КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

**Т. Ю. Альпин, А. И. Егоров, П. Е. Кашаргин,
С. В. Сушков**

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть I: Комплексные числа. Предел функции

Казань 2013

Печатается по решению Редакционно-издательского совета института физики Казанского федерального университета.

УДК 517.5

Т. Ю. Альпин, А. И. Егоров, П. Е. Кашаргин, С. В. Сушков. Практические занятия по математическому анализу. Часть I: Комплексные числа. Предел функции. — Казань, 2013. 52 с.

Пособие состоит из практических занятий, проводимых преподавателями по математическому анализу со студентами первого курса инженерных специальностей. Первая часть пособия содержит элементы теории функций комплексного переменного и теорию пределов. Пособие представляет собой руководство по решению задач. По каждому разделу кратко излагаются основные теоретические сведения, приводятся решения типовых примеров и задач, даются задачи для самостоятельной работы. Предназначено для студентов первого курса (первый семестр) и преподавателей.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики и математического моделирования института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ, к.ф.-м.н. А. А. Попов

Занятие 1. Комплексные числа

Комплексными числами называются упорядоченные пары вещественных чисел вида

$$z = (a; b)\,,$$

на которых следующим образом введены операции сложения и умножения:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) \tag{1}$$

$$(a; b)\,(c; d) = (ac - bd; ad + bc) \tag{2}$$

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числа называются соответственно *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа и обозначаются

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Вещественные числа в свете этих определений могут рассматриваться как подмножество комплексных чисел с нулевой мнимой частью: $a \equiv (a; 0) \in \mathbb{R}$. При умножении комплексного числа на действительное, согласно (2), каждая часть комплексного числа умножается на последнее:

$$(a; b)\,c = (a; b)\,(c; 0) = (ac; bc)\,. \tag{3}$$

Числа с нулевой действительной частью называются *мнимыми числами.*

Рассмотрим число $(0; 1)$. Умножим его на себя, воспользовавшись (2):

$$(0; 1)\,(0; 1) = (0 - 1; 0 + 0) = -1.$$

Таким образом, на множестве комплексных чисел существует число, отсутствующее на множестве рациональных, квадрат которого равен -1. Это число называется *мнимой единицей* и обозначается $i \equiv (0; 1)$ (заметим, что квадрат $-i$ также равен -1).

Любое комплексное число, согласно (1), можно представить в виде суммы действительного и мнимого числа $z = (a; b) = (a; 0) + (0; b)$. Мнимое же число можно представить в виде произведения действительного числа на мнимую единицу; согласно (2) имеем

$$ib = (0; 1)\,(b; 0) = (0; b)\,.$$

Так мы приходим к наиболее частой форме записи комплексного числа:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a + ib.$$

Такая форма записи называется алгебраической формой комплексного числа, о других формах мы расскажем ниже.

Число $\bar{z} = a - ib$ называется *сопряжённым* числу $z = a + ib$. Заметим, что произведение числа на сопряжённое к нему будет действительным:

$$\bar{z}z = (a - ib)\,(a + ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

В дополнение к (1) и (2) можно определить *вычитание* комплексных чисел:

$$(a; b) - (c; d) = (a; b) + (-1)\,(c; d) = (a - c; b - d) \tag{4}$$

Воспользовавшись (3), мы можем ввести операцию деления комплексного числа на действительное

$$\frac{(a; b)}{c} = (a; b) \cdot \frac{1}{c} = \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right),$$

каковую расширить до *деления комплексного числа на комплексное*:

$$\frac{(a; b)}{(c; d)} = \frac{(a; b)\,\overline{(c; d)}}{(c; d)\,\overline{(c; d)}} = \frac{(a; b)\,(c; -d)}{c^2 + d^2} =$$
$$\frac{(ac + bd; bc - ad)}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right). \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что арифметические действия, введённые определениями (1), (2), (4) и (5), обладают теми же свойствами, что аналогичные действия с вещественными числами (коммутативностью, ассоциативностью, дистрибутивностью и т.д.). Поэтому данные определения редко используются на практике. Обычно достаточно помнить, что $i^2 = -1$, и что отношение комплексных чисел z и w $z/w = z\bar{w}/w\bar{w}$, в остальном же с комплексными числами обращаются так же, как с действительными.

Очевидным образом определяется операция *возведения комплексного числа в целую степень* z^n. Если n – натуральное число, то

$$z^n = \underbrace{zzz\ldots z}_{n};$$

если n – целое отрицательное, то

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}}.$$

Здесь используются две ранее введённые операции: возведение z в натуральную степень $-n$ и деление единицы на комплексное число z^{-n}. Наконец, $z^0 = 1$.

Примеры

Пример 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$

Решение. Воспользуемся формулами (1), (2), (4) и (5) и получим:

$$\begin{aligned}
&z_1 + z_2 = (1+i) + (2-i) = 3,\\
&z_1 - z_2 = (1+i) - (2-i) = -1 + 2i,\\
&z_1 \cdot z_2 = (1+i) \cdot (2-i) = 2 + 2i - i - i^2 = 3 + i,\\
&\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+i+i^2}{4+1} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить значение выражения

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$$

Решение. Вначале раскроем скобки в числителе и знаменателе:

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5}{1 - 3i + 3i^2 - i^3}.$$

Теперь используем то, что $i^2 = -1$, откуда следует, что $i^3 = -i$, $i^4 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$:

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \frac{-4-4i}{-2-2i}.$$

Далее мы можем воспользоваться двумя способами. Конечно, в данном конкретном случае мы можем заметить, как числитель связан со знаменателем, и воспользоваться этим:

$$\frac{-4-4i}{-2-2i} = \frac{2\,(-2-2i)}{-2-2i} = 2.$$

Но при меньшем везении следовало бы умножить числитель и знаменатель на число, сопряжённое к знаменателю

$$\frac{-4-4i}{-2-2i} = \frac{(-4-4i)\,(-2+2i)}{(-2-2i)\,(-2+2i)} = \frac{16}{8} = 2.$$

Задачи

Задача 1. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$:

1. $z_1 = 1$, $z_2 = i$;
2. $z_1 = i$, $z_2 = 1$;
3. $z_1 = 2$, $z_2 = 1-3i$;
4. $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-3i$;
5. $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-i$;
6. $z_1 = 1-i$, $z_2 = 1+i$;
7. $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2+i$;
8. $z_1 = 1-i$, $z_2 = 1-2i$;

Задача 2. Найти действительную $\operatorname{Re} z$ и мнимую $\operatorname{Im} z$ части следующих комплексных чисел:

1. $z = 2$;
2. $z = i$;
3. $z = 3-3i$;
4. $z = 3i-1$;
5. $z = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$;
6. $z = \sqrt{3}i-1$.
7. $z = (2-i)^2(3+4i)$;
8. $z = i^8 + \dfrac{5+i}{1-3i}$.

Задача 3. Вычислить:

1. $i,\ i^2,\ i^3,\ \ldots,\ i^{10}$;
2. $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots i^{100}$;
3. $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+\ldots+i^{84}$;
4. $1-i^5+i^{10}-i^{15}+\ldots+i^{50}$.

Задача 4. Вычислить:

1. $(1+i)\,(1-2i)$;
2. $\frac{(1+i)}{(1-i)^2}$;
3. $\frac{3+4i}{1+3i}+\frac{i}{2}$;
4. $\left(\frac{i^3+1}{i^2-1}\right)^2$;
5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}$;
6. $\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)^{16}$;
7. i^{169};
8. $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}+i\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

Задача 5. Найти решения уравнений:

1. $(1+2i)\,z+5+7i=-4+9i$;
2. $(6+2i)\,z-5-9i=13-3i$;
3. $(3-i)\,(2+i)+\bar{z}\,(1+2i)=5+6i$;
4. $z\,(7+9i)=i^7$.

Задача 6. Доказать равенства:

1. $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$;
2. $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$;
3. $\bar{\bar{z}}=z$;
4. $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$;
5. $\overline{(z_1-z_2)}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$;
6. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;
7. $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

Занятие 2. Тригонометрическая форма и корень комплексного числа

Для каждой пары чисел x, y можно подобрать такие r и φ, чтобы

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi; \end{cases} \qquad r\geqslant 0. \tag{6}$$

Действительно, возведя в квадрат оба уравнения и сложив их, получим $x^2+y^2=r^2$, откуда найдём

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{7}$$

Для нахождения φ рассмотрим следующие варианты:

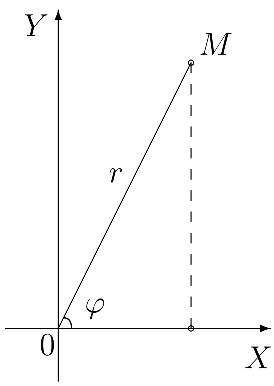
1. Если $x=0$, то $r=|y|$, и $\sin\varphi=\mathrm{sgn}\,y$. Следовательно,

$$\varphi=\mathrm{sgn}\,y\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

2. Пусть теперь $x \neq 0$. Тогда разделим второе уравнение из 6 на первое и получим $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, откуда
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Подставив найденное φ и r из 7 в 6, получим, что $(-1)^n = \operatorname{sgn} x$. Если x положительное, то n чётное, если же x отрицательное, то n нечётное. С учётом этого запишем
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi\left(2k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим комплексное число в алгебраической форме $z = x + iy$. Заменив x и y согласно 6, получим
$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Такая форма называется *тригонометрической формой комплексного числа*. Число r называется *модулем*, а число φ – *аргументом* числа z, что обозначается
$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$



Если графически изображать копмлексные числа точками на плоскости, считая x и y декартовыми координатами точки, соответствующей числу z, то r и φ суть полярные координаты той же точки, то есть r имеет геометрический смысл расстояния между точкой z и началом координат, а φ – угла между положительной частью оси Ox и радиус-вектором точки z.

Пусть $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ и $w = q\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$. Рассмотрим произведение этих чисел:
$$zw = rq\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) =$$
$$= rq\left[\left(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\right) + i\left(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\right)\right] =$$
$$= rq\left(\cos\left(\varphi + \psi\right) + i\sin\left(\varphi + \psi\right)\right).$$

Мы получили, что **модуль произведения есть произведение модулей множителей**, при этом **аргумент произведения есть сумма аргументов множителей**. Отсюда, в частности, следует, что

$$z^n = r^n \left(\cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)\right).$$

Рассмотрим теперь сопряжённое к z в тригонометрической форме и воспользуемся свойствами чётности синуса и косинуса:

$$\bar{z} = r\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right) = r\left(\cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)\right).$$

Итак, сопряжённое к z обладает таким же модулем и противоположным по знаку аргументом. Заметим, что $z\bar{z} = r^2$.

Для результатов деления получим

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{rq\left(\cos\left(\psi-\varphi\right) + i\sin\left(\psi-\varphi\right)\right)}{r^2} =$$
$$= \frac{q}{r}\left(\cos\left(\psi-\varphi\right) + i\sin\left(\psi-\varphi\right)\right),$$

то есть **модуль частного есть частное модулей**, **аргумент частного есть разность аргументов**.

Производить умножение, деление и возведение в целую степень чисел, заданных в тригонометрической форме заметно проще, чем в алгебраической.

Пусть числа z и w, определённые выше, равны. Зададимся вопросом, как при этом соотносятся их модули и аргументы. Равенство комплексных чисел означает равенство их соответствующих частей:

$$\begin{cases} r\cos\varphi = q\cos\psi, \\ r\sin\varphi = q\sin\psi. \end{cases}$$

Возведя в квадрат оба уравнения и сложив их, получим $r^2 = q^2$, откуда $r = \pm q$. Так как модули неотрицательны, остаётся вариант $r = q$. С учётом этого, имеем

$$\begin{cases} \cos\varphi = \cos\psi, \\ \sin\varphi = \sin\psi; \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} = 0, \\ 2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два варианта:

1. $\sin\frac{\varphi-\psi}{2} = 0$ – тогда удовлетворяются оба уравнения.

2. $\sin\frac{\varphi+\psi}{2} = 0$ – в этом случае $\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = \pm 1$, и второе уравнение приводит к тому, что $\sin\frac{\varphi-\psi}{2} = 0$.

Таким образом, оба варианта приводят к одному результату:

$$\sin\frac{\varphi-\psi}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varphi-\psi}{2} = \pi k \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \psi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, у равных чисел модули в точности равны, аргументы же могут отличаться на слагаемое, кратное 2π.

Числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, которые для данного комплексного $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и натурального n удовлетворяют соотношению $z^n = w$, называются *корнями n-й степени числа w*. Из полученных выше результатов следует, что $r^n = q$, $\varphi n = \psi + 2\pi k$. Число может принимать любое целое значение, чем определяется множественность корней одного числа. Однако для двух корней, аргументы которых отличаются на величину, кратную $2\pi n$, действительные и мнимые части будут равны, так разным значениям k будут соответствовать одинаковые корни. Для того же, чтобы получить все уникальные корни, достаточно перебрать значения $k = 0 \ldots n-1$ Отсюда

$$r = \sqrt[n]{q}, \quad \varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0 \ldots n-1. \tag{8}$$

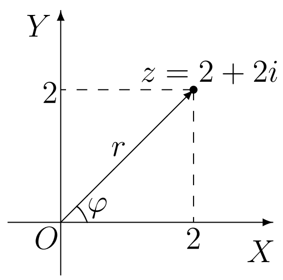
Примеры

Пример 1. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах: 1) $z = 3 + 3i$; 2) $z = -1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = -4i$.

Решение. Используем формулы (6) и (7).

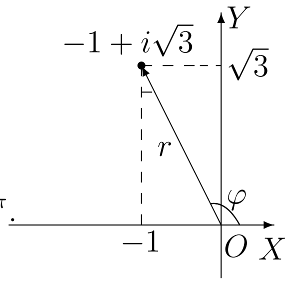
1) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. Значит,

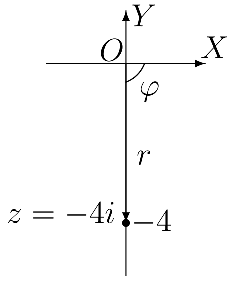
$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$



2) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = \dfrac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$





3) Для $z = -4i$ имеем $|z| = r = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$, $\varphi = \arg z = -\dfrac{\pi}{2}$. Значит,

$$-4i = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Пример 2. Найти квадратные корни числа i.
Решение. Нетрудно убедиться, что $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, откуда $|i| = 1$, $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$. Квадратными корнями называются корни степени $n = 2$. Тогда, согласно (8), для таких z, для которых $z^2 = i$,

$$r = \sqrt{1} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}, \quad k = 0 \ldots 1.$$

Итак, таких значений имеется два. Оба имеют модуль, равный единице, и следующие аргументы:

$$\varphi_0 = \frac{\pi/2 + 2\pi \cdot 0}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi/2 + 2\pi \cdot 1}{2} = \frac{5\pi}{4}.$$

Представим их в алгебраической форме:

$$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задачи

Задача 1. Построить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ векторы, соответствующие комплексным числам z. Найти $\arg z$ и $|z|$:

1. $z = -3$;
2. $z = \pi$;
3. $z = -1 + i$;
4. $z = -1 - i$;
5. $z = 3 - i$;
6. $z = i - \sqrt{3}$;

Задача 2. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

1. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;
2. $2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$;
3. $-\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;
4. $4\left(\cos\dfrac{7\pi}{3} + i\sin\dfrac{7\pi}{3}\right)$;

Задача 3. Найти тригонометрическую и показательную форму комплексных чисел:

1. $\sqrt{3} + 3i$.
2. $-\sqrt{3} + 3i$.
3. $-1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$.
4. $2 - 2i$.
5. $7 + 5i$.
6. $3i$.
7. -6.
8. $-\pi i$.

Задача 4. Найти корень указанной степени:

1. $\sqrt[3]{-1}$.
2. $\sqrt[3]{i}$.
3. $\sqrt[6]{64}$.
4. $\sqrt[4]{-4}$.
5. $\sqrt[7]{1}$.
6. $\sqrt[8]{1+i}$.

Задача 5. Решить уравнения:

1. $5z^2 + 2z + 2 = 0$.
2. $5z^2 + 6z + 2 = 0$.
3. $(1+2i)\,z^2 + (4-2i)\,z - 3\,(7+4i) = 0$.
4. $z^2 - 2iz - 32i - 1 = 0$.
5. $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$.
6. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

Занятие 3. Предел функции

Определение предела. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Предел функции при $x \to \infty$. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\Delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \Delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Бесконечный предел. Говорят, что *предел функции* $f(x)$ в точке a *равен бесконечности*, и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

если для каждого числа $E > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > E$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Бесконечно большие функции находятся в тесной связи с функциями бесконечно малыми. Если при данном предельном переходе функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x) = 1/f(x)$ будет бесконечно малой при том же предельном переходе, и обратно.

Свойства пределов. При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы:

$$\lim_{x\to a} C = C, \text{ где } C \text{ – постоянная;} \tag{9}$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x), \text{ где } C \text{ – постоянная;} \tag{10}$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x); \tag{11}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x); \tag{12}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0; \tag{13}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{14}$$

Если в окрестности точки a имеем $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$ и

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to a} g(x) = A. \tag{15}$$

Теорема (15) носит название «*теоремы о двух милиционерах*». Если существуют и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y)$, то

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = \lim_{y\to b} g(y), \tag{16}$$

где $f(x) \neq b$ при $x \neq a$. Теорема (16) позволяет вычислять предел с помощью *замены переменной*, т. е. переходя от переменной x к новой переменной $y = f(x)$. Кроме того, надо пользоваться тем, что для всех элементарных функций в любой точке их области определения справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right). \tag{17}$$

При вычислении пределов удобно использовать следующие *свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций*:

a) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, а функция $g(x)$ ограничена в окрестности точки a или $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \neq \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$.

b) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$, обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

c) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \neq \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$.

d) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

e) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty$.

Раскрытие неопределенностей. Сумма (разность) и частное бесконечно больших функций не обязательно являются бесконечно большими функциями, и формулы (11) и (13) непосредственно неприменимы. В таких случаях принято говорить, что сумма $f(x) + g(x)$ или разность $f(x) - g(x)$ представляет собой неопределенность вида $\infty + \infty$ и $\infty - \infty$. Аналогично, говорят, что частное $f(x)/g(x)$ представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to a$ функции, и неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ функции. *Основные виды неопределенностей*:

$$\infty \pm \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Вычисление пределов в этих случаях называют «*раскрытием неопределенности*». Непосредственное применение теорем (9) – (16) не дает возможности вычислить такие пределы. Для вычисления предела – «раскрытия неопределенности», предварительно преобразовывают выражения.

Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если ее предел в этой точке равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{18}$$

Отметим некоторые теоремы о непрерывных функциях:

1. Если в точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то в этой точке непрерывны их сумма $f(x) \pm g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $f(x)/g(x)$ (последнее при условии $g(a) \neq 0$).

2. Если $g(x)$ непрерывна в точке a, а $f(y)$ непрерывна в точке $b = g(a)$, то в точке a непрерывна сложная функция $f\,[g(x)]$.

3. Каждая элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.
4. Если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, а $f(y)$ непрерывна в точке b, то

$$\lim_{x\to a} f\left[g(x)\right] = f\left[\lim_{x\to a} g(x)\right].$$

Иными словами, непрерывная функция позволяет переходить к пределу под своим знаком. В силу непрерывности основных элементарных функций и теоремы 4 справедливы равенства:

$$\lim_{x\to a} \left[f(x)\right]^{\alpha} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\alpha}, \quad \lim_{x\to a} \ln f(x) = \ln \lim_{x\to a} f(x),$$

$$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}, \qquad \lim_{x\to a} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to a} f(x) \text{ и т. д.}$$

Предел последовательности

Последовательность есть функция, заданная на множестве натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Значения такой функции обозначают a_n (или b_n, x_n и т. д.) и называют *членами последовательности*, число n называют *номером* члена a_n. Последовательность обозначают $\{a_n\}$.

Предел последовательности. Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N члена последовательности, что для любого $n \geq N$ верно неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Таким образом предел последовательности есть частный случай предела функции. Однако, и обратно, предел функции может быть сведен к пределу последовательности. Приведем равносильное определение предела функции, опирающееся на понятие предела последовательности[1].

Второе определение предела функции. Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{a_n\}$, сходящейся к a, последовательность $\{f(a_n)\}$ сходится к A.

[1]Определение предела функции, опирающееся на понятие предела последовательности, в литературе носит название *определением Гейне*. Определение, данное на стр. 13, не опирающееся на определение предела последовательности, называется *определением Коши*.

Отметим, что существует связь между пределом функции $f(x)$ и соответствующим пределом последовательности $f(n)$. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, *то предел соответствующей последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$. Обратная теорема, вообще говоря, не имеет места.

Так как последовательность есть функция, заданная на множестве натуральных чисел, то все *методы вычисления пределов функций применяются и для вычисления пределов последовательностей.*

Примеры

Вычисление пределов на основе определения предела.

Этот метод применяются для доказательства элементарных пределов, которые в дальнейшем используются при решении более сложных задач.

Пример 1. Используя определение предела, доказать, что

$$\lim_{x\to 1}(3x-2) = 1.$$

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x-1| < \delta$ следовало бы неравенство

$$|f(x)-1| = |(3x-2)-1| < \varepsilon.$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$|3(x-1)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |x-1| < \varepsilon/3.$$

Отсюда видно, что если взять $\delta \le \varepsilon/3$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1| < \delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x)-1| < \varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{x\to 1}(3x-2) = 1.$$

Пример 2. Используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Решение. Пусть ε – любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое натуральное число N, что для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству $n > N$, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$$

Если $n > N$, то

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{N+1}<\frac{1}{N}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ достаточно найти N из условия $\frac{1}{N}\le\varepsilon$, т. е. $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $[\alpha]$ – целая часть числа α. Итак, для любого ε найдено такое $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, что из неравенства $n > N$ следует неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$, т. е. доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Пример 3. Доказать, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x=0$.

Решение. Для доказательства воспользуемся вторым определением предела функции, опирающимся на понятие предела последовательности. Возьмем последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=\frac{2}{\pi(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$. Эта последовательность при $n\to\infty$ стремится к нулю, а соответствующая последовательность значений функций

$$f(x_n)=\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}=(-1)^n$$

не имеет предела. Следовательно, данная функция не имеет предела.

Использование основных теорем и свойств пределов.

При решении следующих задач будут использоваться основные теоремы о пределах (9) – (16), а также свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций (а) – (е).

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}$.

Решение. Методом математической индукции доказывается, что для всех натуральных чисел n имеем $n < 2^n$. Пользуясь монотонностью показательной функции 2^x, отсюда получаем, что для $x > 0$ имеем

$$\frac{x}{2} < \left[\frac{x}{2}\right] + 1 < 2^{\left[\frac{x}{2}\right]+1} \le 2^{\frac{x}{2}+1},$$

где $[\alpha]$ – целая часть α. Следовательно, для $x > 0$ имеем

$$\frac{x^2}{4} < 2^{x+2} \quad \text{и} \quad 0 < \frac{x}{2^x} < \frac{16}{x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{16}{x} = 0,$$

то, применяя «теорему о двух милиционерах» (15), получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x} = 0.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Функция $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ ограничена

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1.$$

Функция $f(x) = x$ при $x \to 0$ является бесконечно малой:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

По свойству (а) бесконечно малых функций, произведение бесконечно малой функции $f(x) = x$ на ограниченную функцию $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой функцией, следовательно

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$

Решение. Применяя формулы (9) – (12) о пределе разности и произведения, находим предел знаменателя

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x-2) = (\lim_{x\to 1}x)(\lim_{x\to 1}x) - \lim_{x\to 1}x - \lim_{x\to 1}2 = -2.$$

Предел знаменателя не равен нулю, поэтому по формуле (13) для предела частного получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей.

При решении следующих задач, прежде чем воспользоваться основными теоремами, необходимо раскрыть неопределенность, т. е. проебразовать выражение так, что бы получить возможность его вычислить.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x) = 1-\sin\frac{\pi}{2} = 1-1 = 0,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0,$$

то мы имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности преобразуем выражение

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов дробно-рациональных функций.

Если дробно-рациональная функция $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеет неопределенность вида $0/0$ при $x\to a$, то для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель следует сократить на множитель $x-a$. Если дробно-рациональная функция $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеет неопределенность вида ∞/∞ при $x\to\infty$, то для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель следует сократить на множитель x.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Решение. Числитель и знаменатель при $x\to\infty$ являются бесконечно большими функциями, т.е. имеет место неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поэтому формула (13) о пределе частного неприменима. Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}},$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=1,\quad \lim_{x\to 2}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1,$$

то к полученной функции применим формулу (13). Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=1.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n – целые положительные числа).

Решение. При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю, поэтому мы имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности следует числитель и знаменатель разделить на $(x-1)$. Воспользуемся известной формулой

$$a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}).$$

Полагая здесь $a=x$, а $b=1$, в нашем случае получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}=\frac{\overbrace{1+\ldots+1}^{m\,\text{раз}}}{\underbrace{1+\ldots+1}_{n\,\text{раз}}}=\frac{m}{n}.$$

Раскрытие неопределенности в выражениях, содержащих иррациональности.

Одним из приемов раскрытия неопределенности в выражениях, содержащих иррациональность, заключается в перенесении иррациональности из числителя в знаменатель путем умножение числителя и знаменателя на множитель, сопряженный с числителем, или наоборот.

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ стремятся к нулю, следовательно мы имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для того, чтобы решить вопрос о пределе отношения, перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+1)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}=$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$.

Решение. Прибавим и отнимем в числителе дроби по 1 и затем разобъем предел на сумму двух сходящихся пределов (см. формулу 11) следующим образом

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1-\sqrt[3]{2x+1}+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}-\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}.$$

Отметим, что разбиение предела на несколько более простых законно лишь тогда, когда известно, что эти более простые пределы существуют и конечны. В противном случае нам пришлось бы искать другой способ решения.

Замена переменной при вычислении предела.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[5]{3x+5}-2}{x-9}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x\to 9$ стремятся к нулю, следовательно мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Применим метод замены переменной (см. формулу 16). С помощью замены переменной $y = \sqrt[5]{3x+5}$ мы можем привести выражение, стоящее под знаком предела, к рациональному виду. Числитель и знаменатель дроби примут вид

$$\sqrt[5]{3x+5} - 2 = y - 2, \quad x - 9 = \frac{1}{3}(y^5 - 32).$$

При $x \to 9$ переменная $y \to 2$, так как $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt[5]{3x+5} = 2$. После замены переменной и сокращения числителя и знаменателя на множитель $(y-2)$, неопределенность в выражении исчезнет, и мы сможем использовать теорему о пределе частного (см. формулу 13), получим

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[5]{3x+5} - 2}{x - 9} = \lim_{y\to 2} \frac{3(y-2)}{y^5 - 32} =$$
$$= \lim_{y\to 2} \frac{3(y-2)}{(y-2)(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16)} =$$
$$= \lim_{y\to 2} \frac{3}{y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16} = \frac{3}{\lim\limits_{y\to 2}(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16)} =$$
$$= \frac{3}{2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4} = \frac{3}{80}.$$

Использование непрерывности функции при вычислении пределов.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \left[\ln|x^2 - 7x + 6| - \ln(x^2 + 6x - 7)\right]$.

Решение. Преобразуем выражение и воспользуемся непрерывностью логарифма:

$$\lim_{x\to 1} \left[\ln|x^2 - 7x + 6| - \ln(x^2 + 6x - 7)\right] = \lim_{x\to 1} \ln\left|\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 6x - 7}\right| =$$
$$= \ln\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 6x - 7}\right| = \ln\lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x+7)}\right| =$$
$$= \ln\lim_{x\to 1}\left|\frac{x-6}{x+7}\right| = \ln\frac{5}{8}.$$

.

Вычисление пределов от степенно-показательной функции.

Рассмотрим, как находится предел от степенно показательной функции
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} \quad (f(x)>0).$$
Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]}.$$
Таким образом, нахождение предела от степенно-показательной функции можно свести к нахождению
$$\lim_{x\to a}\left[g(x)\cdot\ln f(x)\right].$$
Перечислим отдельные случаи:

если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=A^B$;

если $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\infty$;

если $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=0$.

Пример 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение. Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}^2(\pi x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\operatorname{ctg}^2(\pi x)\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right]}.$$
Так как
$$\lim_{x\to 1}\ln\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 1}\operatorname{ctg}^2(\pi x)=\infty,$$
то по свойству (e) бесконечно больших функций
$$\lim_{x\to 1}\left[\operatorname{ctg}^2(\pi x)\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right]=\infty.$$
Получаем
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}^2(\pi x)}=\infty.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Решение. Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}[x\ln x]}.$$

Необходимо найти где $\lim\limits_{x\to+0}[x\ln x]$. Положим $x = 2^{-y}$, тогда условие $x \to +0$ эквивалентно условию $y \to +\infty$. Пользуясь результатом примера (4), получаем, что

$$\lim_{x\to+0}[x\ln x] = \lim_{y\to+\infty} \frac{-y\ln 2}{2^y} = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to+0}[x\ln x]} = e^0 = 1.$$

Задачи

Задача 1. Используя определение предела функции, доказать равенства:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5) = 11;$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0;$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0 \ (a > 1);$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0;$

Задача 2. Используя определение предела последовательности, доказать равенства:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1} = 1;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n} = 0;$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!} = 0;$

Задача 3. Доказать следующие равенства:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n} = 0;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^n} = 0;$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n} = 0;$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0;$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1;$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0);$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0;$

Задача 4. Вычислить пределы ($a > 0$, $b > 0$):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x};$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x};$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2^x};$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}};$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^a}{b^x};$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^a x}{x^b};$

Задача 5. Вычислить пределы от дробно-рациональной функции:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$;

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$;

4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Задача 6. Вычислить пределы от выражений, содержащих иррациональности:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right]$;

10. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[\sqrt{x^2+2}-x\right]$;

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$;

12. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Задача 7. Вычислить пределы, используя замену переменных ($n, m, p, q \in \mathbb{N}$):

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{2x-1}-1}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{29+x}-2}{x-3}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{x-1}$ (ответ?);

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x^p}-1}{\sqrt[m]{x^q}-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt[6]{7x+15}-2}$;

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+xe^{-x}\sin x}-\sqrt{1-xe^{-x}\sin x}\right)e^x}{x\sin x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{4}-3\sin\frac{\pi x}{4}+2}{\sin^2\frac{\pi x}{4}-10\sin\frac{\pi x}{4}+9}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{n(1-\sqrt[n]{x})}-\dfrac{1}{m(1-\sqrt[m]{x})}\right]$;

Задача 8. Вычислить пределы от показательно-степенных функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+1}{x^2-x}\right)^{-x}$ (ответ 0);

2. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\pi x}$ (ответ 1);

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x}}$ (ответ?);

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{8}{x^2}}$ (ответ?);

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2\right)^{\lg x}$ (ответ?);

6. $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)^{x+\sin x}$ (ответ?);

Задача 9. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{tg} a}}{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin a}}$.

4. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} y}-\sqrt[3]{\operatorname{tg} a}}{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin a}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)^4$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{1-\dfrac{1}{x^4}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ (n).

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. (-1)

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$

Занятие 1. Первый замечательный предел

Следующий предел называется *первым замечательным пределом:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Отсюда следует, что для функции $f(x)$ такой, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1. \tag{19}$$

Именно в этом виде чаще всего применяется первый замечательный предел.

Примеры

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Решение. Аргумент синуса и знаменатель стремятся к нулю, но не равны друг другу. Чтобы исправить это, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}7\frac{\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7,$$

что и требовалось получить.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

Решение. Этот пример учит осторожности при применении первого замечательного предела. Для того, чтобы первый замечательный предел можно было применить, необходимо, чтобы и аргумент синуса, и знаменатель стремились к нулю. В данном примере они стремятся к бесконечности, поэтому первый замечательный предел не применяется. Множитель $-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$ ограничен, множитель $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \pi x}{\sin\sqrt{3}x}$.
Решение. Вначале произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin\sqrt{3}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin \pi x}{x}}{\dfrac{\sin\sqrt{3}x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}}{\sqrt{3}\dfrac{\sin\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}}{\dfrac{\sin\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x}}.$$

Как мы увидим ниже, пределы числителя и знаменателя существуют и не равны нулю, что даёт нам право далее записать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin\sqrt{3}x}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x}}.$$

Однако, согласно (19), пределы в числителе и знаменателе равны единице, благодаря чему мы получаем конечный результат

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin\sqrt{3}x}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Следующие примеры не нуждаются в словесных пояснениях:

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1,$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(2\dfrac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.
Решение. В данном пределе производится замена $\arcsin x = y$. При x стремящемся к нулю y тоже стремится к нулю, также $x = \sin y$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Задачи

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^5}{\sin^4 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$;
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$;
14. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$;
15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$;
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x}$;
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-4\sin x}{5x-7\sin x}$;
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\sin 5x\operatorname{tg} 7x}$;
20. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{\sin x}{\sin 6x}$;

21. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin(2x^2)}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{\operatorname{tg}^3(\pi x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$

29. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$

30. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$

31. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$

32. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin \pi x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1+x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$

35. $\lim\limits_{x\to 1} (1+e^x)^{\frac{\sin \pi x}{1-x}}$

36. $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\operatorname{ctg} \dfrac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$

37. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{\frac{x}{x+1}}$

38. $\lim\limits_{x\to 1} (1+e^x)^{\frac{\sin \pi x}{1-x}}$

Занятие 5. Второй замечательный предел

Следующий предел называется *вторым замечательным пределом:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{20}$$

Отсюда следует, что для функции $f(x)$ такой, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \tag{21}$$

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, и потому

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{22}$$

В силу последнего для функции $f(x)$ такой, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$,

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{1/f(x)} = e \tag{23}$$

Применяется второй замечательный предел для раскрытия неопределённостей типа 1^∞. При этом используется, что для функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих конечные пределы (причём $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$),

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Например, если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$,

$$\lim_{x\to a}(1+\varphi(x))^{1/\psi(x)} = \lim_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\dfrac{1}{\varphi(x)}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}}.$$

Пара следствий, вытекающих из второго замечательного предела, используются для раскрытия неопределённостей типа $\dfrac{0}{0}$.

Следствие 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Для доказательства этого следствия заменим переменные $e^x-1=y$. Тогда $x=\ln(y+1)$, y, также, как и x, стремится к нулю.

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(y+1)^{1/y}}=$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to 0}(y+1)^{1/y}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

Следствие 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha$$

Заменим $x=e^y$. Тогда $y=\ln x$, y стремится к нулю. После замены применим предыдущее следствие

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\alpha\dfrac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}}{\dfrac{e^y-1}{y}}=\frac{\alpha\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}}=\frac{\alpha\cdot 1}{1}=\alpha.$$

Примеры

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Решение. Проверим пределы основания и показателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^{-2}}{1-x^{-2}}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}=1.$$

$1^1=1$, и в этом пределе нет неопределённости типа 1^∞, как и какой-либо другой. Второй замечательный предел не применяется.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Проверим пределы основания и показателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x+1}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to\infty}x^2=\infty.$$

В этом пределе также нет неопределённости типа 1^∞, поэтому аналогично предыдущему случаю не используется второй замечательный предел. По определению предела, так как основание степени стремится к $\frac{1}{2}$, существует такой X, что при $x > X$

$$0 < \frac{x-2}{2x+1} < \frac{3}{4}, \Longrightarrow \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^{x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2},$$

а так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2} = 0, \text{ то } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^{x^2} = 0$$

по "теореме о двух милиционерах" (см. 15).

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Проверим пределы основания и показателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^2+1} = 1, \ \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Имеется неопределённость типа 1^∞, поэтому применим второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2}{x^2+1}-1\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x^2+1}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-3}\cdot\frac{-3x^2}{x^2+1}} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{1+x^{-2}}} = e^{-3}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение. Проверим пределы основания и показателя:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right) = 1, \ \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \infty.$$

Имеется неопределённость типа 1^∞, поэтому применим второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}x^2\operatorname{ctg}^2 x} = \left(\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}x^2\operatorname{ctg}^2 x} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}x^2\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Для того, чтобы вычислить предел в показателе, воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}x^2\operatorname{ctg}^2 x = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cos^2 x = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^{-2}\lim_{x\to 0}\cos^2 x = 1^{-2}\cdot 1^2 = 1.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{q^x-q^p}{x-p}$.

Решение. Преобразуем предел следующим образом:

$$\lim_{x\to p}\frac{q^x-q^p}{x-p} = q^p\lim_{x\to p}\frac{q^{x-p}-1}{x-p} = q^p\lim_{x\to p}\frac{e^{(x-p)\ln q}-1}{x-p} = q^p\ln q\lim_{x\to p}\frac{e^{(x-p)\ln q}-1}{(x-p)\ln q}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to p}(x-p)\ln q = 0$. Если заменить $(x-p)\ln q = y$, получится

$$\lim_{x\to p}\frac{q^x-q^p}{x-p} = q^p\ln q\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = q^p\ln q.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{x^s-p^s}{x^t-p^t}$.

Решение. Преобразуем предел следующим образом:

$$\lim_{x\to p}\frac{x^s-p^s}{x^t-p^t} = \frac{p^s}{p^t}\lim_{x\to p}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^s-1}{\left(\frac{x}{p}\right)^t-1} = \frac{p^s}{p^t}\lim_{x\to p}\frac{\dfrac{\left(\frac{x}{p}\right)^s-1}{\frac{x}{p}-1}}{\dfrac{\left(\frac{x}{p}\right)^t-1}{\frac{x}{p}-1}} = \frac{p^s}{p^t}\frac{\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\left(\frac{x}{p}\right)^s-1}{\frac{x}{p}-1}}{\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\left(\frac{x}{p}\right)^t-1}{\frac{x}{p}-1}}.$$

По второму следствию второго замечательного предела

$$\lim_{x\to p}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^s-1}{\frac{x}{p}-1} = s,\ \lim_{x\to p}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^t-1}{\frac{x}{p}-1} = t.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to p}\frac{x^s-p^s}{x^t-p^t}=\frac{p^s}{p^t}\frac{s}{t}.$$

Задачи

Вычислить, применяя второй замечательный предел:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{x-1}\right)^{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{4x^2-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{3}{x^2}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$
8. $n\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$
12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{1-\sqrt{x^2+1}}$
13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(e^{\pi x}-1\right)}{3\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$
14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$
15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$
16. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{1/x^2}$
17. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$
18. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$
19. $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\sin^{-2}2x}$
20. $\lim\limits_{x\to1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$
21. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$

22. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

23. $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi x}{2e}}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln^2 ex\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$

Вычислить, применяя первый и второй замечательный пределы:

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$;

26. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$;

27. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$;

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln\left(x^3-6x-8\right)}$;

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$;

30. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\left(x^3-\pi^3\right)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$;

31. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$;

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$;

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$;

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$;

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg}x}$;

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$;

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}x^2}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$;

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\left(\cos 5x\right)}$;

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x}$;

41. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$;

42. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\sin^{-2}3x}$;

43. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos 3x\right)^{\ln^{-1}\left(1+x^2\right)}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$;

45. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x\cdot\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\cos 5x}\right)^{1/x^3}$;

46. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\cos x\right)^{\operatorname{tg}^{-2}\mathrm{x}}$;

47. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\sin x\right)^{6\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x}$;

48. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$

Занятие 6. Сравнение бесконечно малых

Сравнение бесконечно малых. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*, если

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0 \;\; (C \text{ – число}).$$

Если $C = 0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с $\beta(x)$, при этом пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$. Эту запись читают так «$\alpha(x)$ есть o малое от $\beta(x)$».

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Эквивалентность обозначается символом $\sim$, т. е. пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка p* по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$, если

$$\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^p} = C \neq 0 \;\; (C \text{ – число}).$$

Теоремы о эквивалентных бесконечно малых:

I. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить им эквивалентными.

II. Для того чтобы две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них, т. е.

$$\beta(x) \sim \alpha(x) + o(\alpha(x)).$$

Вычисление пределов функций во многих случаях сильно упрощается, если использовать эквивалентность функций и правила обращения с символом $o(\alpha)$. Для применения теорем на практике полезно знать пары эквивалентных бесконечно малых функций. Например, из первого замечательного предела следует, что

$\sin x \sim x$. Приведем несколько наиболее часто используемых эквивалентностей.

Основные эквивалентности:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$,
2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$,
3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$,
4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$,
5. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$,
6. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\,\ln a$,
7. $\ln\left[1 + \alpha(x)\right] \sim \alpha(x)$,
8. $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}\,\alpha^2(x)$,
9. $\left[1 + \alpha(x)\right]^c - 1 \sim c \cdot \alpha(x)$,
10. $\log_a\left[1 + \alpha(x)\right] \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$.

Примеры

Пример 1. Доказать, что если $x \to 0$, то функции $1 - \cos x$ и $\dfrac{1}{2}\,x^2$ эквивалентны, т. е. $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}\,x^2$.

Решение. Если мы докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$, то тем самым будет доказано, что $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}\,x^2$ при $x \to 0$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2}\frac{\sin(x/2)}{x/2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что $1 - \cos x$ – бесконечно малая второго порядка по сравнению с x при $x \to 0$.

Пример 2. Считая, что x – бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции $\ln(1 + x^2 + x^3)$.

Решение. Будем считать, что искомый порядок малости равен k и определим k так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x^2 + x^3)}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2 + x^3)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2 + x^3)}{x^2 + x^3}\frac{x^2 + x^3}{x^k} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2 + x^3)}{x^2 + x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3}{x^k}. \tag{24}$$

Первый предел равен 1 (подстановка: $x^2+x^3=z$ приводит к хорошо известному пределу: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=1$). Рассмотрим теперь второй предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}x^{2-k}(1+x).$$

Последний предел имеет конечное значение только в том случае, когда $2-k=0$, т. е. $k=2$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=1$. Если $k<2$, то этот предел равен нулю, а если $k>2$, то при $x\to 0$ величина x^{2-k} – бесконечно большая.

Таким образом, если $k=2$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=1\cdot 1=1\neq 0$. Итак, при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+x^2+x^3)$ имеет второй порядок малости относительно бесконечно малой x.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$.

Решение. Мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем числитель дроби:

$$\operatorname{tg}x-\sin x=\operatorname{tg}x(1-\cos x)=2\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}x.$$

Так как при $x\to 0$

$$\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2},\quad \operatorname{tg}x\sim x,\quad \ln(1+x^3)\sim x^3,$$

следовательно

$$\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}x\sim\left(\frac{x}{2}\right)^2x.$$

Воспользуемся теоремой I и заменим предел отношения двух бесконечно малых функций на отношение им эквивалентных. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\ln(1+x^3)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}x}{\ln(1+x^3)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Замечание: одна из самых распространенных ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, *не являющейся множителем всего этого выражения*, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы). Например, если в числителе предыдущего примера заменить функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ на эквивалентные бесконечно малые ($\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$), то получим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\ln(1+x^3)} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x}{\ln(1+x^3)} = 0$, что не совпадает с ранее полученным верным результатом.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x^2}{\sin x}$.

Решение. Здесь бесконечно малая x^2 имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой $e^x - 1 \sim x$, поэтому ей можно пренебречь. Учитывая, что $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, будем иметь

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty} x \left(\ln \left(1 + \dfrac{x}{2} \right) - \ln \dfrac{x}{2} \right)$.

Решение. Мы имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Поскольку всякую дробь можно представить в виде произведения двух функций, то и при вычислении пределов произведений бесконечно малые можно заменять им эквивалентными (предостерегаем от таких замен при вычислении пределов сумм и разностей). Получаем:

$$\lim_{x\to +\infty} x \left(\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right) = \lim_{x\to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} x \left(\frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x} \right) \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{o(1/x)}{1/x} \right) = 2..$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\operatorname{arctg}^6 \sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt[3]{1 + 3x^2} - 1}$.

Решение. Так как при $x \to 0$

$$2^{\operatorname{arctg}^6 \sqrt[3]{x}} - 1 \sim \operatorname{arctg}^6 \sqrt[3]{x} \cdot \ln 2 \sim \left(\sqrt[3]{x} \right)^6 \cdot \ln 2 = x^2 \cdot \ln 2 \quad \text{и}$$
$$\sqrt[3]{1 + 3x^2} - 1 = (1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2,$$

то

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\operatorname{arctg}^6 \sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt[3]{1 + 3x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \ln 2}{x^2} = \ln 2.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.
Решение. Здесь неопределенность вида 1^{∞}. Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right]}.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to a}\left[\ln\left(2-\tfrac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\tfrac{\pi x}{2a}\right]=\lim_{x\to a}\ln\left[1+\left(1-\tfrac{x}{a}\right)\right]\operatorname{ctg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi x}{2a}\right)=$$
$$=\lim_{x\to a}\ln\left[1+\left(1-\tfrac{x}{a}\right)\right]\frac{\cos\frac{\pi(a-x)}{2a}}{\sin\frac{\pi(a-x)}{2a}}.$$

При $x\to a$ имеем:

$$\ln\left[1+\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]\sim 1-\frac{x}{a},\quad \sin\frac{\pi(a-x)}{2a}\sim\frac{\pi(a-x)}{2a},$$
$$\cos\frac{\pi(a-x)}{2a}=1+o(a-x).$$

Получаем

$$\lim_{x\to a}\ln\left[1+\left(1-\tfrac{x}{a}\right)\right]\frac{\cos\frac{\pi(a-x)}{2a}}{\sin\frac{\pi(a-x)}{2a}}=2a\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{x}{a}}{\pi(a-x)}=\frac{2}{\pi}.$$

Запишем ответ: $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=e^{\frac{2}{\pi}}$

Задачи

Доказать эквивалентность бесконечно малых функций при $x \to 0$:

1. $\dfrac{x}{2}$ и $\sqrt{1+x}-1$.
2. $e^{2x}-x$ и $2x-\sin x$.
3. $e^x-\cos x$ и x.
4. $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ и x.

Определить при $x \to 0$ порядки бесконечно малых функций относительно бесконечно малой функции x:

5. $x\sin 3x$
6. $x\ln(1+2x)$
7. $\left(\sqrt[5]{1+x}-1\right)\cos \pi x$
8. $\operatorname{tg} x - \sin x$
9. $(2^x-1)\ln(1+\sin 5x)$
10. $\dfrac{x^5}{x^7+1}\arcsin x$

Вычислить пределы:

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$.
19. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.
20. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.
21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x^4}}{\ln(1+2x-x^2)}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-x^5}{3x-x^4}$.
24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{4x+8}$.
25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.
26. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$.
27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^4 x}{3x^2+5x^4}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{nx}$.

32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-e}{x-1}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-2x}}{\sin x}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$.

36. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+3^x}{1+2^x}$.

37. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos\alpha x)}{\ln(\cos\beta x)}$.

39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\ln(a+x)-\ln x\right)\right]$.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right]}{\sin bx}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.

42. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$.

43. $\lim\limits_{x\to 2}\left[1-(x-2)\right]^{-\frac{1}{x-2}}$.

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

45. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

48. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

49. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Литература

[1] Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу.* В 2 кн. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. попобие для университетов, пед. вузов. / Под. ред. В. А. Садовничего – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк. 2000. – 725 с.: ил.

[2] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*: учебное пособие / Москва: АСТ: Астрель, 2005. – 558 с.

[3] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. *Сборник задач по математическому анализу.* Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.

Оглавление

Альпин Тимур Юрьевич, Егоров Анатолий Иванович,
Кашаргин Павел Евгеньевич,
Сушков Сергей Владимирович

Практические занятия по математическому анализу

Часть I: Комплексные числа. Предел функции