

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И.УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

**Часть 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН
В НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ**

Учебно-методическая разработка

КАЗАНЬ - 1995

Предлагаемая учебно-методическая разработка рассчитана на студентов физических и радиофизических специальностей 2-4 курсов университетов.

Разработка состоит из трех частей:

Часть 1. Основные понятия;

Часть 2. Электромагнитные волны диапазона радиочастот;

Часть 3. Распространение радиоволн в неоднородных и анизотропных средах.

При подготовке курса использованы монографии и учебные пособия, список которых приведен в конце каждой из трех частей методической разработки. В конце разделов предлагаются задачи. Для некоторых из них приведены подробные решения, что позволяет студентам самостоятельно изучить ряд разделов курса.

Автор: доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой радиоэлектроники
Казанского университета
НАСИРОВ АЛЬБЕРТ МАХМУТОВИЧ.

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ.

Реальные среды, как правило, являются неоднородными, т.е. их свойства изменяются в пространстве. Поэтому скорость и направление распространения в таких средах являются локальными характеристиками волны, зависящими от координат. Точные решения волновых уравнений в таких средах известны лишь для некоторых законов изменения волнового параметра $K=K(x,y,z)$. В общем случае решение находится приближенным методом.

Если свойства среды изменяются достаточно медленно в пространстве, то обычно используется так называемое геометрикооптическое приближение. В узком смысле (лучевом) этот метод применяется для построения изображений при помощи лучей. В широком (волновом) понимании геометрическая оптика выступает как метод описания волновых полей. При таком толковании лучи образуют геометрический каркас, на который "нашивается" волновое поле.

4.1 Приближение геометрической оптики.

Рассмотрим неоднородную среду, полагая что показатель преломления заметно изменяется лишь на расстояниях $L \gg \lambda_c$ (где λ_c - длина волны в среде). Естественным выглядит предположение, что структура решения волнового уравнения будет похожа на решение для однородных сред. Векторы E , H , K будут медленно изменяться в зависимости от координат. Масштаб L будет масштабом, где эти изменения можно считать существенными. Т.е. среду можно считать локально однородной на масштабе длины волны λ_c и существенно неоднородной на расстояниях, превышающих L . Для того, чтобы относительные изменения показателя преломления $n=n(x,y,z)$ на масштабе равном длине волны λ_c в среде были пренебрежимо малы, должно

выполняться условие

$$\frac{1}{n} \left| \frac{dn}{ds} \right| \lambda_c < 1,$$

где s - расстояние вдоль произвольного направления. Т.к. длина волны в среде равна $\lambda_c = \lambda/n$, это соотношение можно записать в виде:

$$\frac{1}{n^2} \left| \frac{dn}{ds} \right| \lambda < 1. \quad (4.1)$$

Это неравенство может быть истолковано как условие применимости геометрической оптики.

Задачу о распространении волны в неоднородной среде в геометрическом приближении можно формулировать следующим образом. В однородной среде $n = \text{const}$ и плоская волна описывается выражением:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - K_c s)} = E_0 e^{i(\omega t - K n s)} \quad (4.2)$$

где $K_c = K n = 2\pi/\lambda_c$.

Изменение фазы на отрезке длиной s равно $K n s$. В неоднородной среде показатель преломления является функцией координат $n = n(x, y, z)$. Если выбрать малый участок пути Δs , то на нем показатель преломления $n(s)$ изменяется незначительно и для изменения фазы волны справедливо выражение $K n(s) \Delta s$. Изменение фазы волны на всем пути распространения определится интегралом $\int n(l) dl$. Если использовать лучевую трактовку, то выражение для волны следует записать в виде:

$$E = E_0 e^{i \int (\omega t - K n(s) ds)} \quad (4.3)$$

Т.о. изучение распространения волн в неоднородной среде может быть сведено к определению траектории волны, если не

интересоваться поведением амплитуды волны.

Выведем уравнение луча. Касательная к лучу в какой-либо точке ортогональна поверхности равных фаз, проходящей через эту точку. В однородных средах лучи - прямые линии, поверхности равных фаз - плоскости. Уравнение поверхности равных фаз в таких средах определяется выражением $\omega t - K x = \text{const}$. В неоднородных средах лучи криволинейны, и поверхности равных фаз не являются плоскостями. Уравнение поверхности равных фаз в этом случае представим в виде:

$$\omega t - K \psi(x, y, z) = \text{const}, \quad (4.4)$$

где $\psi(x, y, z)$ - функция координат.

Поверхности $\psi(x, y, z) = \text{const}$ перпендикулярны касательным к лучам (см. рис. 4.1).

Найдем скорость распространения постоянной фазы вдоль луча l . Для этого продифференцируем уравнение (4.4) по t :

$$\omega - K \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Обозначим через \bar{l} единичный вектор, направленный по касательной к лучу в направлении возрастания функции ψ . Можно записать:

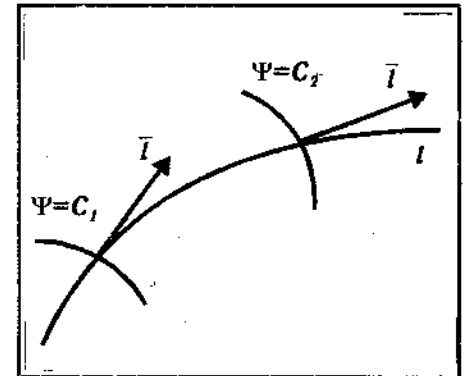


Рис. 4.1

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = s \text{grad} \psi = |\text{grad} \psi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) для скорости получим:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{k|\text{grad}\psi|} \quad (4.7)$$

С другой стороны, значение v можно получить из уравнения

$$\omega t - k \int n ds = \text{const.}$$

Дифференцируя его по времени, получим:

$$\omega - kn \frac{dl}{dt} = 0,$$

отсюда

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{kn} \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) получаем:

$$n = |\text{grad}\psi|. \quad (4.9)$$

Функция ψ , определяемая этим уравнением, называется эйконалом (фазой), а само уравнение — уравнением эйконала. Получим уравнение луча, используя это уравнение. Для этого умножим уравнение (4.9) на единичный вектор \vec{l} :

$$\vec{l}n = \vec{l}|\text{grad}\psi| = \text{grad}\psi. \quad (4.10)$$

Продифференцируем это уравнение по s :

$$\frac{\partial}{\partial s} (\vec{l}n) = \frac{\partial}{\partial s} (\text{grad}\psi).$$

Производная вектора вдоль кривой s дается выражением :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (\text{grad}\psi) &= (\vec{l}\nabla) \text{grad}\psi = \\ &= \vec{i} \left(l_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + l_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + l_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right) + \\ &+ \vec{j} \left(l_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + l_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + l_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right) + \\ &+ \vec{k} \left(l_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + l_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + l_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.10) следует:

$$l_x = \frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad l_y = \frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad l_z = \frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.11), получим уравнение луча. Продемонстрируем решение на примере первого слагаемого в правой части уравнения (4.11):

$$\begin{aligned} l_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + l_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + l_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} &= \\ = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right] &= \\ = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} n^2 = \frac{\partial n}{\partial x}. \end{aligned}$$

Аналогично для других слагаемых имеем: $\partial n / \partial y$ и $\partial n / \partial z$.

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}\psi = \text{grad}n = \nabla n.$$

Отсюда уравнение луча

$$\frac{\partial}{\partial s} (\vec{l}n) = \nabla n. \quad (4.12)$$

Это уравнение луча при произвольной зависимости n от координат.

4.2 Геометрическая оптика слоисто-неоднородной среды.

В качестве примера рассмотрим траектории лучей в сферически-слоистой и плоско-слоистой средах. Примерами таких сред могут служить земная атмосфера и ионосфера. В сферически-слоистой среде показатель преломления зависит только от расстояния r до фиксированной точки O :

$$n = n(\vec{r}).$$

В этом случае вектор $\text{grad } n$ направлен по радиусам r , проведенным из начала системы координат. Умножим обе части уравнения (4.12) векторно на \vec{r} :

$$\left[\vec{r} \frac{\partial}{\partial s} (\vec{l}n) \right] = [\vec{r} \nabla n] = 0. \quad (4.13)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial s} [\vec{r}n\vec{l}] = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, n\vec{l} \right] + \left[\vec{r}, \frac{\partial}{\partial s} (n\vec{l}) \right].$$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$ - касателен к лучу, т.е. параллелен \vec{l} , поэтому

$$\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, n\vec{l} \right] = 0.$$

Следовательно, уравнение (4.13) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial s} [\vec{r}n\vec{l}] = 0$$

Это означает, что векторное произведение

вектора $n\vec{l}$ касательного к лучу и вектора \vec{r} остается постоянным вдоль луча:

$$[\vec{r}n\vec{l}] = \text{const}.$$

Отсюда следует, что лучи являются плоскими кривыми, лежащими в плоскости, проходящей через начало координат. Вдоль каждого из лучей выполняется условие:

$$nr \sin \theta = \text{const}, \quad (4.14)$$

где θ - угол между касательными к лучу \vec{l} в данной точке и радиус - вектором r . Соотношение (4.14) представляет собой закон Снелиуса для сферически-слоистой среды. Константа определяется из граничных условий. Пусть при $r=r_0$, $\sin \theta = \sin \theta_0$, $n=n_0=1$. Тогда

$$nr \sin \theta = r_0 \sin \theta_0. \quad (4.15)$$

Уравнение траектории можно найти из соотношения (см. рис. 2а, б):

$$\text{tg} \theta = \frac{r d\alpha}{dr} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\frac{n^2 r^2}{r_0^2} - \sin^2 \theta_0}}, \quad (4.16)$$

где α - центральный угол.

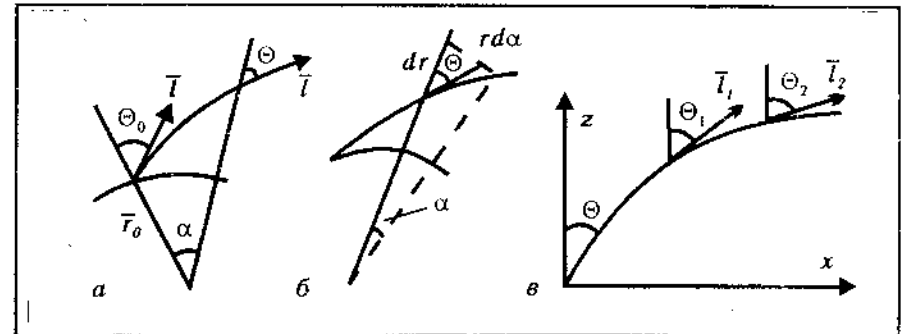


Рис. 4.2

В плоско-слоистой среде показатель преломления зависит от одной координаты, например z (см. рис. 4.2в): $n=n(z)$. В этом случае уравнение луча (4.12) можно записать в виде:

$$\frac{d(n \sin \theta)}{ds} = \frac{dn}{dx} = 0$$

или

$$n(z) \sin \theta(z) = \text{const} = \sin \theta_0, \quad (4.17)$$

где θ - угол, который луч составляет с осью z в произвольной точке траектории (при $z=0$, $\theta=\theta_0$). Уравнение луча получим из соотношения:

$$\text{tg} \theta = \frac{dx}{dz} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (4.18)$$

Из (4.16) и (4.18) видно, что угол наклона луча по мере распространения в слоистой среде изменяется, т.е. лучи искривляются. Это явление называется рефракцией.

4.3 Рефракция лучей в плоско-слоистой среде.

Рассмотрим несколько примеров рефракции лучей при разных законах изменения показателя преломления от высоты $n=n(z)$.

1. Случай монотонного увеличения показателя преломления с высотой.

В этом случае $\text{grad} n > 0$. Такие условия реализуются, например, в тропосфере. Пусть в точке M неоднородной среды на высоте z_m над идеально-отражающей плоской поверхностью выходит луч под углом θ_0 к вертикали. Поведение луча будет зависеть от угла θ_0 . При анализе надо опираться на уравнение (4.18):

1) Если $\theta_0 < \pi/2$, луч направлен вверх в сторону увеличивающихся значений показателя преломления. В уравнении (4.18) знаменатель при увеличении

высоты увеличивается и $\text{tg} \theta$ - уменьшается. Это приводит к искривлению луча и он приближается к вертикали.

2) Если $\theta_0 > \pi/2$ луч будет направлен к отражающей поверхности. Распространение происходит в сторону уменьшающихся значений показателя преломления. В уравнении (4.18) уменьшается знаменатель, что приводит к увеличению $\text{tg} \theta$, т.е. к уменьшению θ . Следовательно, луч отклоняется от вертикали и при этом возможны различные траектории: а) луч достигает уровня $z=0$ и отражается (кривая 2 на рис. 4.3); б) луч достигает точки поворота при выполнении условия $n(z) = |\sin \theta_0|$. Это возможно, когда $\theta_0 = \pi/2$. Сначала луч становится параллельным оси x , а затем поворачивается в сторону возрастающих значений $n(z)$ (луч 3 на рис. 4.3); в) при некотором значении угла $\theta_0 > \pi/2$ точка поворота будет лежать на поверхности $z=0$ (луч 4). Траектория 4 является границей между областью, в которую лучи в результате рефракции могут попасть и называются областью тени. Характерные траектории лучей для обсуждавшегося случая зависимости $n(z)$ приведены на рис. 4.3.

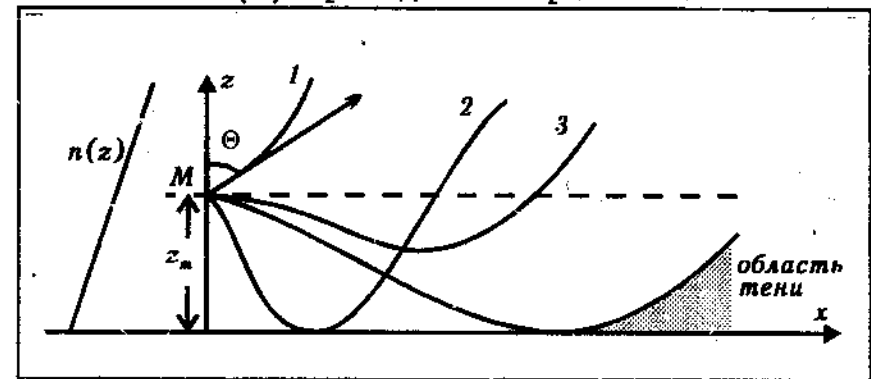


Рис. 4.3

2) Случай монотонного уменьшения показателя преломления с высотой. В этом случае $\text{grad } n < 0$. Такие условия характерны для ионосферы. В результате рефракции лучи отклоняются к горизонтали, т.к. угол $\theta > \theta_0$. На высоте z_0 , определяемой из условия $n(z_0) = \sin \theta_0$, направление луча параллельно горизонтальной плоскости, т.е. на высоте z_0 происходит поворот луча. Из уравнения (4.18) следует, что

$$x = \int_0^{z_0} \sin \theta_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/2} dz + \int_z^{z_0} \sin \theta_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/2} dz.$$

Расстояние между точками входа луча в неоднородную среду и выхода из нее (т.е. длина скачка при распространении радиоволн в ионосфере, например) равно:

$$\delta x = x_2 - x_1 = 2 \sin \theta_0 \int_0^{z_0} (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/2} dz.$$

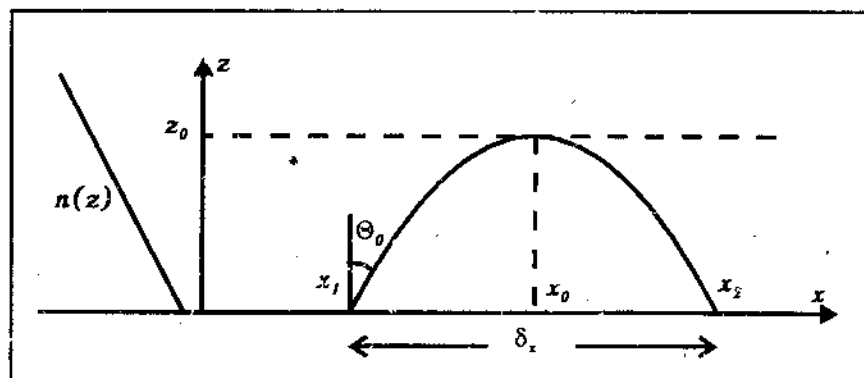


Рис. 4.4

4.4 Условие применимости метода геометрической оптики.

Условие малости длины волны в среде по отношению к характерному масштабу изменения параметров волны и среды $\lambda/L \ll 1$ (а именно это и означает условие (4.1)) является необходимым, но еще недостаточным условием справедливости геометрического приближения. Возможности аналитически определить условие применимости метода и его погрешностей ограничены тем, что, как правило в задачах о распространении волн в неоднородных средах, не известно точное решение. Кравцовым Ю.А. и Орловым Ю.М. предложены эвристические критерии применимости приближения геометрической оптики.

Представим, что точечный источник волн расположен в точке Γ_1 с радиусом-вектором \vec{r}_1 , а точка наблюдения в Γ_2 . Эйконал (или оптический путь) вдоль луча $\Gamma_1 \Gamma_2$ обозначим $\psi(\Gamma_1 \Gamma_2)$ и будем считать его опорным лучом. Выберем точку Γ_1' , лежащую возле опорного луча, и соединим точку Γ_1' с Γ_1 и Γ_2 . Ломаный луч $\Gamma_1 - \Gamma_1' - \Gamma_2$ назовем виртуальным лучом. Оптический путь вдоль виртуального луча равен

$$\psi_{\text{вирт}} = (\vec{r}_1 \vec{r}_1') + \psi(\vec{r}_1' \vec{r}_2).$$

Построим около опорного луча поверхность

$$(\psi_{\text{вирт}} - \psi_{\text{опорн}}) = \lambda_0 / 2.$$

λ_0 - длина волны в среде. В этом случае эйконал на опорном луче отличается от эйконала на виртуальном луче на половину длины волны (т.е. их фазы отличаются на π). Эта поверхность представляет огибающую первых зон Френеля, нанизанных на опорный луч. Уравнение этой поверхности можно представить в виде:

$$F(r') = |\psi(r_1, r') + \psi(r', r_2) - \psi(r_1, r_2)| - \frac{\lambda_0}{2} = 0.$$

Объем, ограниченный в этой поверхности, можно назвать Френелевским объемом. В частном случае плоской волны в однородной среде (т.е. $n = \text{const}$) радиус первой зоны Френеля равен:

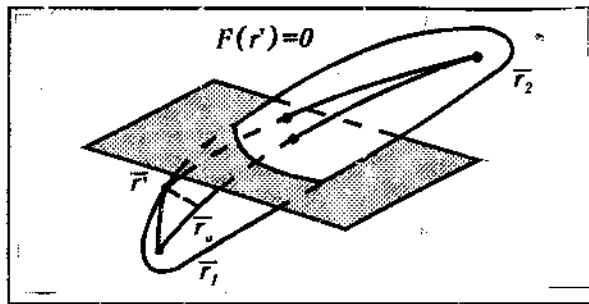


Рис. 4.5

$$a_f = \sqrt{\frac{\lambda_0 z}{n}}$$

Зонам более высокого порядка в уравнении для поверхности $F(r')=0$ отвечает разность хода $m\lambda_0/2$, $m=2,3,\dots$. Если свойства изменяются плавно, вследствие интерференции вторичные волны от высших зон Френеля взаимно погашаются, и результирующее поле определяется ближайшей окрестностью луча - его Френелевским объемом.

Необходимо делать различие между математическим лучом (это бесконечно тонкая линия) и физическим лучом, имеющим конечную толщину, определяемую Френелевским объемом. Исходя из того, что Френелевский объем определяет область пространства, формирующего поле в заданной точке, можно сформулировать два критерия применимости метода геометрической оптики:

1) параметры среды и волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно изменяться в поперечном сечении Френелевского объема;

2) Френелевские объемы лучей, проходящих в одну и ту же точку, не должны существенно пересекаться друг с другом.

Это означает, что согласно критерию 1 должны выполняться условия:

а) для амплитуды волны A : $a_f |\nabla_1 A/A| \ll 1$,

б) для компонент импульса $p = \nabla \psi$: $a_f |\nabla_1 p_i/p| \ll 1$,

в) для показателя преломления n : $a_f |\nabla_1 n/n| \ll 1$,

где a_f - максимальное сечение Френелевского объема, $\nabla_1 = \nabla - 1(V)$ - оператор дифференцирования в направлении, ортогональном лучу.

Критерий 2 означает, что общая часть Френелевских объемов лучей δV_f , проходящих в данную точку наблюдения, должна быть значительно меньше каждого из Френелевских объемов V_f . Критерий 2 позволяет избежать двукратного учета вклада одних и тех же вторичных волн в результирующее поле.

Задачи к разделу 4

Задача 1. Рассмотрите качественно ход лучей при волноводном распространении в слоистой неоднородной среде над идеально-отражающей поверхностью для случая, когда показатель преломления n изменяется с высотой немонотонно и на некоторой высоте z_0 $\text{grad} n$ изменяет знак: в интервале $0 \leq z_n \leq z_0$ $\text{grad} n < 0$, в интервале высот $z > z_0$ $\text{grad} n > 0$. Поверхность отражения расположена на высоте $z_0 = 0$. Источник излучения расположен на высоте $z_m > z_0$.

Задача 2. Для сферически слоистой среды получить зависимость между зенитными углами лучей на высотах $h=0$ и $h=h_n$ и центральными углами α_n , через которые определяется значение координат произвольной точки рефрагирующего луча в сферической системе координат.

Указание к решению: разбить среду на тонкие сферические слои, в пределах которых можно

считать показатель преломления постоянной величиной. Задачу решать в предположении, что показатель преломления уменьшается с высотой.

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.

Анизотропными называют среды, физические свойства которых зависят от направления. Анизотропная среда называется однородной, если зависимость ее свойств от направления в различных точках одинакова. В общем случае в таких средах вектор напряженности электрического E и магнитного H полей и векторы электрической D и магнитной B индукций не параллельны, т.к. связаны между собой диэлектрической ϵ_{ij} и магнитной μ_{ij} проницаемостями, являющимися тензорными величинами. Анизотропия может быть связана со структурой среды (к примеру, в кристаллах), либо создаваться наложением внешних полей.

Влияние анизотропных свойств среды на распространение электромагнитной волны определяется материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}.$$

Для гармонических во времени полей эти уравнения принимают вид:

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \epsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}),$$

$$B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}). \quad (5.1)$$

Как правило, свойства среды таковы, что тензором является одна из величин: $\hat{\epsilon}(\omega)$ или $\hat{\mu}(\omega)$, другую можно считать скалярной величиной. Если тензором является диэлектрическая проницаемость $\hat{\epsilon}$, а μ -скаляр, то такая среда называется гиروهлектрической. Примером может служить плазма в постоянном магнитном поле. Если тензором

является магнитная проницаемость $\hat{\mu}$, ϵ -скаляр, то среда называется гиромангнитной. Примером может служить феррит, помещенный в постоянное магнитное поле.

Для определенности мы ниже будем рассматривать гиروهлектрическую среду. В этом случае материальное уравнение принимает вид:

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \epsilon_{ij} E_j(\omega, \vec{r}), \quad \vec{B}(\omega, \vec{r}) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega, \vec{r}) \quad (5.2)$$

5.1 Общие свойства распространения электромагнитных волн в анизотропных средах.

Рассмотрим анизотропную среду, описываемую материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}. \quad (5.3)$$

Будем интересоваться распространением плоских монохроматических волн, т.е. будем считать, что электрический и магнитный векторы определяются выражениями:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.4)$$

Уравнения Максвелла запишем в виде:

$$\text{rot} \vec{H} = + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.5a) \quad \text{div} \vec{D} = 0, \quad (5.5b)$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.5б) \quad \text{div} \vec{H} = 0. \quad (5.5г)$$

Преобразуем эти уравнения, используя (5.4). Проиллюстрируем это на примере уравнений (5.5б) и (5.5г):

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{h} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \quad (a)$$

$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}, \quad E_y = E_{0y} e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}, \quad E_z = E_{0z} e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})},$$

$$(\vec{k}\vec{r}) = K_x x + K_y y + K_z z,$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{h}$ - орты осей x, y, z координатной системы, в которой решается задача.

Для примера:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = E_{0z} (iK_x) e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})} = (iK_x) E_z.$$

Аналогично получаются производные от остальных проекций вектора \vec{E} на оси координат уравнения (а). Теперь уравнение (а) переписывается в виде:

$$\text{rot } \vec{E} = i[\vec{i}(K_x E_z - K_z E_y) + \vec{j}(K_z E_x - K_x E_z) + \vec{h}(K_x E_y - K_y E_x)] = i[\vec{k}\vec{E}]. \quad (6)$$

Производная по времени

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{H}_0 (i\omega) e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})} = \vec{H} (i\omega). \quad (в)$$

Используя уравнения (6) и (в), уравнение (5.5б) переписываем в виде:

$$[\vec{k}\vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H}. \quad (5б)$$

Уравнение (5.5г) эквивалентно следующему:

$$\text{div } \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = i(K_x H_x + K_y H_y + K_z H_z) = i(\vec{k}\vec{H}) = 0, \quad (\vec{k}\vec{H}) = 0 \quad (5.5г)$$

Аналогичные выражения могут быть получены для уравнений (5.5а) и (5.5в).

Т.о. в случае плоских гармонических волн уравнения Максвелла (5.5) будут иметь вид:

$$[\vec{k}\vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D} \quad (5.6а) \quad (\vec{k}\vec{D}) = 0 \quad (5.6в)$$

$$[\vec{k}\vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H} \quad (5.6б) \quad (\vec{k}\vec{H}) = 0. \quad (5.6г) \quad (5.6)$$

Получим из этой системы волновое уравнение для компоненты E . Для этого исключим из уравнения (6б) вектор \vec{H} , умножая его векторно на \vec{k} и используя уравнение (6а):

$$[\vec{k}[\vec{k}\vec{E}]] = \frac{\omega}{c} [\vec{k}\vec{H}] = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \vec{E}.$$

Т.о. волновое уравнение принимает вид:

$$[\vec{k}[\vec{k}\vec{E}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \vec{E} = 0. \quad (5.7)$$

Введем в рассмотрение вектор $\vec{n} = \vec{k}c/\omega$, где $|\vec{n}| = n$ - показатель преломления. Используя \vec{n} из (5.7), получим волновое уравнение в виде:

$$[\vec{n}[\vec{n}\vec{E}]] + \hat{\epsilon} \vec{E} = 0. \quad (5.8)$$

Из уравнений (5.6в) и (5.6г) следует, что векторы \vec{k}, \vec{D} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, а из (5.6б), что вектор \vec{H} перпендикулярен вектору \vec{E} . Т.о. векторы $\vec{k}, \vec{D}, \vec{E}$ лежат в одной плоскости, но вектор \vec{E} не коллинеарен вектору \vec{D} , т.к. они связаны соотношением $D_i = \epsilon_{ij} E_j$. В плоскости фронта волны, определяемой уравнением $(\vec{k}\vec{r}) = \text{const}$, лежат вектора \vec{D} и \vec{H} . Вектор \vec{E} не лежит в этой плоскости (см. рис. 5.1).

Плотность потока энергии характеризуется вектором Умова - Пойтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}].$$

В анизотропной среде направление плотности

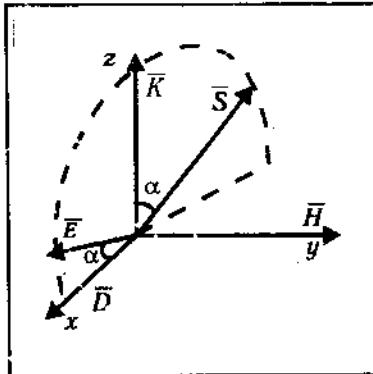


Рис. 5.1

потока энергии не совпадает с направлением волнового вектора. Это означает, что не совпадают направления фазовой и групповой скоростей. Векторы \vec{D} , \vec{E} , \vec{K} , \vec{S} лежат в одной плоскости, ортогональной вектору \vec{H} . На рис. 5.2 а, б показан волновой фронт волны в изотропной (5.2а) и анизотропной (5.2б) средах:

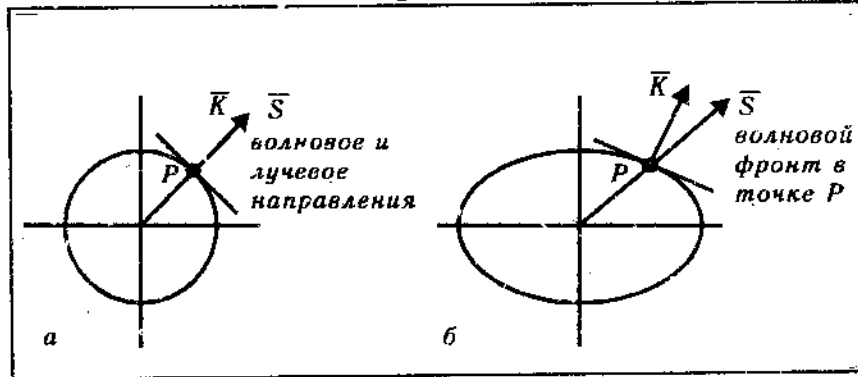


Рис. 5.2

В анизотропных средах удобно ввести кроме волнового \vec{K} лучевой вектор \vec{S} , совпадающий по направлению с вектором Умова - Пойтинга \vec{S} . Величина вектора \vec{S} определяется соотношением:

$$(\vec{S}\vec{n}) = 1. \quad (5.9)$$

Векторы \vec{E} и \vec{H} ортогональны \vec{S} .

Для дальнейшего анализа удобно представить векторное уравнение (5.8) в виде системы уравнений для декартовых компонент вектора \vec{E} :

$$(n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}) E_j = 0$$

$$(n^2\delta_{xx} - n_x n_x - \epsilon_{xx}) E_x + (n^2\delta_{xy} - n_x n_y - \epsilon_{xy}) E_y + (n^2\delta_{xz} - n_x n_z - \epsilon_{xz}) E_z = 0$$

$$(n^2\delta_{yx} - n_y n_x - \epsilon_{yx}) E_x + (n^2\delta_{yy} - n_y n_y - \epsilon_{yy}) E_y + (n^2\delta_{yz} - n_y n_z - \epsilon_{yz}) E_z = 0$$

$$(n^2\delta_{zx} - n_z n_x - \epsilon_{zx}) E_x + (n^2\delta_{zy} - n_z n_y - \epsilon_{zy}) E_y + (n^2\delta_{zz} - n_z n_z - \epsilon_{zz}) E_z = 0, \quad (5.10)$$

Здесь δ_{ik} - символ Кронекера ранга 2:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Приравнявая нулю определитель этой системы

$$\det [n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}] = 0, \quad (5.11)$$

получают дисперсионное уравнение, определяющее частотную зависимость показателя преломления $n(\omega)$. Для того, чтобы получить данные, необходимые для анализа поведения электромагнитных волн в анизотропных средах, нужно конкретизировать физические свойства среды распространения волн, т.е. необходимо знать свойства тензора $\epsilon_{ij}(\omega)$. В качестве важного примера рассмотрим распространение электромагнитных волн в плазме, помещенной в постоянное внешнее магнитное поле.

5.2 Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в постоянном магнитном поле.

Чтобы получить выражение для ϵ , нужно рассчитать движение компонентов плазмы в постоянном внешнем магнитном поле и переменных электрическом и магнитном полях. Постоянное магнитное поле оказывает сильное влияние на свойства плазмы, в том числе и на распространение волн различного типа. В первую очередь влияние поля H_0 характеризуются отношением частоты волны к гирочастоте электронов и ионов:

$$\omega_H = \frac{|e|H}{mc} = 1.76 \cdot 10^7 H \text{ Гц},$$

$$\Omega_H = \frac{|e|H}{Mc} = 1.76 \cdot 10^7 \frac{m}{M} H \text{ Гц}. \quad (5.12)$$

Ω_n , ω_n - частоты, с которыми свободные ионы и электроны вращаются вокруг силовых линий магнитного поля. В нашем анализе мы будем пренебрегать влиянием магнитным полем волны на движение электронов. Это возможно, если скорость электрона много меньше скорости электромагнитной волны. Рассмотрим в качестве примера ионосферную плазму и солнечную корону. При температуре электронов $T \sim 10^6 \text{ К}$ (солнечная корона) скорость основной массы электронов $v_e = \sqrt{\kappa T/m} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ (где κ - постоянная Больцмана) и квадрат отношения тепловой скорости к скорости света $\beta^2 = (v/c)^2 = \kappa T/mc^2 \sim 10^{-4}$, т.е. $\beta \ll 1$. В ионосфере T_e значительно меньше, поэтому условие $\beta \ll 1$ тем более выполняется. Поэтому можно пользоваться нерелятивистским приближением. В электромагнитной волне поле H обычно не превосходит электрическое поле E . Для плоской волны $[KE] = (\omega/c)H$, $K^2 = (\omega^2/c^2)(n - i\kappa)^2$ и магнитная сила меньше электрической силы, действующей на электрон:

$$\frac{e}{c} [vH] < eE.$$

на множитель порядка v/c при $n \sim 1$. Если под v понимать тепловую скорость электрона, магнитная сила меньше электрической примерно в 100 раз при $T \sim 10^6 \text{ К}$ и в ~ 3000 раз при $T \sim 300 \text{ К}$. Реально упорядоченная скорость электронов в поле волны намного меньше тепловой, поэтому тем более магнитной силой можно пренебречь в сравнении с электрической.

Влиянием ионов на распространение электромагнитных волн обычно (но не всегда!) можно пренебречь, если $\omega \gg \Omega_n$, а влияние магнитного поля на движение электронов несущественно, если $\omega \gg \omega_n$. В земной ионосфере магнитное поле равно $H_0 \approx (0.2 + 0.5)$ эрстед, гирочастота электронов $\omega_n \sim (3+9) \cdot 10^6 \text{ Гц}$, гирочастота ионов $\Omega_n \approx 100 + 300 \text{ Гц}$. В солнечной короне для максимально встречающихся полей $H \approx 5000$ эрстед $\omega_n \approx 10^{11} \text{ Гц}$, $\Omega_n \approx 10^8 \text{ Гц}$. Приведенные оценки позволяют считать, что в плазме ионосферы и солнечной короны магнитное поле будет сильно влиять на распространение радиоволн.

В общем случае решить задачу о распространении электромагнитных волн в плазме во внешнем магнитном поле очень сложно. Поэтому мы будем использовать приближенное решение. Во-первых, ограничимся приближением для высокочастотных волн, справедливым при $\omega \gg \Omega_n$. В этом случае можно не учитывать движение ионов на поляризацию среды в поле волны. Во-вторых, будем считать, что ток смещения в среде намного больше тока проводимости, и поэтому ток проводимости при решении задачи учитывать не будем. Это возможно в случае $\omega \gg \nu$, где ν - эффективная частота соударений электронов с молекулами и ионами.

Рассмотрим модель плазмы, представляющей

однородный ионизированный газ, содержащий N электронов в единице объема. Будем предполагать, что все величины изменяются по гармоническому закону, т.е. пропорциональны $\exp(-i\omega t)$. В силу принятых нами выше условий полный ток в среде равен току смещения:

$$\vec{j} = -Ne \vec{v} = -i\omega \vec{P}. \quad (5.13)$$

В этом случае вектор электрической индукции равен:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} - i \frac{4\pi Ne}{\omega} \vec{v} = \vec{E} - U \vec{v}. \quad (5.14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} U &= \omega_p^2 / \omega^2, \\ \omega_p &= \sqrt{4\pi Ne^2 / m} - \text{электронная плазменная частота,} \\ \vec{v} &= i \frac{m\omega}{e} \vec{v}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для того, чтобы найти компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, используем уравнение движения электрона.

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}_0]. \quad (5.16)$$

Из (5.15) следует:

$$\vec{v} = -i \frac{e}{m\omega} \vec{V}. \quad (5.15a)$$

Подставим это значение скорости в (5.16):

$$\frac{i}{\omega} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = E - \frac{i}{\omega} \left[\vec{v} \cdot \frac{e |\vec{H}_0|}{mc |\vec{H}_0|} \vec{H}_0 \right] = E - i \left[\vec{v} \frac{\omega_H \vec{H}_0}{\omega |H_0|} \right].$$

Введем обозначение:

$$\vec{W} = \frac{\omega_H \vec{H}_0}{\omega |H_0|}, \quad |\vec{W}| = \frac{\omega_H}{\omega} \quad (5.17)$$

и перепишем предыдущее уравнение в виде:

$$\frac{i}{\omega} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = E - i [\vec{V} \vec{W}].$$

Учитывая, что мы положили все величины изменяющимися по гармоническому закону, считаем $v = v_0 \exp(-i\omega t)$. Тогда $\partial v / \partial t = (-i\omega)v$ и уравнение перепишется в виде:

$$\vec{v} = E - i [\vec{v} \vec{w}]. \quad (5.18)$$

Введем систему координат, ось z которой совпадает с вектором H_0 . В этом случае вектор w имеет составляющие $(0, 0, w = \omega_H / \omega)$. Учитывая, что

$$[\vec{v} \vec{w}] = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

Из (5.18) получаем систему для компонент вектора v :

$$v_x = E_x - iw v_y, \quad v_y = E_y + iw v_x, \quad v_z = E_z. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.19) в (5.14), получаем компоненты вектора электрической индукции D :

$$\begin{aligned} D_x &= E_x - u V_x = \left(1 - \frac{u}{1-w^2}\right) E_x + i \frac{uw}{1-w^2} E_y, \\ D_y &= E_y - u V_y = -i \frac{uw}{1-w^2} E_x + \left(1 - \frac{u}{1-w^2}\right) E_y, \end{aligned}$$

$$D_z = (1-u) E_z. \quad (5.20)$$

Т.о. в выбранной нами системе координат,

когда ось z параллельна внешнему магнитному полю H_0 , тензор диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u}{1-w^2} & i \frac{uw}{1-w^2} & 0 \\ -i \frac{uw}{1-w^2} & 1 - \frac{u}{1-w^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & -i\kappa & 0 \\ i\kappa & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Учитывая принятые нами обозначения, имеем:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= i\kappa = i \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь κ - показатель поглощения.

Из (5.22) видно, что некоторые компоненты тензора ϵ_{ij} стремятся к бесконечности при $\omega \rightarrow \omega_H$. Это означает, что на частотах, близких к гирочастоте, наблюдается резонансное поглощение электромагнитных волн. В выбранной нами модели плазмы не учитывалось поглощение энергии волны из-за соударений, поэтому при $\omega = \omega_H$ компоненты тензора ϵ_{ij} стремились к бесконечности. При учете поглощения резонанс проявляется в резком возрастании поглощения волны круговой поляризации, направление вращения электрического вектора которой совпадает с направлением лорноревского вращения электрона во внешнем магнитном поле. В этом случае при $\omega \rightarrow \omega_H$ радиус орбиты электрона увеличивается, что приводит к увеличению пути, проходимому электроном в среде

в единицу времени и, следовательно, увеличению числа соударений с ионами и нейтральными атомами и молекулами. Чтобы показать это, рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль вектора H , т.е. считаем, что $K \parallel H_0$. На электрон в поле волны и во внешнем магнитном поле действуют силы: 1) $(1/\sqrt{2})eE_m$, обусловленная электромагнитной волной, 2) центробежная сила $mrv\omega^2$, где r - радиус орбиты электрона, 3) $e/c[vH]$ - магнитная сила.

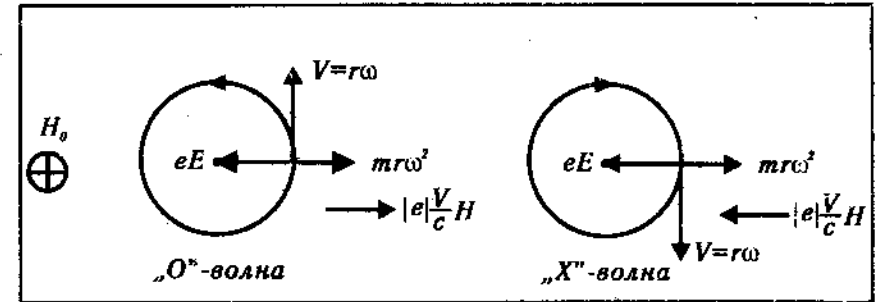


Рис. 5.3

Уравнение движения электрона для право- и левополяризованной волны

$$\frac{|e|}{\sqrt{2}} E_m - mrv\omega^2 \mp |e| \frac{V}{c} H = 0.$$

Учитывая, что $v = r\omega$, $\omega_H = |e|H/(mc)$, $W = \omega_H/\omega$, имеем:

$$\frac{|e|E_m}{\sqrt{2}m} - r_{0,x}\omega^2 \mp r_{0,x}\omega\omega_H = 0$$

и

$$r_{0,x} = \frac{|e|}{\sqrt{2}m} \cdot \frac{E_m}{\omega^2(1 \pm W)}.$$

Индексы 0 и x относятся к волнам обыкновенной

и необыкновенной поляризации. Для х-волн при $W=1$, т.е. $\omega=\omega_x$ радиус $r_x \rightarrow \infty$. Соударения предотвращают увеличение радиуса до бесконечности.

5.3 Распространение плоских высокочастотных волн в магнитоактивной плазме.

Введем систему координат с осью z , параллельной внешнему магнитному полю H_0 . Пусть волновой вектор волны K лежит в плоскости yz и составляет с осью z угол θ . В этой системе компоненты волнового вектора K и вектора n равны:

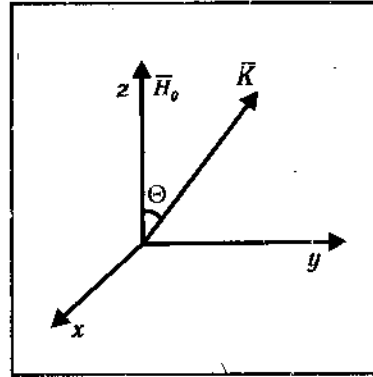


Рис. 5.4

$$\begin{aligned} K_x &= 0, & K_y &= K \sin \theta, & K_z &= K \cos \theta; \\ n_x &= 0, & n_y &= n \sin \theta, & n_z &= n \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Воспользуемся системой уравнений (10) для компонент вектора E и подставляя в нее значения n_{ij} и ε_{ij} из (23) и (21), получим:

$$\begin{aligned} (n^2 - \varepsilon_1) E_x - i\kappa E_y &= 0 \\ i\kappa E_x + (n^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_1) E_y - n^2 \sin \theta \cos \theta E_z &= 0 \\ -n^2 \sin \theta \cos \theta E_y + (n^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1) E_z &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} n^2 - \varepsilon_1 & -i\kappa & 0 \\ i\kappa & n^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_1 & -n^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & -n^2 \sin \theta \cos \theta & n^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.24)$$

получим уравнения для нахождения квадрата показателя преломления n^2 :

$$\begin{aligned} & (n^2 - \varepsilon_1) [(n^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_1) (n^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1) - \\ & - (-n^2 \sin \theta \cos \theta) (-n^2 \sin \theta \cos \theta)] - \\ & - (i\kappa) [(-i\kappa) (n^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1)] = \\ & = n^4 (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta) - \\ & - n^2 [(\varepsilon_1^2 - \kappa^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_1 (1 + \cos^2 \theta)] + \\ & + \varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \kappa^2) = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$a n^4 - b n^2 + c = 0, \quad (5.25)$$

где

$$a = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta,$$

$$b = (\varepsilon_1^2 - \kappa^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_1 (1 + \cos^2 \theta),$$

$$c = \varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \kappa^2).$$

Решение этого уравнения $n^2 = (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$ преобразуем следующим образом:

$$n^2 = 1 - 1 + \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1 - \frac{2a - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= 1 - \frac{(2a-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(2a-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = 1 - \frac{2(a-b+c)}{2a-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (5.25)$$

Подставим в это решение значения $\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \chi$, выразив их через безразмерные величины $U = \omega_p^2 / \omega^2$, $w = \omega_H / \omega$:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{U}{1-w^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = (1-U), \quad \chi = \frac{Uw}{1-w^2}.$$

Получим для коэффициентов преломления:

$$n_{0x}^2 = 1 - \frac{2U(1-U)}{2(1-U) - w^2 \sin^2 \theta + \sqrt{w^4 \sin^4 \theta + 4w^2(1-U)^2 \cos^2 \theta}}. \quad (5.26)$$

Т.к. U и w являются функциями частоты, уравнение (5.26) определяет частотную дисперсию показателя преломления в магнитоактивной плазме. Каждому значению частоты ω соответствует два значения показателя преломления. Т.о. на фиксированной частоте в магнитоактивной плазме могут распространяться две высокочастотные волны: обыкновенная (о - волна) и необыкновенная (х - волна), фазовые скорости которых определяются величинами n_o и n_x . Показатели преломления о - и х - волн зависят от угла θ между волновым вектором K и внешним магнитным полем.

Названия обыкновенная и необыкновенная волны введены по аналогии, используемой в оптике при распространении света в кристалле с двойным лучепреломлением. В оптике для "о - волны" фазовая скорость v_o не зависит от направления распространения, а для "х - волны" - зависит. В магнитоактивной плазме скорости обеих волн зависят от направления распространения, так что в оптическом смысле обе характеристические волны являются необыкновенными.

5.4 Резонансные условия.

Резонансные условия соответствуют стремлению показателя преломления к бесконечности. Для того, чтобы определить эти условия, воспользуемся выражением для n^2 , следующим из уравнения (5.25):

$$(n^2)_{o,x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$n^2 \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0$. Из (5.25) $a^2 = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta = 0$. Отсюда, учитывая что

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{U}{1-w^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1-U,$$

получаем:

$$a = \left(1 - \frac{U}{1-w^2}\right) \sin^2 \theta + (1-U) \cos^2 \theta = 0$$

$$1-w^2 - U + Uw^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (*)$$

Решение этого уравнения:

$$U_{\infty} = \frac{1-w^2}{1-w^2 \cos^2 \theta}. \quad (**)$$

При продольном распространении $K \parallel H_0$ угол $\theta = 0$ и $U_{\infty} = 1$. При поперечном распространении $K \perp H_0$ угол $\theta = \pi/2$ и $U_{\infty} = 1-w^2$. Для произвольных углов $\theta < \theta < \pi/2$ U_{∞} определяется приведенной выше формулой.

При фиксированных значениях ω_p и ω_H n^2 обращается в бесконечность на двух частотах ω_{∞} , определенных уравнением (*).

$$1 - \frac{\omega_H^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \cos^2 \theta = 0$$

ИЛИ

$$\omega^4 - (\omega_p^2 + \omega_H^2) \omega^2 + \omega_p^2 \omega_H^2 \cos^2 \theta = 0,$$

отсюда

$$\omega_{\infty}^2 = \frac{(\omega_p^2 + \omega_H^2)}{2} \mp \sqrt{\frac{(\omega_p^2 + \omega_H^2)^2}{4} - \omega_p^2 \omega_H^2 \cos^2 \theta}.$$

Рассмотрим случай продольного ($\theta=0$) и поперечного ($\theta=\pi/2$) распространения. При $\theta=0$ резонансные частоты равны:

$$\omega_{\infty}^2 = \frac{\omega_p^2 + \omega_H^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\omega_p^2 + \omega_H^2)^2}{4} - \omega_p^2 \omega_H^2} = \begin{cases} \omega_p^2 \\ \omega_H^2 \end{cases}$$

При $\omega=\omega_p$ наблюдается плазменный резонанс, при $\omega=\omega_H$ - гирорезонанс.

При $\theta=\pi/2$

$$\omega_{\infty}^2 = \frac{1}{2} (\omega_p^2 + \omega_H^2) \pm \sqrt{\frac{(\omega_p^2 + \omega_H^2)^2}{4}} = \begin{cases} \omega_p^2 + \omega_H^2 \\ 0 \end{cases}$$

Частота $\omega_{\infty} = \omega_r = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_H^2}$ называется частотой верхнегибридного резонанса. То, что вторая резонансная частота оказалась равной нулю, связано с тем, что выше мы пренебрегли движением ионов. Если учесть движение ионов, резонанс будет наблюдаться на нижнегибридной частоте $\omega_{\infty} = \sqrt{\omega_p \Omega_H}$. Зависимость резонансных частот от угла θ иллюстрирует рисунок 5.5.

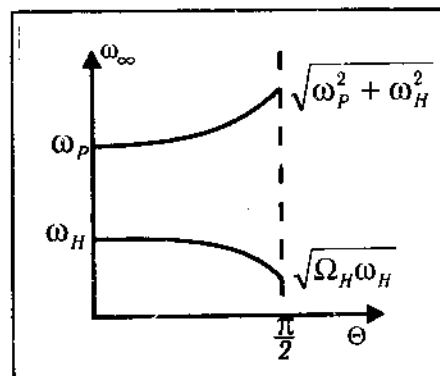


Рис. 5.5

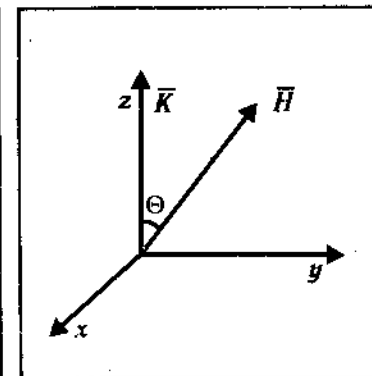


Рис. 5.6

5.5 Поляризация нормальных волн в магнитоактивной плазме.

Найдем множитель поляризации, т.е. отношение компонент вектора E в плоскости фронта волны:

$$P_{1,2} = \frac{E_x}{E_y}.$$

Введем систему координат, в которой волновой вектор K направлен вдоль оси z , а вектор H лежит в плоскости yz и составляет угол θ с осью z .

В этой системе координат компоненты вектора n :

$$n_x=0, \quad n_y=0, \quad n_z=n.$$

Воспользуемся системой уравнений (5.10) для компонентов вектора электрического поля, подставив в нее значения n_x, n_y, n_z , получим:

$$(n^2 - \epsilon_{xx}) E_x - \epsilon_{xy} E_y - \epsilon_{xz} E_z = 0$$

$$-\epsilon_{yx} E_x + (n^2 - \epsilon_{yy}) E_y - \epsilon_{yz} E_z = 0$$

$$\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z = 0.$$

В этой системе два независимых уравнения. Исключая E_z из первого и третьего уравнений, получим:

$$E_z = -\frac{\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y}{\epsilon_{zz}}, \quad (\eta^2 - \epsilon_{xx})E_x - \epsilon_{xy}E_y + \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}}(\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y) = 0.$$

Отсюда:

$$\left(\eta^2 - \epsilon_{xx} + \frac{|\epsilon_{xz}|}{\epsilon_{zz}}\right)E_x = \left(\epsilon_{xy} - \frac{\epsilon_{zx}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}}\right)E_y. \quad (5.27)$$

В предыдущем разделе мы определили вид тензора диэлектрической проницаемости в другой системе координат. Обозначим ее $x'y'z'$. Поэтому нужно найти компоненты тензора ϵ_{ij} в системе координат xuz , используемой в этом разделе. На рис. 5.7 показано взаимное положение старой и новой систем координат. Они связаны соотношением:

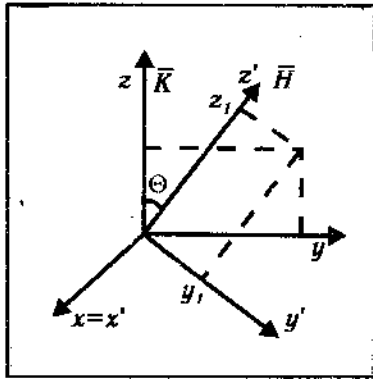


Рис. 5.7

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \theta + z' \sin \theta \\ z &= -y' \sin \theta + z' \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Компоненты тензора ϵ_{ij} преобразуются по формулам:

$$\epsilon_{ij} = a_{ik} a_{jl} \epsilon_{kl}, \quad a_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$$

Вычислим элементы тензора ϵ_{ij} . Запишем a_{ik} и ϵ_{kl} в виде матриц:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

В старой системе координат

$$\epsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & i\kappa & 0 \\ -i\kappa & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

В качестве примера вычислим некоторые компоненты тензора ϵ_{ij} в новой системе координат:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= a_{xx} a_{xx} \epsilon_{xx} + a_{xx} a_{xy} \epsilon_{xy} + a_{xx} a_{xz} \epsilon_{xz} + \\ &+ a_{xy} a_{xx} \epsilon_{yx} + a_{xy} a_{yy} \epsilon_{yy} + a_{xy} a_{yz} \epsilon_{yz} + \\ &+ a_{xz} a_{xx} \epsilon_{zx} + a_{xz} a_{xy} \epsilon_{zy} + a_{xz} a_{xz} \epsilon_{zz} = \\ &= (1)(1)(\epsilon_{\perp}) + (1)(0)(i\kappa) + (1)(0)(0) + \\ &+ (0)(1)(-i\kappa) + (0)(0)(\epsilon_{\perp}) + (0)(0)(0) + \\ &+ (0)(1)(0) + (0)(0)(0) + (0)(0)(\epsilon_{\parallel}) = \epsilon_{\perp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{yx} &= a_{yx} a_{xx} \epsilon_{xx} + a_{yx} a_{xy} \epsilon_{xy} + a_{yx} a_{xz} \epsilon_{xz} + \\ &+ a_{yy} a_{xx} \epsilon_{yx} + a_{yy} a_{xy} \epsilon_{yy} + a_{yy} a_{xz} \epsilon_{yz} + \\ &+ a_{yz} a_{xx} \epsilon_{zx} + a_{yz} a_{xy} \epsilon_{zy} + a_{yz} a_{xz} \epsilon_{zz} = \\ &= (0)(1)(\epsilon_{\perp}) + (1)(0)(i\kappa) + (0)(0)(0) + \\ &+ (\cos \theta)(1)(-i\kappa) + (\cos \theta)(0)(\epsilon_{\perp}) + (\cos \theta)(0)(0) + \\ &+ (\sin \theta)(1)(0) + (\sin \theta)(0)(0) + (\sin \theta)(0)(\epsilon_{\parallel}) = \\ &= -i\kappa \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} &= a_{yx}a_{yx}\varepsilon_{xx} + a_{yx}a_{yy}\varepsilon_{xy} + a_{yx}a_{yz}\varepsilon_{xz} + \\
&+ a_{yy}a_{yx}\varepsilon_{yx} + a_{yy}a_{yy}\varepsilon_{yy} + a_{yy}a_{yz}\varepsilon_{yz} + \\
&+ a_{yz}a_{yx}\varepsilon_{zx} + a_{yz}a_{yy}\varepsilon_{zy} + a_{yz}a_{yz}\varepsilon_{zz} = \\
&= (0)(0)(\varepsilon_1) + (0)(\cos\theta)(ix) + (0)(\sin\theta)(0) + \\
&+ (\cos\theta)(0)(-ix) + (\cos\theta)(\cos\theta)(\varepsilon_1) + \\
&\quad + (\cos\theta)(\sin\theta)(0) + \\
&+ (\sin\theta)(0)(0) + (\sin\theta)(\cos\theta)(0) + \\
&\quad + (\sin\theta)(\sin\theta)(\varepsilon_1) = \\
&= \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_1 \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Аналогично могут быть найдены и остальные компоненты тензора ε_{ij} . В итоге получим:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ix\cos\theta & -ix\sin\theta \\ -ix\cos\theta & \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_1 \sin^2\theta & (\varepsilon_1 - \varepsilon_1) \sin\theta \cos\theta \\ ix\sin\theta & (\varepsilon_1 - \varepsilon_1) \sin\theta \cos\theta & \varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_1 \cos^2\theta \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Подставляя в уравнение (27) компоненты ε_{ij} из (29) и выражение для квадрата показателя преломления n^2 из (26), получим для множителя поляризации:

$$P_{0,x} = \frac{E_x}{E_y} = -i \frac{2w(1-U)\cos\theta}{w^2 \sin^2\theta + \sqrt{w^4 \sin^4\theta + 4w^2(1-U)^2 \cos^2\theta}}.$$

Знак "-" перед корнем квадратным в знаменателе соответствует волне обыкновенной поляризации, "+" - необыкновенной волне.

В общем случае поляризация о - и х - волн - эллиптическая. Направления вращения векторов E в

плоскости фронта этих волн противоположны. Оси эллипсов поляризации о - и х - волн взаимно перпендикулярны. Это следует из того, что $P_o P_x = 1$. Множитель поляризации, так же как и n^2 зависит от отношений частот ω_i/ω и ω_n/ω .

5.6 Частные случаи распространения

электромагнитных волн в анизотропной плазме.
1. Продольное распространение. В этом случае волна распространяется вдоль внешнего магнитного поля, т.е. $K \parallel H_0$ и угол $\theta = 0$. Из выражений для показателя преломления и множителя поляризации имеем:

а) для волны "о" - поляризации:

$$n_o^2 = 1 - \frac{U}{1+w} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_n)}; \quad (31a)$$

б) для волны "х" - поляризации:

$$n_x^2 = 1 - \frac{U}{1-w} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_n)}. \quad (31б)$$

Множитель поляризации $P_{0x} = +i$, т.е. поляризация волны круговая. Обе волны поперечные. Направление вращения электрического вектора E в плоскости фронта волны при "х" - поляризации совпадает с направлением вращения электрона в магнитном поле. Это приводит к резонансному поглощению энергии волны на частотах, близких к ω_n . Отражение волн в неоднородной среде происходит на уровне, где показатель преломления равен нулю, т.е. для "о" - волны при $U = 1+w$, для "х" - волны при $U = 1-w$. В случае, если $\omega > \omega_n$ (т.е. $w < 1$) волны обеих поляризаций отражаются от неоднородной плазмы. При $\omega < \omega_n$ (т.е. $w > 1$) волна необыкновенной поляризации не отражается, т.к. при $w > 1$ условие $U \geq 1-w$ приводит к отрицательным значениям U и, следовательно, электронной концентрации. Для высокочастотных волн (при $w > 1$) дисперсионные

кривые приведены на рис. 5.8.

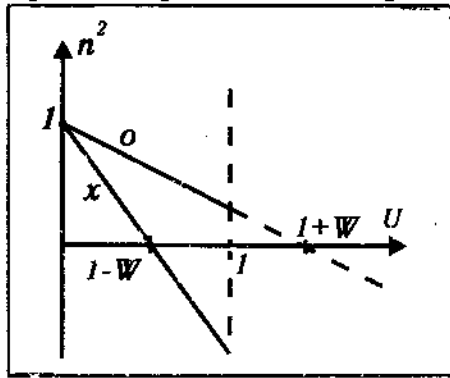


Рис. 5.8

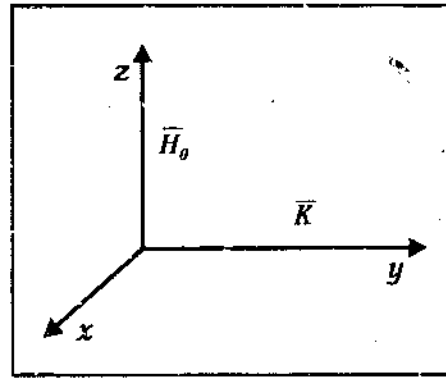


Рис. 5.9

2. Поперечное распространение электромагнитной волны. В этом случае $K \perp H_0$, т.е. угол $\theta = \pi/2$. Для определенности будем полагать, что вектор K направлен по оси y (см. рис. 5.9), поле H_0 направлено по оси z . Полагая в формулах для показателя преломления $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$, получим:

$$n_{0,x} = 1 - \frac{2U(1-U)}{2U(1-U) - w^2 + w^2}; \quad (5.32a)$$

а) для волны обыкновенной поляризации

$$n_0^2 = 1 - \frac{2U(1-U)}{2(1-U)} = 1 - U = \epsilon_1; \quad (5.32б)$$

б) для волны необыкновенной поляризации

$$n_x^2 = 1 - \frac{U(1-U)}{1-U-w^2}. \quad (5.32)$$

Рассмотрим вопрос о поляризации нормальных волн. Для этого вернемся к системе уравнений (5.24а) для компонент вектора E . При $\theta = \pi/2$ эта система переходит в:

$$\begin{cases} (n^2 - \epsilon_1) E_x - i\kappa E_y = 0 \\ i\kappa E_x - \epsilon_1 E_y = 0 \\ (n^2 - \epsilon_1) E_z = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

Перепишем два первых уравнения, подставляя выражения для n_0^2 , ϵ_1 , κ через U и w :

$$\begin{cases} [(1-U) E_x - (1 - \frac{U}{1-w^2}) E_x - i \frac{Uw}{1-w^2} E_y = 0 \\ i \frac{Uw}{1-w^2} E_x - (1 - \frac{U}{1-w^2}) E_y = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\frac{Uw^2}{1-w^2}) E_x - i \frac{Uw}{1-w^2} E_y = 0 \\ i \frac{Uw}{1-w^2} E_x - (\frac{1-U-w^2}{1-w^2}) E_y = 0. \end{cases}$$

Найдем определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{Uw^2}{1-w^2} & -i \frac{Uw}{1-w^2} \\ i \frac{Uw}{1-w^2} & -\frac{1-U-w^2}{1-w^2} \end{vmatrix} = -\frac{Uw^2}{1-w^2} \neq 0.$$

Т.к. определитель не равен нулю, мы должны считать, что $E_x = 0$, $E_y = 0$, т.е. вектор E направлен вдоль H . Следовательно, волна обыкновенной поляризации при поперечном распространении линейнополяризована (см. рис. 5.10). Этим объясняется совпадение значения n_0^2 со значением показателя преломления в изотропной плазме, т.к. при $K \perp H_0$, $E \perp H$ и электроны колеблются вдоль магнитного поля, и оно не оказывает влияния на их

движение.

Для волны "х" поляризации уравнения для компонент электрического вектора примут вид:

$$\begin{cases} \left[\frac{U}{1-w^2} - \frac{U(1-U)}{1-U-w^2} \right] E_x - i \frac{Uw}{1-w^2} E_y = 0 \\ iUwE_x - (1-U-w^2) E_y = 0 \end{cases}$$

Можно показать, что определитель этой системы равен нулю. Это означает, что компоненты вектора E $E_x \neq 0$ и $E_y \neq 0$. Из второго уравнения следует:

$$P = \frac{E_x}{E_y} = -i \frac{1-U-w^2}{Uw} = -i \frac{\epsilon_{\perp}}{\chi}$$

Это означает, что необыкновенная волна при поперечном распространении эллиптически поляризована в плоскости xu , т.е. волна не является строго поперечной и имеется продольная компонента вектора E .

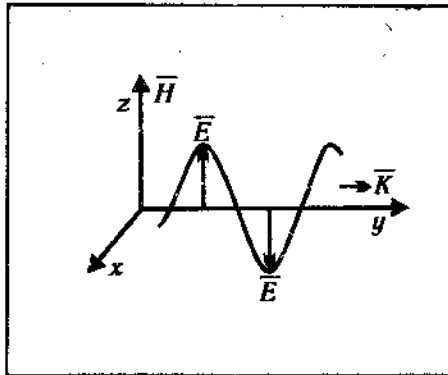


Рис. 5.10

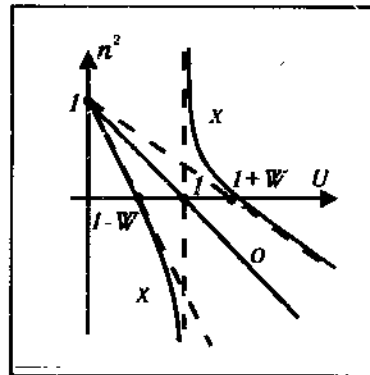


Рис. 5.11

Проанализируем условия отражения волн при поперечном распространении. Для "о" - волны показатель преломления обращается в нуль при

$$n_o^2 = 1 - U = 0, \text{ т.е. при } U = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 \text{ или } \omega = \omega_p \quad (5.34a)$$

Для волны "х" - поляризации отражение происходит при выполнении условия:

$$n_x^2 = 1 - \frac{U(1-U)}{1-U-w^2} = 0 \text{ или } U^2 - 2U - (1-w^2) = 0.$$

Отсюда

$$U_{1,2} = 1 \pm w. \quad (5.34b)$$

Для низкочастотных волн ($w > 1$) физический смысл имеет равенство $U = 1 + w$. Для высокочастотных волн ($w < 1$) имеются две точки отражения на дисперсионной кривой $U_1 = 1 + w$ и $U_2 = 1 - w$. Условия резонанса (т.е. равенства показателя преломления ∞) для "х" - волны возникает при $U = U_\infty = 1 - w^2$, т.е. на верхнегибридной частоте. При $w > 1$ получается $U_\infty = 1 - w^2 < 0$, т.е. условию резонанса удовлетворить нельзя. График зависимости $n^2(U)$ приведен на рис. 5.11 для высокочастотных волн (т.е. для $w < 1$).

3. Случай произвольной ориентации вектора \vec{K} , т.е. $0 < \theta < \pi/2$. Обе нормальные волны имеют в этом случае эллиптическую поляризацию. Показатели преломления n_o^2 и n_x^2 обращаются в ноль при тех же значениях, что и при поперечном распространении:

$$n_o^2 = 0 \text{ при } U = 1,$$

$$n_x^2 = 0 \text{ при } U = 1 \pm w, \quad (5.35)$$

Вид дисперсионных кривых приведен на рис. 5.12.

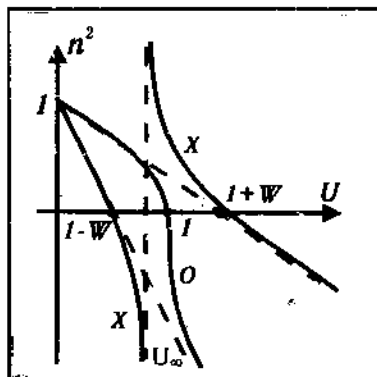


Рис. 5.12

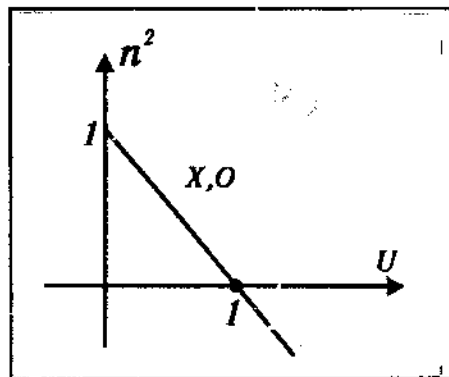


Рис. 5.13

4. Случай изотропной плазмы. В этом случае $N=0$, $\omega_x=0$, $w=0$ и $n_{ox}^2=1-U$. Т.е. условия отражения обеих нормальных волн совпадают. В неоднородной плазме они отражаются от уровня, где выполнено условие $\omega=\omega_p$. Дисперсионная кривая приведена на рис. 5.13.

Проблема перехода от распространения под произвольным углом θ_k продольному распространению при $\theta=0$.

Вернемся к дисперсионным кривым на рис. 5.8 и 5.12, 5.13. Видим, что в случае продольного распространения ($\theta=0$) для "о" - волны $n_o^2=0$ при $U=1+w$, для "х" - волны $n_x^2=0$ при $U=1-w$. Для произвольных углов $\theta \neq 0$ $n_o^2=0$ при $U=1$, $n_x^2=0$ при $U=1 \pm w$. Т.е. при продольном распространении мы "потеряли" точку отражения при $U=1$, при этом возникает противоречие и со случаем изотропной плазмы, для которой $n_{ox}^2=0$ при $U=1$. Хотя ясно, что в этих двух случаях из-за отсутствия влияния магнитного поля на движение электронов условия отражения должны быть одинаковыми.

Дело в том, что в системе уравнений для компонент электрического поля (5.10):

$$\begin{cases} (n^2 - \epsilon_{xx}) E_x - \epsilon_{xy} E_y - \epsilon_{xz} E_z = 0 \\ -\epsilon_{yx} E_x + (n^2 - \epsilon_{yy}) E_y - \epsilon_{yz} E_z = 0 \\ \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z = 0, \end{cases}$$

Одно из уравнений отщепляется и приобретает вид: $\epsilon=0$. И если мы допустим существование наряду с поперечными и продольных полей, нужно уравнение для показателя преломления

$$n_{ox}^2 = 1 - \frac{U}{1+w}$$

дополнить уравнением

$$U=1.$$

Это уравнение вертикальной прямой. Обозначим ее как на рисунке. Теперь можно продемонстрировать характер особенности дисперсионных кривых при $\theta=0$. При $\theta=0$ кривые $n_{ox}^2(U)$ переходят в прямые

$$n_x^2 = 1 - \frac{U}{1-w},$$

$$n_o^2 = 1 - \frac{U}{1+w},$$

$$U=1.$$

Т.е. можно считать, что ветвь "о" на рис. 5.14 состоит из трех участков: отрезка n_o^2 от $U=0$ до $U=1$, ее продолжения - вертикального отрезка до пересечения с прямой $n_x^2(U)$, и третьего участка от этой точки до значений $U \rightarrow \infty$.

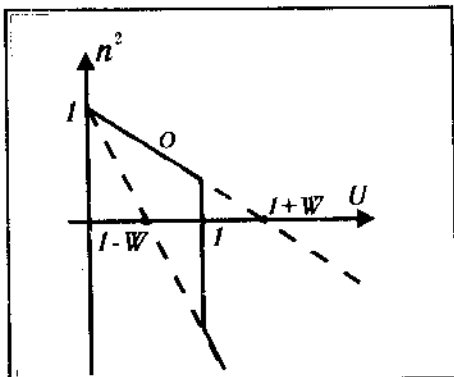


Рис. 5.14

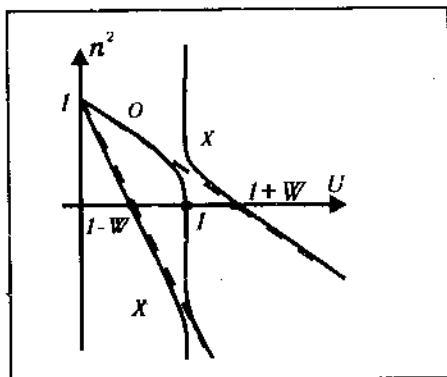


Рис. 5.15

На рис.5.14 и 5.15 продемонстрирован этот предельный переход в области значений углов $\theta \rightarrow 0$. В области наибольшего сближения дисперсионных кривых для o и x - волн легко осуществляется трансформация одной моды в другую.

Задачи к разделу 5.

Задача 1. Покажите, что линейно поляризованную электромагнитную волну можно представить в виде двух поляризованных по кругу компонент, электрические векторы которых вращаются в противоположных направлениях.

Решение. Рассмотрим две волны с одинаковыми амплитудами E_0 . Представим себе, что электрические векторы этих волн E вращаются в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью и волна распространяется вдоль оси y (см. рис.).

В точке A оба вектора \vec{E}_0 параллельны, и их суммарная амплитуда равна $2E_0$. Вектор $\vec{E} = E_0$ направлен вдоль оси z . В точке B векторы \vec{E}_0 образуют углы $\pm\Phi$ с осью z , поэтому их результирующая амплитуда равна

$$E = 2E_0 \cos \Phi.$$

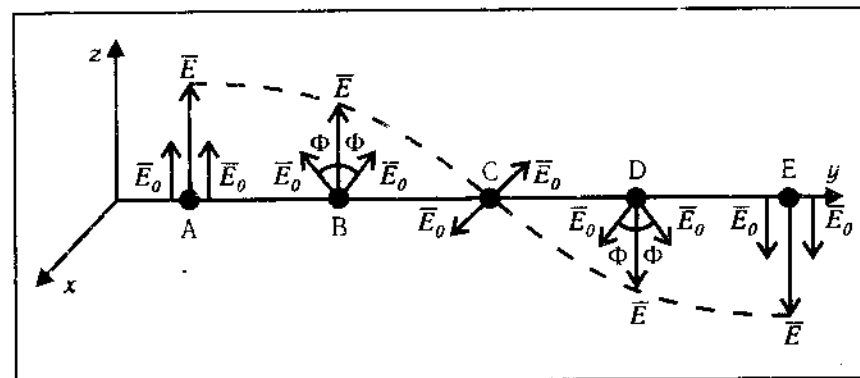


Рис. 1

В точке C оба вектора находятся в противофазе, поэтому результирующая амплитуда равна нулю. В точке D суммарный вектор равен $E = -2E_0 \cos \Phi$, в точке $E = -2E_0$. Т.о. результирующий сигнал является синусоидальным и поляризован в плоскости Z . Следовательно, линейно поляризованную волну действительно можно разложить на две волны с круговой поляризацией, электрические векторы которых вращаются в противоположных направлениях.

Задача 2. Найти выражение для угла поворота плоскости поляризации плоско поляризованной волны, распространяющейся в магнитоактивной плазме, через показатели преломления волн обыкновенной и необыкновенной поляризации.

Решение. Плоско поляризованная волна, распространяющаяся в магнитоактивной плазме, расщепляется на обыкновенную и необыкновенную компоненты. Если не учитывать поглощения в среде, то амплитуды этих компонент равны. Из-за различия в фазовых скоростях o - и x - волн результирующий вектор E будет поворачиваться относительно направления распространения. Обратимся к рисунку 2. На нем обозначены: Ω_o, Ω_x - углы поворота вектора E волн o - и x - поляризации. При равенстве

амплитуд этих волн выполняется соотношение

$$\Omega_0 - \Omega = \Omega_x + \Omega,$$

где Ω - угол поворота плоскости поляризации исходной плоскополяризованной волны. Из этого уравнения находим:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega_x).$$

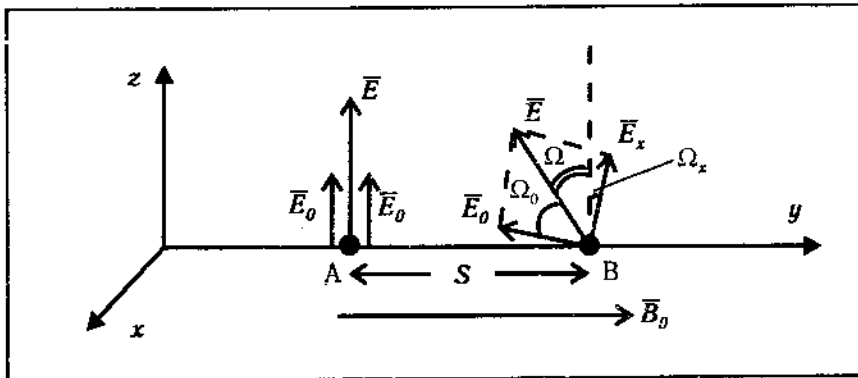


Рис. 2

Если через s обозначить расстояние между точками А и В, то поворот вектора $E_{0,x}$ равен (в радианах):

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda(0)} s, \quad \Omega_x = \frac{2\pi}{\lambda(x)} s.$$

где $\lambda(0)$ и $\lambda(x)$ - длины обыкновенной и необыкновенной волн. Поэтому для угла Ω справедливо соотношение:

$$\Omega = \pi s \left(\frac{1}{\lambda(0)} - \frac{1}{\lambda(x)} \right),$$

Длины волн в среде λ и в свободном пространстве связаны соотношением $\lambda = \lambda_0/n$, где n - показатель преломления. Следовательно, можно записать

$$\Omega = \frac{\pi s}{\lambda_0} (n_0 - n_x).$$

Задача 3. Найти угол поворота плоскости поляризации линейно поляризованной волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля в случае, когда частота волны намного больше гирочастоты электронов и электронной плазменной частоты.

Решение. В плазме, помещенной в магнитное поле, линейно-поляризованная волна расщепляется на волны о- и х- поляризации. В случае продольного распространения угол между волновым вектором K и внешним магнитным полем H_0 равен нулю и выражения для показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн принимают вид:

$$n_0^2 = 1 - \frac{U}{1+w}, \quad n_x^2 = 1 - \frac{U}{1-w},$$

где $U = \omega_p^2/\omega^2$, $w = \omega_H/\omega$,

$\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2/m}$ - плазменная частота,

$\omega_H = \frac{eH}{mc}$ - гирочастота электронов,

N - концентрация электронов.

На высоких частотах, значительно превышающих плазменную частоту, показатели преломления n_0 и n_x близки к единице, поэтому можно положить $n_0 + n_x \approx 2$. Следовательно, для угла Ω поворота плоскости поляризации будет справедливо соотношение:

$$\Omega = \frac{\pi s}{2\lambda_0} (n_0^2 - n_x^2) = \frac{\pi s}{\lambda_0} \frac{Uw}{1-w^2}.$$

Учитывая, что $\lambda_0 = c/f$, $\omega = 2\pi f$, f - линейная частота,

и используя значения для ω_p и ω_H , получим:

$$\Omega = \frac{Ne^2}{2m^2c^2} H \frac{s}{f^2}.$$

Из этого выражения следует, что угол поворота плоскости поляризации в плазме, помещенной в магнитное поле (эффект Фарадея), пропорционален длине пути s , пройденной волной в среде, электронной концентрации N , напряженности магнитного поля H и обратно пропорционален квадрату частоты.

Задача 4. Решите задачу 3 для случая поперечного распространения электромагнитной волны.

Ответ:

$$\Omega = \frac{\pi s}{2c} \cdot \frac{f_N f_H^2}{f^3}.$$

Литература

- 1 Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М: Наука, 1979.
- 2 Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Л. Волновые явления в ионосферной плазме. М: Наука, 1984.
- 3 Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М: Наука, 1967.
- 4 Дэвис К. радиоволны в ионосфере. М: Мир, 1973.
- 5 Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М: Наука, 1973.
- 6 Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М: Наука, 1980.

Оглавление

4 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ	3
4.1 Приближение геометрической оптики	3
4.2 Геометрическая оптика слоисто-неоднородной среды	8
4.3 Рефракция лучей в плоско-слоистой среде	10
4.4 Условия применимости метода геометрической оптики	13
Задачи к разделу 4	15
5 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.	16
5.1 Общие свойства распространения электромагнитных волн в анизотропных средах.	17
5.2 Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в постоянном магнитном поле.	22
5.3 Распространение плоских высокочастотных волн в магнитоактивной плазме.	28
5.4 Резонансные условия.	31
5.5 Поляризация нормальных волн в магнитоактивной плазме.	33
5.6 Частные случаи распространения электромагнитных волн в анизотропной плазме.	37
Задачи к разделу 5.	44
Литература	48

Сдано в набор 14.04.95. Подписано в печать 8.06.95.
Форм. бум. 60x84 1/16. Печ. л. 3. Тираж 200. Заказ 251.

Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420008 Казань, Ленина, 4/3