МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ПРИВОЛЖСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНО МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

КАЗАНЬ 2012

Печатается по решению учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
УДК 51 (07)

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ. Учебно-методическое пособие/ Зарипов Ф.Ш. - КАЗАНЬ: КФУ, 2011. 67с.

Пособие предназначено для студентов татарских групп математического отделения факультета. Содержит лекции и методические рекомендации к решению типовых задач по дисциплине проективная геометрия. В пособии сделана подборка вариантов для самостоятельного решения.

Автор: **Ф.Ш. Зарипов, доцент КФУ;**

***Научный редактор*: Л.И. Галиева, доцент.**

Рецензент: **Л.Л. Салехова профессор КФУ.**

ЭЧТЂЛЕК

Проектив пространствоны аксиоматик рҺвештҺ билгелҺҺ

V – n+1 ҺлчҺмле $\Re$ кыры ҺстеннҺн бирелгҺн векторча пространство. V ў= $V \setminus \{\vec{0}\}$ - V -ң $\vec{0}$ гҺ тигез булмаган барлык векторлары кҺплеге.

БилгелҺмҺ: V векторча пространствосы тудырган ***n*** **ҺлчҺмле проектив пространство *P*** дип буш булмаган P кҺплеге атала, ҺгҺр тҺбҺндҺге шартларны канҺгатьлҺндергҺн $f : V$ ў® P чагылдыруы бирелгҺн булса:

1) f – сюръектив;
2) $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ « $\vec{x} = l\vec{y}, l$ №0, "$\vec{x}, \vec{y}$ OV ў l OR.

Бу очракта P-ң элементлары проектив пространствоның нокталары дип атала цҺм A, B, C дип билгелҺнҺ.

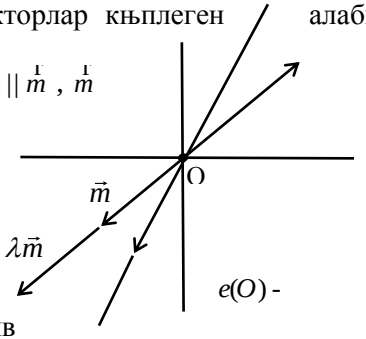
ӘгҺр $f(\vec{x}) = X$ OP булса, бу очракта $\vec{x}$ OV ў, X ноктасы $\vec{x}$ векторы белҺн тудырылган дип атала.

ӘгҺр векторча пространство бер ҺлчҺмле булса, бу очракта f чагылдыруы бердҺнбер ноктаны тудыра (бу билгеләмәдәге 2 шарттан килеп чыга).

Проектив пространство модельлҺре

1 нче модель.

n=1 дип цҺм V_2 урынына $P = e(O)$ яссылыктагы турылар бҺйлҺме карыйк. V_2ў нең моделе итеп шул яссылыкта ятучы О ноктасыннан чыккан барлык векторлар кҺплеген алабыз.



1) "$\vec{m}$ OV_2, $f(\vec{m}) = m$ O $e(O)$, $m \parallel \vec{m}$, $\vec{m}$ векторы m турысының юнҺлдерҺче векторы.
2) $f(\vec{m}) = f(l\vec{m})$.

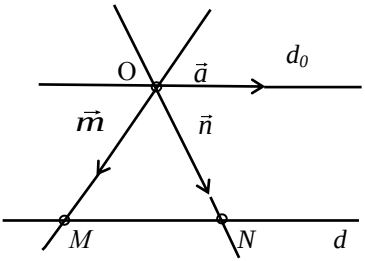
Барлык шартлар да ҺтҺлҺ $\Rightarrow$ $e(O)$ - бер ҺлчҺмле проектив пространствоның моделе булып тора. Бер ҺлчҺмле проектив пространствоны **проектив туры** дип атыйлар.

2 нче модель.

Яссылыкта турылар бђйлђме цђм d турысын алыйк $(O \Pi d)$.

V_2 - О ноктасыннан чыккан барлык векторлар књплеге.

$f(\vec{m}) = M \text{ O} d, M = m \text{ I } d, \vec{m} \parallel m, m \text{ O} e(O)$. Коллинеар вектор-ларга бер њк нокта туры килђ. Лђкин $d_0 \parallel d, \vec{a} \parallel d_0$ булса, $f(\vec{a})$ билгелђнмђгђн. Димђк, беренче аксиома њтђлми. Бу каршылыктан чыгу љчен $f(\vec{a}) = M_\Gamma$ - d турысының **чиксезлектђге** яки **њзбулмаган ноктасы** дип аталган нокта кертђбез.



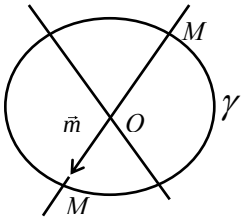
$\bar{d} = d \text{ U} M_\Gamma$ - **киђйтелгђн туры** яки **проектив туры** дип атала.

$f : V_2$ў® $\bar{d}$. Бу очракта ике аксиома да њтђлђ. Димђк, киђйтелгђн туры берњлчђмле пространствоның проектив моделе булып яки проектив туры булып тора.

Параллель турыларның њз булмаган нокталары тђңгђл килђ.

Цђр турыга бердђнбер њз булмаган нокта љстђлђ.

3 нче модель.



d турысы урынына икенче тђртиптђге g кђкресе алып, алдагыча фикер йљртик.

Диаметраль нокталарны тиңдђшлђш-терсђк, g - берњлчђмле проектив прос-транство булып тора.

Проектив координаталар

V_{n+1} - $n+1$ њлчђмле векторча пространство цђм анда ике $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{g}_i\}; (i = \overline{0,n})$ базис карыйк.

Билгелђмђ. V_{n+1} векторча пространствосының ике $\{\vec{e}_i\}$ цђм $\{\vec{g}_i\}$ базисы гомотетик дип атала, ђгђр $\$l \text{ O B} \mid \vec{e}_i = l\,\vec{g}_i$, $(i = \overline{0,n})$ њтђлсђ.

Гомотетия мљнћсћбћте векторча пространствоның барлык базислары књплегендђ эквивалентлык мљнћсћбћте булып тора, чљнки гомотетия њзара коллинеар булган ике векторлар књплеген бђйлђп тора.

$f: V_{n+1} \to P$ чагылдыруында V_{n+1} векторча пространствосының цћрбер $\{\vec{a}_i\}$ базисы *P(V)* проектив прстранствосында $A_0, A_1, ..., A_{n+1}$ $(n + 1)$ нокта тудыра, ул вакытта њзара гомотетик базалар бер њк нокталарны тудыра. Икенче яктан цћрбер базис бары бер генђ тђртиплђштерелгђн нокталар системасын тудыра.

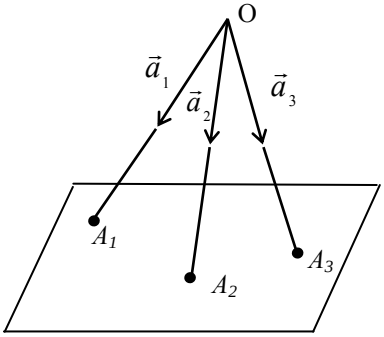
$P(V_{n+1})$ - проектив пространство булсын.

$f: V_{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \to P$

$\{\vec{e}_i\}, i = \overline{0,n}$ - V_{n+1} дђге ирекле базис булсын.

$f(\vec{e}_i) = A_i \in P$.

Лђкин $\{A_i\}$ нокталарын гына проектив репер дип атап булмый, чљнки бу нокталардан гына чыгып $\{\vec{e}_i\}$ базисын гомотетик булу тљгђллеге белђн табып булмый. Шуңа књрђ тагын бер нокта љстилђр. Гадђттђ анны $f(\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + ... + \vec{e}_n) = E$ рђвешендђ алалар. E – **реперның берђмлекле ноктасы** дип атала, ђ $\{A_i\}$ нокталары **реперның тњбђлђре** дип аталалар. **Проектив репер** дип тђртиплђш-терелгђн $R = \{A_0, A_1, ..., A_n, E\}$ ноктларын атыйлар.



Мђсћлђн, ђгђр A_{n+1} – аффинча пространствода P – n-њлчђмле аффинча яссылык булса, проектив репер дип тђртиплђштерелгђн n+2 нокта атала, ђгђр аның телђсђ нинди n+1 ноктасы n њлчђмле яссылыкта ятмаса.

Songы шартны канђгатљндергђн нокталар **гомуми торышлы нокталар** дип атала.

Димәк, $OA_i = \vec{e}_i$ векторлары A_{n+1} дә базис тудыралар. $O \in P, O \in A_{n+1}$.

Теорема: *Әгәр A_i, E P(V) проектив пространствосының тәртипләштерелгән үәм гомуми торышлы n+2 штук нокталары булсалар,*

$$\begin{cases} p(\vec{a}_a) = A_a \\ p(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n+1}) = E, \\ a = \overline{1, n+1}. \end{cases} \quad (1)$$

шартын канәгатьләндерә торган бердәнбер $R = R(\vec{a}_a)$ проектив реперын табып була.

Билгеләмә. Бер үк вакытта нульгә тигез булмаган $\vec{m}(x^0, x^1, \ldots x^n)$ векторының координаталары $M = f(\vec{m}) \in P(V)$ ноктасының проектив координаталары дип атала.

Ул вакытта аффинча геометриядә кебек үк язабыз:

$M(x^0, x^1, \ldots, x^n)$.

V_{n+1} векторча пространствосында $\{\vec{a}_i\}$ базисы белән берәүттән, аңа гомотетик булган ($\vec{b}_i = l\,\vec{a}_i$, $l \in B \setminus \{0\}$, $i = \overline{0, n}$) булырлык $\{\vec{b}_i\}$ базисын карыйк.

$\vec{m}$ векторын шушы базисларның үәрберсендә таркатыйк:

$$\vec{m} = x^i a_i; \quad \vec{m} = y^i b_i \in$$
$$\vec{m} = y^i l\,\vec{a}_i \in$$
$$x^i = l\,y^i; (i = \overline{0, n}).$$

Моннан түбәндәге килеп чыга:

$M \in P(V)$ ноктасының проектив координаталары бердәнбер итеп билгеләнмәгән, алар уртак нульгә тигез булмаган санга тапкырлау тәгәллеге белән билгеләнгән:

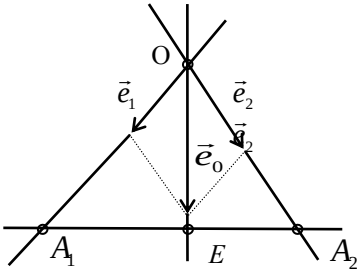
$M(x^i) = M(l\,x^i), l \neq 0.$

Проектив туры моделе

E_2 дә $\bar{d}$ киңәйтелгән турысы карыйк. Бу очракта без V_2 векторча пространствосын О ноктасыннан чыккан барлык векторлар кәплеге белән тиңдәшләштерәбез.

$\bar{d}$ турысында $R(A_1, A_2, E)$ реперын карыйк.

Бер О ноктасы алып, $(O \Pi \bar{d})$, V_2 дә базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ тәзик. Бу базис әчен



$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = A_1 \\ f(\vec{e}_2) = A_2 \\ f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = E \end{cases} \qquad (2)$$

әтәләргә тиеш. (2) әтәлсә $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ базисы R реперы белән яраклаштырылган дип атала.

Бу базисны тәзә әчен (OE) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алып, (2) шарты үтәләрлек итеп, аны ике векторга таркатабыз[1]:

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

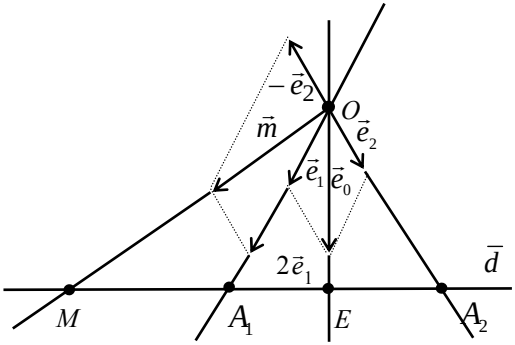
Алда әйткәнчә, $M(x^1, x^2)$ ноктасының координаталары дип бу ноктаны тудыручы $(f(\vec{m}) = M)$ $\vec{m}$ векторының R реперы белән яраклаштырылган координаталары атала. $\vec{m} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$.

Берничә мисал карап китик.

Мисал1: $\bar{d}$ киңәйтелгән турсындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында М(2, –1) ноктасын тәзергә.

---

[1] Алга таба $\vec{e}_0$ векторын $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ векторларына (1) шартын канәгатьләндерерлек итеп таркату $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ векторларына таркату дип кыскача әзылачак.



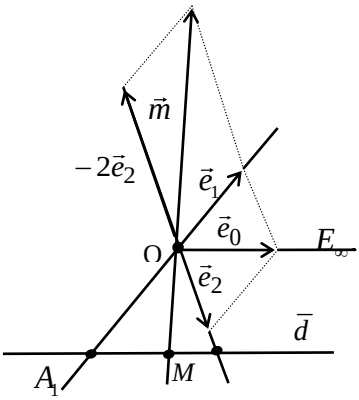
Чишү:

1) Ирекле бер $O \Pi \bar{d}$ ноктасы алыйк цһм $(OA_1),(OA_2),(OE)$ турыларын ньткһрик.
2) (OE) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алыйк цһм аны ике $\vec{e}_1$ цһм $\vec{e}_2$ векторына (1) шарты ньтһлһ торган итеп таркатыйк.
3) $\vec{m} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ векторын тлзик. $\vec{m}$ векторы белһн тудырылган туры белһн $\bar{d}$ турысының кисешнь ноктасы без эзлһгһн М ноктасы була.

Мисал2: $\bar{d}$ киңһйтелгһн турсындагы $R = \{A_1, A_2, E_\Gamma\}$ реперында М(1, –2) ноктасын тлзергһ.

Чишү:

1) Ирекле бер $O \Pi \bar{d}$ ноктасы алыйк цһм $(OA_1),(OA_2),(OE_\Gamma)$ турыларын ньткһрик.



2) (OE_∞) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алыйк цҺм аны ике $\vec{e}_1$ цҺм $\vec{e}_2$ векторына (1) шарты ньтҺлҺ торган итеп таркатыйк.

3) $\vec{m} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ векторын тлзик.

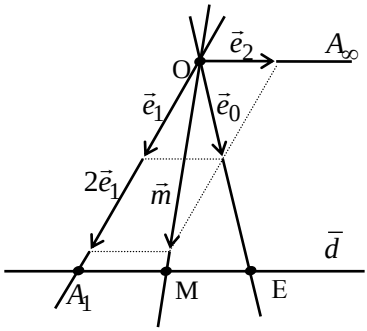
4) $\vec{m}$ векторы белҺн тудырылган туры белҺн $\bar{d}$ турысыныӊ кисешньӊ ноктасы без эзлҺгҺн М ноктасы була.

Мисал3: $\bar{d}$ киӊйителгҺн турсындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $M(2, 1)$ ноктасын тлзергҺ.

Чишү:

1) Ирекле бер $O \Pi \bar{d}$ ноктасы алыйк цҺм $(OA_1), (OA_г), (OE)$ турыларын ньткҺрик.

2) (OE) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алыйк цҺм аны ике $\vec{e}_1$ цҺм $\vec{e}_2$ векторына таркатыйк.



3) $\vec{m} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ векторын тлзик.

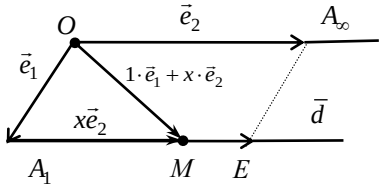
4) $\vec{m}$ векторы белҺн тудырылган туры белҺн $\bar{d}$ турысыныӊ кисешньӊ ноктасы без эзлҺгҺн M ноктасы була.

$R = \{A_1, A_г, E\}$ очрагында аффинча бериш координаталар дип аталган координаталар да кертҺ алабыз.

$R_{афф.} = \{A_1, \overrightarrow{A_1E}\}$- аффинча репер кертҺбез.

Рҗсемнҗн кңренгҗнчҗ, $M(x^1, x^2)$ булса цҗм базис вектор итеп $\vec{e} = \overrightarrow{A_1E}$ дип алсак: $M=M(x)$. (4)

$\overrightarrow{A_1M} = x\vec{e}_2$



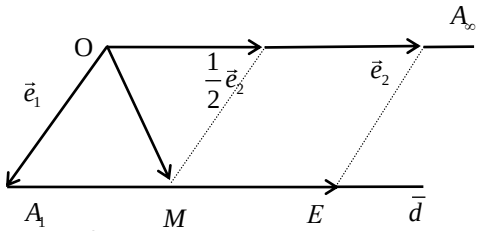
Рәсемнән күренгәнчә, $\bar{d}$ турысын-дагы нокталар икенче координа-талары белән генә аерылачаклар. Ноктаның координаталары нольгә тигез булмаган санга тапкырлау төгәллеге белән бирелгәнгә:

$$x = \frac{x^2}{x^1}$$

Лҗкин безнең x саны M ноктасының $R_{афф}$ реперындагы коорди-натасы булып тора: $M(x)$.

Димҗк, без бу R цҗм $R_{афф}$ реперларын ңзара бҗйлҗдек. Аффинча координаталар системасы киңҗйтелгҗн турыдагы реперның бер тңбҗсе ңзбулмаган нокта булганда килеп чыга.

Соңгы мисалны аффинча координаталар системасы кертеп чишик.



Моның өчен

1) Аффинча репер кертик

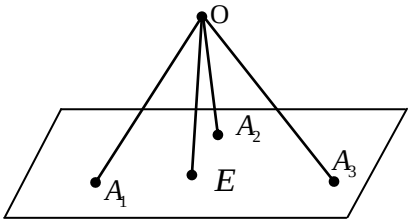
$R_{афф} = \{A_1, \overrightarrow{A_1E}\}$

$\vec{e} = \overrightarrow{A_1E}$

2) $x = \frac{x^2}{x^1} = \frac{1}{2}$. $M(\frac{1}{2})$ ноктасын төзң өчен $\overrightarrow{A_1M} = x\vec{e}$ векторын төзик.

3) Бу векторның очы $\bar{d}$ да ята цҗм ул без эзлҗгҗн М ноктасы була.

Киңҗйтелгҗн яссылык моделе



E_3 тҗ $\bar{P}$ киңҗйтелгҗн яссылыгы карыйк. Бу очракта без V_3 векторча рострвнствосын О ноктасыннан чыккан барлык векторлар кңплеге белҗн тиңдҗшлҗштерҗбез.

V_3 тҗ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базисы алабыз.

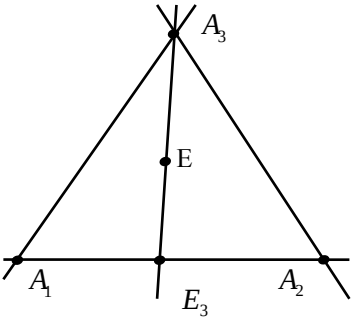
Нҗкъ алдагыча, $p(\vec{m}) = M$.

$$\vec{m} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$$

$$M = M(x^1, x^2, x^3).$$

$$p(\vec{e}_a) = A_a, a = 1, 2, 3.$$

Әгҗр дҗфтҗр битен киңҗйтелгҗн яссылык итеп карасак тңбҗндҗге рҗсем килеп чыга.



Шушы киңҗйтелгҗн яссылыкта М ноктасын төзң өчен

$$R_1 = \{A_2, A_3, E_1\}$$

$$R_2 = \{A_1, A_3, E_2\}$$

$$R_3 = \{A_1, A_2, E_3\}$$

реперларының телҗсҗ кайсы икесендҗ тиңдҗшле рҗвештҗ

$$M_1(x^2, x^3), M_2(x^1, x^3), M_3(x^1, x^2)$$

нокталарының координаталарын табып, М ноктасын тңбҗндҗгечҗ төзеп була:

$$\begin{cases} M = (M_1A_1) \text{ I } (M_2A_2) \\ M = (M_2A_2) \text{ I } (M_3A_3) \\ M = (M_1A_1) \text{ I } (M_3A_3) \end{cases}, \text{ җ } \begin{cases} E_1 = (A_2A_3) \text{ I } (A_1E) \\ E_2 = (A_1A_3) \text{ I } (A_2E) \\ E_3 = (A_1A_2) \text{ I } (A_3E) \end{cases}$$

Димҗк, М ноктасын төзң өчен бу ноктаның ике проекциясен төзң җитҗ.

Берничҗ мисал карап китик.

Мисал1. Киңҗйтелгҗн $\bar{p}$ яссылыгында бирелгҗн $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперында М(3, -2, 1) ноктасын төзергҗ.

1) E_3 ноктасын төзибез: $E_3 = (A_1A_2) \text{ I } (A_3E)$

2) $R_3(A_1, A_2, E_3)$ реперында $M_3(3, -2)$ ноктасын төзибез:

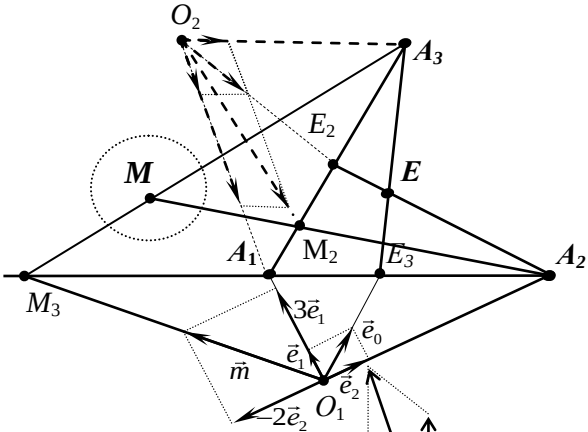
3) Аның өчен ирекле $O_1 \Pi (A_1A_2)$ алабыз цҗм (O_1A_1), $(O_1A_2), (O_1E)$ турылары ңткҗрҗбез. (OE_3) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алабыз цҗм аны ике $\vec{e}_1$ цҗм $\vec{e}_2$ векторына таркатабыз.

$\vec{m} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ векторын тљзибез. $\vec{m}$ векторы белђн тудырылган туры белђн (A_1A_2) турысының кисешњ ноктасы без эзлђгђн M_3 ноктасы була.

4) E_2 ноктасын төзибез: $E_2 = (A_1A_3)\,\mathrm{I}\,(A_2E)$

5) $R_2(A_1, A_3, E_2)$ реперында $M_2(3,1)$ ноктасын аналогик рђвештђ төзибез.

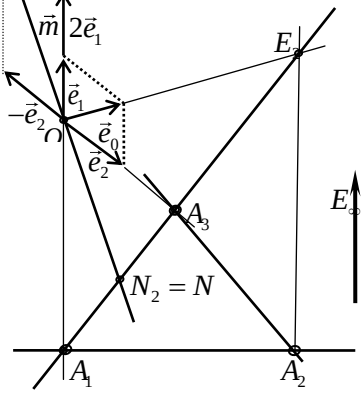
6) $M = (M_2A_2)\,\mathrm{I}\,(M_3A_3)$ табабыз.



Мисал2. Киңйтелгђн $\bar{p}$ яссылыгында бирелгђн

$R = \{A_1, A_2, A_3, E_Г\}$

реперында $N(2,0,-1)$ ноктасын төзергђ.



Чишү:

1) E_2 ноктасын төзибез:

$E_2 = (A_1A_3)\,\mathrm{I}\,(A_2E_Г)$

2) $R_2(A_1, A_3, E_2)$ реперында

$N_2(2, -1)$ ноктасын төзибез.

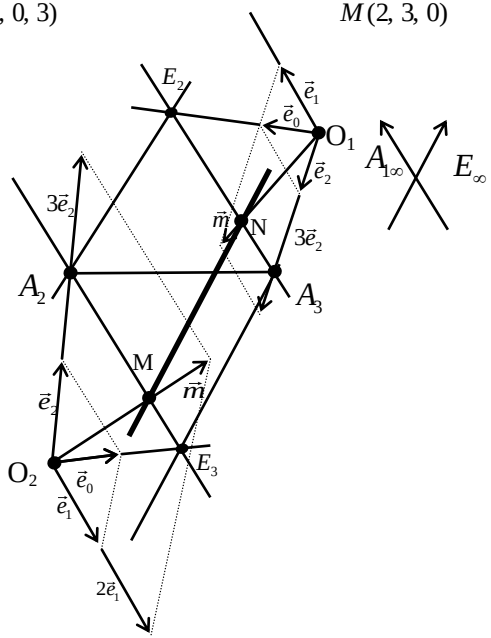
3) $N_2 = N$ (чөнки икенче коор-дината нульгђ тигез).

Мисал3: Киңйтелгђн $\bar{p}$ яссылыгында бирелгђн $R = \{A_{1Г}, A_2, A_3, E\}$ реперында $m(3, -2, -1)$ турысын төзергђ.

Турының тигезлҗмҗсеннҗн чыгып аның ике M цҗм N нокталарын табыйк.

1) $\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 - x^3 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$ $(A_{1\Gamma}\, A_3)\ \mathrm{I}\ m$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 - x^3 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$ $(A_{1\Gamma}\, A_2)\ \mathrm{I}\ m$

$N(1, 0, 3)$ $\qquad$ $M(2, 3, 0)$



$R_2 = (A_{1\Gamma}, A_3, E_2)$ реперында $N = N_2(1, 3)_{R_2}$,

$R_3 = (A_{1\Gamma}, A_2, E_3)$ реперында $M = M_3(2, 3)_{R_3}$.

2) $(A_{1\Gamma}\, A_3)$ турысы сызабыз цҗм анда

$E_2 = (A_{1\Gamma}\, A_3)\ \mathrm{I}\ (A_2 E)$ төзибез.

3) $R_2(A_{1\Gamma}, A_3, E_2)$ реперында $N = N_2(1, 3)$ ноктасын төзибез.

4) $(A_{1\Gamma}\, A_2)$ турысы сызабыз цҗм анда

$E_3 = (A_{1\Gamma}\, A_2)\ \mathrm{I}\ (A_3 E_\Gamma)$ төзибез.

5) $R_3(A_{1\Gamma}, A_2, E_3)$ реперында $M = M_2(2, 3)$ ноктасын төзибез.

6) (MN) турысы без эзлҗгҗн m турысы була.

Проектив яссылыкта проектив туры тигезлѣмѣсе

Проектив $\overline{\Pi}$ яссылыгын карыйк. R реперы бирелсен:

$$R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$$

Шушы реперда m турысын карыйк. Бу турыны билгелѣнь өчен аның ике ноктасын билгелѣнь житѣ.

$$M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3) \in m,$$

$$M_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3) \in m.$$

Бу турыны тудыручы ике вектор табып була.

$$f(\vec{m}_1) = M_1, f(\vec{m}_2) = M_2$$

Проектив R реперы белѣн яраклаштырылган $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базисында

$$\begin{aligned} \vec{m}_1 &= \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}, \\ \vec{m}_2 &= \{x_2^1, x_2^2, x_2^3\} \end{aligned} \text{ була.}$$

Хѣзер шул m турысында ятучы ирекле М ноктасын карасак $M(x^1, x^2, x^3) \in m$, аны тудыручы $\vec{m}$ векторы бар

$$\vec{m} = \{x^1, x^2, x^3\}$$

$M \in m$ « $\vec{m}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$ векторлары ньзара компланар була.

Векторлар компланар була, ѣгѣр аларның координаталарыннан төзелгѣн билгелѣгеч нульгѣ тигез булса.

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Димѣк, бу m проектив турысының тигезлѣмѣсе була. Бу билгелѣгчне беренче юл элементлары буенча таркатабыз

$$x^1 a_1 + x^2 a_2 + x^3 a_3 = 0 \qquad (6)$$

Проектив туры тигезлѣмѣсе сызыкча бериш тигезлѣмѣ булып тора. Цѣм киресенчѣ, ѣгѣр проектив R реперында ниндидер бериш тигезлѣмѣ (6) формасында бирелсѣ, бу тигезлѣмѣне канѣгать-лѣндергѣн барлык $M(x^1, x^2, x^3)$ нокталар кньплеге ниндидер турыны билгели.

Чынлап та, ѣгѣр (6) тигезлѣмѣсе бирелсѣ, бу тигезлѣмѣне канѣгатьлѣндергѣн

$A(-a_2, a_1, 0)$
$B(-a_3, 0, a_1)$ нокталары алсак,

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Димђк, (6) тигезлђмђсе (AB) турысын билгели. (AB) турысы тигезлђмђсен (7) тигезлђмђсе билгели. (6) тигезлђмђсенең a_1, a_2, a_3 тђртиплђштерелгђн коэффициентлары $m = \{a_1, a_2, a_3\}$ турысының **координаталары** дип атала.

Мисал 1: (A_1A_2) турысы тигезлђмђсен табыйк. $A_1(1,0,0), A_2(0,1,0)$

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x^3 = 0$$

Димђк, (A_1A_2) турысы тигезлђмђсе $x^3 = 0$.

Мисал 2: M(2, -1, 3), N(4, 0, -2) нокталары аша узучы туры тигезлђмђсен табарга.

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2x^1 + 12x^2 + 4x^3 + 4x^2 = 2x^1 + 16x^2 + 4x^3 = 0.$$

Димђк, (MN) турысы тигезлђмђсе $x^1 + 8x^2 + 2x^3 = 0$.

Мисал 3: $m(2, -1, 1)$ цђм $n(1, 3, -2)$ турыларының кисешњ ноктасын табарга.

Чишњ:

Тњбђндђге системаны чишђргђ кирђк:

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + 3x^2 - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

Системаны чишеп (-1, 5, 7) чишелешен табабыз. Моннан књренгђнчђ, кисешњ ноктасы T(-1, 5, 7).

Яссылыктагы цҺм турыдагы нокта координаталарын ҺзгҺртҺ

$\bar{\Pi}$ проектив яссылыгында ике проектив репер карыйк:

$$R = \{A_1, A_2, A_3, E\}, \; R' = \{A_1', A_2', A_3', E'\}.$$

R' реперы тҺбҺлҺренең Һәм берәмлек ноктасының R реперындагы координаталары бирелгҺн:

$A_1'(a_{11}, a_{21}, a_{31})$;

$A_2'(a_{12}, a_{22}, a_{32})$;

$A_3'(a_{13}, a_{23}, a_{33})$;

$E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})$.

Бу нокталарның координаталарыннан матрица төзибез:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{array}\right)$$

С матрицасы R реперыннан R' реперына **кҺчҺ матрицасы** дип атала.

R' реперын тудыручы базис $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_0'\}$, R реперын тудыручы базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_0\}$.

C матрицасына кергҺн квадрат матрица $\vec{e}_i \to \vec{e}_i'$ базисына кҺчҺ матрицасы булып тора.

ДимҺк, бу очракта тҺбҺндҺгелҺр килеп чыга:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_0' = a_{10}\vec{e}_1 + a_{20}\vec{e}_2 + a_{30}\vec{e}_3 \end{cases}$$

R' реперы яраклаштырылган булсын өчен

$$(*) \quad \begin{cases} f(\vec{e}_i') = A_i' \\ f(\vec{e}_0') = E' \\ \vec{e}_0' = \vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3' \end{cases}$$

, ягъни (*) шарты ҺтҺлсен өчен тҺбҺндҺге шарт ҺтҺлергҺ тиеш:

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})\vec{e}_1 + (a_{21} + a_{22} + a_{23})\vec{e}_2 + (a_{31} + a_{32} + a_{33})\vec{e}_3 - a_{10}\vec{e}_1 -$$
$$- a_{20}\vec{e}_2 - a_{30}\vec{e}_3 = 0.$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{10} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{20} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = a_{30} \end{cases}$$

Димђк, С матрицасының беренче өч баганасының суммасы дөртенче багананы китереп чыгара. Бу – яраклаштыру өчен шарт булып тора.

Мисаллар чишкәндә базис яңа репер белән яраклаштырылган булсын өчен беренче багананы k_1, икенчесен k_2, өченчесен k_3 кә тапкырларга кирәк. k_1, k_2, k_3 коэффициентларына тәбәндәге тигезләмәләр килеп чыга:

$$\begin{cases} k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + k_3 a_{13} = a_{10} \\ k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + k_3 a_{23} = a_{20} \\ k_1 a_{31} + k_2 a_{32} + k_3 a_{33} = a_{30} \end{cases}$$

Бу тигезләмәләр системасының чишелеше җәрвакыт бар, чөнки башкача D = 0 булса, $\{\vec{e}_i\}$ базис векторларының сызыкча бәйле булуына китерер иде. k_1, k_2, k_3 коэффициентларын тәбәндәгечә табалар:

$$k_1 = \frac{D_1}{D}; k_2 = \frac{D_2}{D}; k_3 = \frac{D_3}{D}.$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} & a_{13} \\ a_{21} & a_{20} & a_{23} \\ a_{31} & a_{30} & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{30} \end{vmatrix}.$$

Яраклаштырылган кәчә матрицасын С матрицасының юлларын k_1, k_2, k_3 коэффициентларына тапкырлап табабыз.

Әгәр ирекле X санының R җәм $R\breve{y}$ реперындагы координаталары (x^1, x^2, x^3) җәм $(x\breve{y}^1, x\breve{y}^2, x\breve{y}^3)$ булса, алар тәбәндәгечә бәйләнгән була:

$$r\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

r - ниндидер сан.

Ирекле проектив туры өчен кңчң матрицасы карасак, $R = \{A_1, A_2, E\}$, $R' = \{A_1', A_2', E'\}$ цңм $A_1'(a_{11}, a_{21})$, $A_2'(a_{12}, a_{22})$, $E(a_{10}, a_{20})$ бирелсң,

$C = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{array}\right)$, монда беренче ике багананың суммасы өченче багананы бирергң тиеш.

Берничң мисал карап китик.

Мисал 1: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) нокталарын тиңдңшле рңвештң (2, 4, 8), (2, -1, 2), (3, 2, 5), (2, 5, 7) нокталарына кңчерң торган, яссылыктагы проективңзгңртң формуласын язарга.

Чишң:

$A_1(1, 0, 0) \to A_1'(2, 4, 8)$

$A_2(0, 1, 0) \to A_2'(2, -1, 2)$

$A_3(0, 0, 1) \to A_3'(3, 2, 5)$

$E(1,1,1) \to E'(2,5,7)$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 2 \\ 4k_1 - 1k_2 + 2k_3 = 5 \\ 8k_1 + 2k_2 + 5k_3 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 24 + 32 + 24 - 8 - 40 = 22$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 30 + 28 + 21 - 8 - 50 = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 50 + 84 + 32 - 120 - 28 - 40 = -22$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 16 + 80 + 16 - 56 - 20 = 22$$

$$k_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} \quad k_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-22}{22} = -1 \quad k_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{22}{22} = 1$$

$$r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Җавап: $\begin{cases} r\ Чкў_1 = x^1 - 2x^2 + 3x^3 \\ r\ Чкў_2 = 2x^1 + x^2 + 2x^3 \\ r\ Чкў_3 = 4x^1 - 2x^2 + 5x^3 \end{cases}$

Икетөрлелек принцибы

Проектив яссылыкта ноктаның цһм турының бер-берсенһ керһлһрен без нокта турыда ята яки туры нокта аша һтһ дигһн җөмлһлһр белһн билгели идек.

Проектив $\bar{П}$ яссылыгында турылар кһплеген $\bar{П}ў$ дип алыйк цһм берһр R реперы алып $j\ : \bar{П} \to \bar{П}ў$ чагылдыруын карыйк.

Бу чагылдыру цһрбер $M(a_1, a_2, a_3)$ ноктасына шул ук координаталы турыны куя:

$$j\ : M(a_1, a_2, a_3) \to m(a_1, a_2, a_3).$$

Бу чагылдыру биекция булып тора.

A цһм B нокталары алсак $(A \neq B)$, аларның координаталары пропорциональ тһгел. Аларга туры килгһн турылар да төрле була. Димһк, j - инъекция була.

$"d(a_1, a_2, a_3)$ турысына j чагылдыруында $D(a_1, a_2, a_3)$ ноктасы табып була. Димһк, j - сюръекция дһ булып тора. Шулай булгач, j^{-1} не бердһнбер итеп табып була. Димһк, j, j^{-1} - биекция булалар.

j цһм j^{-1} чагылдыруларында нокталар цһм турыларның бер-берсенһ керһлһре саклана.

Чынлап та, һгһр $A \in d$ цһм $j(A) = a$ булса, $j^{-1}(d) = D$ дип билгелһсһк, $D \in a$.

Әгһр $A(a_1, a_2, a_3), d(d_1, d_2, d_3), A \in d$ булса, $a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 = \ = 0$. Димһк, $a(a_1, a_2, a_3), D(d_1, d_2, d_3) \to D \in a$.

Әгһр өч нокта бер турыга керсһлһр, аларның сурһтлһре бер турылар бһйлһменһ керһ

$$A, B, C \in d, j(A) = aў, j(B) = bў, j(C) = cў \text{ булса,}$$

$$Dў = j^{-1}(d) \to Dў \in dў$$

$D\breve{y}Ob\breve{y}\,D\breve{y}Oc\breve{y}$ Алда исбатланганнан килеп чыга: $D\breve{y}$- турылар бђйлђменең њзђге.

j - биекция булганга, j чагылдыруында турының сурђте булып турылар бђйлђме тора.

***Икетөрлелек принцибы*:** *Әгәр яссылыктагы турының нокталары үәм аларның бер-берсенә керләре турындагы ниндидер* D *җөмләсе дөрес булса, шулай ук* D *җөмләсендәге нокта сүзен туры сүзенә, туры сүзен нокта сүзенә алыштырудан килеп чыккан* D *га карата икетөрле дип аталган* D^* *жөмләсе дә дөрес була.*

Мисаллар карап китик:

Мисал 1:

D : “Телләсә нинди ике *A* үәм *B* нокталары өчен, бу нокталарга кергән бердәнбер *a* турысы бар”.

D^*: “Теләсә нинди ике *a* үәм *b* турылары өчен, бу турыларга кергән бердәнбер *A* ноктасы бар”.

Мисал 2:

D : “Үәрбер турының чиксез күп нокталары бар”.

D^* : “ Үәрбер нокта аша чиксез күп туры юк”.

Мисал 3:

D : “Бер турыга кергән ким дигәндә өч нокта табып була”.

D^* : “Бер нокта аша юкче ким дигәндә өч туры табып була”.

Мисал 4:

D : “Бер турыга кермәгән ким дигәндә өч нокта табып була”.

D^* :“Бер нокта аша юкмәгән ким дигәндә өч туры табып була”.

Дезарг теоремасы

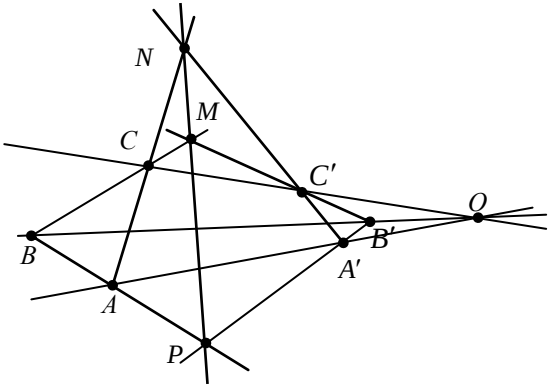
Бер турыда ятмаган өч нокта үәм бу нокталарны тоташтыручы өч туры карыйк. Килеп чыккан фигура **өчтөбәлек** дип атала. Нокталар – өчтөбәлекнең **төбәләре** дип, турылар – өчтөбәлекнең **яклары** дип атала.

Әчтөбәлек төбәндәгечә билгеләнә: ABC.

Проектив яссылыкта ике ABC үәм $A\breve{y}B\breve{y}C\breve{y}$ өчтөбәлекләрен карыйк. A үәм $A\breve{y}$, B үәм $B\breve{y}$, C үәм $C\breve{y}$өчтөбәләрен – бер-берсенә туры килгән төбәләр дип атыйк. Шулай ук AB үәм $A\breve{y}B\breve{y}$, BC үәм

$B'C'$, CA цҳм $C'A'$ якларын да бер-берсенҳ туры килгҳн яклар дип атыйк. Бу очракта тҳбҳндҳге теорема дөрес:

Теорема*: Әгҳр ике өчтҳбҳлекнең бер-берсенҳ туры килгҳн тҳбҳлҳрен тоташтыручы турылар бер ноктада кисешҳлҳр, бер-берсенҳ туры килгҳн якларның кисешҳ нокталары бер турыда ята. AA', BB', CC' турылары O ноктасында кисешсен.*



$M = (BC) \cap (B'C')$

$N = (AC) \cap (A'C')$

$P = (AB) \cap (A'B')$

$M, P, N \in d$.

Јчтҳбҳлеклҳр төрле яссылыкларда ятсалар да теорема дөрес була.

Икетөрлелек принцибын кулланып Дезарг теоремасына кире теорема языйк:

Кире теорема:

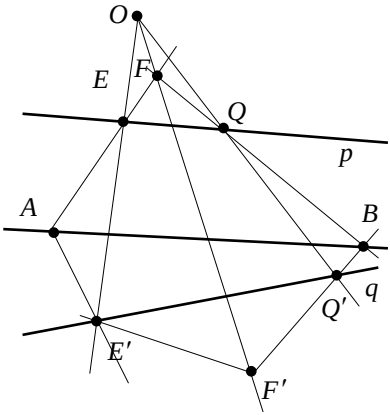
Әгҳр ике өчтҳбҳлек-нең тиңдҳш яклары кисешкҳн нокталар бер турыда ятсалар, бу өчтҳбҳлекнең тиң-дҳш тҳбҳлҳре аша ҳтҳче турылар бер ноктада кисешҳлҳр.

Дезарг теоремасына карата берничҳ мисал карап китик:

Мисал 1: Чикле сызымда А ноктасы цҳм сызымнан читтҳ кисешҳче p цҳм q турылары бирелгҳн. p цҳм q турыларының кисешҳ ноктасы P. (AP) турысының сызымга кергҳн өлешен сызарга.

Моның өчен:

1) A ноктасыннан p цҳм q турыларына ирекле нурлар төшерик цҳм аларның p цҳм q турылары белҳн кисешҳ нокталарын E цҳм E' дип билгелик;



2) p турысын E тньбђсен цђм [AE) нурын кулланып ирекле EFQ өчтньбђлеге төзик;

3) (EEў) турысы ньткђрик цђм бу турыда ирекле O ноктасы алыйк;

4) (OE), (OF), (OQ) турылары ньткђрик;

5) (OQ) I $q = Q$ў дип алыйк цђм (OF) турысында ирекле Fў ноктасы алыйк. EўFўQў өчтньбђлеге төзелде;

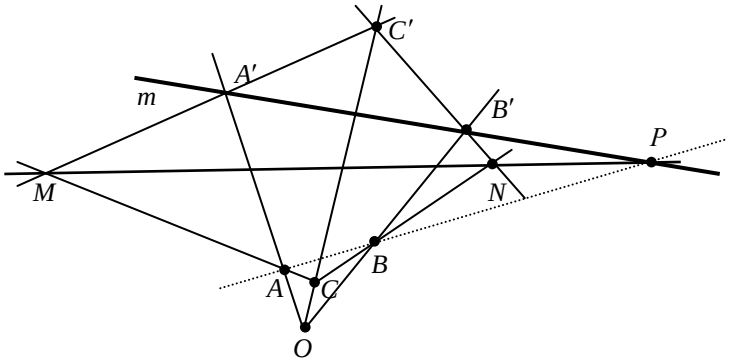
6) Бу ике EFQ цђм EўFўQў өчтньбђлеклђренең бер-берсенђ туры килгђн тньбђлђрен тоташтыручы турылар бер O ноктасында кисешђлђр. Димђк, Дезарг теоремасы буенча, бер-берсенђ туры килгђн яклар кисешкђн нокталар бер турыда яталар. (FQ) I (FўQў) = B.

7) (AB) турысын ньткђрик. Дезарг теоремасы буенча, P ноктасы (AB) урысында ятачак. Димђк, (AB) турысы – без эзлђгђн туры.

Мисал 2: m турысы цђм аңа кермђгђн A цђм B нокталары бирелгђн. AB турысын ньткђрмичђ генђ, линейка гына кулланып, AB цђм m турыларының кисешнь ноктасын төзергђ.

Моның өчен:

1) Ирекле O ноктасы алыйк цђм [OA), [OB) нурлары ньткђреп аларның m турысы белђн кисешнь нокталарын тиңдђшле рђвештђ



Aў цђм Bў дип билгелик;

2) O ноктасыннан тагын берирекле нур ньткђрик цђм анда C цђм C ў нокталарын билгелик;

3) ABC цђм AўB ўC ў өчтньбђлеклђренең бер-берсенђ туры килгђн тньбђлђрен тоташтыручы турылар бер O ноктасында кисешђлђр. Димђк, Дезарг теоремасы буенча, бер-берсенђ туры килгђн яклар кисешкђн нокталар бер турыда яталар (AC) I $(A$ўC ў$) = M$ цђм (CB) I $(C$ўB ў$) = N$ нокталарын табыйк;

4) (MN) I $m = P$ ноктасын төзик.

P – без эзлђгђн нокта була , чөнки (AB) I $m = P$ O(MN).

Турыдагы дньрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы

Дньрт нокта карыйк. *A, B, C* – төрле нокталар. *D* – *A* белђн туры килми. Бу турыда *R*(*A, B, C*) реперын карыйк. Әлеге реперда *D* ның координаталары $D(x^1, x^2)$ булсын.

D №A Юx^2 №0. $\frac{x^1}{x^2}$ саны *A, B, C, D* нокталарының **катлаулы чагыштырмасы** дип атала цђм (AB, CD) дип языла.

<u>Теорема 1</u>: *Әгђр A, B, C – турының төрле нокталары , ђ l - телђсђ нинди реаль сан булса,* $(AB, CX) = l$ *тигезлђмђсен канђгатьлђндергђн, бу турыда ятучы бердђнбер X ноктасын табып була.*

Бу теоремадан $(AB, CD) = (AB, CD$ўЮ$D = D$ў килеп чыга.

<u>Теорема 2</u>: *Әгђр A, B, C, D нокталары бер турыда ятсалар цђм аларның* $R(A_1, A_2, E)$ *реперындагы координаталары*

$$\left.\begin{array}{l} A(a^1, a^2) \\ B(b^1, b^2) \\ C(c^1, c^2) \\ D(d^1, d^2) \end{array}\right. \text{ булса, } (A \text{ №} D),$$

$$(\widehat{AB,CD}) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}} \quad (*)$$

Катлаулы чагыштырма өчен тәбәндәге әзлекләр әтәлә:

$1^0.(AB,CD) = (CD,AB).$

$2^0.(AB,CD) = \dfrac{1}{(AB,DC)}; (AB,CD) = \dfrac{1}{(BA,CD)},$

(әгәр $(AB,CD) \neq 0$ булса.)

$3^0.(AB,CD) = (BA,DC).$

$4^0.(AB,CC) = 1; (AB,CB) = 0.$

$5^0.(AB,CD) + (AC,BD) = 1.$

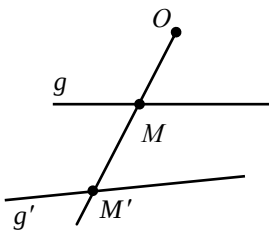
<u>Билгеләмә</u>: *A, B, C, D* – турының дөрт ноктасы һәм $(AB,CD) < 0$ булса, *A, B* нокталары *C, D нокталарын бөлә* дип әйтәләр. Ә инде $(AB,CD) > 0$ булса, *бөлми* дип әйтәләр.

<u>Теорема 3</u>: (Турыдагы дөрт ноктаның катлаулы чагыштырмасының геометрик мәгънәсе):

Әгәр A, B, C, D киңәйтелгән турының өч нокталары булып,

$$(AB,CD) = \frac{(AB,C)}{(AB,D)} \quad (1),$$

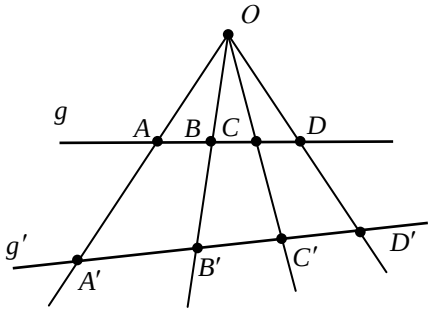
$P_Г$ - *өч булмаган ноктасы булса,* $(AB,CP_Г) = -(AB,C)$ (2) *формулалары дөрес. (монда* (AB,C) *- өч ноктаның гади чагыштырмасы)*



Проектив яссылыкта ике g һәм gүтурылары карыйк. Бу турыларда ятмаган O ноктасы алыйк. g ның ирекле M ноктасы өчен gүтагы M үноктасын билгелик.

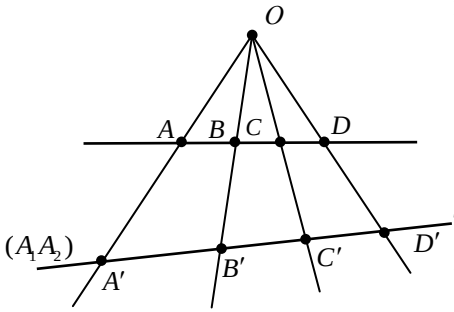
$M' = (OM) \cap g'$

M' ноктасы M ноктасының O нүктәгеннән ***проекциясе*** дип атала.



<u>Теорема 4</u>:
$A, B, C, D \in g$,
$A', B', C', D' \in g'$ булсын.
A', B', C', D' тиңдәшле рәвештә A, B, C, D нокталарының O нүктәгеннән g'ка проекцияләре.
Бу очракта $(AB,CD) = (A'B'C'D')$.

Дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасына берничә мисал карап китик:



Мисал 1: $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 3)$, $C(2, 1, 4)$, $D(0,1, 2)$.
(AB,CD) – ?

A, B, C, D нокталарын A_3 тән A_1A_2 гә проекция-либез. Ул вакытта

$$A \to A'(1, 0)_{R_3}$$

$$B \to B'(1, 1)_{R_3}$$

$$C \to C'(2, 1)_{R_3}$$

$$D \to D'(0, 1)_{R_3}$$

$$R_3 = \{A_1, A_2, E_3\}.$$

$$(A'B'C'D') = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot (-1)} = -1$$

Алдагы теорема буенча, $(AB,CD) = (A'B'C'D')$.

$(AB, CD) = -1$. Димәк, бу нокталар – гармоник нокталар була.

Мисал 2: $A(1, 2, -2)$, $B(3, 4, -2)$, $C(2, 3, -2)$, $(AB, CD) = 2$. D ноктасын табарга.

Чишү: $D(d^1, d^2, d^3)$

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}$$

$(AB,CD) = (A'B'C'D') = (A''B''C''D'') = 2$, кайда $A'B'C'D'$ һәм $A''B''C''D''$ бирелгән A,B,C,D нокталарының тиңдәшле рәвештә (A_1A_2) һәм (A_2A_3) координат турыларына проекцияләре.

$$(A'B'C'D') = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \cdot (3d^2 - 4d^1)}{1 \cdot (d^2 - 2d^1)} = (AB,CD) = 2.$$

$$-3d^2 + 4d^1 = 2d^2 - 4d^1 \Rightarrow \underline{8d^1 = 5d^2}$$

$$(A''B''C''D'') = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix}} = \frac{2(4d^3 + 2d^2)}{-2(2d^3 + d^2)} = 2.$$

$$4d^3 + 2d^2 = -4d^3 - 4d^2$$

$$\underline{4d^3 + 3d^2 = 0}$$

$$\begin{cases} 8d^1 = 5d^2 \\ 4d^3 + 3d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^1 = \frac{5}{8}d^2 \\ 4d^3 + 3d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^1 = \frac{5}{8}d^2 \\ d^3 = -\frac{3}{4}d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$d^2 = 8$ булсын $\Rightarrow d^1 = 5, d^3 = -6$

Димәк, $D(5, 8, -6)$.

Мисал 3: A, B, C нокталарының бер турыда ятуларын ачыклап, (BA,CD), (BA, DC), (AC, BD), (BD, CA) ны табыгыз, әгәр $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, -1, 1)$, $D(-1, 5, 4)$ булса.

Чишҗ: $R_3(A_1, A_2, E_3)$ реперында $A(-1, 2)$, $B(1, 1)$, $C(2, -1)$, $D(-1, 5)$

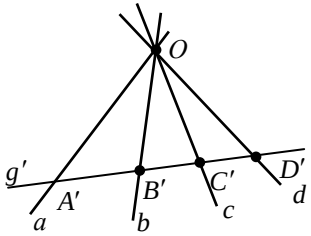
$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3 \cdot 9}{3 \cdot (-3)} = 3.$$

$$(BD, CA) = (CA, BD) = \frac{1}{(AC, BD)} = \frac{1}{3}, \quad (BA, CD) = \frac{1}{(AB, CD)} = -\frac{1}{2},$$

$$(BA, DC) = (AB, CD) = -2.,$$

Дүрт турының катлаулы чагыштырмасы

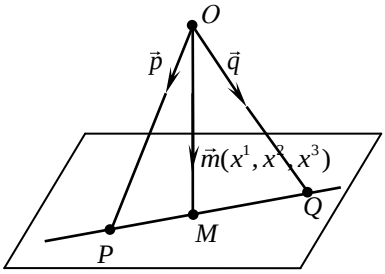
Алда карап киткән *Теорема* 4 тән тәбәндәгәләр килеп чыга: O ноктасы аша әтәче турылар бәйләме һәм бу турылар бәйләмен кисәче g турысы бирелсә, бу a, b, c, d турыларын нинди генә g турысы белән кистермик, килеп чыккан нокталарның катлаулы чагыштырмасы бер әк була һәм $(AB, CD) = (ab, cd)$ – **турыларның катлаулы чагыштырмасы** дип атала. Бу икетөрлелек принцибынан да килеп чыга.



<u>Теорема 5</u>: Әгәр яссылыкта ниндидер бер реперда ике P һәм Q нокталары аша әтәче турының параметрик тигезләмәсе бирелсә, $R(A_1, A_2, A_3, E), Q(q^1, q^2, q^3)$,

$$P(p^1, p^2, p^3)$$

$$\begin{cases} x^1 = l\,p^1 + m q^1 \\ x^2 = l\,p^2 + m q^2 \\ x^3 = l\,p^3 + m q^3 \end{cases} -$$ параметрик тигезләмә.



$$\vec{m} = l\,\vec{p} + m\,\vec{q}$$

$M_1(l_1, m_1)$, $M_2(l_2, m_2)$ (RQ) турысында ятучы ирекле ике нокта булсалар,

$$(PQ, M_1M_2) = \frac{m_1 l_2}{m_2 l_1}.$$

Дөрт турының катлаулы чагыштырмасына берничә мисал карап китик.

Мисал 1: *a, b, c, d* турыларының бер турылар бәйләнешенә кергәнлеген ачыклап, (*ab, cd*) ны табарга. *a*(6, 2, -5), *b*(2, 2, 1), *c*(0, 1, 2), *d*(14, 1, -19).

Чишү:

$$\begin{cases} 6x^1 + 2x^2 - 5x^3 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 + x^3 = 0 \\ x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}$$

a, b, c турылары бер бәйләмгә керсә ситеманың чишелеше бар. Ә сызыкча бериш тигезләмәләр системаның, нольгә тигез булмаган, чишелеше булу өчен, төп билгеләгеч (яки транспанирланган билгеләгеч) нольгә тигез булырга тиеш:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 24 - 10 - 8 - 6 = 0 \text{ Ю } a,b,c\ e(O_1) \text{ бәйләменә керә.}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & c & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -19 \end{vmatrix} \end{array} = -38 + 56 - 14 - 4 = 0 \text{ Ю } b,c,d\ e(O_2) \text{ бәйләменә керә.}$$

Әгәр $e(O_1)$ һәм $e(O_2)$ төрле бәйләмнәр булса, $b \text{ I } c = O_1$ һәм $b \text{ I } c = O_2$ Ю $b = c$ булыр иде. Ә $b \text{ №} c$, димәк $O_1 = O_2$, *a, b, c, d* – бер турылар бәйләменә керә.

Бу турыларны $x_1 = 0$ турысы белән кистерсәк,

$$\begin{cases} a: 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$A(0, 5, 2)$ ны табабыз.

Шулай ук $B(0, 1, -2), C(0, 2, -1), D(0, 19, 1)$ нокталарын табып була.

$A(0, 2, -5), B(0, 2, 1), C(0, 1, 2), D(0, 1, -19)$

$$(ab,cd) = (AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \text{ ц } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -19 \end{vmatrix} \text{ ц } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(4+5)(-38-1)}{(-38+5)(4-1)} = \frac{13}{11}.$$

Мисал 2: $a(2, 1, 0)$, $b(0, 1, 3)$, $c(2, 0, -3)$ турылары бирелгән. Аларның бер турылар бәйләнешендә керәсен ачыклап, $(ab, cd) = -\frac{1}{3}$ булырлык d турысын табарга.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \end{array} = -6 + 6 = 0$$

Димәк, a, b, c – бер турылар бәйләнешендә керә.

$d(d^1, d^2, d^3)$ булсын.

$R(A_1, A_2, E_3)$ реперында $A(2, 1), B(0, 1), C(2, 0), D(d^1, d^2)$ – a, b, c, d турыларын (A_1A_2) координат турысы белән кисешү нокталары.

$$(ab,cd) = (AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ ц } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ ц } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}} = \frac{-2(-d^1)}{-2(2d^2 - d^1)} =$$

$$= \frac{-d^1}{2d^2 - d^1} = -\frac{1}{3}$$

$3d^1 = 2d^2 - d^1$ Ю $4d^1 = 2d^2$ Ю $2d^1 = d^2$

$R(A_2, A_3, E_1)$ реперында $A(1, 0), B(1, 3), C(0, -3), D(d^2, d^3)$

$$(ab,cd) = (A\ddot{y}B\ddot{y},C\ddot{y}D\ddot{y}) = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix} \text{ ч } \begin{vmatrix}1 & 3\\ d^2 & d^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -3\end{vmatrix} \text{ ч } \begin{vmatrix}1 & 0\\ d^2 & d^3\end{vmatrix}} = \frac{-3(d^3 - 3d^2)}{-3d^3} =$$

$$= \frac{d^3 - 3d^2}{d^3} = -\frac{1}{3}$$

$3d^3 - 9d^2 = -d^3$ Ю $4d^3 = 9d^2$

$d^2 = 4$ булсын Ю $d^3 = 9, d^1 = 2$

Димђк, $d(2, 4, 9)$.

Тулы дөрттөбөлек үөм аңа карата теорема

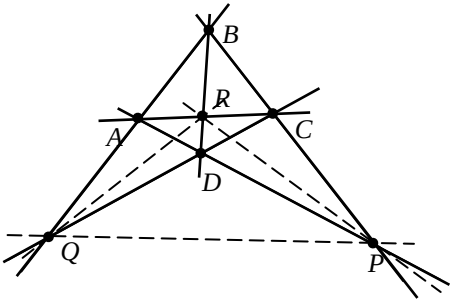
$(A\,B, C\,D) = -1$ булса, A, B, C, D нокталары ***гармоник нокталар*** дип атала яки C, D нокталары A, B нокталарын гармоник рөвештә бөлә дип әйтәләр.

Катлаулы чагыштырманың өзлеклөрен кулланса к,

$$(BA,CD) = -1$$

$$(AB,CD) = -1 \text{ Ю } (AB,DC) = -1$$

$$(CD,AB) = -1$$



<u>Билгелөмә</u>: *Тулы дөрттөбөлек* дип яссылыкның гомуми торышлы дөрт ноктасыннан үөм аларны тоташтыручы алты турыдан торган фигура атала.

Бу нокталарны A, B, C, D дип билгеләсәк, алар *дөрттөбөлекнең төбөлөре* дип, ә аларны тоташтыручы (AB), (BC), (CD), (DA), (AC), (BD) турылары *дөрттөбө-лекнең яклары* дип атала. Гомуми төбөлөре булмаган яклары *өзара каршы яклар* дип үөм каршы яклар кисешкөн нокталар *диаго-наль нокталар* дип атала. Ә инде диагональ нокталарны тоташтыручы турылар *диаг-ональлөр* дип атала.

Q, P, R – өч диагональ нокта. (QP), (RP), (QR) – өч диагональ туры.

<u>Лемма</u>: *Диагональ нокталар бер турыда ятмый*.

<u>Теорема</u> (тулы дөрттөбөлек турында): *Тулы дөрттөбөлекнең өчбер диагоналендәге диагональ нокталар бу диагональнең өченче диагональ аша өтөче яклары белән кисешөче ике ноктаны гармоник рәвештә бөлләр*.

(PQ, MN) = -1

(PQ, MN) = (AC, RN) (Теорема 4 тән килеп чыга).

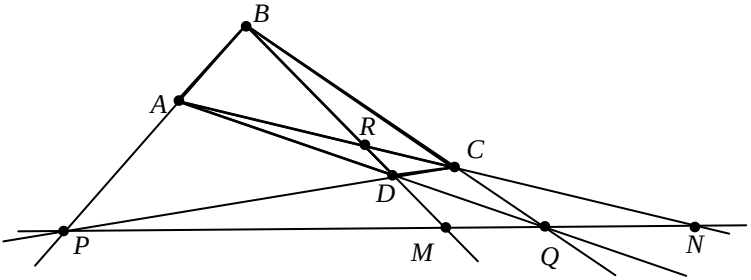
<u>Нәтиҗә 1</u>:

(AC, RN) = -1.

Димәк, тулы дөрттөбөлекнең бер ягында ятучы ике ноктасы диагональ ноктаны өем бу як калган ике диагональ нокта аша өтөче диагональ белән кисешкән ноктаны гармоник рәвештә бөлә.

Тулы дөрттөбөлеккә кергән турылар өчен дә

((RM) (RN), (RP) (RQ)) = -1.



<u>Нәтиҗә 2</u>: Тулы дөрттөбөлекнең ике каршы ягы бу яклар кисешкән нокта аша өтөче ике диагональне гармоник рәвештә бөлә.

Тулы дөрттөбөлеккә берничә мисал карап китик:

Мисал 1: Проектив турыда P, Q, M нокталары бирелгән. Бу ноктага гармоник булган дөртенче X ноктасын төзергә.

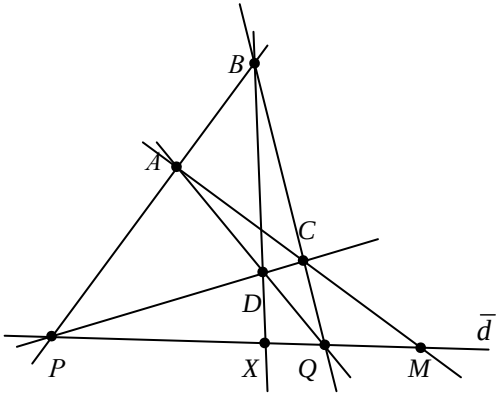
Моның өчен:

1) P ноктасы аша ирекле бер туры өткәрик өем анда A өем B нокталары алыйк.
2) *(QA), (QB), (AM) турылары өткәрик.*
3) $C = (MA) \cap (QB)$

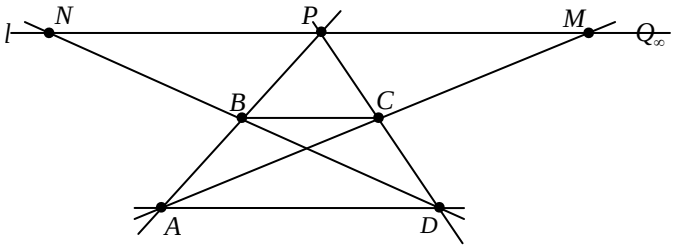
4) (PC) ны төзик.
5) $D = (PC) \text{ I } (AQ)$.

6) $ABCD$ – тулы дөрттөн-бөлек.
$X = (BD) \text{ I } d$.

Тулы дөрттөнбөлек ту-рындагы теорема буенча $(PQ, XM) = -1$ цөм X – без эзлөгөн нокта.



Мисал 2: Ирекле $ABCD$ трапециясе бирелгөн.
$P = (AB) \text{ I } (CD)$. l – P ноктасы аша нөтөче (AD) га параллель туры. $M = l \text{ I } (BD)$ цөм $N = l \text{ I } (AC)$. P ноктасының MN кисемтөсен урталай бөлөн исбатларга.



$(AD) \text{ I } l = Q_г$

$ABCD$ – тулы дөрттөнбөлек.

Тулы дөрттөнбөлек турындагы теорема буенча $(PQ_г, MN) = -1$. Ә без белөбез, өгөр P, M, N киңөйтелгөн турының үз нокталары булып, Q_∞ – үз булмаган нокта булса, $(PQ_г, MN) = -(MN, P)$. өз нокталары булып, Q_∞ – өз булмаган ноктасы булса, $(PQ_\infty, MN) = -(MN, P)$. $-(MN, P) = -1 \quad \rightarrow \quad (MN, P) = 1 \Rightarrow MN = NP$
Шуны исбатларга кирөк иде дө.

Проектив яссылыкта проектив њзгђртњлђр цђм проектив њзгђртњлђр группасы

<u>Билгелђмђ 1</u>: Әгђр киңђйтелгђн яссылыкның ирекле турысының нокталары берђр туры нокталарына књчсђлђр цђм ирекле турыдагы дњрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы сакланса, ђлеге њзгђртњ – *проектив њзгђртњ* дип атала.

$f : d \to d', f -$ проектив њзгђртњ.

$\forall M_i \in d (i = 1, 2, 3, 4)$

$f(M_i) = M_i' \in d'.$

$(M_1M_2, M_3M_4) = (M_1'M_2', M_3'M_4').$

Тривиаль њзгђртњ ноктаны њз-њзенђ књчерђ.

<u>Билгелђмђ 2</u>: $R(A_1, A_2, A_3, E)$ цђм $R'(A_1', A_2', A_3', E') -$ проектив яссылыкның реперлары булсалар, шул яссылыкның ирекле М ноктасына R' реперындагы координаталары М ноктасының R реперындагы координаталарына тигез булган M' ноктасын куя торган f чагылдыруы *проектив њзгђртњ* дип атала.

$\forall M \in nf : M \to M'$

$M(x^i)_R \to M'(x^i)_{R'}$

f њзгђртње бер турыда ятучы X, Y, Z нокталарын бер турыда ятучы X', Y', Z' нокталарына књчерђ, шул ук вакытта бу њзгђртњ турыдагы 4 ноктаның катлаулы чагыштырмасын саклый, чөнки

$f : A(a^i), B(b^i), C(c^i), D(d^i) \Rightarrow A'(a^i)_{R'}, B'(b^i)_{R'}, C'(c^i)_{R'}, D'(d^i)_{R'}.$

Санау формулаларына куйсак, дњрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы саклана икђнен књрђбез. Чөнки бу чагылдыру тулысынча нокталарның координаталары белђн билгелђнђ.

<u>Теорема</u>: Әгђр f_1 цђм f_2 проектив њзгђртњлђре ниндидер g турысының өч A, B, C нокталарын g' турысының A', B', C' нокталарына књчерсђ

$f_1 : A, B, C \to A', B', C' \in g'$

$f_2 : A, B, C \to A', B', C' \in g',$

f_1 цђм f_2 тђңгђл килђ.

<u>Теорема</u>: $R(M_1, M_2, M_3, E)$, $R'(M_1', M_2', M_3', E)$ – *проектив яссылыкның ике реперы булса,* R *ны* R' *ка књчерњче бердђнбер проектив њзгђртњ табып була цђм бу њзгђртњ белђн ирекле М*

ноктасы, R' реперындагы координаталары шул ук булган M' ноктасына кńчђ.

$\forall M(x^i)_R \to M'(x^i)_{R'}$

<u>Нђтижђ 1</u>: Алдагы ике билгелђмђ эквивалент.

<u>Нђтижђ 2</u>: Әгђр реперның тńбђлђре цђм берђмлекле нокталары – инвариант нокталар булсалар, бу проектив ńзгђртń *бердђй ńзгђртń* дип атала.

Проектив ńзгђртńнең кайбер ńзлеклђре

1^0. Бер турыда ятмаган 3 нокта, бер турыда ятмаган 3 ноктага кńчђ.

2^0. Ирекле репер реперга кńчђ.

3^0. Туры турыга кńчђ.

4^0. Турылар бђйлђме турылар бђйлђменђ кńчђ.

Бу язган характеристикалар проектив ńзгђртńнең инвариант характеристикаларын билгели. Төп инвариант характеристика булып дńрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы тора.

Коллинеациялђр

Икенче төрле проектив ńзгђртńне коллинеация дип тђ атыйлар.

<u>Коллинеация тигезлђмђсе</u>

$\psi : P_2 \to P_2$ – коллинеация цђм $R = R(E_i), i = 1, 2, 3, 0 - P_2$ яссылыгының ниндидер проектив координаталар системасы (репер) булсын.

R реперында ирекле $X(x^1, x^2, x^3)$ ноктасының координаталары билгеле. $X' = \psi(X)$ $X'(x'^1, x'^2, x'^3)$ ноктасының R реперындагы координаталарын табарга кирђк. $E'_i = \psi(E_i)$, R' реперында X' ның координаталары

$$X'(x^1, x^2, x^3)_{R'}$$

$$X'(x'^1, x'^2, x'^3)_R$$

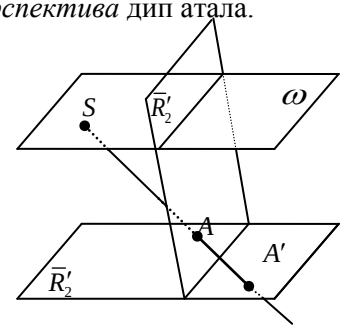
Бер ńк ноктаның төрле реперындагы координаталары ńзара тńбђндђге формула белђн бђйлђнгђн: $\lambda X = PX'$ – коллинеация тигезлђмђсе.

Монда X – кире сурђтнең, X' – сурђтнең координаталары баганасы, P – квадрат матрица, λ – пропорциональлек коэффициенты.

$$\lambda x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' + p_{13}x_3'$$
$$\lambda x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2' + p_{23}x_3'$$
$$\lambda x_3 = p_{31}x_1' + p_{32}x_2' + p_{33}x_3'$$

<u>Билгелђмђ</u>: Киђйителгђн евклидча пространствода ике киђйителгђн евклидча яссылык $\bar{R}_2, \bar{R}_2'$ цђм бу яссылыкларга кермђњче S – (перспектива) њзђге бирелсђ,

$\varphi : \bar{R}_2 \to \bar{R}_2' \left(\forall A \in \bar{R}_2 \to A' = (SA) \bigcap \bar{R}'\right)$ чагылдыруы *њзђк проекциялђњ* яки *перспектива* дип атала.



Перспективаның њзлеклђре

1. Перспектив чагылдыру вакытында туры турыга чагылдырыла.
2. Коллинеар нокталарның катлаулы чагыштырмасы саклана.
3. Бђйлђмдђге турыларның катлаулы чагыштырмасы саклана.

Берничђ мисал карап китик:

Мисал 1: φ коллинеациясенең тигезлђмђсе бирелгђн:

$$\mu x_1' = x_1 - 2x_2,\ \mu x_2' = x_2 + 3x_3,\ \mu x_3' = -x_2.$$

Табарга: 1) $A(3,\ 1,\ -2)$ ноктасының сурђтен; 2) $B'(-1,-2,1)$ ноктасының кире сњрђтен; 3) $l(2,\ 0,\ -1)$ турысының сурђтен; 4) $m'(1,1,1)$ турысының кире сњрђтен.

Чишњ: 1) A ноктасының координаталарын φ чагылдыруындагы x_1, x_2, x_3 урынына куябыз, $x_1', x_2', x_3' = 1,\ -5,\ -1$ килеп чыга.

Бу $A' = \varphi(A)$ ноктасының координаталары: $A'(1,\ -5,\ -1)$

2) В ноктасының координаталарын φ чагылдыруы тигезлђмђсендђге x_1', x_2', x_3' урынына куеп чыгабыз. Табабыз:

$$\begin{cases} -\mu = x_1 - 2x_2 \\ -2\mu = x_2 + 3x_3 \\ \mu = -x_2 \end{cases}$$

Бу системаны чишеп табабыз $x_1 : x_2 : x_3 = 9 : 3 : 1$. Бу $B = \varphi^{-1}(B')$ ноктамсының координаталары $B(9, 3, 1)$.

3) l турысында ике ирекле нокта алыйк, мҺсҺлҺн $C(1, 0, 2)$, $D(0, 1, 0)$. Чагылдыру тигезлҺмҺсе ярдҺмендҺ аларның сурҺтлҺрен табабыз: $C'(1, 6, 0), D'(-2, 1, -1)$. $C'D'$ – эзлҺнелгҺн туры. Аның тигезлҺмҺсен табабыз:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & -2 \\ x_2 & 6 & 1 \\ x_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ яки } 6x_1 - x_2 - 13x_3 = 0. \Rightarrow l'(6, -1, -13).$$

4) $m = \varphi^{-1}(m')$ турысының координаталарын табу өчен, турыларны чагылдыру тигезлҺмҺсен табарга кирҺк.

Әлеге чагылдыру матрица рҺвешендҺ тҺбҺндҺге тигезлҺмҺгҺ ия:

$$\mu X' = QX, \quad Q = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mu U = U'Q \Rightarrow \begin{cases} \mu u_1 = u_1' \\ \mu u_2 = -2u_1' + u_2' - u_3' \\ \mu u_3 = 3u_2' \end{cases}$$

m' турысының координаталарын ҺлегЕ тигезлҺмҺлҺрдҺге u_1', u_2', u_3' урынына куеп чыгып, $u_1 : u_2 : u_3 = 1 : -2 : 3$ не табабыз. $m(1, -2, 3)$.

Мисал 2: φ коллинеациясенең тигезлҺмҺсе бирелгҺн:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \lambda x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \lambda x_3' = -x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

Кузгалмас (инвариант) нокталарны цҺм турыларны табарга.

Ивариант нокта чагылдыру нҺтижҺсендҺ ҺзгҺрми, ягъни ҺзҺзенҺ кҺчҺ. ДимҺк, $X' = X$. Моннан килеп чыга:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \lambda x_2 = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \lambda x_3 = -x_1 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (3+\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - (2+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Бу системада λ ны тньбңндңге билгелңгечне чишеп табабыз:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = ((-\lambda)^2 - (-2)^2)(-3-\lambda) + 3 + 2(-3-\lambda) + 5(-2-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\begin{cases} -x_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_2 = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ -x_3 = -x_1 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ -5x_3 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \quad x_3 = -1 \text{ дип алсак, } \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$$

Димңк, X(1, 1, –1) – инвариант нокта.

Инвариант турыларны табу өчен, турыларны чагылдыру тигезлңмңсен табарга кирңк.

$$\lambda X' = QX$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow -X' = QX$$

$$Q = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{cases} -u_1' = 2u_1 + 5u_2 - u_3 \\ -u_2' = -u_1 - 3u_2 \\ -u_3' = 2u_1 + 3u_2 - 2u_3 \end{cases}$$

$$u' = u \Rightarrow \begin{cases} -u_1 = 2u_1 + 5u_2 - u_3 \\ -u_2 = -u_1 - 3u_2 \\ -u_3 = 2u_1 + 3u_2 - 2u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 + 5u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 - 2u_2 = 0 \\ 2u_1 + 3u_2 - u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} -u_1 = 2u_2 \Rightarrow u_1 = -2u_1 \\ -4u_2 + 3u_2 - u_3 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{matrix} -u_2 - u_3 = 0 \\ u_3 = -u_2 \end{matrix}\right.$$

$u_2 = 1$ булсын $\Rightarrow u_1 = -2, u_3 = -1.$

Димңк, u(–2, 1, –1) – инвариант туры.

Мисал 3: Киңйәтелгән евклидча яссылыкта турыпочмаклы декартча координаталар системасында $(x-2)^2+y^2=2$ әйләнәсе бирелгән. Тиңдәшле бериш координата тигезләмәләре

$$\mu x_1' = x_1, \mu x_2' = x_2, \mu x_3' = x_1 - x_3$$

булган коллинеациягә карата бу әйләнәнең сурәтен табарга.

Чишү: Коллинеациягә тигезләмәләрен x_1, x_2, x_3 кә карата чишеп табабыз:

$$x_1 = \mu x_1', x_2 = \mu x_2', x_3 = \mu(x_1' - x_3')$$

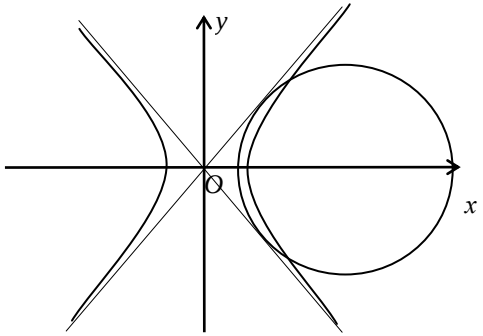
Бу аңлатмаларны $(x_1 - 2x_3)^2 + x_2{}^2 = 2x_3{}^2 -$ бирелгән әйләнәнең бериш тигезләмәсенә куеп, гадиләштерсәк, әйләнәнең сурәтенең тигезләмәсен табабыз:

$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3^2$$

Бериш координаталарга кайтып, тәбәндәге тигезләмәгә киләбез:

$$x^2 - y^2 = 2.$$

Шулай итеп, $y = \pm x$ ассимптоталы тигезъяклы гипербола килеп чыга.



Гомология

<u>Билгелҗмҗ</u>: Тривиаль булмаган проектив җзгҗртҗ *гомология* дип атала, җгҗр бу җзгҗртҗ дҗ бер турыда ятучы өч булса да инвариант нокта булса.

<u>Теорема</u>: *Алдагы билгелҗмҗдҗге инвариант нокталар яткан туры җзе инвариант нокталар турысы булып тора.*

Гомологиянең җзлеклҗре

1^0. Әгҗр f гомологиясе $f: A \to A'$ булса, (AA') – инвариант туры була (ягъни, туры җз-җзенҗ кҗчҗ).

Алда билгелҗнгҗн инвариант нокталар яткан туры *гомологиянең кҗчҗре* дип атала.

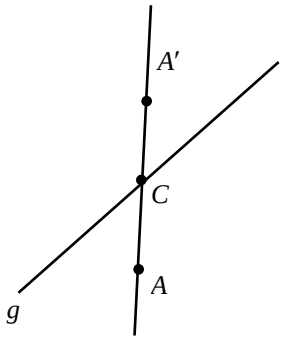
g_0 – гомологиянең кҗчҗре булсын,

$(AA') \neq g_0, \quad C = (AA') \cap g_0$ дип алыйк.

$f(C) = C.$

$f(A) = A'$

$$\left.\begin{array}{l} A \to A' \\ C \to C' \end{array}\right. \Rightarrow f: (AC) \to (A'C) = (AC)$$



Димҗк, (AC) турысы җз-җзенҗ кҗчҗ:

$$f: (AA') \to (AA')$$

$$f: (AC) \to (AC)$$

2^0. Тиңдҗш нокталар аша җтче турылар бер бҗйлҗмгҗ керҗ цҗм бу бҗйлҗмнең җзҗге – *гомологиянең җзҗге* дип атала.

$$f(A) = A' \;\; f(B) = B'$$

$$\begin{cases} B \notin (AA') \\ B \neq B' \end{cases}$$

(AA') цҗм (BB') кисешкҗн ноктаны P дип билгелик, ягъни $(AA') \cap \cap (BB') = P$. $\forall M$ алсак, $f(M) = M'$ цҗм (MM') турысы P аша җтҗ.

Гомология ике төрле булырга мөмкин:

1) Гомологиянең җзҗге гомологиянең кҗчҗрендҗятмаса, мондый гомология ***гиперболик гомология*** дип атала.

2) Гомологиянең җзҗге кҗчҗрдҗ ятса, гомология ***параболик гомология*** дип атала.

3^0. Гомологиянең һзҗгеннһн башка гомология кһчһрендһ ятмаган башка инвариант нокта юк.

Алдагыдан килеп чыга:

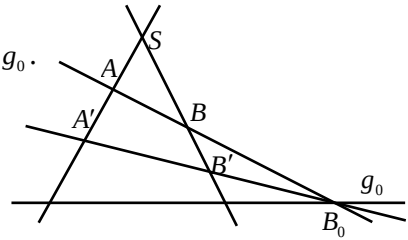
Әгһр гомологиянең һзҗге цһм бер пар $A \to A'$ нокталары бирелсһ, ирекле В ноктасының сурһте B' ны тһбһндһгечһ таба алабыз:

1) (AB) һткһрһбез $B_0 = (AB) \bigcap g_0$.

2) $(A'B_0)$ һткһрһбез.

3) (SB) һткһрһбез.

4) $B' = (SB) \bigcap (A'B_0)$



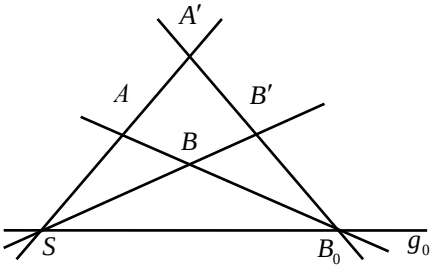
Параболик гомология вакытында да шулай ук эшлһнһ

1) (AB) һткһрһбез $B_0 = (AB) \bigcap g_0$.

2) $(A'B_0)$ һткһрһбез.

3) (SB) һткһрһбез.

4) $B' = (SB) \bigcap (A'B_0)$

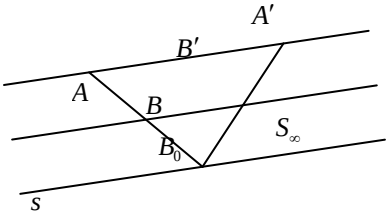


Гомологиянең аерым очраклары

1) s – гомологиянең кһчһре – һз булмаган туры,
S – гомологиянең һзҗге – һз булган нокта.

$$f : A \to A'$$

$$f : B \to B'$$



f һзгһртһе S һзҗкле гомотетия булачак.

$$f:\begin{cases} A \to A' \\ B \to B' \end{cases} \quad AB \| A'B'$$

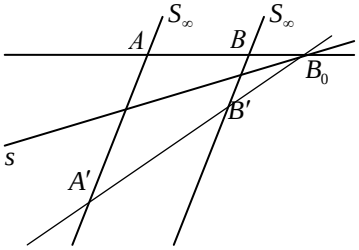
Почмакларның тигезлегеннђн $\frac{A'S}{AS} = \frac{B'S}{BS} \Rightarrow \underline{SA' = kSA} \Rightarrow f -$ k коэфициентлы S нъзђкле гомотетия була.

2) s кнчђре – нъз булган туры, S_∞ нъзђге –нъз булмаган нокта.

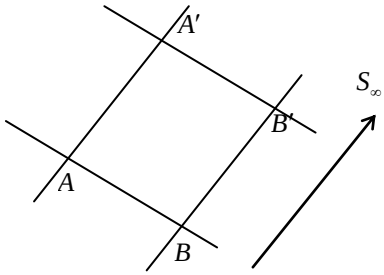
Бу очрак ***перспектив аффинча нъзгђртнь*** дип атала. $S_\infty \in (AA')$. B ноктасының сурђте B' тнбђндђге шарт нигезендђ табыла:

1) $B' \in (A'B_0), B_0 = (AB) \bigcap s$
2) $(BB') \| (AA')$

Бу очракта тиндђш координаталарны тоташтыручы турылар параллель турылар семьялыгына керђ.



Әгђр $S_\infty \in s$ очрагын карасак, (AA') цђм $(BB') \| s$. Бу кнчернне гомология кнчђренђ *параллель кнчерн* дип тђ атыйлар.



3) s кнчђре – нъз булмаган туры, S_∞ нъзђге –нъз булмаган нокта. Бу очракта гомология параллель кнчернгђ кайтып кала. $\vec{p} = AA'$.

Гомологиягђ берничђ мисал карап китик.

Мисал 1: f гомологиясе S – нъзђге, s – кнчђре, A цђм $A' = f(A)$ нокталары белђн бирелгђн. Бирелгђн нокталар нъз булган нокталар цђм s турысы – нъз булган туры. Нъз булмаган турының сурђтен цђм кире сурђтен сызарга.

Чишнь: Нъз булмаган туры ике нъз булмаган нокта белђн бирелђ. Ә нъз булмаган нокта туры белђн билгелђнђ.

Нъз булмаган турының сурђтен төзик:

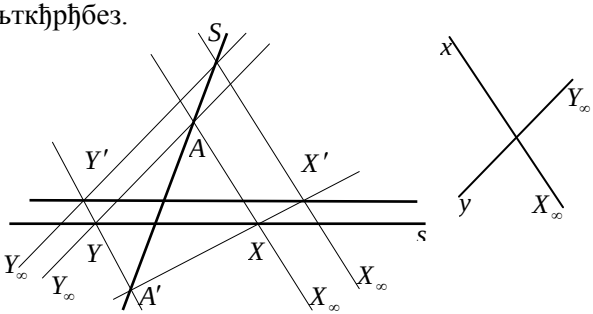
1) SX_∞ цђм SY_∞ нткђрђбез.

2) AX_∞ цҳм AY_∞ ньткҳрҳбез цҳм $X = s \bigcap AX_\infty$ $Y = s \bigcap AY_\infty$ табабыз.

3) $A'X$ цҳм $A'Y$ ньткҳрҳбез.

4) $X' = SX_\infty \bigcap A'X, Y' = SY_\infty \bigcap A'Y$

5) $X'Y'$ ньткҳрҳбез.



Ә хҳзер ньз булмаган турының кире сьрҳтен төзик:

1) SX'_∞ цҳм SY'_∞ ньткҳрҳбез.

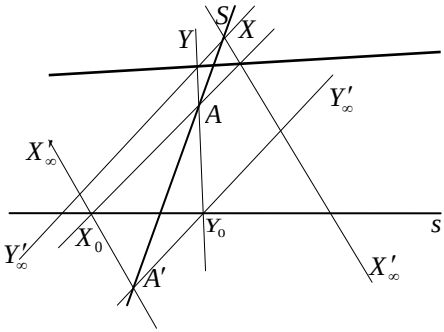
2) $A'X'_\infty$ цҳм $A'Y'_\infty$ ньткҳрҳбез цҳм $X_0 = s \bigcap A'X'_\infty, Y_0 = s \bigcap A'Y'_\infty$ табабыз.

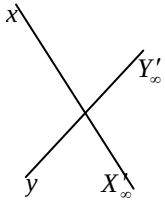
3) AX_0 цҳм AY_0 ньткҳрҳбез.

4) $X = SX'_\infty \bigcap AX_0, Y = SY'_\infty \bigcap AY_0$ табабыз.

5) XY ньткҳрҳбез.

Ул ньз булмаган турының кире сурҳте була.

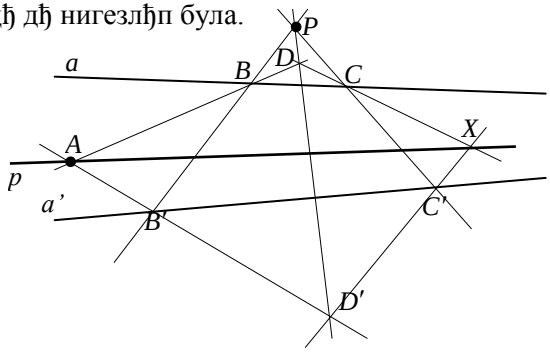


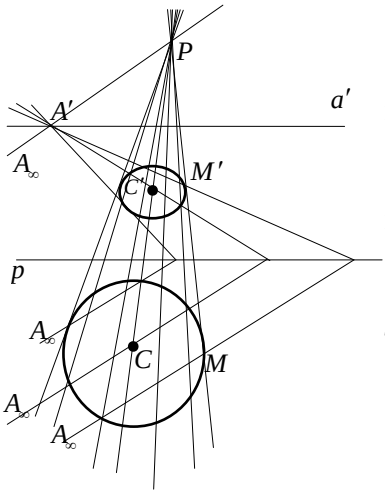


Мисал 2: Чикле сызымда A ноктасы цҳм сызымнан читтҳ кисешньче a цҳм a' турылары бирелгҳн. A ноктасы цҳм a, a' турыларының кисешҥ нокталары аша узучы турыны төзергҳ.

Чишҗ: $f_{P,p}^{a\to a'}$ гомологиясен карыйк. Монда P – ирекле нокта, җ p – эзлҗнелгҗн туры. $B,C\in a$ ирекле нокталарының сурҗтлҗрен B',C' ны төзик. (AB) турысында телҗсҗ нинди D ноктасы алыйк цҗм аның сурҗте D' ны төзик.

DC турысының сурҗте $D'C'$ икҗнлеге ачык, шуңа кҗрҗ аларның кисешҗ ноктасы – X гомология кҗчҗрендҗ ята. AX турысы эзлҗнелгҗн р турысы була. Бу сызымны Дезарг теоремасы ярдҗмендҗ дҗ нигезлҗп була.





Мисал 3: $f_{P,p}^{a_\infty\to a'}$ гомологиясенҗ карата җйлҗнҗнен цҗм аның узҗге-нен сурҗтен табарга.

Чишҗ: Бирелгҗн җйлҗнҗне A_∞ җзҗкле параллель турылар бҗйлҗме белҗн кистерик. A_∞ ноктасының сурҗте булып $A'=a'\bigcap(PA_\infty)$ нокта-сы тора. Моннан бҗйлҗмнен турылары-ның сурҗтлҗрен җиҗел табып була, җ бу сурҗтлҗрдҗн чыгып – җйлҗнҗнен цҗм аның җзҗгенен сурҗтлҗре табыла. Табылган нокталарның сурҗтлҗрен кҗкре белҗн тоташтырабыз цҗм эзлҗнелгҗн сурҗтлҗрне табабыз.

Мөстһкыйль эшлһә өчен кәнегәләр

Тема 1: **Киңәйтелгән туры**

1.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(1, 2)$ ноктасын төзергә.

1.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(-1, 1)$ ноктасын төзергә.

2.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ $(2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

2.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $N(2, -1)$ ноктасын төзергә.

3.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(-1, 2)$ нокталары бирелгән булса.

3.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(2, 3)$ ноктасын төзергә.

4.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(2, -2)$ ноктасын төзергә.

4.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(3, 2)$ ноктасын төзергә.

5.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ $(-1, 2)$ нокталары бирелгән булса.

5.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $N(4, 1)$ ноктасын төзергә.

6.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(-3, -2)$ ноктасын төзергә.

6.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(1, 2)$ ноктасын төзергә.

7.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

7.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(-2, 1)$ ноктасын төзергә.

8.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(4, -1)$ ноктасын төзергә.

8.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(3, -2)$ ноктасын төзергә.

9.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(2, -3)$ ноктасын төзергә.

9.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ (1, - 4) нокталары бирелгән булса.

10.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(-4, 1)$ ноктасын төзергә.

10.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(-3, 2)$ ноктасын төзергә.

11.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(-2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

11.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(-1, 4)$ ноктасын төзергә.

12.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(1, 4)$ ноктасын төзергә.

12.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(2, 3)$ ноктасын төзергә.

13.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ (3, 2) нокталары бирелгән булса.

13.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(4, 1)$ ноктасын төзергә.

14.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(-1, -4)$ ноктасын төзергә.

14.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(4, 5)$ ноктасын төзергә.

15.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(3, 4)$ нокталары бирелгән булса.

15.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(-5, 4)$ ноктасын төзергә.

16.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(2, 6)$ ноктасын төзергә.

16.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(5, 3)$ ноктасын төзергә.

17.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ (4, - 4) нокталары бирелгән булса.

17.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(5, 5)$ ноктасын төзергә.

18.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(1, -4)$ ноктасын төзергә.

18.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(-5, 5)$ ноктасын төзергә.

19.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(0, 4)$ нокталары бирелгән булса.

19.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(5, 0)$ ноктасын төзергә.

20.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(-3, 0)$ ноктасын төзергә.

20.3 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(0, 5)$ ноктасын төзергә.

21.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ (5, 0) нокталары бирелгән булса.

21.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(-5, 4)$ ноктасын төзергә.

22.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(0, -6)$ ноктасын төзергә.

22.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(5, -4)$ ноктасын төзергә.

23.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

23.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(-4, 5)$ ноктасын төзергә.

24.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(2, -2)$ ноктасын төзергә.

24.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(-5, 3)$ ноктасын төзергә.

25.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_г$ (1, - 1) нокталары бирелгән булса.

25.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E_г\}$ реперында $N(5, -3)$ ноктасын төзергә.

26.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_2, E\}$ реперында $M(1, -2)$ ноктасын төзергә.

26.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_г, A_2, E\}$ реперында $N(-4, 3)$ ноктасын төзергә.

27.1 $\bar{d}$ киңйителгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(2, -1)$ нокталары бирелгән булса.

27.2 $\bar{d}$ киңйителгән турысындагы $R = \{A_1, A_г, E\}$ реперында $N(0, 3)$ ноктасын төзергә.

Тема 2**: Киңйителгән яссылык**

1. $R(A_1, A_2, A_3, E)$ **реперында** M **ноктасын төзергә**

1. $M(1, -1, 2)$	10. $M(2, -1, 0)$	9. $M(-2, -1, 2)$
2. $M(3, -2, -1)$	11. $M(0, 2, 3)$	20. $M(-1, 3, 2)$
3. $M(-1, -2, -2)$	12. $M(1, 1, 1)$	21. $M(2, 0, -1)$
4. $M(2, 1, 1)$	13. $M(3, 1, 1)$	22. $M(-1, 1, 1)$
5. $M(-2, 3, 0)$	14. $M(-2, 1, 1)$	23. $M(-3, 1, 1)$
6. $M(1, 2, 1)$	15. $M(1, 3, 1)$	24. $M(-1, 0, 3)$
7. $M(1, -1, 1)$	16. $M(1, -2, 1)$	25. $M(1, -3, 1)$
8. $M(1, 1, 2)$	17. $M(1, 1, 3)$	26. $M(1, 1, -1)$
9. $M(1, 1, -2)$	18. $M(1, 1, -3)$	27. $M(1, 2, 2)$

2. R **реперында** N **ноктасын төзергә:**

1. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E)$	$N(-1, 2, 2)$	15. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E)$	$N(1, 3, 2)$
2. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E)$	$N(1, -2, -2)$	16. $R(A_1, A_2, A_3, E_г)$	$N(1, 3, 3)$
3. $R(A_{1г}, A_{2г}, A_3, E)$	$N(1, -3, 2)$	17 $R(A_{1г}, A_2, A_{3г}, E)$	$N(-1, -2, 2)$

4. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E_г)$ $N(1, -3, -3)$ 18. $R(A_1, A_{2г}, A_{3г}, E)$ $N(-1, -3, 2)$

5. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E_г)$ $N(-1, -2, -2)$

19. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E_г)$ $N(-1, -3, -3)$

6. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E)$ $N(-1, 3, 3)$

20. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E)$ $N(-1, 3, -2)$

7. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E)$ $N(1, 2, -2)$ 21. $R(A_1, A_2, A_3, E_г)$ $N(2, 1, 2)$

8. $R(A_{1г}, A_{2г}, A_3, E)$ $N(1, -3, 3)$ 22. $R(A_{1г}, A_2, A_{3г}, E)$ $N(1, -3, -2)$

9. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E_г)$ $N(-1, 3, 2)$ 23. $R(A_1, A_{2г}, A_{3г}, E)$ $N(-2, 1, 2)$

10. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E_г)$ $N(1, 3, -3)$

24. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E_г)$ $N(-1, -3, -2)$

11. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E)$ $N(-1, 2, -2)$ 25. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E)$ $N(2, -1, 2)$

12. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E)$ $N(-1, -3, 3)$ 26. $R(A_1, A_2, A_3, E_г)$ $N(1, 3, -2)$

13. $R(A_{1г}, A_{2г}, A_3, E)$ $N(2, 1, -2)$ 27. $R(A_{1г}, A_2, A_{3г}, E)$ $N(-1, 3, -3)$

14. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E_г)$ $N(1, -2, 2)$

3. R реперында m турысын төзергђ:

1. $R(A_{1г}, A_2, A_{3г}, E)$ m(0, –2, –2)
2. $R(A_1, A_2, A_3, E_г)$ m(2, 2, 2)
3. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E)$ m(–2, 1, –3)
4. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E_г)$ m(–2, –1, 2)
5. $R(A_1, A_{2г}, A_{3г}, E)$ m(1, –1, 2)
6. $R(A_{1г}, A_2, A_{3г}, E)$ m(–2, 1, 3)
7. $R(A_1, A_2, A_3, E_г)$ m(0, –1, 2)
8. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E)$ m(2, –2, –1)
9. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E)$ m(–2, 0, 2)
10. $R(A_1, A_{2г}, A_{3г}, E)$ m(2, 1, –3)
15. $R(A_{1г}, A_{2г}, A_3, E)$ m(–2, –2, 1)
16. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E)$ m(–2, 2, –1)
17. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E)$ m(2, –1, –2)
18. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E_г)$ m(2, 1, 3)
19. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E_г)$ m(2, –1, 3)
20. $R(A_{1г}, A_{2г}, A_3, E)$ m(–2, –1, –2)
21. $R(A_1, A_2, A_{3г}, E)$ m(2, 2, 1)
22. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E)$ m(–2, 2, 1)
23. $R(A_1, A_{2г}, A_3, E_г)$ m(–2, –1, 3)
24. $R(A_{1г}, A_2, A_3, E_г)$ m(–2, 1, –2)

11. $R(A_{1Г}, A_2, A_{3Г}, E)$ m(3, –2, 0) 25. $R(A_{1Г}, A_{2Г}, A_3, E)$ m(2, –2, 1)
12. $R(A_1, A_2, A_3, E_Г)$ m(–2, –2, –1) 26. $R(A_1, A_2, A_{3Г}, E)$ m(2, 2, –1)
13. $R(A_1, A_{2Г}, A_3, E)$ m(0, 3, 2) 27. $R(A_{1Г}, A_2, A_3, E)$ m(–2, –1, 3)
14. $R(A_{1Г}, A_2, A_3, E_Г)$ m (2, –1, 3)

Тема 3**: Проектив ясылыкта туры**

l_1, l_2 цһм m_1, m_2 турылары бирелгһн. Әгһр $P = l_1 \text{ З } l_2$ цһм $Q = m_1 \text{ З } m_2$ булса, PQ турысының тигезлһмһсен табыгыз.

$l_1(2, 4, 1), l_2(-2, 1, 3), m_1(1, 1, 2), m_2(-4, 2, 1)$

$l_1(1, 2, -1), l_2(-3, 1, 2), m_1(3, 1, 0), m_2(1, -1, 0)$

$l_1(2, 1, 4), l_2(3, 1, 3), m_1(2, -1, 2), m_2(4, 3, 1)$

$l_1(-2, 2, 3), l_2(-2, 1, 1), m_1(1, -1, 2), m_2(-2, 1, 2)$

$l_1(-1, 2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-2, 1, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(-1, 3, 2), m_2(0, 2, 3)$

$l_1(4, 2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(2, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-2, 1, 4), l_2(1, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(-1, 0, 3)$

$l_1(1, 0, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(4, 1, -2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(1, -1, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(3, 2, 3)$

$l_1(3, 2, 0), l_2(3, 1, 1), m_1(-2, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(4, 5, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(2, -2, 3)$

$l_1(2, 1, 1), l_2(0, 1, 1), m_1(2, 1, -2), m_2(1, 4, 3)$

$l_1(5, 2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(1, 4, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(1, -2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(2, -4, 1), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(1, 2, -1), l_2(3, 1, 1), m_1(3, 1, 4), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-1, 2, 0), l_2(3, -1, 1), m_1(2, 1, -3), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(3, 2, -3), l_2(3, 1, 1), m_1(1, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-2, 2, 5), l_2(3, 1, 1), m_1(3, -1, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-1, 2, 3), l_2(-3, 1, 1), m_1(2, 1, -2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-1, 2, 2), l_2(3, 1, -1), m_1(4, -3, 2), m_2(-1, 2, 1)$

$l_1(1, 2, -1), l_2(2, -1, 1), m_1(3, 2, -2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-1, 3, 2), l_2(3, 1, 1), m_1(-4, 2, 1), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(-5, 0, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(-1, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$

$l_1(3, 2, 2), l_2(3, 1, 1), m_1(3, -1, 2), m_2(1, 2, 3)$

$l_1(2, 2, 2), l_2(-2, 1, 3), m_1(1, 1, 2), m_2(-4, 2, 1)$

$l_1(2, 4, 1), l_2(-2, 2, 2), m_1(1, 1, 2), m_2(-4, 2, 1)$

Тема 4: **Дезарг теоремасы**

1. Евклидча яссылыкта *ABCD* параллелограммы цһм аның бер ягында яки ягының дһвамында ятучы *P* ноктасы бирелгһн. Линейка гына кулланып, *P* ноктасы аркылы бирелгһн *n* турысына параллель *l* турысы ньткһргә.

2. Ике *a* цһм *b* параллель турылары цһм аларга кермһньче *C* ноктасы бирелгһн. Линейка гына кулланып, *C* ноктасы аркылы *a* цһм *b* турыларына параллель туры ньткһргә.

3. Евклидча яссылыкта бер параллелограммның каршы ятучы тньбһлһре тиңдһшле рһвештһ икенче параллелограммның каршы ятучы якларында (яки аларның дһвамнарында) урнашканнар. Бу параллелограммнарның симметрия ньзһклһре уртак икһнен исбатларга.

4. ABC цһм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары яссылыкта AA_1, BB_1, CC_1 турылары бер S ноктасында, һ AB_1, BC_1, CA_1 турылары бер S_1 ноктасында кисешерлек итеп урнашканнар. AC_1, BA_1, CB_1 турыларының шулай ук бер ноктада кисешньен исбатларга.

5. *A* цһм *B* нокталары аркылы, озынлыгы *AB* кисемтһсеннһн кыскарак булган линейка ярдһмендһ туры ньткһргә.

6. Дезаргның кире теоремасын Дезаргның туры теоремасына нигезлһнеп исбатларга.

7. Евклидча яссылыкта өчпочмак цһм цһркайсы өчен өчпочмакның бер ягы диагональ, һ калган ике ягы – чиктһш яклары булып торган өч параллелограмм бирелгһн. Бу параллелограммнарның икенче диагональлһре бер турыда кисешньен исбатларга.

8. Кисешњ нокталары сызымнан читтђ булган ике a цђм b турылары бирелгђн. Линейка гына кулланып, бирелгђн C ноктасы аркылы $M = a \cap b$ ноктасын эченђ алган туры њткђрергђ.

9. Евклидча яссылыкта параллелограмм, l турысы цђм бу турыда ятмаучы M ноктасы бирелгђн. Линейка гына кулланып, M ноктасы аркылы l турысына параллель туры њткђрергђ.

10. m турысы цђм бу турыда ятмаучы A цђм B нокталары бирелгђн. Линейка гына кулланып, AB турысын њткђрмичђ, AB цђм m турыларының кисешњ ноктасын төзергђ.

11. Евклидча яссылыкта трапециягђ дњртпочмак камалган. Трапециянең параллель яклары дњртпочмакның диагоналенђ параллель. Трапециянең параллель булмаган яклары дњртпочмакның икенче диагоналендђ кисешњен исбатларга.

12. ABC өчпочмагының тњбђлђре аркылы бер S ноктасында кисешњче турылар њткђрелгђн. $A\ddot{y} = AS \cap BC, B\ddot{y} = BS \cap AC, C\ddot{y} = CS \cap AB$. $BC \cap B\ddot{y}C\ddot{y}, AC \cap A\ddot{y}C\ddot{y}$, $AB \cap A\ddot{y}B\ddot{y}$ кисешњ нокталарының бер турыда ятуын исбатларга.

13. Дезарг өчтњбђлеклђренең бер тњбђсе њзбулмаган нокта булган очракта Дезарг конфигурациясенең сызымын сызарга.

14. p турысы ABC өчпочмагы яссылыгында ята. $K = BC \cap p, L = CA \cap p$, $M = AB \cap p, R = BL \cap CM, S = CM \cap AK, T = AK \cap BL$. AR, BS, CT турыларының бер ноктада кисешњен исбатларга.

15. Дезарг өчтњбђлеклђренең тиңдђш булмаган ике тњбђсе њзбулмаган нокталар булган очракта Дезарг конфигурациясенең сызымын сызарга.

16. ABC өчпочмагы цђм аның яссылыгында бер а турысында ятучы P, Q, R нокталары бирелгђн. X, Y, Z тњбђлђре тиңдђшле рђвештђ ABC өчпочмагының BC, CA, AB якларында ятучы, ђ YZ, ZX, XY яклары тиңдђшле рђвештђ P, Q, R нокталары аша њтњче XYZ өчпочмагы төзергђ.

17. Дезарг өчтњбђлеклђренең берсенең ике тњбђсе њзбулмаган нокталар булган очракта Дезарг конфигурациясенең сызымын сызарга.

18. $A_1A_2A_3$ өчпочмагы яссылыгында M Ÿ□м N нокталары бирелгђн. A_1M, A_2M, A_3M турылары $A_1A_2A_3$ өчпочмагының каршы ятучы якларын тиңдђшле рђвештђ M_1, M_2, M_3 нокталарында кисеп њтђ. A_1N, A_2N, A_3N турылары $M_1M_2M_3$ өчпочмагының каршы ятучы

якларын тиңдәшле рәвештә P_1, P_2, P_3 нокталарында кисеп үтә. M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3 турыларының бер ноктада кисешүен исбатларга.

19. Дезарг теоремасын кулланып өчпочмакның медианаларының бер ноктада кисешүен исбатларга.

20. Евклидча яссылыкта $A_1A_2A_3A_4$ параллелограммы үәм аның бер ягында яки ягының дәвамында ятучы M ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, M ноктасы аркылы бирелгән а турысына параллель l турысы үткәрергә.

21. Кисешү нокталары чикле сызымга кермәгән ике пар туры: p, q үәм u, v бирелгән. $p \cap q = A, u \cap v = B$. (AB) турысының сызымга кергән өлешен сызарга.

22. Ике m үәм n параллель турылары үәм аларга кермәүче P ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, P ноктасы аркылы m үәм n турыларына параллель туры үткәрергә.

23. $ABCD$ трапециясе $[AB]$ нигезенә параллель булган ике p үәм q турылары белән кистерелгән. $p \cap (AD) = M, q \cap (BD) = N$, $p \cap (AC) = P, q \cap (BC) = Q$. $MN \cap PQ$ ноктасының (AB) турысында ятуын исбатларга.

24. Кисешү нокталары сызымнан читтә булган ике p үәм q турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, бирелгән P ноктасы аркылы $N = p \cap q$ ноктасын эченә алган туры үткәрергә.

25. ABC Ÿ□м DBC өчпочмаклары өч параллель туры p, q, v=(AD) турылары белән кистерелгән. $p \cap (AB) = M, p \cap (DB) = P$, $q \cap (BC) = Q$. (MN), (PQ) Ÿ□м (BC) турыларының бер турылар бәйләнешендә керүен исбатларга.

26. ABC үәм $A'B'C'$ өчпочмакларының түбәләрен тоташтыручы (AA'), (BB'), (CC') турылары параллель булсалар үәм $(BC) \cap (B'C')$, $(AC) \cap (A'C')$, $(AB) \cap (A'B')$ нокталары булсалар, бу нокталарның бер турыда ятуын исбатларга. Әгәр $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \cap (B'C') = M$, $(AC) \cap (A'C') = N$ булса, $(AB) \parallel (MN)$, ә $(AB) \parallel (A'B')$ үәм $(BC) \parallel (B'C')$ булса, $(AC) \parallel (A'C')$ булуын исбатларга.

27. Сызымда M ноктасы цҺм m, p_1, p_2, q_1, q_2 турылары бирелгҺн. $P = p_1 \text{ З } p_2$ цҺм $Q = q_1 q_2$ – сызымнан читтҺ. M ноктасы белҺн $m \text{ З } (PQ)$ ноктасын тоташтыручы турыны сызарга.

Тема 5: **Турыдагы дөрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы**

A, *B*, *C* нокталарының бер турыда ятуларын ачыклап, (*AB*, *CD*)= m булырлык *D* ноктасын табарга. (*BA*, *CD*), (*AB*, *DC*), (*BA*, *DC*), (*CD*, *AB*), (*AC*, *BD*), (*AD*, *BC*), (*BD*, *CA*) ны табарга.

1. $A(1, 2, 3)$, $B(-3, 2, 4)$, $C(-2, 4, 7)$, m = –2
2. $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 4, -4)$, m = $-\frac{5}{2}$
3. $A(-1, 2, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(5, -1, 1)$, m = 3
4. $A(-1, 2, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(1, 1, 2)$, m = –2
5. $A(2, -3, 1)$, $B(-3, 1, -1)$, $C(0, -7, 1)$, m = 1
6. $A(1, 2, 1)$, $B(2, -2, 3)$, $C(1, -4, 2)$, m = 2
7. $A(-1, 2, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 01)$, m = $-\frac{3}{2}$
8. $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 1, 1)$, m = –3
9. $A(2, 0, -1)$, $B(3, -3, 1)$, $C(1, -3, 2)$, m = $\frac{1}{2}$
10. $A(1, 2, -1)$, $B(4, 1, -1)$, $C(1, -5, 2)$, m = 2
11. $A(-4, 2, 3)$, $B(1, 1, -1)$, $C(-1, 5, 0)$, m =$-\frac{1}{2}$
12. $A(2, -3, 0)$, $B(3, 0, -1)$, $C(1, 3, 1)$, m = 4
13. $A(6, 2, -5)$, $B(2, 2, 1)$, $C(0, 1, 2)$, m = $\frac{7}{2}$
14. $A(1, -2, 5)$, $B(-1, 2, -11)$, $C(-1, 2, 1)$, m = 3
15. $A(-3, 2, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(-1, 0, 3)$, m = $\frac{5}{2}$
16. $A(-2, 4, 7)$, $B(1, 2, 3)$, $C(-3, 2, 4)$, m = –2
17. $A(1, 2, -1)$, $B(3, 4, -4)$, $C(-1, 0, 2)$, m = $-\frac{5}{2}$
18. $A(5, -1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(3, 0, 1)$, m = 3
19. $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, -1, 1)$, m = –2
20. $A(-3, 1, -1)$, $B(2, -3, 1)$, $C(0, -7, 1)$, m = 1
21. $A(4, 1, -1)$, $B(1, 2, -1)$, $C(1, -5, 2)$, m = –2

22. $A(-1, 5, 0)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 1, -1)$, $m = -\frac{1}{2}$

23. $A(3, 0, 1)$, $B(2, -3, 0)$, $C(1, 3, 1)$, $m = 4$

24. $A(0, 1, 2)$, $B(2, 2, 1)$, $C(6, 2, -5)$, $m = \frac{7}{2}$

25. $A(1, -2, 11)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, -2, 5)$, $m = 3$

26. $A(1, 2, 3)$, $B(-3, 2, 4)$, $C(-2, 4, 7)$, $m = -2$

27. $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 4, -4)$, $m = -\frac{5}{2}$

Тема 6: **Дөрт турының катлаулы чагыштырмасы**

a, b, c цөм *d* турыларының бер турылар бөйләнмәнә керәен ачыклап (*ab, cd*) ны табарга.

1. $a(1, 2, 3)$, $b(-3, 2, 4)$, $c(-2, 4, 7)$, $d(0, 8, 13)$
2. $a(-1, 0, 2)$, $b(1, 2, -1)$, $c(3, 4, -4)$, $d(5, 8, -6)$
3. $a(-1, 2, 1)$, $b(3, 0, 1)$, $c(5, -1, 1)$, $d(8, 5, 5)$
4. $a(-1, 2, 1)$, $b(2, -1, 1)$, $c(1, 1, 2)$, $d(7, 1, 8)$
5. $a(2, -3, 1)$, $b(-3, 1, -1)$, $c(0, -7, 1)$, $d(3, -22, 4)$
6. $a(1, 2, 1)$, $b(2, -2, 3)$, $c(1, -4, 2)$, $d(7, -10, 11)$
7. $a(-1, 2, 1)$, $b(3, 0, 1)$, $c(2, -1, 01)$, $d(9, 3, 5)$
8. $a(3, 2, 1)$, $b(1, 0, -1)$, $c(1, 1, 1)$, $d(2, 1, 0)$
9. $a(2, 0, -1)$, $b(3, -3, 1)$, $c(1, -3, 2)$, $d(9, -15, 8)$
10. $a(1, 2, -1)$, $b(4, 1, -1)$, $c(1, -5, 2)$, $d(5, -18, 7)$
11. $a(-4, 2, 3)$, $b(1, 1, -1)$, $c(-1, 5, 0)$, $d(10, 4, -9)$
12. $a(2, -3, 0)$, $b(3, 0, -1)$, $c(1, 3, 1)$, $d(-1, 15, 3)$
13. $a(6, 2, -5)$, $b(2, 2, 1)$, $c(0, 1, 2)$, $d(14, 1, -9)$
14. $a(1, -2, 5)$, $b(-1, 2, -11)$, $c(-1, 2, 1)$, $d(-1, 2, 10)$
15. $a(-3, 2, 1)$, $b(1, -1, 1)$, $c(-1, 0, 3)$, $d(-2, 1, 2)$
16. $a(-2, 4, 7)$, $b(1, 2, 3)$, $c(-3, 2, 4)$, $d(6, 4, 5)$
17. $a(1, 2, -1)$, $b(3, 4, -4)$, $c(-1, 0, 2)$, $d(2, 2, -3)$
18. $a(5, -1, 1)$, $b(-1, 2, 1)$, $c(3, 0, 1)$, $d(4, 1, 2)$
19. $a(-1, 2, 1)$, $b(1, 1, 2)$, $c(2, -1, 1)$, $d(-2, 3, 1)$
20. $a(-3, 1, -1)$, $b(2, -3, 1)$, $c(0, -7, 1)$, $d(5, -4, 2)$
21. $a(4, 1, -1)$, $b(1, 2, -1)$, $c(1, -5, 2)$, $d(-5, 18, -7)$
22. $a(-1, 5, 0)$, $b(-4, 2, 3)$, $c(1, 1, -1)$, $d(13, 1, -11)$
23. $a(3, 0, 1)$, $b(2, -3, 0)$, $c(1, 3, 1)$, $d(7, 12, 5)$
24. $a(0, 1, 2)$, $b(2, 2, 1)$, $c(6, 2, -5)$, $d(6, 5, 1)$
25. $a(1, -2, 11)$, $b(-1, 2, 1)$, $c(1, -2, 5)$, $d(2, -4, 1)$
26. $a(-1, 2, 1)$, $b(3, 0, 1)$, $c(5, -1, 1)$, $d(8, 5, 5)$
27. $a(-1, 2, 1)$, $b(2, -1, 1)$, $c(1, 1, 2)$, $d(7, 1, 8)$

Тема 7: **Гармоник дөрт нокта. Тулы дөрттөбөлек.**

1. AB кисемтәсенең уртасы C һәм (AB) киңәйтелгән турысының өзбулмаган ноктасы D, AB кисемтәсенең очларын гармоник рәвештә бөлөн исбатларга.

2. ABC өчпочмагының төбәсенең эчке һәм тышкы биссектрисалары AB турысын тиңдәшле рәвештә K һәм L нокталарында кисеп өтәләр. A, B, K, L дөрт ноктасы – гармоник булуын исбатларга.

3. Линейка гына кулланып, (AD, BC)= –1 очрагында, A, B һәм C нокталарына гармоник булган дөртенче D ноктасын төзергә.

4. Турыда A, B, C нокталары бирелгән. Аларның әйркайсы өчен калган икесе белән гармоник булырлык дөртенче нокталарын табарга.

5. Линейка гына кулланып, (AC, BD)= –1 очрагында, A, B һәм C нокталарына гармоник булган дөртенче D ноктасын төзергә.

6. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ булса, (AB, CD) ны табарга.

7. Яссылыкта турылар бәйләнешенә өч a, b, с турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, (ad, bс)= –1 очрагында, a, b һәм с турыларына гармоник булган дөртенче d турысын төзергә.

8. Яссылыкта турылар бәйләнешенә өч a, b, с турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, (сd, ab)= –1 очрагында, a, b һәм с турыларына гармоник булган дөртенче d турысын төзергә.

9. Турыда A, B, C нокталары бирелгән. (AB, CD) = 2 булырлык, D ноктасын төзергә.

10. Яссылыкта ике l, m турылары һәм аларда ятмаучы P ноктасы бирелгән. Р ноктасы аркылы ике а һәм b турылары өткәрелгән. $A = a \cap l, B = a \cap m, C = b \cap l, \quad D = b \cap m$. $AD \cap BC$ ноктасының a һәм b турыларын теләсә ничек алганда бер өк, $Q = l \cap m$ ноктасы аша узучы, p турысында ятуын исбатларга.

11. Тулы дөрттөбөлекнең гармоник өзлеген кулланып, бирелгән M ноктасын сызымда бирелгән a һәм b турыларының сызымнан читтә кисешө ноктасы $-L = a \cap b$ ны тоташтыручы турыны сызарга.

12. (сd, ab) = –1 булса, (ab, сd) = –1булуын исбатларга.

13. A, B, C, M һәм N – а турысының төрле биш ноктасы һәм A, M, N нокталары тәңгәл килмәсә, $\frac{(AB,MN)}{(AC,MN)} = (CB,MN)$ булуын исбатларга.

14. Әгәр O нүктәкле турылар бүйләнешенә ике пар a, b һәм c, d турылары гармоник булсалар һәм g турысы O нокта аша үзмәса, g турысының $g \cap a, g \cap b, g \cap c, g \cap d$ нокталары да гармоник булуын исбатларга.

15. (Ике тапкыр перспектив өчпочмаклар турында теорема). ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары яссылыкта AA_1, BB_1, CC_1 турылары бер O_1 нокта аша, ә AB_1, BC_1, CA_1 турылары бер O_2 нокта аша кисешерлек итеп урнашканнар. AC_1, BA_1, CB_1 турыларының шулай ук бер O_3 нокта аша кисешүен исбатларга.

16. $A_1A_2A_3B$ тулы дүртүбәләгенә $C_1 = A_1B \cap A_2A_3$, $C_2 = A_2B \cap A_3A_1$, $C_3 = A_3B \cap A_1A_2$ диагональ нокталары үткәрелгән. $(K_1C_1, A_2A_3) = -1$, $(K_2C_2, A_3A_1) = -1$, $(K_3C_3, A_1A_2) = -1$ чагыштырмалары билгеләнгән K_1, K_2, K_3 нокталарының коллинеар булуын исбатларга.

17. Ирекле $ABCD$ трапециясе бирелгән. $P = (AB) \cap (CD)$. l турысы P нокта аркылы (AD) турысына параллель үтә. $M = l \cap (BD)$ һәм $N = l \cap (AC)$. P нокта аша MN кисемтәсен урталай бүлүен исбатларга.

18. $A_1A_2A_3B$ тулы дүртүбәләгенә $C_1 = A_1B \cap A_2A_3$, $C_2 = A_2B \cap A_3A_1$, $C_3 = A_3B \cap A_1A_2$ диагональ нокталары үткәрелгән. $(K_1C_1, A_2A_3) = -1$, $(K_2C_2, A_3A_1) = -1$, $(K_3C_3, A_1A_2) = -1$ чагыштырмалары билгеләнгән K_1, K_2, K_3 нокталары бирелгән. A_1B, A_2K_2, A_3K_3 турыларының бер H_1 нокта аша кисешүен һәм $(H_1B, A_1C_1) = -1$ булуын исбатларга.

19. ABC өчпочмагы бирелгән. $(AC) \parallel (MN)$ булырлык $M \in AB$ һәм $N \in BC$ нокталары алынган. $P = (AN) \cap (CM)$ һәм $Q = (BP) \cap (AC)$. Q нокта аша AC кисемтәсен урталай бүлүен исбатларга.

20. AB кисемтәсенә урта AB турысының үзбулмаган нокта аша A, B нокталары белән гармоник булуын исбатларга.

21. ABC өчпочмагы бирелгән. $(AB) \parallel (MN)$ булырлык $M \in AC$ һәм $N \in BC$ нокталары алынган. $O = (AN) \cap (BM)$ һәм $(AB) \parallel (OP)$ булырлык $P \in (BC)$. $(BN, PC) = -1$ булуын исбатларга.

22. Ике параллель a цңм b турылары бирегңн. Линейка гына кулланып, a турысында бирелгңн AB кисемтңсенең уртасын төзергң.

23. MN кисемтңсенең уртасы L цңм (MN) киңңйтелгңн турысыныңңзбулмаган ноктасы K, MN кисемтңсенең очларын гармоник рңвештң бңлңңн исбатларга.

24. a цңм b – A ноктасында кисешңче яссылыкның ике турысы цңм c, d – A ноктасында a цңм b турылары белңн төзелгңн почмакның биссектрисалары булсын. $(ab, cd) = -1$ булуын исбатларга.

25. Линейка гына кулланып, $(A_1A_4, A_2A_3) = -1$ очрагында, A_1, A_2 цңм A_3 нокталарына гармоник булган дңртенче A_4 ноктасын төзергң.

26. Әгңр (AB, CD) = –1 булса, (ABC) цңм (ABD) гади чагыштырмалары өчен (ABC) = –(ABD) ңтңлңңн исбатларга.

27. Линейка гына кулланып, $(A_1A_3, A_2A_4) = -1$ очрагында, A_1, A_2 цңм A_3 нокталарына гармоник булган дңртенче A_4 ноктасын төзергң.

Тема 8: **Коллинеациялңр**

Табарга:

а) A ® Aў, B ® Bў, C ® Cў, D ® Dў тиңдңшле нокталары белңн бирелгңн коллинеация тигезлңмңсен (нокталарның координаталары тңбңндң бирелгңн);

б) коллинеациянең кузгалмас нокталарын;

в) коллинеациянең кузгалмас турыларын;

г) Mў- $M(1, 1, -2)$ ноктасының сурңтен;

д) N – Nў(- 2, - 2, 1) ноктасының кире сурңтен;

е) lў- l : $2x_1 + x_3 = 0$ турысының сурңтен;

ж) m - mў: $2x_1 + x_2 + x_3$ турысының кире сурңтен.

1. $A(1, 0, 0)$, Aў(1, 0, - 1); $B(0, 1, 0)$, Bў(0, 1, 0);
   $C(0, 0, 1)$, Cў(0, 0, 1); $D(1, 1, 1)$, Dў(2, 0, - 1)

2. $A(1, 0, 0)$, Aў(2, 4, 8); $B(0, 1, 0)$, Bў(2, - 1, 2);
   $C(0, 0, 1)$, Cў(3, 2, 5); $D(1, 1, 1)$, Dў(2, 5, 7)

3. $A(1, 0, 0)$, Aў(1, 0, - 1); $B(0, 1, 0)$, Bў(0, 1, 0);
   $C(0, 0, 1)$, Cў(0, 0, 1); $D(1, 1, 1)$, Dў(0, 1, - 1)

4. $A(2, 1, 1), A'(2, 1, 5); B(1, 2, 1), B'(2, -1, 3);$
$C(1, -1, 1), C'(-1, 2, 3); D(-1, 1, 1), D'(1, 2, 1)$

5. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(0, 1, -2)$

6. $A(1, 0, 0), A'(1, -1, 21); B(0, 1, 0), B'(-2, 1, -5);$
$C(0, 0, 1), C'(1, -3, -1); D(1, 1, 1), D'(0, -3, -4)$

7. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(2, 0, -2)$

8. $A(1, 0, 0), A'(1, 8, 1); B(0, 1, 0), B'(1, 3, 1);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 2); D(1, 1, 1), D'(2, 11, 4)$

9. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(0, 2, -1)$

10. $A(2, 1, 0), A'(1, 0, 0); B(0, 1, 1), B'(0, 1, 0);$
$C(1, -1, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 3, 0), D'(1, 1, 1)$

11. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(2, 0, -1)$

12. $A(1, 0, 0), A'(4, 6, 1); B(0, 1, 0), B'(-1, -3, -1);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, -1); D(1, 1, 1), D'(3, 3, -1)$

13. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(1, 1, -1)$

14. $A(1, 0, 0), A'(0, 1, 0); B(0, 1, 0), B'(0, 0, 1);$
$C(0, 0, 1), C'(1, 1, 1); D(1, 1, 1), D'(1, 0, 0)$

15. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(1, 1, -1)$

16. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, 0); B(0, 1, 0), B'(-2, 0, -1);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 3, 0); D(1, 1, 1), D'(-1, 4, -1)$

17. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(4, 0, -1)$

18. $A(1, 0, 0), A'(2, 5, -1); B(0, 1, 0), B'(-1, -3, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(2, 3, -2); D(1, 1, 1), D'(3, 5, -3)$

19. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(0, 1, -2)$

20. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, 0); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, -1); D(1, 1, 1), D'(1, 1, 0)$

21. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, -1, 1), D'(1, -1, 0)$

22. $A(1, 0, 0), A'(1, 2, 4); B(1, 1, 1), B'(2, 5, 7);$
$C(1, 1, 2), C'(4, 7, 12); D(1, 1, 3), D'(8, 9, 17)$

23. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 0, 0), D'(0, 0, 1)$

24. $A(1, 1, 4), A'(3, -12, -7); B(1, 1, 5), B'(4, -15, -8);$
$C(1, 1, 6), C'(5, -18, -9); D(1, 1, 7), D'(6, -21, -10)$

25. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(4, -1, 1), D'(0, 1, 4)$

26. $A(1, 0, 0), A'(2, 4, 8); B(0, 1, 0), B'(2, -1, 2);$
$C(0, 0, 1), C'(3, 2, 5); D(1, 1, 1), D'(2, 5, 7)$

27. $A(1, 0, 0), A'(1, 0, -1); B(0, 1, 0), B'(0, 1, 0);$
$C(0, 0, 1), C'(0, 0, 1); D(1, 1, 1), D'(2, 0, -1)$

Тема 9: **Гомология**

1. f гомологиясе S нъзҺге, s кнчҺре, A цҺм $A'= f$ (A) нокталары белҺн бирелгҺн. ТөзергҺ: 1) f (B) ноктасын, B – (AA') турысынң ноктасы;

2) $f^{-1}(C)$ ноктасын, C – бирелгҺн нокта;

3) $f^{2}(D)$ ноктасын, D – бирелгҺн нокта.

2. s гомологиясе өчен w яссылыгында O нъзҗге, d кнчҗре цҗм A, Aў= $s(A)$ – бер пар тиңдҗшле нокталары (A цҗм Aў нокталары тҗңгҗл килми) бирелгҗн. w яссылыгының ирекле M ноктасы өчен аның сурҗте M ў= s (M) ноктасын төзергҗ.

3. f гомологиясе S нъзҗге, s кнчҗре, A цҗм Aў= f (A) нокталары белҗн бирелгҗн. Бирелгҗн d турысының сурҗтен цҗм кире сурҗтен төзергҗ.

4. s гомологиясе өчен w яссылыгында O нъзҗге, д кнчҗре цҗм A, Aў= $s(A)$ – бер пар тиңдҗшле нокталары (A цҗм Aў нокталары тҗңгҗл килми) бирелгҗн. s гомологиясенең нъзҗге O аша нътми торган a турысының сурҗте aў= $s(a)$ турысын төзергҗ.

5. f гомологиясе S нъзҗге, s кнчҗре, A цҗм Aў= f (A) нокталары белҗн бирелгҗн. Сурҗте бирелгҗн q турысында ята торган ($q \neq f$ (p)), бирелгҗн p турысында X ноктасын табырга.

6. s гомологиясе өчен O нъзҗге, a, aў= $s(a)$ цҗм aўў= $s^{-1}(a)$ турылары бирелгҗн. s гомологиясенең кнчҗре д ны төзергҗ.

7. f гомологиясе бер турыда ятмый торган өч A, B, C цҗм аларның сурҗтлҗре Aў= $f(A)$, Bў= $f(B)$, Cў= $f(C)$ нокталары белҗн бирелгҗн. (AAў), (BBў), (CCў) турылары бер нък S ноктасы аша нътҗлҗр. Сурҗте бирелгҗн q турысында ята торган ($q \neq f$ (p)), бирелгҗн p турысында X ноктасын табырга.

8. s гомологиясе өчен өч пар тиңдҗш нокталар бирелгҗн: A, Aў= $f(A)$; B, Bў= $f(B)$; C, Cў= f(C). A, B, C нокталары коллинеар тнгел. s гомологиясенең кнчҗрен цҗм нъзҗген төзергҗ.

9. f гомологиясе киңйәтелгҗн яссылыкта S нъзҗге, s кнчҗре, A цҗм Aў= f (A) нокталары белҗн бирелгҗн. Бирелгҗн нокталар цҗм s турысы – нъзбулган нокталар цҗм турылар. Нъзбулмаган турының сурҗтен цҗм кире сурҗтен төзергҗ.

10. Бирелгҗн a цҗм aў турыларының сызымнан читтҗ кисешнче ноктасы белҗн бирелгҗн A ноктасын тоташтыручы туры сызарга.

11. f гомологиясе киңйәтелгҗн яссылыкта S нъзҗге, s кнчҗре, A цҗм Aў= f (A) нокталары белҗн бирелгҗн. Бирелгҗн нокталар цҗм s турысы – нъзбулган нокталар цҗм турылар. Бирелгҗн ике параллель p цҗм q турыларының кире сурҗтлҗрен төзергҗ.

12. Гомология нъзҗге, кнчҗре цҗм бер пар тиңдҗшле нокталары белҗн бирелгҗн. Бу гомология өчен M ноктасының сурҗтен цҗм кире сурҗтен төзергҗ.

13. f гомологиясе s кңчһре, $S \in s$ңзһге цһм бер пар тиңдһшле нокталары белһн бирелгһн. $BC_г D_г$ өчпочмагының прообразын төзергһ.

14. Гомология киңһйтелгһн аффинча яссылыктаңзһге, кңчһре цһм бер пар тиңдһшле нокталары белһн бирелгһн. Бу гомология өченңзбулмаган турының сурһтен табарга.

15. f гомологиясе s кңчһре, $S \in s$ңзһге цһм бер пар, кңчһрдһн төрле якта ятучы тиңдһшле нокталары белһн бирелгһн. Бер ягы кңчһрендһ, диагональлһренең кисешң ноктасы S булган трапециянең кире сңрһтен табарга.

16. f гомологиясе Sңзһге, s кңчһре, А цһм Aў= f (A) нокталары белһн бирелгһн. Төзергһ:

1) $f(B)$ ноктасын, В – (АAў) турысының ноктасы;

2) $f^{-1}(C)$ ноктасын, C – бирелгһн нокта;

3) $f^2(D)$ ноктасын, D – бирелгһн нокта.

17. f гомологиясе s кңчһре, $S_г \in s$ңзһге цһм бер пар A, Aў нокталары белһн бирелгһн. $d_г$ңзбулмаган турысының сурһтен табарга.

18. s гомологиясе өчен w яссылыгында Oңзһге, d кңчһре цһм A, Aў= $s(A)$ – бер пар тиңдһшле нокталары (А цһм Aў нокталары тһңгһл килми) бирелгһн. w яссылыгының ирекле M ноктасы өчен аның сурһте Mў= s (M) ноктасын төзергһ.

19. f гомологиясе s кңчһре, $S \in s$ңзһге цһм бер пар, кңчһрдһн төрле якта ятучы тиңдһшле нокталары белһн бирелгһн. Бер ягы кңчһрендһ, диагональлһренең кисешң ноктасы S булган квадратның сурһте табарга.

20. f гомологиясе Sңзһге, s кңчһре, А цһм Aў= f (A) нокталары белһн бирелгһн. Бирелгһн d турысының сурһтен цһм кире сурһтен төзергһ.

21. Гомология вакытында ABC өчпочмагы AўB ўC (C – уртак тңбһ) өчпочмагына кңчһ. D ноктасының сурһтен табыгыз.

22. f гомологиясе s кңчһре, $S_г \in s$ңзһге цһм бер пар A, Aў нокталары белһн бирелгһн. $BCD_г$ өчпочмагының сурһтен табарга.

23. f гомологиясе s кңчһре, $S \in s$ңзһге цһм бер пар A, Aў нокталары белһн бирелгһн. s кңчһренһ параллель булган mў цһм nў турыларының кире сурһтлһрен табарга.

24. Гиперболик гомология кӈчӈре, ӈзӈге цӈм бер пар a ® aў турылары белӈн бирелгӈн. Төзергӈ:

a) a турысында ятмаучы ирекле M ноктасының сурӈтен;

b) a турысы белӈн кӈчӈрдӈ кисешӈче ирекле m турысының сурӈтен;

25. Гиперболик гомология киӈйтелгӈн евклидча яссылыкта ӈзбулган кӈчӈре, ӈзӈге цӈм бер пар A ® Aў нокталары белӈн бирелгӈн. Төзергӈ:

a) ирекле M ноктасының сурӈтен;

b) ирекле m турысының сурӈтен;

c) ӈзбулмаган турының сурӈтен.

26. Гиперболик гомология ӈзбулмаган $P_г$ ӈзӈге, ӈзбулмаган p кӈчӈре цӈм бер пар A ® Aў нокталары белӈн бирелгӈн. Бу гомология нинди аффинча ӈзгӈртӈ булып тора? Төзергӈ:

a) ирекле M ноктасының сурӈтен;

b) ирекле m турысының сурӈтен.

27. Параболик гомология киӈйтелгӈн евклидча яссылыкта кӈчӈре цӈм бер пар A ® $A_р$ў нокталары белӈн бирелгӈн. Төзергӈ:

1) ирекле M ноктасының сурӈтен;

2) ирекле m турысының сурӈтен;

3) ӈзбулмаган турының сурӈтен цӈм кире сурӈтен.

ӘДӘБИӘТ

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов – Москва: Просвещение, 1987.

2. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов – Москва: Просвещение, 1975.

3. Казаков П.Г. Параллельные проекции и методы и решения конструктивных задач. – Москва: Учпедгиз, 1957.

4. Четверухин Н.Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. – Москва: Учпедгиз, 1958.

5.Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – Москва: Наука, 1978.

6. Лащенов М.П. Полные и неполные изображения и их применение в педагогическом процессе. – Москва: Учпедгиз, 1963.