КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

для студентов I курса
института фундаментальной
медицины и биологии

КАЗАНЬ
2012

Печатается по решению учебно–методической комиссии
Института математики и механики
им. Н.И.Лобачевского

Составитель
доцент Е.П.Аксентьева

УДК 512.551.5

Методические указания к практическим занятиям по линейной алгебре/ Сост. Е.П.Аксентьева.–Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012.– 34 с.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Пособие состоит из методических разработок трёх практических занятий. В каждой приводятся теоретические сведения справочного характера, разбираются типичные примеры, даются задачи для аудиторных и домашних заданий. Предлагаются дополнительные задачи повышенной трудности, рекомендации к вычислению определителей и решению систем в программе Maxima. Составлены варианты заданий для контрольной работы.

Содержание практических занятий

<u>ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1</u>

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ

1°. Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

и равное $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3.$$

2°. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y &= h_1, \\ a_2 x + b_2 y &= h_2. \end{cases} \tag{1}$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Справедлива

Теорема. *Если $D \neq 0$, то система* (1) *имеет единственное решение вида*

$$x = \frac{D_x}{D}, \ \ y = \frac{D_y}{D}, \tag{2}$$

где

$$D_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Формулы (2) *называются формулами Крамера.*

ЗАМЕЧАНИЕ. При $D = 0$ система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесчисленное множество решений. Здесь $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

3°. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Если среди них есть ненулевой определитель, перепишем систему, оставив слева только неизвестные (будем называть их базисными), соответствующие этому определителю, после чего применим формулы Крамера. Неизвестное, перенесённое направо, останется произвольным и называется свободным.

Если $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, то второе уравнение является следствием первого. Тогда одно неизвестное становится базисным, а два других неизвестных остаются произвольными (свободными), и общее решение есть

$$x = -\frac{b_1}{a_1}C_1 - \frac{c_1}{a_1}C_2, \; y = C_1, \; z = C_2, \; \forall C_1, C_2.$$

Найти общее решение следующих систем:

Пример 1. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 4x - 3y + z = 0. \end{cases}$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Перепишем систему в виде $\begin{cases} x + 2y = 3z, \\ 4x - 3y = -z. \end{cases}$

Тогда по формулам Крамера имеем

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & 2 \\ -z & -3 \end{vmatrix}}{-11} = 7z/11, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 4 & -z \end{vmatrix}}{-11} = 13z/11, \; \forall z.$$

Полагая $z = 11C_1$ (так удобнее, чтобы избежать дробей), где C_1 — произвольная постоянная, получим общее решение системы в виде

$$x = 7C_1, \; y = 13C_1, \; z = 11C_1.$$

Здесь x, y являются базисными неизвестными, z — свободным.

Пример 2.

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 0, \\ 4x+ & 8y- & 12z & = & 0. \end{cases} \iff x = -2y + 3z.$$

Здесь базисным неизвестным является x, а свободными — y, z. Общее решение есть

$$x = -2C_1 + 3C_2,\ y = C_1,\ z = C_2.$$

Аудиторное задание

$\boxed{\mathbf{1.1}}$ Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{1.2}}$ Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

$\boxed{\mathbf{1.3}}$ Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$.

$\boxed{\mathbf{1.4}}$ По формулам Крамера решить систему

$$\begin{cases} 3y - 4x & = & 1, \\ 3x + 4y & = & 18. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{1.5}}$ Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y & = & 6, \\ 4x - 6y & = & 5. \end{cases}$

Найти общее и частное решения систем:

$\boxed{\mathbf{1.6}}$ $\begin{cases} x- & \sqrt{3}y & = & 1, \\ \sqrt{3}x- & 3y & = & \sqrt{3}. \end{cases}$ $\boxed{\mathbf{1.7}}$ $\begin{cases} 3x - 2y+ & z & = & 0, \\ x + 2y- & 2z & = & 0. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{1.8}}$ $\begin{cases} 2x - 3y+ & z & = & 0, \\ 4x - 6y+ & 3z & = & 0. \end{cases}$ $\boxed{\mathbf{1.9}}$ $\begin{cases} 2x - 3y+ & z & = & 0, \\ 4x - 6y+ & 2z & = & 0. \end{cases}$

Домашнее задание

Вычислить определители:

$\boxed{\mathbf{1.10}}$ $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. $\boxed{\mathbf{1.11}}$ $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

$$\boxed{\mathbf{1.12}} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0. \quad \boxed{\mathbf{1.13}} \quad \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решить неравенства:

$$\boxed{\mathbf{1.14}} \quad \begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0. \quad \boxed{\mathbf{1.15}} \quad \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5.$$

Решить системы, сделать проверку:

$\boxed{\mathbf{1.16}}$ $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$ $\boxed{\mathbf{1.17}}$ $\begin{cases} \sqrt{5}\,x - 5y = \sqrt{5}, \\ x - \sqrt{5}\,y = 5. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{1.18}}$ $\begin{cases} \sqrt{5}\,x - 5y = \sqrt{5}, \\ x - \sqrt{5}\,y = 1. \end{cases}$ $\boxed{\mathbf{1.19}}$ $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ x - 5y + 2z = 0. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{1.20}}$ (Дополнительно найти частное решение)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{1.21}}$ $\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 4x + 6y - z = 5. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{1.22}}$ Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x - ay = 1, \\ 6x + 4y = b \end{cases}$$

1) имеет единственное решение; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечно много решений.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ. МЕТОД ГАУССА.

1°. Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и равное

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

(Возможны и другие способы вычисления определителей третьего порядка, например, правило треугольников.)

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

2°. Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & h_3. \end{array} \right. \tag{1}$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Справедлива

Теорема. *Если* $D \neq 0$, *то система* (1) *имеет единственное решение вида*

$$x = \frac{D_x}{D}, \;\; y = \frac{D_y}{D}, \;\; z = \frac{D_z}{D}, \tag{2}$$

где

$$D_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Формулы (2) *называются формулами Крамера.*

3°. При $D = 0$ система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесчисленное множество решений. Для её решения применим метод Гаусса, или метод исключения неизвестных.

Пример 1.

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= -4, \\ 2x + 3y + 4z &= 1, \\ 3x + 4y + 5z &= 6. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на -2 и прибавим ко второму, потом умножим первое уравнение на -3 и прибавим к третьему уравнению:

$$\left\{ \begin{array}{rcr|l} x + 2y + 3z &=& -4 & -2; -3 \\ 2x + 3y + 4z &=& 1 & \\ 3x + 4y + 5z &=& 6 & \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z &= -4, \\ -y - 2z &= 9, \\ -2y - 4z &= 18. \end{cases}$$

Получили систему, в которой неизвестное x отсутствует во втором и третьем уравнениях (отсюда и название метода исключения неизвестных). Она эквивалентна системе

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= -4, \\ y + 2z &= -9, \end{cases} \tag{3}$$

откуда имеем $\begin{cases} x + 2y &= -4 - 3z, \\ y &= -9 - 2z. \end{cases}$

Подставляя y из последнего уравнения в предыдущее, выразим x:

$$\begin{cases} x &= z + 14, \\ y &= -2z - 9. \end{cases}$$

Здесь z – произвольное неизвестное. Полагая $z = C_1$, получим $x = C_1 + 14$, $y = -2C_1 - 9$, $z = C_1$. Проверяются найденные неизвестные подстановкой во все уравнения первоначальной системы.

Те же самые операции проще осуществить над расширенной матрицей $\widetilde{A}$ – прямоугольной таблицей из коэффициентов и свободных членов системы:

$$\widetilde{A} = A|B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} -2; -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & 18 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-1) \\ :(-2) \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \end{array}\right) \end{array}$$

В соответствии с последней матрицей получаем систему уравнений (3), рассмотренную выше.

Продолжим решение примеров, совершая все операции только в матрицах.

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x - y + z = -2, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

Строим расширенную матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} -2; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Так как уравнения

$-5y - 5z = 0, -5y - 5z = 4$, соответствующие последним строкам матрицы несовместны, то и исходная система несовместна.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -1, \\ 4x + 5y - 2z = -3, \\ 2x - 3y - 3z = -2. \end{cases}$$

Строим расширенную матрицу $\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -5;3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & -1 \\ -11 & 0 & 8 & 2 \\ 11 & 0 & -9 & -5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & -1 \\ -11 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

В соответствии с последней матрицей получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - 2z & = & -1, \\ -11x + 8z & = & 2, \\ z & = & 3. \end{cases} \Longrightarrow x = 2,\ y = -1,\ z = 3.$$

Основные операции в программе Maxima

$+$, $-$, $*$, $/$ — основные арифметические действия.

Вычислить определитель.

Используем верхнее меню: Алгебра, Enter Matrix, Name ma1, ввести матрицу, OK. Алгебра, определитель, вставить вместо % имя иатрицы ma1, Shift+Enter.

Решить систему.

Используем верхнее меню: Уравнения, Solve Linear System, обозначение переменных x, y, z или $x1, x2, x3$.

Заметим, что в ответах несовместность системы обозначается значком [ ], произвольные постоянные — $\%r1, \%r2$.

Аудиторное задание

Вычислить определитель:

$$\boxed{\mathbf{2.1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решить систему по формулам Крамера, сделать проверку:

$$\boxed{\mathbf{2.2}}\ \begin{cases} 2x+ \ \ y+ \ 2z = 1, \\ x+ \ 2y+ \ 2z = 2, \\ 2x+ \ 2y+ \ z = 1. \end{cases}$$

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\boxed{\mathbf{2.3}}\ \begin{cases} 2x+ \ 2y-4z = 3, \\ x+ \ y-2z = -2, \\ x- \ 2y-3z = -5. \end{cases}$$

Используя программу Maxima, решить примеры $\boxed{\mathbf{2.1}}$, $\boxed{\mathbf{2.2}}$, $\boxed{\mathbf{2.3}}$.

Домашнее задание

Вычислить определители:

$$\boxed{\mathbf{2.4}}\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}. \quad \boxed{\mathbf{2.5}}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решить системы по формулам Крамера, сделать проверку:

$$\boxed{\mathbf{2.6}}\ \begin{cases} x+ \ 2y+ \ z = 2, \\ 2x+ \ y+ \ z = 1, \\ x+ \ y+ \ 2z = 2. \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{2.7}}\ \begin{cases} x+ \ 2y+2z = 3, \\ 4x- \ 2y-5z = 5, \\ 6x- \ y+3z = 1. \end{cases}$$

Решить системы уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\boxed{\mathbf{2.8}}\ \begin{cases} x- \ 3y+2z = 1, \\ 2x+ \ y-4z = 5, \\ 5x- \ 8y+2z = 8. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{2.9}}\ \begin{cases} x+2y+3z = -4, \\ 2x+3y+4z = 1, \\ 3x+4y+5z = 2. \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{2.10}}\ \begin{cases} x+ \ y+ \ z = 1, \\ 6x+ \ 5y+ \ 4z = 1, \\ 13x+ \ 10y+ \ 8z = 1. \end{cases}$$

<u>ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3</u>

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{mn}.$$

1°. Суммой $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением λA матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$, полученная из A умножением всех её элементов на λ: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Произведением AB матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times l$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times l$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Аудиторное задание

$\boxed{\mathbf{3.1}}$ Найти сумму и разность двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{3.2}}$ Даны три матрицы. Найти $3A - 2B + C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \\ 6 & -8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{3.3}}$ Даны матрицы $A = (a_{ij})_{33}$, $B = (b_{ij})_{34}$, $C = (c_{ij})_{43}$. Существуют ли произведения: 1)AB; 2)BA; 3)BC; 4)CB; 5)AC; 6)CA?

$\boxed{\mathbf{3.4}}$ Найти произведения AB и BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{3.5}}$ Найти произведение AB матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$\boxed{\mathbf{3.6}}$ $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$ $\boxed{\mathbf{3.7}}$ $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ x - 5y + 2z = -1, \\ 2x - 4y + z = 1. \end{cases}$

Используя программу Maxima решить системы

$$\boxed{\mathbf{3.8}} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + 2x_6 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 + 3x_6 = 8. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{3.9}} \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

$\boxed{\mathbf{3.10}}$ Найти сумму и разность двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{3.11}}$ Для матриц примера $\boxed{\mathbf{3.2}}$ найти $2A + 4B - 3C$.

$\boxed{\mathbf{3.12}}$ Даны матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$. Найти произведение AB. Существует ли произведение BA?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

$\boxed{\mathbf{3.13}}$ Вычислить определитель, опираясь на его свойства:
$\begin{vmatrix} 3412 & 3512 \\ 3354 & 3454 \end{vmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3.14}}$ Найти $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{50}$.

$\boxed{\mathbf{3.15}}$ Числа 1008, 1323, 2037, 1512 делятся на 21. Не вычисляя определителя четвёртого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

доказать, что он тоже делится на 21.

$\boxed{\mathbf{3.16}}$ Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

Варианты контрольных заданий

В примерах 1), 2), 3) вычислить определитель D каждой системы. Если $D \neq 0$, решить систему по формулам Крамера и по методу Гаусса, сделать проверку. Если $D = 0$, то — по методу Гаусса. Решить систему 4). Используя программу Maxima решить системы 5), 6).

Вариант №1

1) $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ 5x + y - z = 7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - 3y + 4z = 3, \\ 4x - 11y + 10z = 5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -9x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант №2

1) $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x - 2y + 2z = 4, \\ 3x - 3y + 3z = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 6x - 4y + 3z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5+x_6 &= 1, \\ 3x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5+x_6 &= -1, \\ -x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+3x_6 &= 2, \\ -x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5+2x_6 &= 1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 0, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4 &= 0, \\ 2x_1-9x_2+x_3-3x_4 &= 0, \\ 5x_1+5x_2-2x_3+5x_4 &= 0, \\ 3x_1+2x_2+x_3 &= 0. \end{cases}$

Вариант №3

1) $\begin{cases} x+y+z &= 4, \\ x+z-y &= 0, \\ y+z-x &= 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y+3z &= 1, \\ 2x-2y+4z &= 3, \\ -x+y-z &= 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y+3z &= 4, \\ 2x+y-z &= 3, \\ 3x+3y+2z &= 7. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-3y+z &= 0, \\ 2x-9y+3z &= 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+3x_5-2x_6+x_7 &= 6, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5-x_6+2x_7 &= 2, \\ 7x_1+11x_2-14x_3+22x_4-4x_5+x_6+7x_7 &= -8. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4 &= 0, \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_5 &= 0, \\ -2x_1+x_2+x_4-4x_5 &= 0, \\ 2x_1+2x_3-x_4-4x_5 &= 0, \\ x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 &= 0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &= 0. \end{cases}$

Вариант №4

1) $\begin{cases} 2x+y = 5, \\ x+3z = 16, \\ 5y-z = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z = 2, \\ 2x-3y+4z = 3, \\ 4x-11y+10z = 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y+z = 4, \\ 2x+3y-z = 3, \\ 4x-y+z = 11. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y+z = 0, \\ x+2y-z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -2x_1+3x_2-4x_3+3x_4-2x_5+x_6+x_7 = 2, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5+2x_6+2x_7 = 2, \\ 11x_1-14x_2+22x_3-4x_4+x_5+7x_6+7x_7 = 4. \end{cases}$

6) $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_4+2x_5 = 0, \\ x_1+x_3+2x_4-2x_5 = 0, \\ x_2-4x_3-2x_4+x_5 = 0, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5 = 0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-x_5 = 0, \\ 2x_1-x_2-4x_3+2x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант №5

1) $\begin{cases} 2x-y+z = -2, \\ x+2y+3z = -1, \\ x-3y-2z = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-2z = 4, \\ -x+2y+3z = 3, \\ x+4y-z = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-y+2z = 16, \\ 2x+y-z = 3, \\ 6x+2y-3z = 8. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-5y+2z = 0, \\ x+4y-3z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1-4x_2+3x_3-2x_4+x_5+x_6-2x_7 = 3, \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5+2x_6+x_7 = 2, \\ -14x_1+22x_2-4x_3+x_4+7x_5+7x_6+11x_7 = 1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} -4x_1+5x_2-6x_3+x_4+x_5-2x_6+3x_7 = 0, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5-x_6+x_7 = 0, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5+x_6+x_7 = 0, \\ -3x_1+2x_2-3x_3-x_4+2x_5-3x_6+2x_7 = 0 \end{cases}$

Вариант №6

1) $\begin{cases} x+y+z = 36, \\ 2x-3z = -17, \\ 6x-5z = 7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+3z = 4, \\ 2x+4y+6z = 3, \\ 3x+y-z = 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y-4z = 1, \\ 2x+y-5z = -1, \\ x-y-z = -2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y+z = 0, \\ x+2y-3z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -4x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5-2x_6+3x_7 = 1, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4+2x_5+x_6-x_7 = 2, \\ 22x_1-4x_2+x_3+7x_4+7x_5+11x_6-14x_7 = 7. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x_1-6x_2+x_4-2x_5+3x_6-4x_7 = 0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-x_5+x_6-x_7 = 0, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 0, \\ 6x_1-9x_2-x_3+6x_4-9x_5+6x_6-9x_7 = 0. \end{cases}$

Вариант №7

1) $\begin{cases} x-2y+z = 4, \\ 2x+3y-z = 3, \\ 4x-y+z = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+3y+2z = 1, \\ x+3y+5z = 1, \\ 3x+6y+9z = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-y+2z = -7, \\ 2x-y-z = -4, \\ 3x+2y+2z = -1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y-2z = 0, \\ x-5y+2z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3+x_4-2x_5+3x_6-4x_7 = 4, \\ x_1-x_2+2x_3+2x_4+x_5-x_6+2x_7 = 2, \\ -4x_1+x_2+7x_3+7x_4+11x_5-14x_6+22x_7 = -2. \end{cases}$

6) $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 8x_1 + 12x_2 - 12x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

Вариант №8

1) $$\begin{cases} x - y + z &= a, \\ x + y - z &= b, \\ y + z - x &= c. \end{cases}$$ 2) $$\begin{cases} 3x - y + 2z &= 5, \\ 2x - y - z &= 2, \\ 4x - 2y - 2z &= -3. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x + 2y - z &= 1, \\ 2x - y &= 3, \\ 3x + y - z &= 4. \end{cases}$$ 4) $$\begin{cases} 3x - 5y + 2z &= 0, \\ x + 2y - z &= 0. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 3x_6 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - x_6 &= 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 &= 1. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 8x_1 + 12x_2 - 12x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 &= 0. \end{cases}$$

Вариант №9

1) $$\begin{cases} x + y + z &= 3, \\ x - 2y + 3z &= 2, \\ 2x + 3y - 4z &= 1. \end{cases}$$ 2) $$\begin{cases} x - y + z &= 2, \\ 2x - 2y + 2z &= 4, \\ 3x - 3y + 3z &= 5. \end{cases}$$

3) $\begin{cases} 5x+2y-2z = 3, \\ 4x+y-4z = 0, \\ x+y+2z = 3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-5y+z = 0, \\ x+2y-z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5+x_6 = 1, \\ x_1-2x_2+x_3+x_4+3x_5-x_6 = -1, \\ -x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5+2x_6 = 2, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5+x_6 = 7. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-2x_4+3x_5 = 0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 = 0, \\ 5x_1+3x_3-4x_4+5x_5 = 0, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5 = 0, \\ -x_1+2x_3+x_4+5x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант №10

1) $\begin{cases} x+2y-z = 1, \\ -3x+y+2z = 0, \\ x+4y+3z = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+4z = 2, \\ -2x+y-3z = 3, \\ 3x-4y+2z = 5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y+z = 5, \\ 2x+y-z = 1, \\ x-y-2z = -4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+3y-z = 0, \\ 5x-3y+z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-3x_4+x_5-2x_6 = 1, \\ -2x_1+x_2+x_3+3x_4-x_5+x_6 = -1, \\ x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5-x_6 = 2, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5-x_6 = -1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3+x_5 = 0, \\ -2x_1+x_2+x_4+2x_5 = 0, \\ x_1+x_3-4x_4+2x_5 = 0, \\ 2x_2-x_3-4x_4+2x_5 = 0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 = 0, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант №11

1) $\begin{cases} x+2y+3z = 1, \\ 4x+3y+2z = 1, \\ x+3y+5z = -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y+5z = 4, \\ x-5y+3z = -1, \\ 9x-7y+40z = 42. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+6y+9z = 2, \\ x+3y+5z = 1, \\ 4x+3y+2z = 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x-2y+3z = 0, \\ 3x-y+2z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x_1+x_2-3x_3+x_4-2x_5+x_6 = 1, \\ x_1+x_2+3x_3-x_4+x_5-2x_6 = -1, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5+x_6 = 2, \\ -x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+3x_6 = 4. \end{cases}$

6) $\begin{cases} -5x_1+3x_2-3x_3+3x_4 = 0, \\ 12x_1-12x_2+x_3+8x_4 = 0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, \\ 5x_1-5x_2+x_3+x_4 = 0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4 = 0, \\ 3x_1-x_2+x_3+3x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант №12

1) $\begin{cases} -2x+y+z = 7, \\ 7x+3y-2z = 1, \\ x+6y+z = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y = 3, \\ -x-4y+z = 1, \\ -7x+z = 4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+4z = 17, \\ x+2y-3z = 0, \\ 4x+8y+5z = 51. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+3y+4z = 0, \\ 6x+5y+6z = 0. \end{cases}$

5) $$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4 &= 1,\\ x_1-x_2+3x_3-x_4 &= -2,\\ 3x_1-x_2+x_3-x_4 &= 9,\\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4 &= 0,\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4 &= 1,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= -11,\\ 5x_1-x_2+4x_3-x_4 &= 0. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5-6x_6+x_7 &= 0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7 &= 0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+2x_7 &= 0,\\ 2x_1-3x_2+2x_3-3x_4+2x_5-3x_6+3x_7 &= 0. \end{cases}$$

Вариант №13

1) $$\begin{cases} 2x-3y+z &= 2,\\ 3x-5y+5z &= 3,\\ 5x-8y+6z &= 6. \end{cases}$$ 2) $$\begin{cases} -7y+z &= 4,\\ x-3y &= 3,\\ x+4y-z &= -1. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x-5y-z &= 14,\\ 2x-y+4z &= -8,\\ y+z &= -5. \end{cases}$$ 4) $$\begin{cases} 2x+7y+4z &= 0,\\ x-9y-3z &= 0. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 1,\\ -x_1+3x_2-x_3+x_4 &= -2,\\ -x_1+x_2-x_3+3x_4 &= 6,\\ x_1-x_2+3x_3+2x_4 &= 0,\\ -x_1+3x_2-x_3+3x_4 &= 0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= -8,\\ -x_1+4x_2-x_3+5x_4 &= -1. \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5-6x_6+2x_7 = 0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7 = 0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 0,\\ 2x_1-3x_2+2x_3-3x_4+2x_5-3x_6+2x_7 = 0. \end{cases}$$

Вариант №14

$$1)\ \begin{cases} 3x-y+z = 4,\\ 2x-5y-3z = -17,\\ x+y-z = 0. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+2y+4z = 4,\\ -x+y+z = 2,\\ x+5y+9z = 9. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x-z = 1,\\ 2x+4y-z = 1,\\ -x+8y+3z = 2. \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 3x+7y+2z = 40,\\ x-y+6z = 2. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_4 = 1,\\ 3x_1-x_2+x_3-x_4 = -2,\\ x_1-x_2+3x_3-x_4 = 15,\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4 = 0,\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4 = 3,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 = -17,\\ 4x_1-x_2+5x_3-x_4 = 2. \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} -2x_1+3x_2-4x_3+5x_4-6x_5-x_6+x_7 = 0,\\ -x_1+x_2-x_3+x_4-x_5+x_6-x_7 = 0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+4x_6+x_7 = 0,\\ -3x_1+2x_2-3x_3+2x_4-3x_5+x_6+2x_7 = 0. \end{cases}$$

Вариант №15

$$1)\ \begin{cases} x+y+z = 2,\\ 2x-y-6z = -1,\\ 3x-2y = 8. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x-6y-2z = -28,\\ x+y+z = 13,\\ 2x-7y-3z = -40. \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x+y+z = 5, \\ x+6y+2z = 10, \\ 2x+7y+3z = 15. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-y+z = 0, \\ x+5y-4z = 0. \end{cases}$

5) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4 = 1, \\ -x_1+x_2-x_3+3x_4 = -2, \\ -x_1+3x_2-x_3+x_4 = 3, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4 = 1, \\ -x_1+3x_2-x_3+3x_4 = -1, \\ x_1+x_2+x_3+x_4 = -5, \\ -x_1+5x_2-x_3+4x_4 = -2. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_4+2x_5 = 0, \\ x_1+x_3+2x_4-2x_5 = 0, \\ x_2-4x_3-2x_4+x_5 = 0, \\ 2x_1-x_2-4x_3+2x_4 = 0, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5 = 0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант №16

1) $\begin{cases} x+2y+4z = 4, \\ -x+y+z = 3, \\ x+5y+9z = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z = 12, \\ x+2y+3z = 22, \\ x+3y+6z = 35. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y-3z = -1, \\ 9x-6y+3z = 1, \\ 5x-8y+9z = 3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x-6y+5z = 0, \\ 6x-9y+10z = 0. \end{cases}$

5) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5 = 1, \\ 2x_1-2x_2+2x_3-x_4+x_5 = 0, \\ -x_1+x_2-x_3+2x_4-2x_5 = 2, \\ x_3-x_5 = 3. \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} -2x_1+3x_2-4x_3+5x_4-6x_5-2x_6+x_7 &=& 0,\\ -x_1+x_2-x_3+x_4-x_5+x_6+x_7 &=& 0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6+x_7 &=& 0,\\ -3x_1+2x_2-3x_3+2x_4-3x_5+3x_6+2x_7 &=& 0. \end{cases}$$

Вариант №17

$$1)\ \begin{cases} 5x+6y+z &=& 4,\\ 3x-5y-2z &=& 3,\\ 2x+11y+3z &=& -5. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+y+z &=& 0,\\ 2x-3y+4z &=& 0,\\ x-4y+3z &=& 0. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x+z+1 &=& 0,\\ 2x+y-3z &=& -9,\\ 3x-y+2z &=& -4. \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 2x-y-5z &=& 0,\\ x+2y-z &=& 0. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5 &=& 1,\\ -2x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5 &=& 0,\\ x_1-x_2+2x_3-2x_4-x_5 &=& 2,\\ x_2-x_4 &=& 3. \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} -4x_1+x_2-2x_3+3x_4 &=& 0,\\ 7x_1+3x_2+7x_3-7x_4 &=& 0,\\ -6x_1+4x_2-x_3+2x_4 &=& 0,\\ x_1+x_2+x_3+3x_4 &=& 0,\\ 3x_2+2x_3+x_4 &=& 0. \end{cases}$$

Вариант №18

$$1)\ \begin{cases} 3x+y+2z &=& 4,\\ x-2y-z &=& -3,\\ 2x+3y+3z &=& 7. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x-y-5z &=& 1,\\ 2x+2y+3z &=& -1,\\ x-2y &=& 7. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x-2y+z &=& 7,\\ 2x-y &=& 6,\\ 5x-3y+z &=& 1. \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 3x+5y-7z &=& 0,\\ 4x-5y-6z &=& 0. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_3 = -3. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 12x_1 - 12x_2 + x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №19

1) $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4, \\ 3x - 2y + 2z = 3, \\ 5x - 4y = 2. \end{cases}$$ 2) $$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 20, \\ x + 3y + 2z = 11, \\ 2x + 10y + 9z = 40. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 4x - y - 2z = -1, \\ 5x - 2y - z = 1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$ 4) $$\begin{cases} x + 2y + 4z = 16, \\ 3x + 5y - z = 34. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_2 + x_5 = -6. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -7x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №20

1) $\begin{cases} 2x - y + 3z &= 9, \\ 3x - 5y + z &= 4, \\ 4x - 7y + z &= 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 3z &= 3, \\ x - y - 4z &= 1, \\ x - 7y &= 4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + z &= 2, \\ 3x - y + 2z &= 2, \\ 5x - 3y + 4z &= 4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y - 4z &= 0, \\ 3x + 5y - 7z &= 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2, \\ -2x_1 - 3x_4 &= 6. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 8x_1 - x_2 + 4x_3 - 12x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0. \end{cases}$

Вариант №21

1) $\begin{cases} 2x + 4y + z &= 4, \\ x - y + z &= 2, \\ 3x + 3y + 2z &= 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + 4z &= 4, \\ -x + y + z &= 2, \\ 3y + 5z &= 5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + z &= 0, \\ x + y - z &= 9, \\ x - 2z &= 7. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 3y + z &= 0, \\ 2x - 9y + 3z &= 0. \end{cases}$

$$5)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 58x_4 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант №22

$$1)\ \begin{cases} 4x + 2y - z = 1, \\ -x + y = 2, \\ 2x + 3y + z = -2. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ -x - 4y + z = 1, \\ x - 3y = 3. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ 5x + y - z = 7. \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ 4x - 11y + 10z = 0. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - 58x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 + 8x_4 = 5. \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3-2x_4 &= 0,\\ x_1-x_2+6x_3-x_4 &= 0,\\ x_1-3x_2+2x_3-5x_4 &= 0,\\ -6x_1+13x_2+13x_3+13x_4 &= 0,\\ x_1+3x_3+2x_4 &= 0. \end{cases}$$

Вариант №23

$$1)\ \begin{cases} 2x+y-4z &= 2,\\ -x+z &= -1,\\ y+3z &= 4. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+y+z &= 2,\\ 2x-3y+4z &= 3,\\ 3x-7y+7z &= 4. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+z &= 1,\\ x+2y-z &= 2,\\ 5x+6y-z &= 7. \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 3x+y+z &= 0,\\ x-y+3z &= 0. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x_1-4x_2+x_3+x_4 &= 0,\\ x_1-2x_2+2x_3-x_4 &= 2,\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4 &= 3,\\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4 &= 0,\\ 3x_1+x_2+3x_3-3x_4 &= 0,\\ 7x_1-x_2+8x_3+5x_4 &= 5. \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} -5x_1+3x_2-3x_3+3x_4 &= 0,\\ 12x_1-12x_2+x_3+8x_4 &= 0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0,\\ -5x_1+5x_2-x_3-x_4 &= 0,\\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 0,\\ 3x_1-x_2+x_3+3x_4 &= 0. \end{cases}$$

Вариант №24

$$1)\ \begin{cases} x+2y+4z &= 4,\\ 3y+5z &= 6,\\ x+y+z &= 1. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x-3y+5z &= 1,\\ 2x+y-4z &= 3,\\ x+2y-5z &= 1. \end{cases}$$

3) $\begin{cases} 9x-6y+3z &= 1, \\ 5x-8y+9z &= 3, \\ 2x+y-3z &= -1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+4y+2z &= 0, \\ 3x+7y+3z &= 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -4x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0, \\ -2x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 2, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4 &= 3, \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4 &= 0, \\ -58x_1+3x_2-3x_3+3x_4 &= 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x_1+x_2+2x_3-3x_4+4x_5 &= 0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &= 0, \\ 5x_1+3x_3-4x_4+5x_5 &= 0, \\ 2x_1-8x_2+2x_3+x_4-2x_5 &= 0, \\ -8x_2+6x_3+3x_4+8x_5 &= 0. \end{cases}$

Вариант №25

1) $\begin{cases} 3x+2y+z &= 3, \\ x+4y+2z &= 1, \\ 2x+5y+z &= -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+2y &= 3, \\ x+2y-z &= 2, \\ 2x+3y-z &= 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z &= 2, \\ 2x-3y+4z &= 3, \\ 4x-11y+10z &= 5. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y+z &= 0, \\ x+2y-3z &= 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5+x_6 &= 2, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5-x_6 &= 3, \\ x_1-2x_2-2x_3-2x_4+x_5+x_6 &= 0, \\ 3x_1+3x_2+7x_3+x_4+3x_5-3x_6 &= 8. \end{cases}$

$$
6)\begin{cases}
3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\
8x_1 + 12x_2 - 12x_3 + x_4 = 0, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\
x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\
4x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\
2x_1 + x_3 = 0.
\end{cases}
$$

ОТВЕТЫ

$\boxed{\mathbf{1.10}}$ 10. $\boxed{\mathbf{1.11}}$ 0. $\boxed{\mathbf{1.12}}$ $x = 2$. $\boxed{\mathbf{1.13}}$ $x_1 = -1,\ x_2 = -4$.

$\boxed{\mathbf{1.14}}$ $x > -10$. $\boxed{\mathbf{1.15}}$ $x < -3$. $\boxed{\mathbf{1.16}}$ $x = 16,\ y = 7$.

$\boxed{\mathbf{1.17}}$ Система несовместна.

$\boxed{\mathbf{1.18}}$ $x = 1 + C_1\sqrt{5},\ y = C_1$.

$\boxed{\mathbf{1.19}}$ Общее решение: $x = 4C_1,\ y = 2C_1,\ z = 3C_1$.

$\boxed{\mathbf{1.20}}$ Общее решение: $x = 2C_1,\ y = 5C_1,\ z = 4C_1,$ частное решение, например, при $C_1 = 1:\ x = 2,\ y = 5,\ z = 4$.

$\boxed{\mathbf{1.21}}$ $x = -3C_1 + 3/2,\ y = 5C_1 - 1/6,\ z = 18C_1$.

$\boxed{\mathbf{1.22}}$ 1) $a \neq -2,\ \forall b,$ 2) $a = -2,\ b \neq 2,$ 3) $a = -2,\ b = 2$.

$\boxed{\mathbf{2.1}}$ 29. $\boxed{\mathbf{2.2}}$ $x = -2/5,\ y = 3/5,\ z = 3/5$.

$\boxed{\mathbf{2.3}}$ Система несовместна.

$\boxed{\mathbf{2.4}}$ -12. $\boxed{\mathbf{2.5}}$ 0. $\boxed{\mathbf{2.6}}$ $x = -1/4,\ y = 3/4,\ z = 3/4$.

$\boxed{\mathbf{2.7}}$ $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$.

$\boxed{\mathbf{2.8}}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10C_1 + 16/7 \\ 8C_1 + 3/7 \\ 7C_1 \end{pmatrix}$. $\boxed{\mathbf{2.9}}$ Система несовместна.

$\boxed{\mathbf{2.10}}$ $x = -1,\ y = -1,\ z = 3$.

$\boxed{\mathbf{3.1}}$ $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 11 & 3 & -3 \end{pmatrix},\ A - B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -3 & -13 & 15 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3.2}}$ $\begin{pmatrix} 10 & -23 \\ 22 & -37 \\ 27 & -44 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3.4}}$ $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -13 & 6 & -5 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3.5}}$ 0 – матрица .

$\boxed{\mathbf{3.6}}$ $x = 2,\ y = 1,\ z = -1$. $\boxed{\mathbf{3.7}}$ $x = C_1 + 1,\ y = C_1,\ z = 2C_1 - 1$.

$\boxed{\mathbf{3.8}}$ $x_1 = -5C_3 + 4C_2 - 5C_1 + 8,\ x_2 = C_3,\ x_3 = C_3 - C_2 + C_1 - 1,\ x_4 = -3C_3 + 2C_2 - 3C_1 + 5,\ x_5 = C_2,\ x_6 = C_1.$

$\boxed{\mathbf{3.9}}$ $x_1 = C_1,\ x_2 = 4C_1,\ x_3 = 3C_1,\ x_4 = -5C_1.$

$\boxed{\mathbf{3.10}}$ $A + B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 2 \\ 3 & -7 & -7 \end{pmatrix},\ A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$

$\boxed{\mathbf{3.11}}$ $\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -25 & 22 \\ -13 & 30 \end{pmatrix}.$

$\boxed{\mathbf{3.12}}$ $AB = \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ -1 & -19 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$, BA не существует.

Литература

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2008.–336с.

2. Демидович Б.П.,Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики.М.:АСТ, Астрель, 2001.–656с.

3. Ю.П.Сударев, Т.В.Першикова, Т.В.Радославова. Основы линейной алгебры и математического анализа. —М.:Изд. центр "Академия", 2009.—349с.