя ставить вертикально, иначе в соответствующем столбике никак не получится трех точек. Поэтому их естественно расположить горизонтально в одной строчке. После этого нужный пример уже довольно просто нарисовать. От детей не требуется пояснять, как они придумали пример, достаточно привести его!



3. Известно, что $(a-b+2014)$, $(b-c+2014)$ и $(c-a+2014)$ — три последовательных целых числа (именно в таком порядке). Найдите эти числа.

Ответ. 2013, 2014, 2015.

Решение 1. Обозначим эти числа как $n-1$, n и $n+1$. Тогда их сумма равна $3n$, то есть утроенному второму числу. Так как $(a-b+2014)+(b-c+2014)+(c-a+2014)=6042$, то $n=2014$. Значит, $n-1=2013$, $n+1=2015$.

Решение 2. Чтобы эти три числа были последовательными, должны выполняться условия

$$b-c=a-b+1, \quad c-a=b-c+1.$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$a + c + 1 = 2b, \quad a + b + 1 = 2c.$$

Выразим a из первого уравнения: $a = 2b - c - 1$ и подставим во второе. Получим уравнение $2b - c - 1 + b + 1 = 2c$, откуда $b = c$. Следовательно, среднее число равно 2014.

4. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 1890. Свой ответ поясните.

Ответ. 5679.

Решение. Заметим, что в наименьшем числе не должна встречаться единица, иначе ее можно вычеркнуть. Так как $1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, то пятерка и семерка встретятся обязательно. Кроме того, $2 \cdot 3^3 = 54$, так что кроме пятерки и семерки есть еще минимум две цифры. Число 54 можно представить в виде произведения двух цифр единственным способом: $54 = 6 \cdot 9$. Значит, наименьшее возможное число должно быть составлено из цифр 5, 6, 7, 9 и это число 5679.

5. 15 лжецов и рыцарей сидят за круглым столом (среди сидящих есть как рыцари, так и лжецы). На вопрос: «Сколько лжецов рядом с тобой?» все ответили: «Один». Сколько лжецов может сидеть за столом?

Ответ. 5.

Решение. Рассмотрим произвольного рыцаря. Он говорит правду, поэтому с одной стороны от него рыцарь, а с другой — лжец. Пусть они сидят так: $\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Л}_1$. Слева от Р_1 обязательно должен сидеть лжец (иначе Р_1 соврет), а справа от Л_1 должен сидеть рыцарь (иначе Л_1 скажет правду). Получаем такую цепочку: $\text{Л}_2\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Л}_1\text{Р}_3$. Теперь слева от Л_2 должен сидеть рыцарь, а справа от Р_3 — тоже рыцарь. Заметим, что рыцари и лжецы повторяются тройками: ...ЛРР | ЛРР... Поскольку общее количество рыцарей и лжецов делится на 3, в конце цепочки не возникнет противоречия. Всего будет 10 рыцарей и 5 лжецов. (Либо же просто достроим цепочку по кругу, пока в ней не окажется 15 человек.)

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского. 2014 год
7 класс. Решения задач.

1. Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того как Чип принес 1995 орехов, а Дейл — 1938 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза меньше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

Ответ. 2014.

Решение 1 (уравнение). Пусть Чипу осталось запасти x орехов, тогда Дейлу осталось запасти $4x$ орехов. Получим уравнение $1995+x = 1938+4x$, откуда $3x = 57$, $x = 19$. Значит, они должны запасти по $1995 + 19 = 2014$ орехов.

Решение 2 (без уравнений). Чтобы сравняться с Чипом, Дейл должен запасти утроенное количество орехов, которое осталось запасти Чипу. Разница между ними $1995 - 1938 = 57$, поэтому Чипу осталось найти 19 орехов.

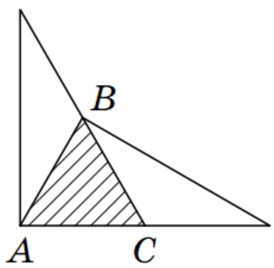
2. Расставьте все числа от 1 до 9 в таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках была равна 8, 9, 10 или 11.

Решение. Например

9	2	6
1	7	4
8	3	5

6 или 7 обязательно должна быть в центре.

3. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник — равносторонний.



Решение. В треугольнике ABC углы A и C равны (как соответствующие углы равных бумажных треугольников); значит, его стороны AB и BC равны. Но и его стороны AB и AC равны (как соответствующие стороны равных бумажных треугольников); значит, треугольник ABC равносторонний.

4. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 1080. Свой ответ поясните.

Ответ. 3589.

Решение. Заметим, что в наименьшем числе не должна встречаться единица, иначе ее можно вычеркнуть. Так как $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, то пятерка встретится обязательно. Кроме того, $2^3 \cdot 3^3 > 100$, так что кроме пятерки есть еще минимум три цифры.

1) Пусть наименьшая из них — двойка. Тогда остается $2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 > 100$, и в числе будет минимум 5 цифр.

2) Пусть наименьшая из них — тройка. Тогда остается $2^3 \cdot 3^2 = 72 = 8 \cdot 9$. Значит,

четырехзначное число, начинающееся с тройки, получить можно — 3589. Ясно, что оно наименьшее, составленное из цифр 3, 5, 8, 9.

3) Если наименьшая цифра больше трех, то в любом случае четырехзначное число больше 3589.

5. 30 лжецов и рыцарей сидят за круглым столом (среди сидящих есть как рыцари, так и лжецы). На вопрос: «Сколько лжецов рядом с тобой?» все ответили: «Один». Сколько лжецов может сидеть за столом?

Ответ. 10.

Решение. Рассмотрим произвольного рыцаря. Он говорит правду, поэтому с одной стороны от него рыцарь, а с другой — лжец. Пусть они сидят так: $Р_1Р_2Л_1$. Слева от $Р_1$ обязательно должен сидеть лжец (иначе $Р_1$ соврет), а справа от $Л_1$ должен сидеть рыцарь (иначе $Л_1$ скажет правду). Получаем такую цепочку: $Л_2Р_1Р_2Л_1Р_3$. Теперь слева от $Л_2$ должен сидеть рыцарь, а справа от $Р_3$ — тоже рыцарь. Заметим, что рыцари и лжецы повторяются тройками: $\ldots ЛРР \,|\, ЛРР \ldots$ Поскольку общее количество рыцарей и лжецов делится на 3, в конце цепочки не возникнет противоречия. Всего будет 20 рыцарей и 10 лжецов.