Методические указания к решению "простейшей задачи" вариационного исчисления

А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин

Казань, 2013

УДК 519.6, 517.97

ББК

Печатается по решению методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научный редактор

к.ф.-м.н., доцент **Агачев Ю.Р.**

Рецензенты

к.ф.-м.н., доцент КГЭУ **Сурай Л.А.** и к.ф.-м.н., доцент **Тазюков Б.Ф.**

Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г.

Методические указания к решению "простейшей задачи" вариационного исчисления: методическое пособие/А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин – Казань: Казан. ун-т, 2013. - 14 с.

Данные методические указания предназначены для студентов 3, 4 курсов по специальностям/направлениям "математика", "математика и компьютерные науки", "механика", "механика и математическое моделирование" при изучении дисциплин "Вариационное исчисление и методы оптимизации", "Теория оптимизации", "Экстремальные задачи".

УДК 519.6, 517.97

ББК

Содержание

1. Постановка задачи

Простейшей задачей классического вариационного исчисления (ПЗВИ) называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \text{extr}, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1, \tag{2}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ – данная функция трех переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих ***краевым условиям*** (2). Такие функции называют ***допустимыми*** и говорят, что задача (1) – (2) дана в слабой постановке.

Введем норму в пространстве $C^1([t_0, t_1])$:

$$\|x\|_1 = \|x\|_{C^1([t_0,t_1])} := \max\left\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\right\},$$

где

$$\|x\|_C := \max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t)|.$$

Определение 1. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (1) – (2) ($\widehat{x} \in wlocmin$), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, для которой

$$\|x - \widehat{x}\|_1 < \delta.$$

Определение 2. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***слабый абсолютный (слабый глобальный) минимум*** *в задаче* (1) – (2) ($\widehat{x} \in wabsmin$), *если*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

В качестве множества допустимых функций можно выбрать пространство кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, t_1]$ ($x \in KC^1[t_0, t_1]$) с нормой

$$\|x\|_0 = \|x\|_C,$$

удовлетворяющих краевым условиям (2). В этом случае говорят о сильной постановке задачи.

Определение 3. *Говорим, что допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***сильный локальный минимум*** *в задаче* (1) – (2) ($\widehat{x} \in strlocmin$), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J(x(\cdot)) \geq J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x*, для которой*

$$\|x - \widehat{x}\|_0 < \delta.$$

Определение 4. *Говорим, что допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***сильный абсолютный (сильный глобальный) минимум*** *в задаче* (1) – (2)*, если*

$$J(x(\cdot)) \geq J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x*.*

Часто в вариационном исчислении функции $x(t)$, доставляющие минимум (максимум) функционалу, называют точками минимума (максимума) или точками экстремума.

2. Необходимое условие локального экстремума

Пусть функция $\widehat{x}$ *доставляет слабый локальный экстремум в задаче* (1) – (2)*, функции* $f, f_x, f_{\dot{x}}$ *– непрерывны в некоторой окрестности графика* $\Gamma_{\widehat{x},\hat{\dot{x}}} =$

$\Big\{(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t))|t\in[t_0,t_1]\Big\}$ $\Big(f,f_x,f_{\dot{x}}\in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x},\dot{\widehat{x}}}))\Big)$. *Тогда* $\widehat{f}_{\dot{x}}$ *– непрерывно дифференцируемая функция и выполнено уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}}(t)+\widehat{f}_x(t)=0,\quad \forall t\in[t_0,t_1].$$

Здесь $\widehat{f}_{\dot{x}}(t):=\frac{d}{d\dot{x}}f(t,x,\dot{x})\Big|_{\substack{x=\widehat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\widehat{x}}}}$, аналогично $\widehat{f}_x(t):=\frac{d}{dx}f(t,x,\dot{x})\Big|_{\substack{x=\widehat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\widehat{x}}}}$.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются ***экстремалями***. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (2), называются ***допустимыми экстремалями*** в ПЗВИ (1)–(2).

В ПЗВИ (1)–(2) в качестве $x(t)$ может выступать вектор функция $x(t)=(x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t))$. Тогда необходимым условием локального экстремума является система уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}_i}(t)+\widehat{f}_{x_i}(t)=0,\quad \forall t\in[t_0,t_1],\ i=\overline{1,n}.$$

3. Необходимые и достаточные условия локального минимума второго порядка.

3.1. Условие Лежандра. Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}\geq 0,\quad \forall\ t\in[t_0,t_1],$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}>0,\quad \forall\ t\in[t_0,t_1].$$

В векторном случае $x(t)=(x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t))$,

$$f_{\dot{x}\dot{x}}=\begin{pmatrix} f_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \dots & f_{\dot{x}_1\dot{x}_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ f_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & \dots & f_{\dot{x}_n\dot{x}_n}\end{pmatrix}$$

– матрица $n\times n$. Условие $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}\geq 0$ означает неотрицательную определенность матрицы, а условие $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}>0$ – ее положительную определенность.

3.2. Условие Якоби. Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right)+\widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{f}_{xx}(t)h(t)=0$$

называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи на экстремали $\widehat{x}$.

Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если для решения уравнения Якоби $h(t)$ с начальными условиями

$$h(t_0)=0,\ \dot{h}(t_0)=1,$$

имеет место равенство

$$h(\tau)=0.$$

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0,t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0,t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

3.3. Условие Вейерштрасса. Функция

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u)=f(t,x,u)-f(t,x,\dot{x})-f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(u-\dot{x})$$

называется ***функцией Вейерштрасса*** интегранта f.

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Вейерштрасса***, если

$$\mathcal{E}(t,\widehat{x},\dot{\widehat{x}},u)=f(t,\widehat{x},u)-f(t,\widehat{x},\dot{\widehat{x}})-\widehat{f}_{\dot{x}}(t)(u-\dot{x})\geq 0,\ \ \forall u\in\mathbb{R},\forall t\in[t_0,t_1].$$

3.4. Необходимые условия слабого локального минимума. *Пусть функция* $\widehat{x}\in C^2([t_0,t_1])$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче* $(1)-(2)$, *интегрант* $f\in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x},\dot{\widehat{x}}}))$. *Тогда на* $\widehat{x}$ *выполняется уравнение Эйлера, условие Лежандра и, если на экстремали* $\widehat{x}$ *выполнено усиленное условие Лежандра, то выполняется и условие Якоби.*

3.5. Необходимые условия сильного локального минимума. *Пусть функция* $\widehat{x}\in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ *доставляет сильный локальный минимум* *в задаче* (1)−(2), *интегрант* $f \in C^1(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x},\hat{\dot{x}}}))$. *Тогда на* $\widehat{x}$ *выполняются уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса.*

Если при этом существует $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, *то на* $\widehat{x}$ *выполняется также условие Лежандра.*

3.6. Достаточные условия слабого локального минимума. *Пусть функция* $\widehat{x} \in C^2([t_0, t_1])$ *– допустимая экстремаль в задаче (1), (2), интегрант* $f \in C^3(V)$, *где* V *– некоторая окрестность графика* $\Gamma_{\widehat{x}} = \{(t, \widehat{x}(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, *на* $\widehat{x}$ *выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда* $\widehat{x}$ *доставляет слабый локальный минимум.*

3.7. Достаточные условия сильного локального минимума. *Пусть функция* $\widehat{x} \in C^2([t_0, t_1])$ *– допустимая экстремаль в задаче* (1) − (2), *интегрант* $f \in C^3(V)$, *где* V *– некоторая окрестность графика* $\Gamma_{\widehat{x}} = \{(t, \widehat{x}(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, *на* $\widehat{x}$ *выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, интегрант* f *является выпуклым по* $\dot{x}$ *на* V. *Тогда* $\widehat{x}$ *доставляет сильный локальный минимум.*

3.8. Случай квадратичных функционалов. Рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle)\, dt \to \inf, \qquad (1')$$

$$x(0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (2')$$

где $A(t), B(t), C(t)$ – матрицы порядка $n \times n$, на слабый и сильный минимум.

Пусть в задаче $(1')$−$(2')$ *матрицы A, C непрерывно дифференцируемы, B непрерывна и выполнено усиленное условие Лежандра. Тогда, если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум. Если же не выполнено условие Якоби, то значение задачи равно* $-\infty$.

Замечание 1. Так как множество $KC^1[t_0, t_1]$ шире, чем $C^1[t_0, t_1]$, то для $\widehat{x} \in C^1$ необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием и сильного экстремума, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием и слабого экстремума.

4. Алгоритм решения

Для определенности будем решать ПЗВИ на минимум.

1. Найти допустимые экстремали.

   С этой целью выписать необходимое условие экстремума – уравнение Эйлера:
$$-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}(t) + f_x(t) = 0.$$
   Найти решения уравнения Эйлера $\widehat{x}$, удовлетворяющие заданным условиям на концах ("допустимые экстремали")

2. Для каждой допустимой экстремали проверить необходимые и достаточные условия локального минимума второго порядка.

   2.1. Проверить выполнение условия Лежандра:

   а) Если условие Лежандра не выполнено, т.е функция $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}$ знакопеременна на отрезке $[t_0, t_1]$, то не выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума.

   б) Если выполнено условие Лежандра:
$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0,\ \forall t \in [t_0, t_1],$$
   то $\widehat{x}$ можно подозревать на точку слабого (сильного) локального минимума.

   в) Если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке условия Якоби.

   2.2. Записать уравнение Якоби на экстремали $\widehat{x}$:
$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{xx}(t)h(t) = 0$$

и решить его с начальными данными

$$h(t_0) = 0, \ \dot{h}(t_0) = 1.$$

2.3. Найти сопряженные с t_0 точки τ, т.е. нули найденного решения $h(t)$ уравнения Якоби при $t > t_0$ и проверить выполнение условия Якоби.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие, следовательно, $\widehat{x}$ – не доставляет локального минимума.

Если при выполнении усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то выполнено достаточное условие слабого минимума, и $\widehat{x} \in wlocmin$.

2.4. Проверка на сильный минимум.

а) Если интегрант f является выпуклым по $\dot{x}$ при всех фиксированных t и x, рассматриваемых в качестве параметра, то $\widehat{x}$ доставляет сильный минимум в задаче.

б) Если интегрант f является ни выпуклым ни вогнутым, то следует проверить выполнение необходимого условия сильного экстремума – условие Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Если не выполнено условие Вейерштрасса, то в этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет сильного минимума.

Замечание 2. При исследовании ПЗВИ на максимум необходимо следовать этому же алгоритму, учитывая, что условие Лежандра выполнено, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

и усиленное условие Лежандра, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) < 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Условие Вейерштрасса означает, что

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

а для сильного максимума функция f должна быть вогнутой по $\dot{x}$.

Замечание 3. Задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \sup,$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1,$$

можно заменить эквивалентной ей задачей

$$-J(x(\cdot)) = -\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf,$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1.$$

5. Пример решения

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}^3 dt \to \inf,$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = 1.$$

1. Запишем необходимое условие слабого, а значит, и сильного экстремума – уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} 3\dot{x}^2 = 0 \Longleftrightarrow \dot{x} = \text{const}.$$

   Общее решение уравнение Эйлера:

$$x = x(t) = C_1 t + C_2.$$

Из условий на концах находим, что

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0.$$

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\widehat{x} = \widehat{x}(t) = t.$$

2. Проверим на $\widehat{x} = t$ необходимые и достаточные условия экстремума.

2.1. Выполнено усиленное условие Лежандра:

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 6\dot{\widehat{x}}(t) = 6 > 0, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

Следовательно, переходим к проверке условия Якоби.

2.2. Выпишем уравнение Якоби:

$$-\frac{d}{dt}6\dot{h} = 0 \Leftrightarrow \ddot{h} = 0.$$

Общее решение уравнения Якоби:

$$h(t) = C_1 t + C_2.$$

Начальным условиям

$$h(0) = 0, \dot{h}(0) = 1,$$

удовлетворяет функция

$$h(t) = t.$$

Эта функция не имеет нулей в полуинтервале $(0,1]$. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, выполнено достаточное условие слабого локального минимума, т.е. $\widehat{x} \in wlocmin$.

2.3. Поскольку функция $f = \dot{x}^3$ не выпукла по $\dot{x}$, то достаточное условие сильного минимума не выполняется. Проверим необходимое условие сильного минимума – условие Вейерштрасса:

$$\varepsilon(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = f(t, \widehat{x}, u) - f(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) =$$

$$= u^3 - \dot{\widehat{x}}^3 - 3\dot{\widehat{x}}^2(u - \dot{\widehat{x}}) = u^3 - 1 - 3(u-1) = u^3 - 3u + 2.$$

Очевидно, что $\forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$ функция

$$\varepsilon(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = u^3 - 3u + 2$$

знакопеременна, следовательно, условие Вейерштрасса не выполняется. Так как не выполняется необходимое условие, то функция $\widehat{x}$ не доставляет сильного локального минимума.

Ответ: $\widehat{x} = t \in wlocmin, J(\widehat{x}) = 1.$

Литература

[1] Галеев Э. М., Тихомиров В.М. **Оптимизация: теория, примеры, задачи.** – М.: Элиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[2] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с. ISBN 5-9221-0590-6.

[3] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с. ISBN 978-5-9221-0590-3.