Устойчивость и повышение эффективности явных схем решения задач теории упругости и теории оболочек (1)

Д.Т. Чекмарев
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Определение равномерной сетки

$$\begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} j$$

$$\begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} + B_h \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{(i)}^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_{(i)}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_0^n \end{pmatrix} + B_h \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \\ \\ i_n \end{pmatrix} \text{ или } \quad \bar{x}_{(i)} = \bar{x}_0 + B_h \cdot (i), \text{ где } (i) = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \\ \\ i_n \end{pmatrix}$$

Вариационно-разностный метод

- Дискретизация

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1}(u_{i+1\,j} + u_{i+1\,j+1} - u_{ij+1} - u_{ij}) = \left(d_1^+ u\right)_{ij},$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1}(\delta u_{i+1\,j} + \delta u_{i+1\,j+1} - \delta u_{ij+1} - \delta u_{ij}) = \left(d_1^+ \delta u\right)_{ij},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1}(u_{ij+1} + u_{i+1\,j+1} - u_{i+1\,j} - u_{ij}) = \left(d_2^+ u\right)_{ij},$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1}(\delta u_{ij+1} + \delta u_{i+1\,j+1} - \delta u_{i+1\,j} - \delta u_{ij}) = \left(d_2^+ \delta u\right)_{ij}$$

Вывод дифференциального уравнения из вариационной задачи

- Функционал ->
- Вариационное уравнение->
- Интегрирование по частям ->
- Уравнение Эйлера вариационной задачи

Построение конечно-разностного представления вариационно-разностной или КЭ схемы

- Функционал ->
- Сеточный функционал->
- Дискретное вариационное уравнение->
- Интегрирование по частям(сеточное)->
- Разностная схема

Сеточные операторы

Основные операторы

$$\left(d_m^+ f\right)_{(j)} = \sum_{(k)\in Ш^+} \beta_{(k)}^m f_{(j)+(k)} ,$$

$$d_0^+ f = f + O(\Delta x), \quad d_m^+ f = \frac{\partial f}{\partial X^m} + O(\Delta x), \quad m = 1, \ldots, n$$

Двойственные операторы

$$\left(d_m^- f\right)_{(j)} = \chi_m \sum_{(k)\in Ш} \beta_{(k)}^m f_{(j)-(k)} ,$$

Теорема (разностный аналог формул интегрирования по частям)

- Формулы интегрирования по частям:
- Пусть $f = g = 0$ на ∂V , тогда
- $$\int_V f \frac{\partial g}{\partial X^m} dV = \int_V g \frac{\partial f}{\partial X^m} dV \qquad (*)$$

Справедливы равенства (аналоги (*)):

$$\sum_{(j)\in\overline{V}} f_{(j)} \left(d_m^+ g\right)_{(j)} \Delta V = \chi_m \sum_{(j)\in\overline{V}} \left(d_m^- f\right)_{(j)} g_{(j)} \Delta V, \qquad (m = 0,\ldots,n)$$

- Рассмотрим метод преобразования вариационно-разностных схем в конечно-разностный вид.
- Пусть $u=(u_1,\ldots,u_m)$ - векторная функция, $p_{jk}=\dfrac{\partial u_j}{\partial X^k}$
- $$W=\int_V F(u_1,\ldots,u_n,p_{11},\ldots,p_{mn})dV$$
- - функционал.
- В вариационном уравнении
$$\delta W=\int_V \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial F}{\partial u_j}\delta u_j+\sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial P_{jk}}\delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial X^k}\right)\right]dV=0$$
- заменим интеграл конечной суммой:
- $$\sum_{(l)\in\bar{V}}\left\{\sum_{j=1}^m\left[\frac{\partial f}{\partial u_j}\delta\left(d_0^+u_j\right)_{(l)}+\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial f}{\partial P_{jk}}\right)_{(l)}\delta\left(d_k^+u_j\right)_{(l)}\right]\right\}\Delta V=0,$$
- Применяя теорему, получим разностный аналог уравнений Эйлера вариационной задачи
- $$d_0^- f_{j0}-\sum_{k=1}^n d_k^- f_{jk}=0\,,\ (j=1,\ldots,m)\quad (j=1,\ldots,m).$$
- Здесь
$$f_{j0}=\partial f/\partial u_j\,,\ f_{jk}=\partial f/\partial p_{jk}\,.$$

- Рассмотрим случай квадратичного функционала с постоянными коэффициентами, когда подынтегральная функция имеет вид

$$F(u_1,\ldots,u_m,p_{11},\ldots,p_{mn})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left(C_{00}^{ij}u_iu_j+\sum_{k=1}^{n}C_{0k}^{ij}u_ip_{jk}+\sum_{k,l=1}^{n}C_{kl}^{ij}p_{ik}p_{jl}\right)$$

- В этом случае сеточные функции $f_{j0}=\partial f/\partial u_j\,,\,f_{jk}=\partial f/\partial p_{jk}$ являются линейными:

$$f_{jk}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}C_{jk}^{rs}d_r^+u_s\qquad(j=1,\ldots,m;\;k=0,\ldots,n)$$

- и система сеточных уравнений принимает вид

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left[C_{j0}^{rs}d_r^+d_0^-u_s-\sum_{k=1}^{n}C_{jk}^{rs}d_r^+d_k^-u_s\right]=0\qquad(j=1,\ldots,m)$$

- Или

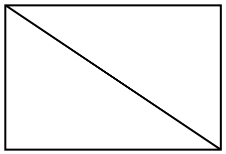
$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left[C_{j0}^{rs}D_{r0}u_s-\sum_{k=1}^{n}C_{jk}^{rs}D_{rk}u_s\right]=0,\qquad(j=1,\ldots,m)$$

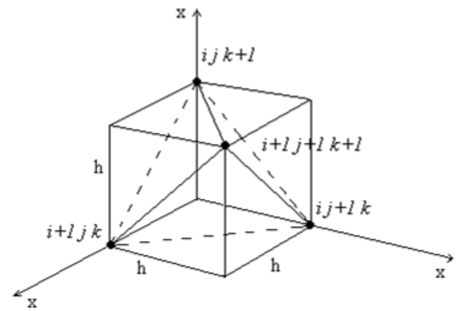
- где

$$D_{jk}=d_j^+\;d_k^-\qquad(j,k=0,\ldots,n).$$

$$D_{00}\approx I;\;\left\{D_{j0},D_{0j}\approx\frac{\partial}{\partial X^j}\right\};\;\left\{D_{jk},D_{kj}\approx\frac{\partial^2}{\partial X^j\,\partial X^k}\right\},$$

Случай нескольких элементов в ячейке





- Система примет вид:

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left[C_{j0}^{rs}D_{ro}^{*}u_{s}-\sum_{k=1}^{n}C_{jk}^{rs}D_{rk}^{*}u_{s}\right]=0,\quad \left(j=1,\ldots,m\right)$$

- где

$$D_{jk}^{*}=\sum_{l=1}^{p}\gamma_{l}d_{j,l}^{+}\,d_{k,l}^{-}$$

Преобразование схем МКЭ (двумерный случай)

- Функционал

$$W_h = \sum_{(i,j)\in\Omega_h} \sum_{k=1}^{r} \int_{E_{ijk}} F(u, p_1, p_2)\, d\Omega$$

- функция в элементе в виде

- $$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} C_l \varphi_{lk} \qquad \text{или} \qquad u = \sum_{l=0}^{m_k-1} \left(d_l^{k+} u\right)_{ij} \psi_{lk}$$

- Получим после интегрирования:

$$W_h = \sum_{(i,j)\in\Omega_h} \sum_{k=1}^{r} \Phi_k\left(\xi_{ij0}, \ldots, \xi_{ijm_k-1}\right)$$

- Вариация функционала:

$$\delta W_h = \sum_{(i,j)\in\Omega_h} \sum_{k=1}^{r} \left(f_{k0}\,\delta\left(d_0^{k+} u\right) + \ldots + f_{km_k-1}\,\delta\left(d_{m_k-1}^{k+} u\right)\right)_{ij}$$

- Разностная схема:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=0}^{m_k-1} \chi_l d_l^{k-} f_{kl} = 0$$

Применение. Теория пластин Тимошенко (одномерная задача)

Система уравнений в безразмерном виде

$$a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial \text{т}^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{12a}{\eta^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \text{т}^2}=0$$

эквивалентна одному уравнению четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{12a}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \text{т}^2}-\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \text{т}^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial \text{т}^4}=0.$$

Схема МКР

$$\Phi(w,\psi) = a\left(D_{11}w + D_{01}\psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

$$\Lambda(w,\psi) = D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}\left(D_{01}w + \psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

Вариационно-разностная схема

$$\Phi(w,\psi) = a\left(D_{11}w + D_{01}\psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

$$\Lambda'(w,\psi) = D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}\left(D_{01}w + D_{00}\psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

Схема МКЭ

$$\Phi(w,\psi) = a\left(D_{11}w + D_{01}\psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

$$\Lambda''(w,\psi) = D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}\left(D_{01}w + D_{00}\psi - \frac{h_1^2}{12}D_{11}\psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

В виде одного уравнения:

МКР

$$\left(1+3a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)D_{11}D_{11}w+\frac{12}{\eta^2}D_{\text{тт}}w-\left(1+\frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w+\frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w=0.$$

В-Р М

$$D_{11}D_{11}w+\frac{12}{\eta^2}D_{00}D_{\text{тт}}w-\left(1+\frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w+\frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w=0.$$

МКЭ

$$\left(1+a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)D_{11}D_{11}w+\frac{12}{\eta^2}D_0^*D_{\text{тт}}w-\left(1+\frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w+\frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w=0.$$