

М. А. КОЛОСОВ, Н. А. АРМАНД, О. И. ЯКОВЛЕВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
РАДИОВОЛН
ПРИ КОСМИЧЕСКОЙ
СВЯЗИ

Под редакцией

академика Б. А. Введенского и
профессора М. А. Колосова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»
МОСКВА 1969



5.1. Распространение плоской волны в однородной диспергирующей среде. Среда как четырехполюсник

Как уже указывалось, зависимость коэффициента преломления от частоты существенно влияет на распространение радиосигналов через диспергирующую среду. Это влияние будет рассмотрено для случая однородной среды в предположении узкополосности сигнала. Последнее предположение означает, что спектральная ширина сигнала $\Delta\omega$ значительно меньше несущей частоты, т. е. что

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \quad (5.1)$$

Рассмотрим простейший случай распространения плоских волн. При этом среду можно рассматривать как четырехполюсник, на входе которого сигнал представлен интегралом Фурье

$$E(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.2)$$

где спектр сигнала $E_0(\omega)$ определяется обратным преобразованием Фурье:

$$E_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, 0) e^{i\omega t} dt. \quad (5.3)$$

При прохождении расстояния z каждая спектральная компонента приобретает вид $E_0(\omega)\exp\left[i\frac{\omega t}{c}n(\omega)\right]$, поэтому в среде сигнал может быть описан интегралом Фурье вида

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp\left\{i\omega\left[\frac{zn(\omega)}{c} - t\right]\right\} d\omega. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) показывает, что однородная и прозрачная диспергирующая среда толщиной z ведет себя как четырехполюсник с коэффициентом передачи

$$K(\omega) = \exp\left[\frac{i\omega}{c}zn(\omega)\right]. \quad (5.5)$$

Своеобразие этого четырехполюсника заключается в том, что в нем присутствуют только фазовые искажения, а амплитудные — отсутствуют. Последнее утверждение приближенно, так как мы пренебрегли поглощением.

Пусть входной сигнал имеет несущую частоту ω_0 и огибающую $\theta(t)$. Тогда он может быть представлен в виде

$$E(t, 0) = \theta(t)\exp(-i\omega_0 t) \text{ и}$$

$$E_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) e^{-i\omega_0 t + i\omega t} dt = g(\omega - \omega_0), \quad (5.6)$$

где

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) e^{i\omega t} dt \quad (5.7)$$

есть спектр огибающей входного сигнала. В итоге

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \omega_0) \exp\left\{i\omega\left[\frac{zn(\omega)}{c} - t\right]\right\} d\omega. \quad (5.8)$$

Введем новую переменную $y = \omega - \omega_0$. Равенство (5.8) примет вид

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp\left\{i(\omega_0 + y)\left[\frac{zn(\omega_0 + y)}{c} - t\right]\right\} dy. \quad (5.9)$$

Условие узкополосности сигнала означает, что функция $g(y)$ существенно отлична от нуля в интервале частот

$$-\frac{\Delta\omega}{2} \leq y \leq \frac{\Delta\omega}{2}. \quad (5.10)$$

Вне этого интервала спектр огибающей быстро спадает до нуля. Поэтому существенной областью интегрирования в (5.8) будет область порядка $\Delta\omega$. На основании неравенства (5.1) можно заключить, что в пределах этой области интегрирования коэффициент преломления изменяется мало и разумно произвести разложение

$$n(\omega_0 + y) = n(\omega_0) + n'(\omega_0)y + \frac{1}{2}n''(\omega_0)y^2 + \dots$$

Тогда, сохранив степени y не выше второй, получим

$$E(t, z) = \exp \left\{ i \omega_0 \left[\frac{zn(\omega_0)}{c} - t \right] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp \left\{ -i yt + \frac{iz}{c} [y \varphi_1(\omega_0) + y^2 \varphi_2(\omega_0)] \right\} dy. \quad (5.11)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\omega_0) &= n(\omega_0) + \omega_0 n'(\omega_0) = \frac{d}{d\omega} [\omega n(\omega)]_{\omega=\omega_0} \\ \varphi_2(\omega_0) &= n''(\omega_0) + \frac{\omega_0 n'(\omega_0)}{2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\omega^2} [\omega n(\omega)]_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Рассмотрим сначала случай недиспергирующей среды. Это означает, что $n(\omega) = \text{const}$ и $\varphi_1(\omega_0) = n$, а $\varphi_2 = 0$. Выражение для напряженности поля

$$E(t, z) = \exp \left\{ i \omega_0 \left[\frac{nz}{c} - t \right] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp \left\{ i y \left(\frac{nz}{c} - t \right) \right\} dy \quad (5.13)$$

или

$$E(t, z) = \theta \left(t - \frac{nz}{c} \right) \exp \left[i \omega_0 \left(\frac{nz}{c} - t \right) \right]. \quad (5.14)$$

Полученный результат означает, что в отсутствие дисперсии огибающая сигнала распространяется без искажений с фазовой скоростью

$$c_{\Phi} = \frac{c}{n}. \quad (5.15)$$

Рассмотрим случай прозрачной слабо диспергирующей среды, пренебрежем в (5.11) членом с y^2 . Это может быть реализовано в тех случаях, когда

$$\frac{(\Delta \omega)^2 z}{c} \varphi_2(\omega_0) \ll 2\pi. \quad (5.16)$$

Для этого должны быть или необходимая узкополосность сигнала, или малый пробег расстояния, или, наконец, слабая зависимость коэффициента преломления от частоты в пределах спектральной ширины сигнала.

При принятых условиях получим формулу, аналогичную ф-ле (5.14), в которой в выражении для огибающей вместо n будет стоять $\varphi_1(\omega_0)$. Это означает, что при учете дисперсии в первом приближении огибающая сигнала распространяется без искажений, но не с фазовой, а с групповой скоростью

$$c_{\Gamma} = \frac{c}{\varphi_1(\omega_0)} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega} [\omega n(\omega)]_{\omega=\omega_0}}. \quad (5.17)$$

Для недиспергирующих сред $n(\omega) = \text{const}$ фазовая и групповая скорости совпадают. Подчеркнем, что понятие групповой скорости справедливо только для сигналов малой спектральной ширины. Это следует хотя бы из того, что при определении этого понятия существенно применение неравенства (5.1).

Учет квадратичных по y членов в (5.11) даст характер возникающих из-за дисперсии искажений сигналов. При этом отбросим в (5.11) экспоненту перед интегралом и будем рассматривать только поведение огибающей

$$Q(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp \left\{ -i yt + \frac{iz}{c} [y \varphi_1(\omega_0) + y^2 \varphi_2(\omega_0)] \right\} dy. \quad (5.18)$$

Заменяем $g(y)$ через огибающую по ф-ле (5.7). Получим

$$Q(t, z) = \frac{e^{i\pi/4}}{2 \sqrt{\frac{\pi z \varphi_2(\omega_0)}{c}}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t') \exp \left\{ -\frac{i \left[t' - t + \frac{z}{c} \varphi_1(\omega_0) \right]^2}{4 \frac{z}{c} \varphi_2(\omega_0)} \right\} dt'.$$

Введем новую переменную интегрирования $t' = t - \frac{z}{c} \varphi_1(\omega_0) + \tau_0 x$, где

$$\tau_0 = \sqrt{2\pi \frac{z}{c} |\varphi_2(\omega_0)|}; \quad (5.19)$$

здесь взято $|\varphi_2|$, так как φ_2 может быть отрицательной величиной. В итоге получим следующее представление огибающей сигнала на выходе через огибающую сигнала на входе

$$Q(t, z) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left(t - \frac{z}{c_{\Gamma}} + \tau_0 x \right) e^{-\frac{i\pi x^2}{2}} dx; \quad (5.20)$$

здесь заменено c/φ_1 через c_{Γ} . Выражения (5.18) и (5.20) являются двумя различными представлениями огибающей на выходе: через спектр огибающей и через огибающую на входе. В следующих параграфах возникающие дисперсионные искажения будут проиллюстрированы на простых примерах.

5.2. Искажение импульсных сигналов

Прежде всего, рассмотрим случай, когда огибающая сигнала — ступенчатая функция

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_0 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Форма огибающей такого сигнала показана на рис. 5.1. В этом случае для расчета огибающей выходного сигнала удобно воспользоваться ф-той (5.20), из которой следует, что

$$Q(t, z) = \frac{0_0 e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_{-u}^{\infty} e^{-i \frac{\pi}{2} x^2} dx, \quad (5.22)$$

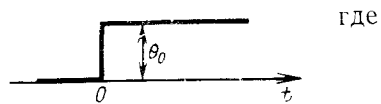


Рис. 5.1

где

$$u = \frac{t - \frac{z}{c_r}}{\tau_0}$$

Последний интеграл выражается через интегралы Френеля [8, 3]

$$C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx, \quad S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx. \quad (5.23)$$

В итоге

$$Q(t, z) = \frac{0_0 e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(u) \right] - i \left[\frac{1}{2} + S(u) \right] \right\}. \quad (5.24)$$

На рис. 5.2 построен график отношения

$$\frac{Q(t, z)}{0_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[\frac{1}{2} + C(u) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(u) \right]^2} \quad (5.25)$$

в функции от параметра u . Этот график показывает форму переднего фронта импульса в виде ступеньки, прошедшего диспергирующую среду. Из графика видно, что из-за дисперсии фронт импульса искажается: вместо резкого скачка идет пологое нарастание; на вершине импульса возникают осцилляции, постепенно затухающие по мере удаления от фронта. В слабо диспергирующей среде ($\tau_0=0$) фронт импульса при $t=z/c_r$ скачком нарастает от 0 до 1. В рассматриваемом случае в указанный момент времени импульс достигает лишь половины значения своей амплитуды. Можно утверждать, что имеется некоторое запаздывание в появлении фронта импульса. Последнее условно характеризуется величиной τ_0 , определяемой ф-лами (5.19) и (5.12). Назовем эту величину временем установления сигнала. Из рис. 5.2 видно, что нарастание фронта импульса происходит раньше, нежели это следует из представлений о распространении

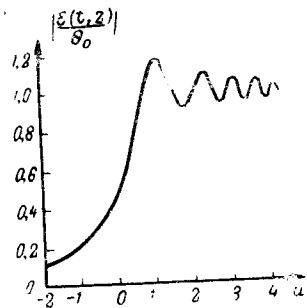


Рис. 5.2

сигнала с групповой скоростью. На этом же рисунке заметно, что нарастание начинается при $t=-\infty$, но это, конечно, не имеет смысла. Причина этого парадокса — в приближенном характере вычислений. Более строгое рассмотрение в изложении [9—11] показывает, что на выходе диспергирующей среды сигнал имеет более сложную структуру, чем это предполагалось выше. Сначала сигнал проявляется в виде «предвестников», которые распространяются со скоростью c . Однако они несут малую энергию. Вслед за «предвестниками», двигаясь с групповой скоростью, появляется импульс рассмотренного выше вида. Он несет основную энергию сигнала.

Рассмотрим теперь искажения сигнала, представляющего собой прямоугольный импульс,

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \quad t > \tau, \\ \theta_0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau. \end{cases} \quad (5.26)$$

В этом случае абсолютное значение огибающей примет вид

$$|Q(t, z)| = \frac{0_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[C(u) - C\left(u - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \right]^2 + \left[S(u) - S\left(u - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \right]^2} \quad (5.27)$$

Вид огибающей импульса в функции от параметра u существенно зависит от соотношения между длительностью импульса τ и временем установления τ_0 (рис. 5.3), где по оси ординат отложено $\frac{Q(t, z)}{0_0}$. Из рисунка следует, что при $\tau/\tau_0 < 1$ импульс сильно искажается. Если $\tau < \tau_0$, то импульс не успевает нарасти, как начинается спад. В итоге импульс расплывается и его форма существенно искажается. Естественно, что это обстоятельство ограничивает длительность импульсов. Условимся считать, что импульсы длительностью $\tau \geq \tau_0$ не искажаются, а импульсы длительностью $\tau < \tau_0$ испытывают дисперсионные искажения. Так как спектральная ширина импульса связана с его длительностью соотношением

$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau}, \quad (5.28)$$

то установленные соотношения позволяют сделать более общий вывод: сигналы спектральной ширины $\Delta f < \frac{1}{\tau_0}$ в диспергирующей среде распространяются без существенных искажений; это также подтверждается и неравенством (5.16).

5.3. Гармоническая огибающая. Полоса передачи и нелинейные искажения

Рассмотрим случай, когда модулирующий сигнал представляет собой гармоническое колебание вида

$$\theta(t) = \theta_0(1 + m \cos \Omega_0 t), \quad (5.29)$$

где m — глубина модуляции, а Ω_0 — круговая частота модуляции. С учетом несущей общее высокочастотное колебание амплитудномодулированного сигнала представляет собой три гармонических составляющих: несущую и разнесенные относительно нее на $\pm \Omega_0$ боковые колебания (рис. 5.4). Поэтому общая спектральная ширина такого сигнала равна

$$\Delta f = \frac{\Omega_0}{\pi}. \quad (5.30)$$

Подставляя (5.29) в (5.20), будем иметь для огибающей на выходе следующее выражение:

$$Q(t, z) = \theta_0 \left\{ 1 + m \exp \left[\frac{i \Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right] \cos \left[\Omega_0 \left(t - \frac{z}{c_r} \right) \right] \right\}. \quad (5.31)$$

Если высокочастотное колебание с подобной огибающей подать на амплитудный детектор, то на выходе детектора возникает колебание, соответствующее модулю выражения (5.31), т. е.

$$|Q(t, z)| = \theta_0 \sqrt{1 + 2m \cos \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right) \cos \left[\Omega_0 \left(t - \frac{z}{c_r} \right) \right] + m^2 \cos^2 \left[\Omega_0 \left(t - \frac{z}{c_r} \right) \right]}. \quad (5.32)$$

Наиболее характерно в полученном выражении то, что протектированная огибающая уже не чисто гармоническое колебание: за счет дисперсии появляются высшие гармоники частоты огибающей. Этот результат весьма своеобразен, так как рассматриваемая диспергирующая среда предполагается «линейной». Тем не менее из-за дисперсии возникли нелинейные искажения, что на первый взгляд несколько неожиданно. Однако подчеркнем, что эти нелинейные искажения возникли в спектре огибающей, а не в спектре несущей, как это было бы при распространении волн через «нелинейную» среду. Причина возникших искажений —

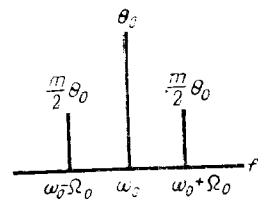


Рис. 5.4

своеобразные фазовые сдвиги боковых относительно несущей, из-за чего на выходе диспергирующей среды спектральные компоненты сигнала складываются в иных, по сравнению со входом, фазовых соотношениях.

Для того чтобы количественно оценить величину нелинейных искажений, следовало бы выражение (5.32) разложить в ряд Фурье и сравнивать амплитуды постоянной составляющей (которая пропорциональна амплитуде несущей) первой и высших гармоник. Однако в общем виде результат сложен, и мы применим приближенный метод, воспользовавшись тем, что обычно $m < 1$. Практически весьма часто достаточно точным является разложение (5.32) в ряд Тейлора с точностью до квадратичных членов по m . Результат разложения таков:

$$|Q(t, z)| = \theta_0 \left[1 + \frac{m^2}{4} \sin^2 \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right) + m \cos \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right) \cos \Omega_0 t + \frac{m^2}{4} \sin^2 \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right) \cos 2\Omega_0 t + \dots \right]. \quad (5.33)$$

В нашем приближении увеличилась постоянная составляющая (добавился член $\frac{m^2}{4} \sin^2 \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right)$), уменьшилась амплитуда основной гармоники (вместо $\theta_0 m$ теперь $\theta_0 m \cos \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right)$) и появилась вторая гармоника (с амплитудой $\theta_0 \frac{m^2}{4} \sin^2 \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right)$).

Изменение постоянной составляющей и амплитуды первой гармоники означает, что изменилась глубина модуляции. Если на входе дисперсионной среды глубина модуляции равнялась m , то на выходе она равна

$$m' = \frac{m \cos \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right)}{1 + \frac{m^2}{4} \sin^2 \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right)} \approx m \cos \left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi} \right), \quad (5.34)$$

так как $m^2/4 \ll 1$. Охарактеризуем дисперсионное изменение глубины модуляции коэффициентом

$$K_m = \frac{m}{m'} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \Delta f^2 \tau_0^2 \right). \quad (5.35)$$

Здесь Ω_0 заменено по ф-ле (5.30). График этой величины в функции $\Delta f \tau_0$ изображен на рис. 5.5, где дана зависимость коэффициента дисперсионного изменения глубины модуляции от спектральной ширины сигнала. Величина K_m характеризует спадание энергии боковых частот в процессе дисперсионных искажений. В частности, при $\Delta f \tau_0 = 1$ величина $K_m = 0$, что означает полное пропадание пер-

вой гармоники огибающей, т. е. «полное искажение» сигнала. Из-за периодичности косинуса может показаться, что можно выбрать такую полосу частот (например, $\Delta f^2 \tau_0^2 = 2$), что искажений не будет. Однако это справедливо для простого сигнала, у которого имеются лишь две боковые частоты. Реальный сигнал имеет сложный спектр, и поэтому при постоянстве энергии каких-либо боковых частот энергия других боковых частот из-за дисперсии будет уменьшаться, а сигнал — испытывать дисперсионные искажения.

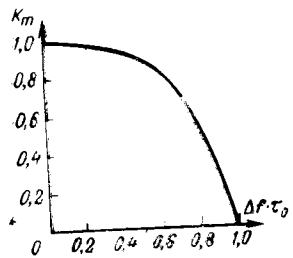


Рис. 5.5

Для того чтобы анализ, проведенный для простого сигнала, распространить в какой-то мере для сложных сигналов, положим, что величина Δf является спектральным расстоянием между крайними боковыми частотами (т. е. фактически является спектральной шириной сигнала). Тогда разумно предположить, что из-за дисперсии наибольшие изменения испытывают эти крайние боковые составляющие при ограничении такой полосой частот, где $\Delta f \tau_0 < 1$. При этих условиях можно считать, что ф-ла (5.35) приближенно применима для любых сигналов, а не только для столь простого сигнала, у которого огибающая представляет собой гармоническое колебание. В таком приближении можно говорить о полосе частот сигналов с малыми дисперсионными искажениями. На границе этой полосы энергия боковых частот спадает вдвое, т. е. $K_m = 1/\sqrt{2}$. Последнее условие приводит к уравнению

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \Delta f^2 \tau_0^2\right) = 1/\sqrt{2}, \quad (5.36)$$

откуда

$$\Delta f_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \tau_0} = \frac{0,71}{\tau_0}, \quad (5.37)$$

где границей полосе приписан индекс 0.

Равенство (5.37) позволяет приближенно рассчитывать допустимую полосу частот сигналов, которые могут быть переданы через диспергирующую среду без существенных искажений. Практическое приложение этой формулы к конкретным средам будет проиллюстрировано в следующих параграфах.

Выше говорилось, что дисперсия приводит к своеобразным нелинейным искажениям. Они проявляются появлением высших частот в спектре огибающей. Если исходить из приближения, даваемого ф-лой (5.33), то количественно нелинейные искажения могут быть охарактеризованы коэффициентом нелинейных искажений, представляющим отношение амплитуд второй и первой гармоник сигнала.

Итак

$$S = \frac{m}{4} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2\pi}\right)} = \frac{m}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} \Delta f^2 \tau_0^2\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \Delta f^2 \tau_0^2\right). \quad (5.38)$$

Естественно, что нелинейные искажения растут с увеличением полосы частот сигнала. Это иллюстрируется табл. 5.1, где для различных значений глубины модуляции даны зависимости коэффициента нелинейных искажений в функции от $\Delta f \tau_0$.

ТАБЛИЦА 5.1

Зависимость коэффициента нелинейных искажений от $\Delta f \tau_0$

$\Delta f \tau_0$	Величина коэффициента искажений при m				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	$1,23 \cdot 10^{-5}$	$2,46 \cdot 10^{-5}$	$3,70 \cdot 10^{-5}$	$4,94 \cdot 10^{-5}$	$6,15 \cdot 10^{-5}$
0,2	$1,97 \cdot 10^{-4}$	$3,94 \cdot 10^{-4}$	$5,91 \cdot 10^{-4}$	$7,84 \cdot 10^{-4}$	$9,80 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,00100	0,00200	0,00300	0,00400	0,00500
0,4	0,00316	0,00635	0,00954	0,0127	0,0159
0,5	0,00795	0,0159	0,0238	0,0318	0,0398
0,6	0,0169	0,339	0,0509	0,0678	0,0848
0,7	0,0338	0,0675	0,101	0,135	0,169
0,8	0,0665	0,133	0,195	0,266	0,333
0,9	0,155	0,311	0,467	0,622	0,779
1,0	∞	∞	∞	∞	∞

Если передается максимальная полоса частот, определяемая равенством (5.37), то соответствующее ей значение коэффициента нелинейных искажений S_{\max} дается формулой:

$$S_{\max} = \frac{m}{4\sqrt{2}} = 0,176 m. \quad (5.39)$$

В частности, например, если $m = 0,3$, то $S_{\max} = 0,054$. Формула (5.39) показывает, что в пределах максимальной полосы частот [ф-ла (5.37)] нелинейные искажения из-за дисперсии сравнительно малы.

Полученные формулы, строго говоря, применимы только для простого сигнала. Однако можно надеяться, что результаты для сложного и простого сигналов количественно различаться будут мало. Поэтому выведенные в этом параграфе формулы можно рассматривать как приближенно годные для любых видов сигналов. Естественно, что в зависимости от конкретных условий (вида информации и способа передачи, точности работы радиосредств и т. п.) они нуждаются в уточнении.