Полукольца и их приложения

С.Н. Ильин

Казанский федеральный университет

5 ноября 2012г.

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot, 1)$ — моноид;

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что
1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot, 1)$ — моноид;
3) $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot, 1)$ — моноид;
3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
4) $0x = x0 = 0$ при любом $x \in S$.

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot, 1)$ — моноид;
3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
4) $0x = x0 = 0$ при любом $x \in S$.

Истоки теории полуколец

- Теория колец — Dedekind(1894), Krull(1924), Noether(1927)

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot, 1)$ — моноид;
3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
4) $0x = x0 = 0$ при любом $x \in S$.

Истоки теории полуколец

- Теория колец — Dedekind(1894), Krull(1924), Noether(1927)
- Теория чисел — Hilbert(1899), Huntington(1902), Vandiver(1934)

Определение.

Полукольцом называется такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что

1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot, 1)$ — моноид;
3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
4) $0x = x0 = 0$ при любом $x \in S$.

Истоки теории полуколец

- Теория колец — Dedekind(1894), Krull(1924), Noether(1927)
- Теория чисел — Hilbert(1899), Huntington(1902), Vandiver(1934)
- Теория решеток

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $Id(R)$ — множество всех двусторонних идеалов кольца R. Для всех $A, B \in Id(R)$ полагаем

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $Id(R)$ — множество всех двусторонних идеалов кольца R. Для всех $A, B \in Id(R)$ полагаем

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$$

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $Id(R)$ — множество всех двусторонних идеалов кольца R. Для всех $A, B \in Id(R)$ полагаем

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$$

$$AB = \{\sum_{i=1}^{k} a_i b_i,\ k \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}$$

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $Id(R)$ — множество всех двусторонних идеалов кольца R. Для всех $A, B \in Id(R)$ полагаем

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$$

$$AB = \{\textstyle\sum_{i=1}^{k} a_i b_i,\ k \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}$$

Тогда $(Id(R), +, \cdot)$ — аддитивно идемпотентное полукольцо.

Примеры ограниченных дистрибутивных решеток.

1. Булевы алгебры.

Важные частные случаи:

Примеры ограниченных дистрибутивных решеток.

1. Булевы алгебры.

Важные частные случаи:

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (приложение — математическая логика)

Примеры ограниченных дистрибутивных решеток.

1. Булевы алгебры.

Важные частные случаи:

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (приложение — математическая логика)
- $\mathbb{B}^X = \{f : X \to \mathbb{B}\}$, X — непустое множество (приложение — теория множеств)

Примеры ограниченных дистрибутивных решеток.

1. Булевы алгебры.

Важные частные случаи:

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (приложение — математическая логика)
- $\mathbb{B}^X = \{f : X \to \mathbb{B}\}$, X — непустое множество (приложение — теория множеств)

2. Конечные цепи.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ и $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — естественным образом упорядоченная цепь. Тогда $(E_k, \max, \min)$ — полукольцо (приложение — k-значная логика)

Пусть X — конечный алфавит,
$\mathcal{L}(X)$ — множество всех языков в алфавите X,
$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ — языки, распознаваемые конечными автоматами.
Тогда

Пусть X — конечный алфавит,
$\mathcal{L}(X)$ — множество всех языков в алфавите X,
$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ — языки, распознаваемые конечными автоматами.
Тогда

- $(\mathcal{L}(X), \cup, \cap)$ — полная атомная булева алгебра

Пусть X — конечный алфавит,
$\mathcal{L}(X)$ — множество всех языков в алфавите X,
$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ — языки, распознаваемые конечными автоматами.
Тогда

- $(\mathcal{L}(X), \cup, \cap)$ — полная атомная булева алгебра
- $(\mathcal{A}(X), \cup, \cap)$ — неполная атомная булева алгебра

Пусть X — конечный алфавит,
$\mathcal{L}(X)$ — множество всех языков в алфавите X,
$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ — языки, распознаваемые конечными автоматами.
Тогда

- $(\mathcal{L}(X), \cup, \cap)$ — полная атомная булева алгебра
- $(\mathcal{A}(X), \cup, \cap)$ — неполная атомная булева алгебра
- $(\mathcal{L}(X), \cup, \cdot)$ и
  $(\mathcal{A}(X), \cup, \cdot)$ — некоммутативные полукольца.

“Числовые” полукольца:

1. $(\mathbb{N},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q}_+,+,\cdot)$, $(\mathbb{R}_+,+,\cdot)$

"Числовые" полукольца:

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$

2. $(\mathbb{N}, \max, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_+, \max, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$, $(\mathbb{I} = [0, 1], \max, \cdot)$

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество
   Приложения:
   - $\mathbb{N}^X$ — теория мультимножеств (multisets)

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество
   Приложения:
   - $\mathbb{N}^X$ — теория мультимножеств (multisets)
   - $\mathbb{I}^X$ — теория нечетких множеств (fuzzy sets)

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество
   Приложения:
   - $\mathbb{N}^X$ — теория мультимножеств (multisets)
   - $\mathbb{I}^X$ — теория нечетких множеств (fuzzy sets)
   - $\mathbb{I}^{X \times X}$ — теория нечетких отношений (fuzzy relations)

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество
2. $S[X_1, \ldots, X_n]$ — полукольцо многочленов над S

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество
2. $S[X_1, \ldots, X_n]$ — полукольцо многочленов над S
3. $M_n(S)$ — полукольцо матриц над S

Пусть S — полукольцо. Тогда полукольцами будут

1. $S^X = \{f : X \to S\}$, где X — непустое множество
2. $S[X_1, \ldots, X_n]$ — полукольцо многочленов над S
3. $M_n(S)$ — полукольцо матриц над S
   Приложения:
   - теория неотрицательных матриц
   - знаковые портреты матриц
   - графы
   - динамические системы

Знаковые портреты

Всякой неотрицательной квадратной матрице $A = (a_{ij})$ отвечает ее булев портрет $B(A) = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} > 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Легко видеть, что $B(A^n) = B(A)^n$.

Знаковые портреты

Всякой вещественной квадратной матрице $A = (a_{ij})$ отвечает ее знаковый портрет $B(A) = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} +, & a_{ij} > 0 \\ -, & a_{ij} < 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Знаковые портреты

Множество $S = \{+, -, 0\}$ образует "частичное" полукольцо относительно следующих операций сложения и умножения:

$+$	0	$+$	$-$
0	0	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$	
$-$	$-$		$-$

$\cdot$	0	$+$	$-$
0	0	0	0
$+$	0	$+$	$-$
$-$	0	$-$	$+$

Легко видеть, что если матрица $B(A)^n$ определена, то $B(A^n) = B(A)^n$.

Знаковые портреты

Множество $S = \{+, -, 0\}$ образует "частичное" полукольцо относительно следующих операций сложения и умножения:

$+$	0	$+$	$-$
0	0	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$	
$-$	$-$		$-$

$\cdot$	0	$+$	$-$
0	0	0	0
$+$	0	$+$	$-$
$-$	0	$-$	$+$

Легко видеть, что если матрица $B(A)^n$ определена, то $B(A^n) = B(A)^n$.

Факт

Если матрица $B(A)^k$ определена при любом $k = 1, 2, \ldots, n^2 - 2n + 2$, то $B(A)^k$ определена при любом натуральном k.

Знаковые портреты

Аналогичным образом, с помощью группы $(\mathbf{U}, \cdot)$, дополненной нулем, можно определить портреты комплексных матриц, или, в общем случае, рассматривать матрицы над произвольной полугруппой.

Для весьма широкого класса полугрупп (но не для всех(!)) верхняя оценка $n^2 - 2n + 2$ остается верной.

Полукольца и динамические системы

- **Марковские системы**

Полукольца и динамические системы

- Марковские системы
- **Сети Петри**

Полукольца и графы с весами

Полукольца тесно связаны с задачами поиска кратчайших путей в графах (Shortest Path Problem).

Полукольца и графы с весами

Полукольца тесно связаны с задачами поиска кратчайших путей в графах (Shortest Path Problem).

Пример.

Вершины графа — города, вес (i, j)-ребра (дуги) — стоимость проезда из i в j. Стоимость пути равна сумме стоимостей отдельных участков. Требуется найти для каждой пары (i, j) вершин минимальную стоимость проезда из i в j (если (i, j)-пути существуют).

Полукольца и графы с весами

Полукольца тесно связаны с задачами поиска кратчайших путей в графах (Shortest Path Problem).

Пример.

Вершины графа — города, вес (i, j)-ребра (дуги) — стоимость проезда из i в j. Стоимость пути равна сумме стоимостей отдельных участков. Требуется найти для каждой пары (i, j) вершин минимальную стоимость проезда из i в j (если (i, j)-пути существуют).

Отвечающее задаче полукольцо — $(\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \min, +)$. Если же допустить, что стоимости могут быть и отрицательными, то — $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$.

В зависимости от конкретной задачи могут возникать полукольца

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ — тропическое полукольцо

В зависимости от конкретной задачи могут возникать полукольца

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ — тропическое полукольцо
- $(\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \min, +)$

В зависимости от конкретной задачи могут возникать полукольца

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ — тропическое полукольцо
- $(\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \min, +)$
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — max-plus-алгебра

В зависимости от конкретной задачи могут возникать полукольца

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ — тропическое полукольцо
- $(\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \min, +)$
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — max-plus-алгебра
- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$

В зависимости от конкретной задачи могут возникать полукольца

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ — тропическое полукольцо
- $(\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \min, +)$
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — max-plus-алгебра
- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$
- $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — полярное полукольцо

В зависимости от конкретной задачи могут возникать полукольца

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ — тропическое полукольцо
- $(\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \min, +)$
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — max-plus-алгебра
- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$
- $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — полярное полукольцо

Факт

Полукольца $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$, $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ и $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$ изоморфны друг другу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Golan, J.S. Semirings and Their Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999)

2. Golan, J.S. Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003)

3. Hebisch, U., Weinert, N.J. Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (1998)