

## ОГЛАВЛЕНИЕ

2 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ДИАПАЗОНА РАДИОЧАСТОТ	3
2.1 Уравнение Максвелла	4
2.2 Электромагнитные волны в среде с $\mu \neq 0$ , $\epsilon \neq 0$ , $\sigma = 0$	6
2.3 Электромагнитные волны в средах с потерями ( $\mu \neq 0$ , $\epsilon \neq 0$ , $\sigma \neq 0$ )	11
Задачи к разделу 2	24
3 ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД	26
3.1 Отражение при горизонтальной поляризации падающей волны	30
3.2 Отражение и преломление при вертикальной поляризации падающей волны	32
3.3 Коэффициенты отражения для различных сред	33
3.4 Случай произвольной поляризации падающей электромагнитной волны	37
Задачи к разделу 3	39
Литература	39

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ В.И.УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

### ЧАСТЬ 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ДИАПАЗОНА РАДИОЧАСТОТ

Учебно-методическая разработка

Сдано в набор 14.04.95. Подписано в печать 15.06.95.  
Форм. бум. 60x84 1/16. Печ. л. 2. 5. Тираж 300. Заказ 254.

Лаборатория оперативной полиграфии КГУ  
420008 Казань, Ленина, 4/5

КАЗАНЬ - 1995

Предлагаемая учебно-методическая разработка рассчитана на студентов физических и радиофизических специальностей 2-4 курсов университетов.

Разработка состоит из трех частей:

Часть 1. Основные понятия;

Часть 2. Электромагнитные волны диапазона радиочастот;

Часть 3. Распространение радиоволн в неоднородных и анизотропных средах.

При подготовке курса использованы монографии и учебные пособия, список которых приведен в конце каждой из трех частей методической разработки. В конце разделов предлагаются задачи. Для некоторых из них приведены подробные решения, что позволяет студентам самостоятельно изучить ряд разделов курса.

Автор: доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой радиозлектроники  
Казанского университета  
НАСРОВ АЛЬБЕРТ МАХМУТОВИЧ.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ДИАПАЗОНА РАДИОЧАСТОТ

В предыдущем разделе введены важные понятия, используемые при описании волн любых типов. Нам будут интересовать электромагнитные волны частот радиодиапазона. К ним относят электромагнитные волны, длина которых в вакууме больше  $5 \cdot 10^{-7}$  м. Деление радиочастот по диапазонам приведено в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

N Д	Наименование диапазона		Границы диапазонов
	Частоты	Радиоволны	
1	Крайне низкие (КНЧ)	Декамега- метровые	3-300 Гц 100-10 Мм
2	Сверхнизкие (СНЧ)	Мегаметровые	30-300 Гц 10-1 Мм
3	Инфранизкие (ИНЧ)	Гектокило- метровые	0.3-3 кГц 1000-100 км
4	Очень низкие (ОНЧ)	Мириаметровые	3-30 кГц 100-10 км
5	Низкие (НЧ)	Километровые	30-300 кГц 10-1 км
6	Средние (СЧ)	Гектометровые	0.3-3 МГц 1-0.1 км
7	Высокие (ВЧ)	Декаметровые	3-30 МГц 100-10 км
8	Очень высокие (ОВЧ)	Метровые	30-300 МГц 10-1 м
9	Ультравысокие (УВЧ)	Дециметровые	0.3-3 ГГц 1-0.1 м
10	Сверхвысокие (СВЧ)	Сантиметровые	3-30 ГГц 10-1 см
11	Крайне высокие (КВЧ)	Миллиметровые	30-300 ГГц 10-1 мм
12	Гипервысокие (ГВЧ)	Децимилли- метровые	0.3-3 ТГц 1-0.1 мм

Ранее мы на примере волн на струне показали, что скорость распространения волн в среде определяется инерцией среды и ее упругостью, т.е. свойствами, характеризующими способность среды запасать энергию волн. То же самое относится к волнам иной физической природы (например, звуковым волнам, волнам в направляющих структурах и т.д.), включая процесс распространения электромагнитных волн.

Инерция среды при распространении электромагнитных волн связана с индуктивными свойствами среды и характеризуется магнитной проницаемостью. Упругость среды соответствует ее электрической емкости, характеризуется диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Иными словами накопление магнитной энергии обусловлено магнитной проницаемостью  $\mu$ , а накопление потенциальной энергии, или энергии электрического поля обусловлено диэлектрической проницаемостью. Если материал диэлектрик, то процесс распространения радиоволн определяется только величинами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Поэтому чисто волновое уравнение будет справедливо как для вектора магнитного поля  $H$ , так и для вектора электрического поля  $E$ . Если среда - проводник, и характеризуется  $\epsilon$ ,  $\mu$  и проводимостью  $\sigma$ , то происходит поглощение энергии волн. В этом разделе мы рассмотрим распространение электромагнитных волн в средах с удельной проводимостью, равной нулю. К таким средам относятся чистые диэлектрики.

### 2.1 Уравнения Максвелла.

Теория электромагнитного поля сводится к четырем соотношениям, образующим систему уравнений Максвелла, два из которых являются стационарными, а два других зависят от времени.

1) Первое зависящее от времени уравнение

связывает изменения во времени магнитной индукции  $B$   $\partial(\mu H)/\partial t$  с пространственным изменением поля  $E$ , т.е. с  $\partial E/\partial z$  (это следует из закона Ленца или Фарадея).

2) Согласно второму зависящему от времени уравнению, изменением во времени величины  $\epsilon E$  т.е.  $\partial(\epsilon E)/\partial t$  определяется пространственное изменение поля  $H$  т.е.  $\partial H/\partial z$  (это следует из закона Ампера).

Величина  $\epsilon E = D$  называется электрической индукцией. Имеет размерность заряда на единицу площади. Индукция возникает тогда, когда внешнее электрическое поле поляризует атомы и молекулы, образуя диэлектрик, и через любую плоскость, проведенную в диэлектрике перпендикулярно внешнему полю, перемещаются заряды.

Размерность величины

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E) = \frac{\text{заряд}}{\text{время} \times \text{площадь}}$$

совпадает с размерностью тока, приходящегося на единицу площади. Этот ток называется током смещения. Его легко представить в диэлектрике, где имеются заряды, способные двигаться. Однако ток смещения существует и в вакууме.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из батареи и конденсатора. При замыкании цепи батарея начнет заряжать конденсатор до потенциала  $V$ . Пока конденсатор заряжается, по цепи проходит ток (по закону Ома  $V=IR$ ). Около провода при этом возникает магнитное поле. Поместим прибор, измеряющий магнитное поле, внутрь конденсатора. Оказывается, что и там существует магнитное поле пока конденсатор заряжается, т.е. пока электрическое поле между обкладками конденсатора изменяется во времени.

Поэтому при анализе распространения электромагнитных волн необходимо учитывать два вида тока: 1) ток проводимости, подчиняющийся

закону Ома:  $I=V/R$ ; 2) ток смещения с плотностью  $\partial D/\partial t$ ;

В среде с конечными  $\mu$  и  $\epsilon$ , но  $\sigma=0$  ток смещения будет единственным током. В этом случае  $E$  и  $H$  определяются чисто волновым уравнением. Затухания волн не будет. При  $\sigma \neq 0$  появляется ток проводимости, приводящий к потерям. Амплитуда волны будет экспоненциально уменьшаться с расстоянием. Относительная величина этих токов зависит от частоты поля.

## 2.2. Электромагнитные волны в среде с $\mu \neq 0, \epsilon \neq 0, \sigma = 0$ .

Рассмотрим плоские волны, т.е. волны, у которых поверхности равных фаз являются плоскостями. Будем считать, что свойства волн не изменяются в плоскости  $XY$ . Если свойства не зависят от  $X$  и  $Y$ , то  $\partial/\partial x = 0, \partial/\partial y = 0$ .

В векторной форме 1-е уравнение Максвелла представляется так:

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

В декартовой системе координат

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

2) Второе уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

или:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

3) Предполагая, что среда однородна и величины  $\epsilon$  и  $\mu$  не зависят от координат, первое стационарное уравнение Максвелла запишем в виде:

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \rho \quad (2.2.3)$$

$\rho$  - плотность зарядов.

Уравнение означает, что изменение индукции в малом элементе объема  $dx \cdot dy \cdot dz$  с плотностью зарядов  $\rho$  зависит от величины  $\rho$ .

При  $\rho = 0$

$$\epsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.2.3a)$$

Уравнение (2.2.3) означает, что число линий потока электрической индукции, входящих в элемент объема  $dx \cdot dy \cdot dz$ , равно числу линий потока, выходящих из этого объема.

4) Второе стационарное уравнение записывается так:

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \mu \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.2.4)$$

Согласно (2.2.4) число линий потока магнитной индукции входящих и выходящих из единицы объема должны быть равны между собой.

Волновое уравнение для электромагнитных волн.

Для плоских волн в выбранной нами системе координат все производные по  $x$  и  $y$  равны нулю. Поэтому из уравнений (2.2.1) и (2.2.4) следует:

$$-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Это возможно, если  $H_z$  постоянна в пространстве и времени. Она не может влиять на волновое движение, поэтому можно считать  $H_z=0$ . Аналогично из уравнений (2.2.2) и (2.2.3a) приходим к  $E_z=0$ . Постоянство значений  $H_x$  и  $E_z$  означает, что колебания (изменения) происходят в направлениях, ортогональных  $Z$ .

Упростим задачу, рассматривая плоскополяризованные волны.

Т.е. мы должны выбрать направление колебаний электрического поля вдоль оси  $X$  или  $Y$ . Для определенности будем рассматривать поле  $E_x$ , полагая  $E_y=0$ .

В этом случае из (2.2.1) и (2.2.2) следует:

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.2.1a) \quad \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.2.2a)$$

Учитывая соотношения  $\partial^2/\partial z \partial t = \partial^2/\partial t \partial z$  и взяв производные уравнения (2.2.1a) по  $t$  и уравнения (2.2.2a) по  $z$ , найдем волновое уравнение для  $H_y$ :

$$-\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t}, \quad \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (2.2.5)$$

Аналогично, дифференцируя (2.2.2a) по  $t$  и (2.2.1a) по  $z$ , получим:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (2.2.5a)$$

Оба поля  $E_x$  и  $H_y$  подчиняются одному и тому же волновому уравнению, распространяясь вдоль  $Z$  с одинаковой скоростью

$$v^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \quad (2.2.6)$$

В свободном пространстве  $v=c$  - скорости света

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad (2.2.6a)$$

где  $\mu_0$  и  $\epsilon_0$  - магнитная и диэлектрическая проницаемости свободного пространства.

В приведенных выше выражениях:

$\epsilon_0$  - электрическая постоянная, равная  $8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0$  - магнитная постоянная, равная  $1.257 \cdot 10^{-6}$  Ф/м,  $\epsilon_s = \epsilon_0 \epsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\mu_s = \mu_0 \mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,  $\epsilon = D/D_0$  - относительная диэлектрическая проницаемость. В вакууме  $\epsilon=1$ .  $\mu = B/B_0$  - относительная магнитная проницаемость. Скорость электромагнитных волн в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (2.2.7);$$

Для плоских волн, т.е. волн, у которых поверхности равных фаз представляют плоскости, решение волновых уравнений могут быть записаны в виде:

$$E_x = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt-z), \quad H_y = H_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt-z) \quad (2.2.8)$$

где  $E_0, H_0$  - амплитуды полей  $E$  и  $H$ .

То, что мы получили решение в виде  $\sin$  ( $\cos$ ), связано с отсутствием поглощения (т.к. мы положили  $\sigma=0$ ).

На рис.2.1 изображена электромагнитная волна ( $E_x, H_y$ ), распространяющаяся вдоль оси  $Z$ .

Вектор электрического поля  $E_x$  и магнитного поля  $H_y$  такой волны взаимно перпендикулярны. Если среда не проводящая - они находятся в фазе.

Произведение  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$  называется вектором Пойтинга. Мы видим, что  $E_z$  и  $H_z$  постоянны (или равны 0). Тогда электромагнитная волна является поперечной волной, направление ее распространения совпадает с направлением вектора  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ . В нашем случае вектор  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  имеет величину  $E_x H_y$  и направлен по оси Z. Это векторное произведение имеет размерность:

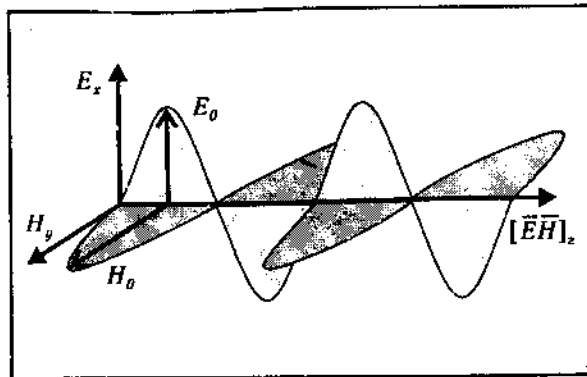


Рис. 2.1

$$\frac{\text{напряжениеток}}{\text{длина}} = \frac{\text{электрическая мощность}}{\text{площадь}}$$

Т.е. вектором  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  определяется плотность потока энергии.

Волновое сопротивление диэлектрика для электромагнитных волн.

Подставим решения

$$E_x = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z), \quad H_y = H_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z)$$

в уравнение (2.2.1a). Получим соотношение

$$\mu v H_y = E_x$$

Учтем, что  $v^2 = 1/\mu\epsilon$  и преобразуем эти соотношения

$$\sqrt{\mu} H_y = \sqrt{\epsilon} E_x \quad (2.2.9)$$

Отсюда следует

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{E_0}{H_0} \quad (2.2.10)$$

Это соотношение имеет размерность сопротивления. Величина  $\sqrt{(\mu/\epsilon)}$  определяет волновое сопротивление среды для электромагнитных волн. Волновое сопротивление свободного пространства

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \text{ ом}$$

Из (2.2.10) следует, что плотности электрической  $\frac{1}{2}\epsilon E_x^2$  и магнитной  $\frac{1}{2}\mu H_y^2$  энергии в электромагнитной волне, распространяющейся в диэлектрике, равны между собой. Плотность полной энергии равна

$$\frac{1}{2} (\epsilon E_x^2 + \mu H_y^2)$$

### 2.3. Электромагнитные волны в средах с потерями ( $\mu \neq 0, \epsilon \neq 0, \sigma \neq 0$ ).

В природе не существует чистых диэлектриков и любая реальная среда (вещество) обладает некоторой проводимостью. Электромагнитные волны в таких средах затухают. Ниже мы получим волновое уравнение для сред с проводимостью  $\sigma \neq 0$ . Для определенности будем рассматривать поведение электрического поля волны.

Для сред с удельной проводимостью, равной нулю, волновое уравнение мы получили в виде:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

Материальное уравнение среды мы приняли в форме  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{D}$  - вектор электрической индукции. Можно представить  $\mathbf{D}$  таким образом:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (2.3.2)$$

где  $\vec{P}$  - вектор поляризации среды. Если среда изотропна, то вектор  $\vec{P}$  коллинеарен вектору  $\vec{E}$ . В слабых полях вектор  $\vec{P}$  связан с  $\vec{E}$  зависимостью:

$$\vec{P} = \chi\vec{E}$$

где  $\chi$  - электрическая восприимчивость. Диэлектрическая восприимчивость выражается через  $\chi$  соотношением

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi \quad (2.3.3)$$

Перепишем уравнение (2.3.1) в виде:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E_x) \right] = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial D_x}{\partial t} \right] = 0.$$

Видим, что в уравнении (2.3.1) учитывался только ток смещения  $\partial D_x / \partial t$ , т.е. оно пригодно для описания поведения электромагнитных волн в чистых диэлектриках, когда  $\sigma = 0$ . Если проводимость среды конечна ( $\sigma \neq 0$ ), необходимо учесть наличие тока проводимости, плотность которого равна

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

В присутствии токов проводимости и смещения уравнение Максвелла, связывающее пространственные изменения магнитного поля с временными изменениями электрического поля, принимает вид:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.3.5)$$

Будем рассматривать проекцию поля  $E_x$  на ось  $x$ :

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \quad (2.3.5a)$$

Из уравнения Максвелла, связывающего пространственные изменения  $\vec{E}$  с временными изменениями  $\vec{H}$ , следует:

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.3.5b)$$

Продифференцируем (2.3.5a) по  $t$  и (2.3.5b) по  $z$ :

$$\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t}; \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t}$$

Из этих уравнений следует:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.3.6)$$

Т.о. учет проводимости среды привел к добавлению к чисто волновому уравнению диффузионного члена, приводящего к затуханию волн. Произведение  $(\mu\sigma)^{-1}$  имеет размерность  $[m^2 c^{-1}]$  и называется магнитным коэффициентом диффузии.

Предположим, что зависимость  $E_x$  от времени имеет гармонический характер:  $E_x = E_0 e^{i\omega t}$

Подставим  $E_x$  в уравнение (2.3.6):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - (i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) E_x = 0$$

и перепишем его в виде:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0, \quad \text{где } \gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon \quad (2.3.7)$$

Мы свели волновое уравнение (2.3.6) к уравнению Гельмгольца. Это уравнение имеет решения, содержащие члены типа  $e^{-\gamma z}$  и  $e^{\gamma z}$ . Будем рассматривать волну  $E_x$ , бегущую в положительном

направлении оси  $z$ , т.е. рассматривать решение

$$E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{-\gamma z} \quad (2.3.8)$$

Это уравнение описывает волну в среде с потерями, бегущую в положительном направлении  $z$ . Электромагнитная волна, распространяясь в среде с конечной проводимостью, не остается постоянной по амплитуде, а убывает по экспоненциальному закону. Это вызвано тем, что в такой среде электромагнитная энергия рассеивается (в конечном итоге в тепло).

Оценим относительное значение членов, входящих в правую часть уравнения (2.3.7), в различных средах.

а) Среда - диэлектрик. В диэлектриках преобладают токи смещения, поэтому выполняется соотношение:

$$|\vec{j}| \ll \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \quad \text{или} \quad 0 \ll \omega \epsilon$$

Следовательно, в уравнении (2.3.7) нельзя пренебрегать членом  $\mu \epsilon (\partial^2 E_x / \partial t^2)$ . В этом случае выражение для  $\gamma^2$  принимает вид:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \epsilon \mu, \quad \gamma = i\omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

Выражение для поля представим в следующем виде:

$$E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{-\gamma z} = E_0 e^{i(\omega t - \omega \sqrt{\epsilon \mu} z)}$$

Учитывая, что волновая скорость  $c = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ , волновое число  $k = \omega/c$ , можем записать:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Это уравнение для плоской волны, распространяющейся без затухания в направлении положительных значений  $z$ .

б) Среда - проводник. В проводниках преобладают

токи проводимости, поэтому

$$|\vec{j}| \gg \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \quad \text{и} \quad \sigma \gg \omega \epsilon$$

В уравнении (2.3.7) нельзя пренебрегать членом  $\mu \sigma (\partial E_x / \partial t)$ . В этом случае выражение для  $\gamma^2$  может быть упрощено:

$$\gamma^2 = -i\sigma \omega \mu$$

Учитывая, что  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ , можно записать:

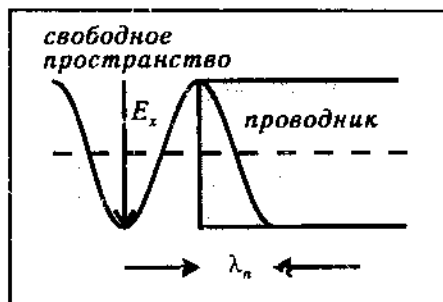
$$\gamma = (1+i) \left( \frac{\omega \mu \sigma}{2} \right)^{1/2}$$

Для электрической компоненты электромагнитной волны в проводящей среде получаем:

$$E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{-\gamma z} = E_0 e^{-(\omega \mu \sigma / 2)^{1/2} z} e^{i[\omega t - (\omega \mu \sigma / 2)^{1/2} z]} \quad (2.3.9)$$

Амплитуда волны в процессе распространения уменьшается по закону  $\exp(-\omega \mu \sigma / 2)^{1/2} z$ . Т.е. в проводнике электрическое поле экспоненциально затухает и уменьшается в  $e$  раз на расстоянии

$$\delta = \left( \frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2} \quad (2.3.10)$$



Фиг. 2.2

Н а л и ч и е в проводниках свободных электронов приводит к появлению электрического тока при приложении внешнего электрического поля  $E$ . Если  $E$  постоянно, то поле внутри проводника равно нулю, т.к. внешнее поле скомпенсировано полем,



образованным зарядами, которые под его воздействием сместились к поверхности проводника. Если резко изменить  $E$ , то потребуется некоторое время  $\tau$  для того, чтобы электроны сместились и было создано внутреннее поле, компенсирующее внешнее. Время  $\tau^{-1}$  определяет граничную частоту  $\omega_{гр}$ . Волны с частотой, большей граничной, успевают глубже проникнуть в проводник, т.к. при  $\omega > \tau^{-1}$  электроны не успевают занять положение, при котором достигается компенсация внешнего поля, и волны с частотой  $\omega > \omega_{гр}$  будут распространяться в проводнике. На очень высоких частотах электроны вообще не будут успевать реагировать на внешнее поле, и среда становится прозрачной для этих частот. По мере удаления от поверхности у электронов все больше времени для того, чтобы создать внутреннее поле, компенсирующее внешнее. Это приводит к экспоненциальному затуханию поля с ростом расстояния при распространении электромагнитной волны в проводящей среде.

Схематически распространение электромагнитной волны в проводнике приведено на рис. 2.2.

Критерий разделения сред на диэлектрики и проводники.

Отношение плотности тока проводимости к плотности тока смещения равно

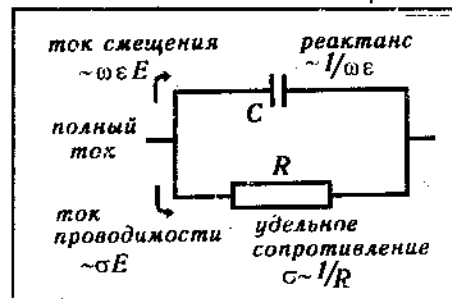


Рис. 2.3

$$\left| \frac{j}{\partial \bar{D}} \right| = \frac{\sigma}{\epsilon \omega}$$

По отношению этих токов и определяется, к какому классу веществ следует относить среду при распространении электромагнитных волн.

Важны не только значения  $\sigma$  и  $\epsilon$ , но и частоты  $\omega$ . На разных частотах одно и то же вещество может проявлять различные свойства. Поясним это. Среду можно представить в виде простой схемы, состоящей из конденсатора и сопротивления, соединенных параллельно, между которыми распределен полный ток в среде.

Если проводимость  $\sigma$  велика, то большая часть тока проходит через сопротивление; если реактанс  $\omega \epsilon$  мал, то основная часть тока проходит по емкостной цепи в виде тока смещения. Поэтому при  $\sigma \gg \omega \epsilon$  мы среду относим к проводникам, при  $\sigma \approx \omega \epsilon$  - к полупроводящим средам, при  $\sigma \ll \omega \epsilon$  - к диэлектрикам. Граничное значение частоты, при которой токи проводимости и смещения равны,

$$\omega_{гр} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (2.3.11)$$

На высоких частотах  $\omega \gg \omega_{гр}$  из-за преобладания токов смещения среда проявляет свойства диэлектрика для распространяющейся электромагнитной волны. На низких частотах  $\omega \ll \omega_{гр}$  в среде преобладают токи проводимости и ее можно рассматривать как проводник. Для примера рассмотрим медь. Ее проводимость  $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$  сименс/метр. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 9 \cdot 10^{12}$  фарада/метр. Отношение  $\sigma / \omega \epsilon \approx 10^{18}$ /частота. На частотах до  $\sim 10^{16}$  Гц (область ультрафиолета)  $\sigma / \omega \epsilon > 100$  и медь является проводником. На частоте  $10^{20}$  Гц (рентгеновские лучи)  $\sigma / \omega \epsilon < 100$  и медь является диэлектриком.

Для иллюстрации в таблице 2.1 приведены граничные частоты для различных сред, представляющих интерес при распространении радиоволн в атмосфере Земли.

Таблица 2.1.

	Среда	Граничная частота	Диапазон волн
1.	Сухая почва	$\sim 3 \cdot 10^3$ Гц	Средние волны
2.	Влажная почва	$\sim 10^4$ Гц	Короткие волны
3.	Пресная вода	$\sim 2 \cdot 10^5$ Гц	Короткие волны
4.	Морская вода	$\sim 3 \cdot 10^6$ Гц	Сантиметровые волны

в) Полупроводящая среда. Удобно рассматривать распространение электромагнитных волн в полупроводящей среде, используя понятие комплексной диэлектрической проницаемости.

$$\epsilon' = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (2.3.12)$$

Это величина, учитывающая потери в среде, обусловленные наличием проводимости. Ее использование позволяет в средах с потерями пользоваться теми же зависимостями (по форме записи), что и для диэлектриков.

Рассмотрим уравнение Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3.13)$$

Предполагаем, что поля изменяются по гармоническому закону:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega t}$$

Подставим  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в уравнение Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= (\sigma + i\omega\epsilon) \vec{E} = i\omega \left( \epsilon - \frac{i\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = i\omega \epsilon' \vec{E} \\ \text{rot} \vec{E}_0 &= -i\omega \mu \vec{H} \quad (13') \end{aligned}$$

Т.е. мы получили уравнения, позволяющие рассматривать полупроводник как диэлектрик с комплексной диэлектрической постоянной. Это позволяет пользоваться результатами, полученными в предыдущем разделе, заменив вещественную диэлектрическую постоянную  $\epsilon$  на комплексную  $\epsilon'$ .

Мы ввели комплексное значение фазового множителя  $k'$ . Представим его в виде

$$k' = k - i\alpha \quad (2.3.18)$$

где  $k$  и  $\alpha$  - вещественные числа. Выражение для  $E$  принимает вид:

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{-ik'z} e^{i\omega t} = E_0 e^{-i(k-i\alpha)z} e^{i\omega t} = \\ &= E_0 e^{-ikz} e^{-\alpha z} e^{i\omega t} = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

Таблица 2.2

Волна в диэлектрике	Волна в полупроводнике
Для гармонической волны, бегущей в положительном направлении	
$E = E_0 e^{-ikz} e^{i\omega t}$	$E = E_0 e^{-ik'z} e^{i\omega t} \quad (2.3.14)$
$H = \frac{E_0}{\rho} e^{-ikz} e^{i\omega t}$	$H = \frac{E_0}{\rho} e^{ik'z} e^{i\omega t} \quad (2.3.15)$
$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ - волновое число	$k' = \frac{\omega}{v'} = \omega \sqrt{\epsilon' \mu}$ - комплексное волновое число $(2.3.16)$
$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ - волновое сопротивление	$\rho' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$ - комплексное волновое сопротивление $(2.3.17)$

Т.о. комплексный характер фазового множителя означает, что волна, распространяясь вдоль оси  $z$ , затухает. Причиной затухания является поглощение энергии из-за наличия проводимости.

Комплексный фазовый множитель полностью характеризует движение волны. Вещественная часть имеет тот же смысл, что и волновой параметр  $k$  в диэлектриках, т.е. определяет фазовую скорость  $v_\varphi = \omega/k$ .

Член  $\alpha$  определяет пространственное затухание волны. Мы также ввели комплексное волновое сопротивление  $\rho'$ . Определим ниже  $\alpha$  - коэффициент затухания,  $k$  - фазовый множитель,  $\rho$  и  $\varphi$  - модуль и аргумент комплексного  $\rho'$ , фазовую скорость для полупроводящей среды.

Ниже будем пользоваться системой единиц СИ. Тогда

$$\epsilon' = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.3.19)$$

$$k' = k - i\alpha = \frac{\omega}{v'} = \omega \sqrt{\epsilon' \mu} = \omega \sqrt{\left(\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}\right) \mu} \quad (2.3.20)$$

Отсюда

$$\gamma^2 = k^2 - i(2k\alpha) - \alpha^2 = \omega^2 \epsilon \mu - i\sigma \mu \omega$$

Приравняем действительную и мнимую части этого уравнения:

$$k^2 - \alpha^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (2.3.21)$$

$$2k\alpha = \sigma \mu \omega \quad (2.2.22)$$

Найдем модуль комплексного  $k'$ :

$$|k'| = \sqrt{k^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\omega^2 \mu \epsilon)^2 + (\sigma \mu \omega)^2} = \omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \quad (2.3.23)$$

Используя (21) и (23), получим:

$$2K^2 = \omega^2 \epsilon \mu + \omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} = \omega^2 \mu \epsilon \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} \right].$$

Аналогично можно получить выражение для  $\alpha^2$ . В итоге имеем:

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} \right] \\ \alpha^2 &= \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Из (22) для фазовой скорости имеем:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \frac{2\alpha}{\mu \sigma} \quad (2.3.25)$$

Найдем значения  $\rho$  и  $\varphi$  комплексного волнового сопротивления  $\rho'$ :

$$\rho' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Учитывая, что  $K' = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$ , можно записать  $K' = \omega \mu / \rho'$ . Тогда

$$\rho' = \frac{\omega \mu}{K'} = \frac{\omega \mu}{K - i\alpha} = \rho e^{i\varphi} \quad (2.3.26)$$

Модуль комплексного волнового сопротивления  $\rho$  равен:

$$\rho = \frac{\omega \mu}{\sqrt{\alpha^2 + K^2}} = \frac{\omega \mu}{\sqrt{\omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}} = \left( \frac{\mu^2}{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Перепишем это выражение в таком виде:

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}} = \rho_{\text{диэл}} \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}} \quad (2.3.27)$$

Аргумент комплексного волнового сопротивления  $\rho'$ :

$$\varphi = \arctg \frac{\alpha}{K} = \arctg \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}}{+1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}} \quad (2.3.28)$$

Рассмотрим частные случаи.

1) Среда-диэлектрик:  $\sigma \ll \omega\epsilon$ . Из (24), (25), (27), (28) следует:  $K = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ,  $v_{\text{ф}} = \omega/K = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Т.е. мы получили точно такие же выражения, что и в предыдущих лекциях для чистых диэлектриков.

2) Среда-проводник:  $\sigma \gg \omega\epsilon$ . Из (24), (25), (27), (28) следует:

$$K^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left(1 + \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \approx \frac{\omega \mu \sigma}{2}, \quad K = \frac{\sqrt{\omega \mu \sigma}}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left(-1 + \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \approx \frac{\omega \mu \sigma}{2}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\omega \mu \sigma}}{2} \quad (2.3.29)$$

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

$$\rho = \sqrt[4]{\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\alpha}{K} = \arctg 1, \quad \varphi = 45^\circ$$

Для проводника волновое сопротивление можно записать в виде:

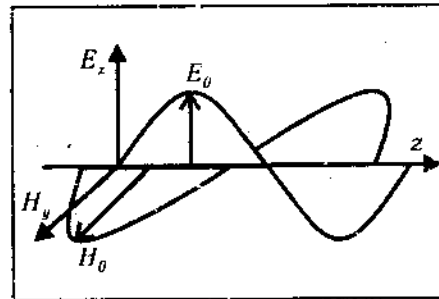


Рис. 2.4

$$\rho = \frac{E_x}{H_y} = \left(\frac{\omega\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Поле  $H_y$  отстает от  $E_x$  на  $45^\circ$  по фазе. Это иллюстрируется на рис. 2.4.

Из (29) видно, что в хорошо проводящих средах волновое число  $K$  и коэффициент затухания  $\alpha$  равны друг другу. Из-за высокой проводимости затухание волн велико и растет с увеличением частоты. Фазовая скорость  $v_{\text{ф}}$  мала, соответственно мала и длина волны  $\lambda = v_{\text{ф}}/f$ . В проводящих средах мала и волновое сопротивление.

Ранее для диэлектрика было получено, что плотность энергии электрического и магнитного поля равны между собой

$$\frac{1}{2} \mu H_y^2 = \frac{1}{2} \epsilon E_x^2$$

В проводниках модуль импеданса

$$\rho = \frac{E_x}{H_y} = \left(\frac{\omega\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Отсюда

$$\frac{\frac{1}{2} \mu H_y^2}{\frac{1}{2} \epsilon E_x^2} = \frac{\mu}{\epsilon} \cdot \frac{\sigma}{\omega\mu} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

Из-за высокой проводимости это отношение очень велико и равно отношению тока проводимости к току смещения. Поэтому энергия магнитного поля значительно превышает энергию электрического

поля. Учитывая, что между напряженностью электрического и магнитного полей существует сдвиг фаз  $\varphi = \pi/4$ , среднее значение вектора Умова - Пойтинга за период волны равно

$$\Pi = \frac{1}{2} EH \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} EH$$

С учетом того, что  $E = H\rho = H\sqrt{\omega\mu/\sigma}$ , получаем

$$\Pi = \frac{H^2}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

По сути в проводниках распространение электромагнитной волны уже нельзя рассматривать как волновой процесс, т.к. происходит быстрое, на масштабе длины волны, затухание поля. Фазовая скорость связана с показателем преломления соотношением  $n = c/v_\phi$ . Т.к. согласно (2.3.29)  $v_\phi$  очень мало, в проводящей среде велико значение показателя преломления. Этим объясняется хорошая отражательная способность проводников на высоких частотах, включая оптический диапазон длин волн. Это широко используется в радиотехнике для создания антенн из металла. Согласно (29) фазовая скорость в проводнике зависит от частоты, поэтому электрический проводник является диспергирующей средой. В проводниках  $\partial v_\phi / \partial \lambda < 0$ , следовательно, они обладают аномальной дисперсией, в результате этого групповая скорость в них выше фазовой.

#### Задачи к разделу 2

Задача 1. Найдите коэффициент отражения электромагнитных волн, падающих нормально на проводящую с  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $\sigma$ .

Задача 2. Покажите, что отражательная способность поверхности определяется отношением плотности тока смещения к плотности тока проводимости.

Задача 3. Заданы удельная проводимость среды

$\sigma = 10^{-1}$  сименс/метр, относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_r = 50$ , относительная магнитная проницаемость. Зависимость  $\sigma$  от частоты можно пренебречь. Определить, к проводникам или диэлектрикам можно отнести эту среду в диапазоне низких (НЧ) и ультравысоких (УВЧ) частот.

Задача 4. Покажите, что при распространении пакета электромагнитных волн с почти равными частотами в проводящей среде групповая скорость в два раза больше фазовой.

Задача 5. Средняя мощность излучения радиостанции, распределенная равномерно по полусфере с центром в точке расположения станции, составляет  $10^5$  Вт. Найдите величину вектора Пойтинга, амплитуду электрического и магнитного полей на расстоянии 10 км от станции.

Задача 6. Относительная диэлектрическая проницаемость ионизованного газа дается выражением

$$\varepsilon = \frac{c^2}{v^2} = 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

где:  $v$  - фазовая скорость электромагнитных волн,  
 $c$  - скорость света,  
 $\omega$  - электронная плазменная частота.

Покажите, что частотная дисперсия в этом случае определяется формулой

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

Задача 7. Для условий задачи 6 найдите выражение для фазовой и групповой скоростей электромагнитных волн.

### 3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД.

Предположим, что во всех точках пространства электрические векторы падающей волны параллельны друг другу. Такие волны называют плоские - параллельными. В радиофизике принято плоскость поляризации называть плоскостью, содержащую электрическую компоненту  $E$  электромагнитной волны.

Рассмотрим два частных случая:

1. Волна поляризована нормально плоскости падения. Такую волну будем называть волной с горизонтальной поляризацией ( $E_{\perp}$ ).

2. Волна поляризована в плоскости падения. Такую волну будем называть волной с вертикальной поляризацией ( $E_{\parallel}$ ) (см. рис. 3.1).

Будем предполагать, что среды являются полубесконечными и однородными и границей их раздела является плоскость. На рис. 3.2 приведены положения вектора магнитного поля  $H$  электромагнитной волны при отражении и преломлении волны.

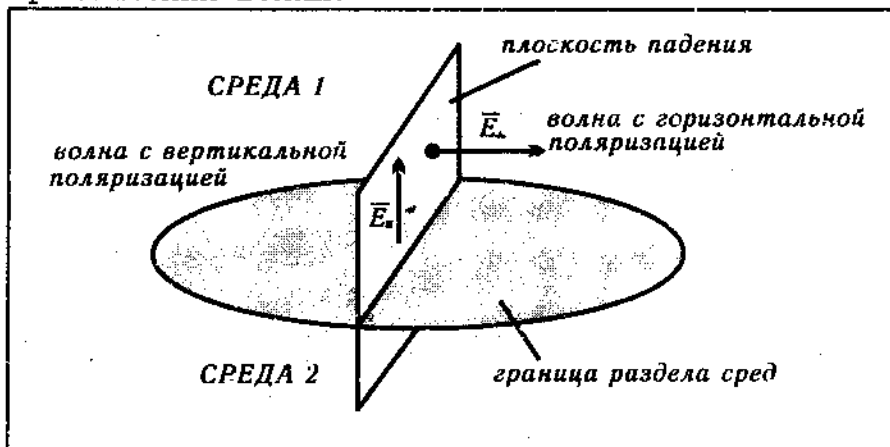


Рис. 3.1

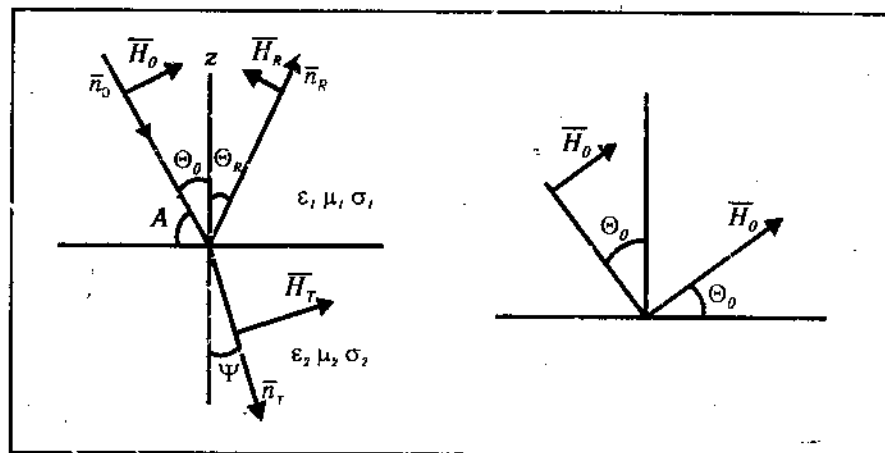


Рис. 3.2

На рис. 3.2:  $\vec{H}_0, \vec{H}_R, \vec{H}_T$  магнитные компоненты падающей, отраженной и преломленной волн;  $\theta_0, \theta_R, \psi$  - углы падения, отражения, преломления;  $\vec{n}_0, \vec{n}_R, \vec{n}_T$  - единичные векторы в направлении распространения падающей, отраженной и преломленной волн. Поля считаем плоскими с заданными постоянными распространения  $K_1$  и  $K_2$ . Это позволяет решить задачу, не обращаясь непосредственно к уравнениям Максвелла. При решении задачи необходимо удовлетворить граничным условиям на поверхности раздела сред:

1. Условие равенства тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$$

2. Равенство нормальных составляющих магнитной индукции

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

3. Равенство тангенциальных составляющих напряженностей электрического поля

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

4. Равенство, вытекающее из уравнения Максвелла  $\text{div}(\epsilon' E) = \rho$  при  $\rho = 0$ .

$$\epsilon'_1 E_{n1} = \epsilon'_2 E_{n2}$$

Если проводимость равна нулю  $\sigma = 0$ , это условие превращается в равенство нормальных составляющих электрической индукции на границе раздела сред

$$\epsilon_1 E_{r1} = \epsilon_2 E_{r2}$$

Для дальнейшего анализа достаточно любой пары граничных условий (для  $H$  или  $E$ ).

Запишем выражения для векторов напряженностей электрического и магнитного поля в виде:

1) Падающая волна:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i[K_1(\vec{n}_0 \vec{r}) - \omega t]}, \quad \vec{H}_1 = \frac{[\vec{n}_0 \vec{E}_0]}{\rho_1} e^{i[K_1(\vec{n}_0 \vec{r}) - \omega t]}$$

2) Отраженная волна:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 e^{i[K_2(\vec{n}_R \vec{r}) - \omega t]}, \quad \vec{H}_R = \frac{[\vec{n}_R \vec{E}_1]}{\rho_1} e^{i[K_2(\vec{n}_R \vec{r}) - \omega t]}$$

3) Преломленная волна:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_2 e^{i[K_2(\vec{n}_T \vec{r}) - \omega t]}, \quad \vec{H}_T = \frac{[\vec{n}_T \vec{E}_2]}{\rho_2} e^{i[K_2(\vec{n}_T \vec{r}) - \omega t]}$$

здесь  $\rho_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}$  - импедансы сред 1 и 2,  $\epsilon_1', \epsilon_2'$  - комплексные диэлектрические проницаемости.

Волновой вектор  $K = kn$ ,  $K_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ ,  $K_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$ . Ориентация векторов в плоской волне приведена на рис. 3.3.  $r$  - расстояние вдоль направления распространения волны,  $n_0, n_R, n_T$  - единичные векторы, нормальные фронту

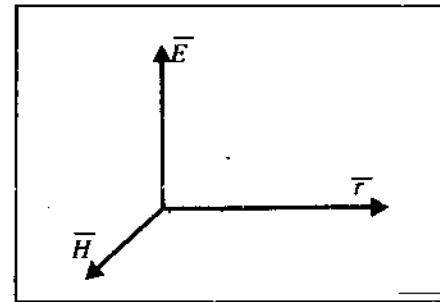


Рис. 3.3

волны;  $n$  - единичный вектор, нормальный плоскости раздела сред.

Подставим выражения для полей (3.1) в граничное условие 3. Найдем для границы раздела:

$$E_{1\tau} + E_{R\tau} = E_{T\tau}$$

$$\text{т. е. } \vec{E}_0 e^{iK_1(\vec{n}_0 \vec{r})} + \vec{E}_1 e^{iK_1(\vec{n}_R \vec{r})} = \vec{E}_T e^{iK_2(\vec{n}_T \vec{r})} \quad (3.2)$$

Это условие выполняется для любой точки границы раздела сред, что возможно при равенстве всех фазовых множителей

$$K_1(\vec{n}_0 \vec{r}) = K_1(\vec{n}_R \vec{r}) = K_2(\vec{n}_T \vec{r})$$

Учтем, что на плоскости раздела сред  $\vec{n} \vec{r} = 0$ . Используем зависимости:

$$\vec{r}(\vec{n}\vec{n}) = \vec{r}\vec{n}(\vec{n}\vec{r}) - [\vec{n}[\vec{n}\vec{r}]] = -[\vec{n}[\vec{n}\vec{r}]]$$

Мы можем записать:

$$K_1 \vec{n}_0 [\vec{n}[\vec{n}\vec{r}]] = K_1 \vec{n}_R [\vec{n}[\vec{n}\vec{r}]] = K_2 \vec{n}_T [\vec{n}[\vec{n}\vec{r}]]$$

Осуществим циклическую перестановку векторов

$$K_1 [\vec{n}_0 \vec{n}] [\vec{n}\vec{r}] = K_1 [\vec{n}_R \vec{n}] [\vec{n}\vec{r}] = K_2 [\vec{n}_T \vec{n}] [\vec{n}\vec{r}]$$

Отсюда:

$$K_1 [\vec{n}_0 \vec{n}] = K_1 [\vec{n}_R \vec{n}] = K_2 [\vec{n}_T \vec{n}] \quad (3.3)$$

Из равенств (3.3) следует:

1. Падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости - плоскости падения.

$$2. [n_0 n] = [n_R n] \text{ или } \sin \theta_0 = \sin \theta_R \quad \theta_0 = \theta_R \quad (3.4)$$

Это закон отражения: угол падения равен углу

отражения. Такое отражение называется зеркальным.

3.  $K_1[n_0n] = K_2[n_Tn]$  или  $K_1 \sin \theta_0 = K_2 \sin \theta_\psi$ .

При  $\rho_1 = \rho_2$  мы получаем закон преломления Снелиуса.

В этом случае

$$K_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = \frac{\omega}{c} n_1; \quad K_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \frac{\omega}{c} n_2$$

$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  - скорость света в вакууме. Показатель преломления относительно вакуума:

$$n_1 = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$$

Учитывая это, имеем закон преломления в виде:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \psi} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.5)$$

Отметим, что зеркальное отражение возникает благодаря интерференции волн, излучаемых электронами на границе раздела сред, находящимися под действием падающей волны. Направление зеркального отражения луча является направлением, соответствующим максимуму нулевого порядка в интерференционной картине. Если расстояние между атомами среды меньше длины волны падающего излучения, наблюдается лишь один максимум под углом, соответствующим зеркальному углу.

### 3.1 Отражение при горизонтальной поляризации падающей волны.

Для анализа воспользуемся первой парой граничных условий. С учетом законов отражения и преломления эти условия переписутся так:

$$(H_0 - H_R) \cos \theta_0 = H_T \sqrt{1 - \frac{K_1^2}{K_2^2} \sin^2 \theta_0}$$

$$\mu_1 (H_0 + H_R) \sin \theta_0 = \mu_2 \frac{K_1}{K_2} H_T \sin \theta_0 \quad (3.6)$$

При получении уравнений (3.6) учтено, что

$$(H_0 - H_R) \cos \theta_0 = H_T \cos \psi = H_T \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = H_T \sqrt{1 - \frac{K_1^2}{K_2^2} \sin^2 \theta_0}$$

$$H_{0\tau} = H_0 \cos \theta_0, \quad H_{1\tau} = -H_R \cos \theta_0$$

Введем в рассмотрение коэффициенты отражения и преломления при горизонтальной поляризации падающей волны (так называемые коэффициенты Френеля)

$$R_r = H_R / H_0 \quad \text{и} \quad r_r = H_T / H_0$$

Решая систему (6), получим:

$$R_r = \frac{\mu_2 K_1 \cos \theta - \mu_1 \sqrt{K_2^2 - K_1^2 \sin^2 \theta}}{\mu_2 K_1 \cos \theta + \mu_1 \sqrt{K_2^2 - K_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.7)$$

где  $K_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ ,  $K_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$ ,  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_2'$  - комплексные диэлектрические постоянные.

Выражение для  $r_r$  получается аналогично. Мы его ниже рассматривать не будем. В общем случае  $R_r$  - комплексная величина. Ее можно представить в виде:

$$R_r = |R_r| e^{-i\phi_r}$$

$|R_r|$  - модуль,  $\phi_r$  - аргумент коэффициента отражения.

При отражении волны фаза изменяется на угол  $\phi_r$ . Можно представить  $H$  - составляющую отраженной



волны в виде

$$H_R = H_1 R_r = H_0 R_r \exp[-i\omega t + iK_1(\vec{n}_0 \vec{r}) - i\phi_r]$$

В практике радиосвязи, рассматривая задачу отражения от поверхности Земли (например, при анализе диаграмм направленностей антенн), можно для воздуха (среда 1) положить  $\sigma_1=0$ ,  $\mu_1=\mu_0$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_0$ . Для Земли (среда 2) в большинстве случаев  $\mu_2=\mu_0$ . В этом случае

$$R_r = \frac{\sin A - \sqrt{\epsilon' - \cos^2 A}}{\sin A + \sqrt{\epsilon' - \cos^2 A}} \quad (8)$$

где  $A = 90^\circ - \theta_0$  - угол скольжения,  $\epsilon' = \epsilon_2/\epsilon_0 - i\sigma_2/\omega\epsilon_0 = \epsilon - i(60\lambda)\sigma$  - комплексная относительная диэлектрическая проницаемость. Величина  $R_r$  в приведенном примере зависит от угла скольжения, длины волны, параметров почвы.

### 3.2 Отражение и преломление при вертикальной поляризации падающей волны.

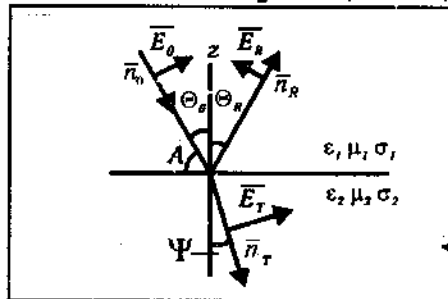


Рис. 3.4

Ориентация векторов  $E_0$ ,  $E_R$ ,  $E_T$  для этого случая приведена на рис. 3.4. Коэффициент отражения равен  $R_v = E_R/E_0$ . По аналогии со случаем горизонтальной поляризации, заменив  $\mu_2$  на  $\epsilon_2'$  и  $\mu_1$  на  $\epsilon_1'$ , получим:

$$R_v = \frac{K_1 \epsilon_2' \sin A - \epsilon_1' \sqrt{K_2^2 - K_1^2 \cos^2 A}}{K_1 \epsilon_2' \sin A + \epsilon_1' \sqrt{K_2^2 - K_1^2 \cos^2 A}} = |R_v| e^{-i\phi} \quad (3.9)$$

Если, например, мы рассматриваем падение

радиоволны из воздуха на землю, то для воздуха  $\sigma_1=0$ ,  $\mu_1=\mu_0$ ,  $\epsilon_1 \approx 0$ ,  $\mu_2=\mu_0$  и

$$R_v = \frac{\epsilon' \sin A - \sqrt{\epsilon' - \cos^2 A}}{\epsilon' \sin A + \sqrt{\epsilon' - \cos^2 A}} \quad (3.10)$$

3.3 Коэффициенты отражения для различных сред  
Проанализируем коэффициенты отражения для трех видов среды 2. Первую считаем вакуумом (воздухом).

1) Пусть среда 2 - диэлектрик. В этом случае  $\lambda\sigma \ll \epsilon$ .

а) Случай горизонтальной поляризации.  
Коэффициент  $R_r$  - вещественная величина. Зависимость  $|R_r|$  и  $\phi_r$  от угла скольжения приведена на рис. 3.5.

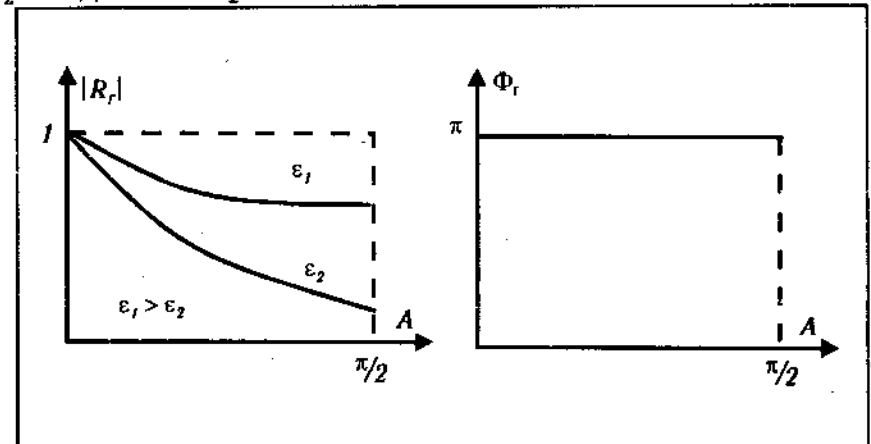


Рис. 3.5

При  $A=0$   $R_r=-1$ , при  $A=\pi/2$   $R_r=-\sqrt{\epsilon-1}/\sqrt{\epsilon+1}$ . Фаза при отражении изменяется на  $\pi$ .

б) Случай вертикальной поляризации.  
Коэффициент отражения равен

$$R_p = \frac{\epsilon \sin A - \sqrt{\epsilon - \cos^2 A}}{\epsilon \sin A + \sqrt{\epsilon - \cos^2 A}}$$

Зависимость модуля  $|R_p|$  и аргумента  $\phi_p$  коэффициента отражения от угла скольжения приведены на рис.3.6.

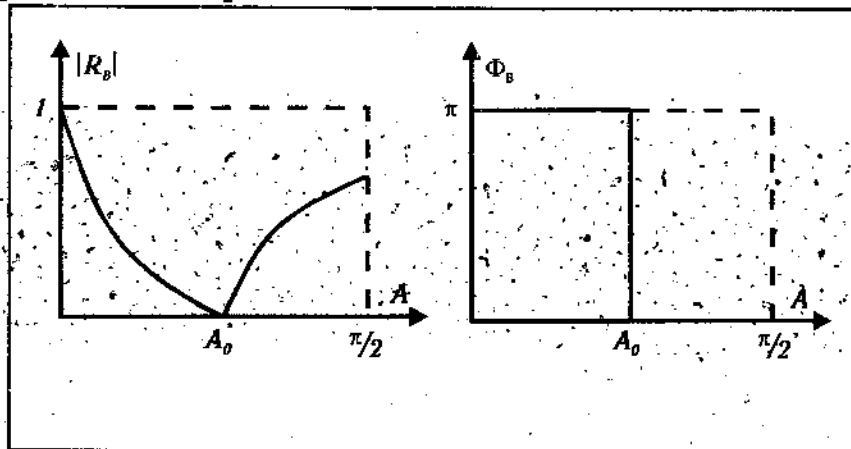


Рис.3.6

При  $A=0$   $R_p=-1$ ,  $A=\pi/2$   $R_p=(\sqrt{\epsilon}-1)/(\sqrt{\epsilon}+1)$ .

При некотором угле  $A=A_0$  коэффициент отражения  $R_p=0$ . Угол  $A_0$  называют углом Брюстера (угол полного преломления).

Для того, чтобы  $R_p=0$ , должно выполняться равенство

$$\epsilon \sin A_0 = \sqrt{\epsilon - \cos^2 A_0} \quad \text{откуда} \quad \sin A_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon+1}} \quad (3.11)$$

При угле  $A=A_0$  отражение отсутствует и вся электромагнитная энергия проходит в среду 2. При угле полного преломления имеет место полное согласование импедансов сред 1 и 2, что и приводит к отсутствию отражения.

При угле падения Брюстера  $\theta$  выполняется условие  $\theta_B + \psi = 90^\circ$ . Электроны в среде 2 находятся под действием преломленной волны и колеблются в направлениях, перпендикулярных преломленному лучу (вектор  $H_1$ ). При угле падения  $\theta_B$  компонента движения электронов, параллельная плоскости чертежа, направлена по лучу  $n_2$ . Поэтому ее вклад в излучение в этом направлении равен нулю. Это приводит к тому, что отраженная волна полностью поляризована в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

2) Среда 2 - полупроводник, т.е.  $\lambda \approx \epsilon$ .

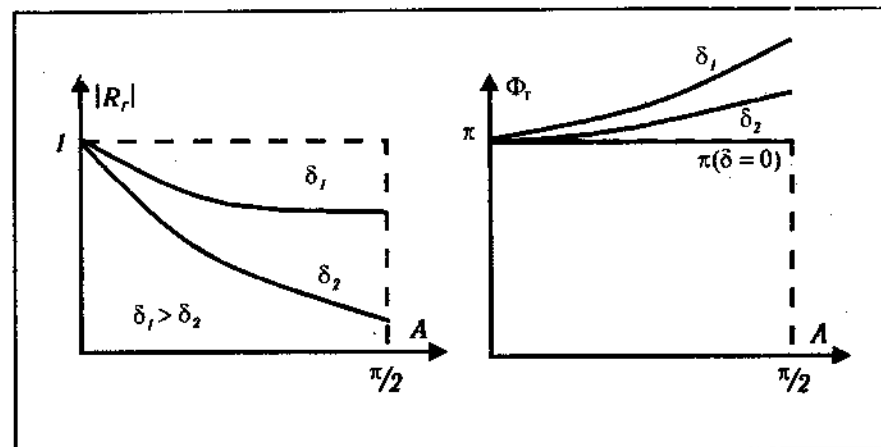


Рис.3.7

а) Случай горизонтальной поляризации падающей волны. На рис.3.7 приведены изменения модуля  $|R_p|$  и аргумента  $\phi_p$  комплексного коэффициента отражения.

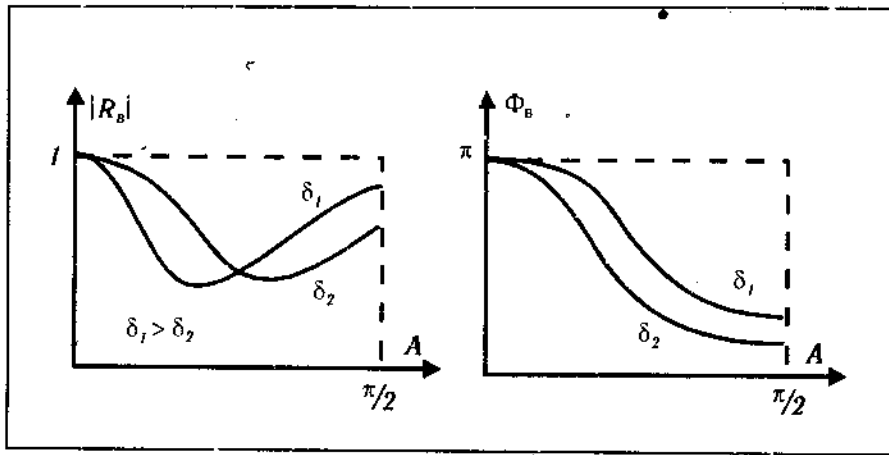


Рис. 3.8

б) Случай вертикальной поляризации падающей волны. Изменение  $|R_s|$  и  $\phi_s$  от угла скольжения  $A$  приведены на рис. 3.8. Характер изменения  $|R_s|$  и  $\phi_s$  такой же, как и для диэлектрика, но  $|R_s|$  в ноль не обращается, т.е. угла полного преломления нет.

3) Среда 2 - проводник, т.е.  $\lambda\sigma \gg \varepsilon$ .

а) Горизонтальная поляризация падающей волны. В этом случае  $R_r \approx -1$  для всех углов  $A$ , т.е. вся энергия, падающая на границу раздела, отражается. Электромагнитная энергия в проводник не преломляется.

б) Вертикальная поляризация падающей волны.  $R_s \approx 1$  для всех  $A$ . Энергия падающей электромагнитной волны полностью отражается.

Сравним отражение радиоволн при различных видах поляризации. При углах  $A=0$  и  $A=\pi/2$   $|R_r| = |R_s|$ . Для произвольных значений  $A$   $|R_r| > |R_s|$ . Поэтому в радиолокации, например, используют антенны с горизонтальной поляризацией, т.к. для них коэффициент отражения от Земли выше, чем для антенн с вертикальной поляризацией. Для сравнения на рис. 3.9 приведены коэффициенты отражения и

фаза для двух случаев поляризации падающего излучения.

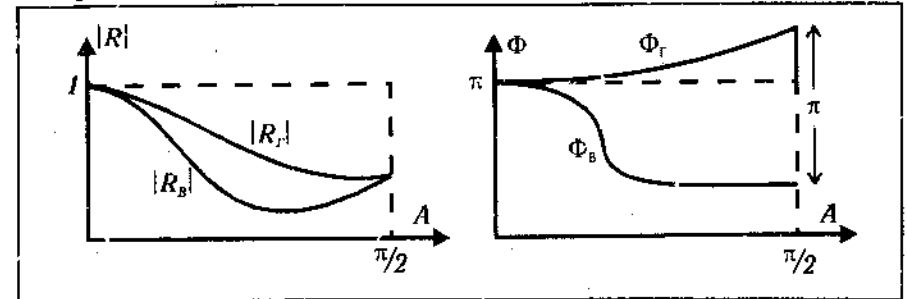


Рис. 3.9

### 3.4 Случай произвольной поляризации падающей электромагнитной волны.

Рассмотрим случай, когда векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  падающей волны произвольно ориентированы относительно плоскости падения. Для того, чтобы определить поле отраженной волны, разложим вектор  $\vec{E}_0$  падающей волны на составляющие в плоскости падения и перпендикулярно плоскости падения. Можно считать, что падающая волна раскладывается на две волны: вертикально поляризованную с напряженностью  $E_{0v}$  и горизонтально поляризованную  $E_{0r}$ . Отраженная волна есть результат сложения соответствующих отраженных волн.

Можно записать:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1v} + \vec{E}_{1r} \quad \vec{E}_R = \vec{E}_{Rv} + \vec{E}_{Rr} \quad \text{где} \quad E_{Rv} = R_v E_{1v} \quad E_{Rr} = R_r E_{1r}$$

Используем систему координат с осью  $Ox$ , совпадающей с направлением  $E_{Rr}$ , осью  $Oy$  - с  $E_{Rv}$  и осью  $Oz$ , совпадающей с направлением распространения отраженной волны. Пусть падающая волна:

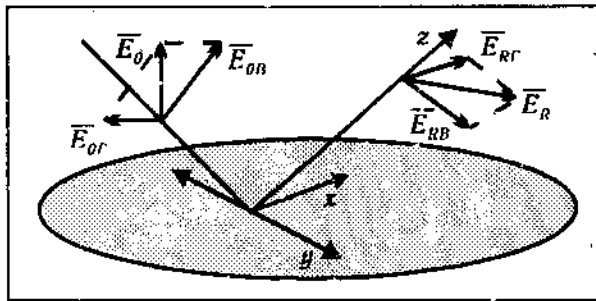


Рис.3.10

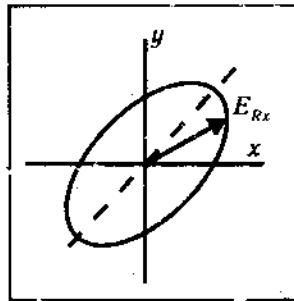


Рис.3.11

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - Kz)}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} E_{Rx} &= |R_r| E_{0x} \cos(\omega t - Kz - \phi_r - \psi) \\ E_{Ry} &= |R_B| E_{0y} \cos(\omega t - Kz - \phi_B - \psi) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\psi$  - фаза колебаний падающей волны в точке падения. Уравнения (3.12) при фиксированном  $z$  представляет уравнение эллипса (за один период в плоскости  $z = \text{const}$  вектор описывает эллипс в плоскости  $XY$ ).

Рассмотрим частные случаи:

1) Граница раздела проводник или диэлектрик:  $\phi_r - \phi_B = 0$  или  $\pi$ . Эллипс превращается в линию, т.е. мы получили линейную поляризацию.

При угле полного преломления отраженная волна, как бы ни был ориентирован вектор  $E$  падающей волны, всегда горизонтально поляризована. Поэтому угол  $\theta_B$  называют углом полной поляризации.

2) Граница раздела сред - полупроводник. Разность фаз  $\phi_r - \phi_B$  принимает значения от 0 до  $\pi$ . Отраженная волна эллиптически поляризована. В частном случае  $\phi_r - \phi_B = \pi$  и  $|R_r| E_{0x} = |R_B| E_{0y}$  получаем волну с круговой поляризацией.

### Задачи к разделу 3.

Задача 1. Объясните, используя явление интерференции, закон зеркального отражения волны, падающей на границу раздела двух сред с различными свойствами.

Задача 2. Получите выражение для коэффициента преломления для случая падения плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред с различными значениями диэлектрической проницаемости и удельной проводимостью в случаях: а) горизонтальной и б) вертикальной поляризации падающей волны.

Задача 3. Изотропный излучатель расположен на высоте  $h$  над отражающей поверхностью. Определите диаграмму направленности излучателя в вертикальной плоскости на большом удалении  $r \gg \lambda$  для случая, когда отражающая поверхность является а) проводником, б) диэлектриком. Поляризация излучаемых волн - горизонтальная.

Задача 4. Решите задачу 3 для случая вертикальной поляризации излучаемых волн.

Указания к решению задач 3 и 4. Введите в рассмотрение дополнительный (мнимый) излучатель, расположенный симметрично относительно отражающей поверхности. Диаграмма направленности будет результатом интерференции волн, излучаемых антенной и ее "мнимым" изображением с учетом изменения фазы волны при отражении.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пейн Ф. Физика колебаний и волн. М: Мир, 1979.
2. Черный Ф.Б. Распространение волн. М: Сов. радио, 1972.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М: Сов. радио, 1957.
4. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М: Сов. радио, 1956.
5. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М: Наука, 1979.