КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики

Кафедра общей математики

# Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima

для студентов, обучающихся по специальности “социология”

Учебно-методическое пособие

Казань – 2012

УДК 517(076)

*Печатается по решению*

*Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО*

*«Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

*методической комиссии Института математики и механики*

*Протокол № 1 от 4 октября 2012 г.*

*заседания кафедры общей математики*

*Протокол № 9 от 24 мая 2012 г.*

*Рецензенты:*

к.т.н., доц. КГАСУ Н.А.Иваньшин,

д.ф.-м.н., проф КФУ Ш.Х.Зарипов

Абзалилов Дамир Фаридович,

Михаил Степанович Малакаев,

Широкова Елена Александровна

**Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima** для студентов, обучающихся по специальности "социология". Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2012 г. – 80 с.

Данное учебно-методическое пособие включает в себя сборник практических заданий по высшей математике и краткий справочник команд системы компьютерной алгебры Maxima. Предназначено для студентов-социологов I курса факультета журналистики и социологии КФУ.

# Содержание

# Глава I.

# Практические задания

## § 1. Вычисление определителей

*Матрица* – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из строк (элементов, расположенных по горизонтали) и столбцов (элементов, расположенных по вертикали). Размер матрицы, состоящей из $m$ строк и $n$ столбцов равен $m \times n$.

Матрица с одинаковым числом строк и столбцов называется *квадратной матрицей*. *Главной диагональю* квадратной матрицы называется диагональ, соединяющая левый верхний угол с правым нижним углом. *Побочной диагональю* определителя называется диагональ, соединяющая правый верхний угол с левым нижним углом. Пример квадратной матрицы $n$-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Определитель* (determinant) – это число, характеризующее квадратную матрицу и вычисляемое по определенному правилу, через элементы этой матрицы. Определитель матрицы $A$:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

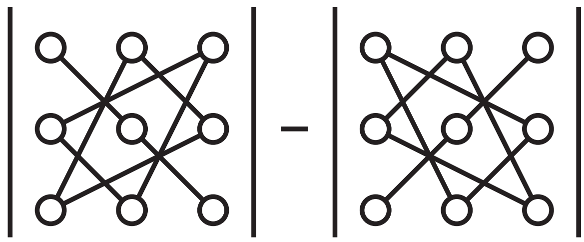
Определитель второго порядка равен разности произведений элементов на главной и побочной диагоналях.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array}$$

Правило вычисления определителя третьего порядка можно схематически представить как "правило треугольников":



Для вычисления определителей третьего и более высоких порядков применяется метод разложении по строке/столбцу.

У любого элемента определителя $a_{ij}$ существует *минор* $M_{ij}$ – это определитель, на порядок ниже исходного, полученный вычеркиванием строки и столбца, в которых стоит элемент $a_{ij}$. Например

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

*Алгебраическое дополнение* $A_{ij}$ к элементу $a_{ij}$ – это минор со знаком "$+$", если $i + j$ четно и со знаком "$-$", если $i + j$ нечетно: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Так $A_{32} = -M_{32}$.

Для разложения определителя по строке выбирают какую-нибудь строку и записывают определитель как сумму элементов этой строки, умноженных на их алгебраические дополнения. Для разложения можно использовать и столбцы.

Так, для определителя третьего порядка разложение по первой строке будет иметь вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Таким образом, вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка, а вычисления определителя 4-го порядка – к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Очевидно, что для упрощения процесса вычисления удобно раскладывать определитель по строке или столбцу, содержащему в качестве элементов наибольшее количество нулей.

Также при вычислении определителей используют их *свойства*:

1. Общий множитель элементов любой строки/столбца определителя можно выносить за знак определителя.

2. Если к любой строке/столбцу определителя прибавить другую строку/столбец умноженную на число, то определитель не изменится.

Используя приведенные свойства определителей, можно упростить их вычисление, применяя метод разложения по строке/столбцу. Идея метода: в какой-нибудь строке/столбце определителя по свойству 2 сделать все нули, кроме одного элемента, чтобы в разложении определителя по этой строке/столбцу осталось одно слагаемое.

**Пример.** Найдем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Прибавим ко второму столбцу третий, а вычтем из четвертого столбца третий, умноженный на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

В результате этих действий во второй строке остался лишь один ненулевой элемент. Поэтому разложим определитель по этой строке:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Прибавим к третьей строке удвоенную первую и разложим определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -\big(2 \cdot 8 - 7 \cdot (-1)\big) = -23.$$

## 1.1. Задания к теме.

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель, используя правило треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить определитель, используя разложение по строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$$

4. Вычислить определители, используя свойства определителей с последующим разложением:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}, \qquad \text{б)}\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}, \qquad \text{в)}\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определители 4-го порядка:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{б)}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

---

6. Вычислить определители 3-го порядка:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{б)}\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}.$$

7. Вычислить определители 4-го порядка:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{б)}\begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Ответы: 1.** а) $26$, б) $2a$, в) $1$. **2.** $-10$. **3.** $-2b^2$. **4.** а) $-4a^3$, б) $-2x$, в) $(x-y)(y-z)(x-z)$. **5.** а) $36$, б) $15$. **6.** а) $10$, б) $amn$. **7.** а) $-18$, б) $12$.

## § 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

Требуется найти неизвестные $x_1$, $x_2$, …, $x_n$.

**2.1. Метод Крамера.** По *методу Крамера* решение системы $(2.1)$ имеет вид

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– главный определитель системы, а $\Delta_j$ – определители, отличающийся от $\Delta$ $j$-м столбцом: он заменен столбцом из свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Очевидно, что правило Крамера применимо, если $\Delta \neq 0$. При этом исходная система $(2.1)$ имеет *единственное* решение. В том случае, если $\Delta = 0$ и существует хотя бы один из определителей $\Delta_j$ такой, что $\Delta_j \neq 0$, система не имеет решений.

Если $\Delta = 0$ и все $\Delta_j = 0$, то система имеет бесконечное число решений. Для решения таких систем лучше использовать метод Гаусса, рассмотренный далее.

**Пример 1.** Решим систему методом Крамера

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5, \\ 3x - 2y = -2, \\ -x + 5y - z = 7. \end{cases}$$

Сначала сосчитаем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 38.$$

Затем найдем все определители, где столбцы главного определителя заменяются последовательно столбцами свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 24, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 74,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 80.$$

В соответствии с формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}, \qquad y = \frac{37}{19}, \qquad z = \frac{40}{19}.$$

**2.2. Метод Гаусса.** Данный метод основан на эквивалентных преобразованиях системы, при которых решение системы не меняется. Так, решение не изменится, если

1. поменять местами строчки системы,

2. к строчке прибавить или вычесть другую строчку, умноженную на число.

Суть метода заключается в том, чтобы последовательно исключить неизвестные из уравнений системы. Рассмотрим исходную систему $(2.1)$. Предположим, что мы хотим исключить переменную $x_1$ из всех уравнений, кроме одного – первого из уравнений системы. В таком случае в качестве первого уравнения в системе мы должны выбрать то, где коэффициент при $x_1$ отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Изменим второе уравнение системы, вычитая из него первое уравнение, умноженное на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. В новом втором уравнении уже не будет члена с $x_1$. Теперь изменим третье уравнение системы, вычитая из него первое уравнение, умноженные на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$. В новом третьем уравнении также не будет члена с $x_1$. Проделав эту операцию со всеми уравнениями системы, мы получим новую систему, эквивалентную данной и содержащую $x_1$ только в первом уравнении. Теперь исключим неизвестную $x_2$ из всех уравнений, кроме первого и второго. Для этого на второе место поставим то уравнение системы, не содержащее $x_1$, в котором коэффициент при $x_2$ не равен нулю. Будем вычитать это уравнение, умноженное на соответствующее число, из всех уравнений, начиная с третьего, чтобы уничтожить в них члены с $x_2$. Проделывая это со всеми уравнениями системы и последовательно со всеми неизвестными, мы можем получить следующие ситуации.

А) В случае, когда на каком-то шаге мы получим тождество $0 = 0$, мы исключаем данное уравнение из системы и продолжаем выполнение шагов.

Б) В случае, когда на каком-то шаге мы получим соотношение $0 = b$, где $b \neq 0$, мы останавливаемся. Такая система *несовместна* и решений не имеет.

В) Мы дошли до последнего уравнения системы. Если в левой части этого уравнения содержится лишь переменная $x_n$, это означает, что система имеет *единственное решение*. Если же последнее уравнение содержит две или более переменные, система имеет *бесконечное множество решений*.

Далее, начиная с последнего уравнения и поднимаясь выше, последовательно определяются все неизвестные. В случае бесконечного множества решений, все переменные могут содержать произвольные постоянные.

**Пример 2.** Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 5, \\ 3x - 2y &= -2, \\ -x + 5y - z &= 7. \end{cases}$$

Сначала с помощью первого уравнения исключим $x$ из второго и третьего уравнений: из второго уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 3; к третьему уравнению прибавим первое уравнение. Получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 5, \\ \quad y - 9z &= -17, \\ \quad 4y + 2z &= 12. \end{cases}$$

Теперь исключим $y$ из последнего уравнения. Для этого вычтем из него второе уравнение, умноженное на 4. Получим

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 5, \\ \quad y - 9z &= -17, \\ \quad 38z &= 80. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения мы имеем: $z = \frac{80}{38} = \frac{40}{19}$. Зная это значение, найдем $y$ из второго уравнения: $y = -17 + 9 \cdot \frac{40}{19} = \frac{37}{19}$. И, наконец, из первого уравнения определим значение $x = 5 + y - 3z = \frac{12}{19}$.

**Пример 3.** Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - 2y - z &= 4, \\ x + 2y - 3z &= 1, \\ 2x - 4y + 2z &= 3. \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z &= 1, \\ 3x - 2y - z &= 4, \\ 2x - 4y + 2z &= 3. \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z &= 1, \\ -8y + 8z &= 1, \\ -8y + 8z &= 1. \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z &= 1, \\ -8y + 8z &= 1, \\ 0 &= 0. \end{cases}$$

Третье уравнение системы, являющееся тождеством, исключаем. В оставшемся последнем (втором) уравнении содержится две неизвестные, поэтому система имеет бесконечное число решений. Одну неизвестную можно взять произвольно. Пусть $z = C$, где $C$ – некоторая постоянная. Из второго уравнения теперь найдем $y = C - \frac{1}{8}$. Из первого уравнения, подставив вместо $y$ и $z$ их выражения через $C$, найдем значение $x = C + \frac{5}{2}$.

**Пример 4.** Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+3y-z &= 5, \\ -3x+y-3z &= -2, \\ 4x+2y-2z &= 2. \end{cases}$$

Преобразовываем, прибавляя ко второй строчке утроенную первую и вычитая из третьей строчки первую, умноженную на 4:

$$\begin{cases} x+3y-z &= 5, \\ 10y-6z &= 13, \\ 10y-6z &= -18. \end{cases} \sim \begin{cases} x+3y-z &= 5, \\ 10y-6z &= 13, \\ 0 &= -31. \end{cases}$$

Третье уравнение противоречиво $0 \neq -31$. Система решений не имеет.

## 2.3. Задания к теме.

Решить методом Крамера: **1.** $\begin{cases} ax-3y=1, \\ ax-2y=2. \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

Решить методом Гаусса: **4.** $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$

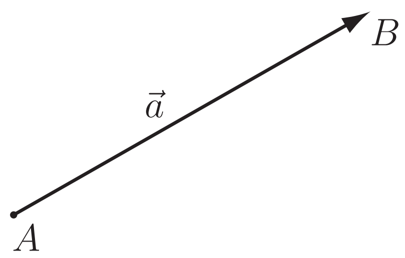
**5.** $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=7. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y=3, \\ 3x+3y+2z=10. \end{cases}$

Решить системы: **7.** $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1. \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}$

**Ответы: 1.** $(4/a, 1)$. **2.** $(5, 6, 10)$. **3.** $(-1, 0, 1)$. **4.** Нет решений. **5.** $((2 + 5C)/3, (5 - 7C)/3, C)$, где $C$ – любое число. **6.** $(-7/3, 23/3, -3)$. **7.** $(2, -1, -3)$. **8.** $(C, -13C, -5C)$. **9.** $((18 - C)/7, (3C - 5)/7, C)$.

## § 3. Векторы на плоскости и в пространстве.




Вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ – направленный отрезок, в котором точка $A$ рассматривается как начало вектора, а $B$ – как конец. Модулем (длиной) вектора называется число, равное длине отрезка. Он обозначается как $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = AB = a$.

Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направленные вдоль координатных осей $x$, $y$, $z$ соответственно, называются ортами. Любой вектор в пространстве можно представить как линейную комбинацию ортов

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

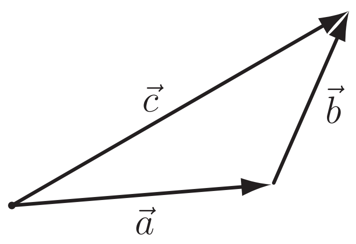
Числа $a_x$, $a_y$, $a_z$ называются координатами вектора и любой вектор однозначно ими определяется $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

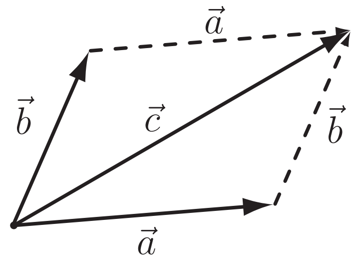
Если заданы координаты начала $A(x_a, y_a, z_a)$ и конца $B(x_b, y_b, z_b)$ вектора, то координаты вектора находятся по формуле

$$a_x = x_b - x_a; \qquad a_y = y_b - y_a; \qquad a_z = z_b - z_a.$$

Связь длины вектора с координатами

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$




Сложение векторов происходит по правилу треугольника или параллелограмма (см. рис.). Если $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то

$$c_x = a_x + b_x, \qquad c_y = a_y + b_y, \qquad c_z = a_z + b_z.$$

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ называется новый вектор длины $\lambda a$ и направленный одинаково ($\lambda > 0$) или противоположно ($\lambda < 0$). Если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то

$$b_x = \lambda a_x, \qquad b_y = \lambda a_y, \qquad b_z = \lambda a_z.$$

### 3.1. Задания к теме.

1. В прямоугольнике $ABCD$ точка $M$ – середина $BC$ и $N$ – середина $CD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
2. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ – медиана $\triangle OAB$. Разложить аналитически и геометрически: 1) вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, 2) вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
3. Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороной $OA = 3$. Обозначив единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, установить зависимость между ними (например, рассмотрением трапеции $OABC$). Выразить затем через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DA}$.
4. Построить параллелограмм на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ и определить его диагонали.
5. В точке $A(2; 1; -1)$ приложена сила $R = 7$. Зная две координаты этой силы $R_x = 2$ и $R_y = -3$, определить координаты конца вектора $\vec{R}$.
6. На плоскости $xOy$ даны точки $A(4; 2)$, $B(2; 3)$, $C(0; 5)$ и построены векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

7. Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки $A(2;1)$, так и от оси $Oy$.
8. Найти центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(4;3)$, $B(-3;2)$, $C(1;-6)$.

---

9. В равнобедренной трапеции $OABC$ угол $\angle BOA = 60°$, $OB = BC = CA = 2$, $M$ и $N$ – середины сторон $BC$ и $AC$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.
10. Даны точки $A(2;2;0)$ и $B(0;-2;5)$. Построить вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Определить его длину.
11. Даны три вершины параллелограмма $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 4;\ 4)$. Найти его четвертую вершину $D$.
12. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(-2;5)$.

**Ответы: 1.** $\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})/2$. **2.** $\vec{a} = 2\vec{c} - \vec{b}$. **3.** $\vec{m} + \vec{p} = \vec{n}$, $\overrightarrow{OB} = 3(\vec{n} + \vec{m})$, $\overrightarrow{BC} = 3(\vec{n} - \vec{m})$, $\overrightarrow{EO} = 3(\vec{m} - \vec{n})$, $\overrightarrow{OD} = 3(2\vec{n} - \vec{m})$, $\overrightarrow{DA} = 6(\vec{m} - \vec{n})$. **4.** $\overrightarrow{OC} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $OC = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{k} - 4\vec{j} - \vec{i}$, $AB = 3\sqrt{2}$. **5.** Конец $B(4;-2;5)$ или $B(4;-2;-7)$. **6.** $\vec{a} = 2\vec{b} - 0.8\vec{c}$. **7.** $(5;5)$, $(5;-3)$. **8.** $(1;-1)$, $R = 5$. **9.** $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{n} - \vec{m})$, $\overrightarrow{OM} = 2\vec{n} - \vec{m}$, $\overrightarrow{ON} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{MN} = 2\vec{m} - \vec{n}$. **10.** $u = 3\sqrt{5}$. **11.** $D(4;0;6)$. **12.** $(0;2;9)$.

## § 4. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин, умноженное на косинус угла между ними: $(\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\varphi$.

Если известны координаты векторов, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства скалярного произведения

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

2) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$

3) $(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$

Вычисление длины вектора: $a=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Вычисление угла между векторами: $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{ab}$.

### 4.1. Задания к теме.

1. Определить угол между векторами $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.
2. Определить углы $\triangle ABC$ с вершинами $A(2;-2;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$.
3. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.
4. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.
5. Вычислить: 1) $(\vec{m}+\vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы с углом между ними $30^\circ$ 2) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $a=2\sqrt{2}$, $b=4$ и угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $135^\circ$.
6. Даны компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причем $a=3$, $b=2$, $c=5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$ и $(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=60^\circ$. Построить вектор $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и вычислить его модуль.
7. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми $60^\circ$.
8. Определить угол между биссектрисами двух плоских углов правильного тетраэдра, проведенными из одной вершины.

---

9. На осях $Ox$, $Oy$, $Oz$ отложить равные отрезки $a=4$ и на них построить куб. Пусть $M$ – центр верхней грани, а $N$ – центр правой боковой грани куба. Определить векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ и угол между ними.
10. Из вершины прямоугольника со сторонами 6 см и 4 см проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол $\varphi$ между ними.
11. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, образующие угол $120^\circ$.

12. К вершине правильного тетраэдра с ребром $a$ приложены три силы, изображаемые его вектор-ребрами. Определить величину равнодействующей этих сил. (Указание: искомая величина равна $a\sqrt{(\vec{m}+\vec{n}+\vec{p})^2}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – единичные векторы данных сил.)

**Ответы: 1.** $135°$. **2.** $B+C=45°$. **3.** $\arccos 0.8$. **4.** $90°$. **5.** 1) $2+\sqrt{3}$, 2) $40$. **6.** 7. **7.** $\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}$. **8.** 5/6. **9.** $\overrightarrow{OM}=2(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$, $\overrightarrow{ON}=2(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$, $\cos\theta=5/6$. **10.** $\cos\varphi=\frac{0.26}{\sqrt{10}}$. **11.** $120°$. **12.** $a\sqrt{6}$.

## § 5. Уравнение прямой.

Общее уравнение прямой имеет вид $Ax+By+C=0$.

При $B=0$ прямая параллельна оси $Oy$ и ее уравнение можно записать в виде $x=a$.

При $B\neq 0$ уравнение прямой записывается в виде, называемом уравнением прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$. Угловой коэффициент $k$ равен тангенсу угла наклона прямой к оси $Ox$. Свободный коэффициент $b$ – величина отрезка на оси $Oy$.

Уравнение прямой с заданным $k$ и проходящей через $A(x_a,y_a)$:

$$y-y_a=k(x-x_a).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_a,y_a)$ и $B(x_b,y_b)$:

$$\frac{y-y_a}{y_b-y_a}=\frac{x-x_a}{x_b-x_a}.$$

Вычисление угла между прямыми: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие параллельности прямых: $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_1k_2=-1$.

### 5.1. Задания к теме.

1. Написать уравнение прямой, пересекающей ось $Oy$ в точке 3 и составляющей с осью $Ox$ угол 1) 45°, 2) 60°, 3) 135°.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через 1) начало координат и точку $A(-2, 3)$, 2) точки $B(-1, 3)$ и $C(4, -2)$.
3. Построить прямую $2x - y = 0$. Через точку $A(-2, 5)$ провести прямую 1) параллельную к данной, 2) перпендикулярную к данной. Написать их уравнения.
4. Построить прямые и определить угол между ними: 1) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{x}{2} + 1$, 2) $3x - 4y = 6$, $8x + 6y = 11$.
5. В треугольнике с вершинами $A(-2, 0)$, $B(2, 6)$ и $C(4, 2)$ проведены высота $BD$ и медиана $BE$. Написать уравнения прямых $AC$, $BD$, $BE$.

---

6. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10см и 6см, приняв большую диагональ за ось $Ox$ и меньшую – за $Oy$.
7. Построить треугольник со сторонами, заданными уравнениями $x + y = 4$, $y = 3x$, $x - 3y - 8 = 0$. Найти вершины треугольника и углы при них.

**Ответы: 1.** $y = x + 3$, $y = \sqrt{3}x + 3$, $y = 3 - x$. **2.** $y = -1.5x$. **3.** $y = 2x + 9$, $y = -0.5x + 4$. **4.** $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $90°$. **5.** $y = \frac{x+2}{3}$, $y = 5x - 4$, $y = 3x - 12$. **6.** $y = \pm\frac{3}{5}x \pm 3$. **7.** $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, $\beta = \gamma = \operatorname{arctg} 2$.

## § 6. Вычисление пределов

Предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ обозначается как $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. В случае, когда функция $f(x)$ непрерывна и определена в точке $x = a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Свойства пределов (если $\lim u$ и $\lim v$ существуют):

1. $\lim(u + v) = \lim u + \lim v$.

2. $\lim(uv) = \lim u \cdot \lim v$.

3. $\lim(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{\lim u}{\lim v}, \qquad \lim v \neq 0$.

Раскрытие неопределенностей – методы вычисления пределов функций, заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, то есть переходят в выражения типа: $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0^0\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$. В случае появления таких неопределенностей невозможно сразу сказать о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют.

**6.1. Раскрытие неопределенностей типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.** Для раскрытия такой неопределенности обычно используется метод разложения на множители числителя и знаменателя с последующим сокращением одинаковых множителей.

**Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. Имеем неопределенность типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Разложим на множители числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

**Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$. Для разложения знаменателя на множители используем прием умножения обеих частей на сопряженное к знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(1+3x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}=\frac{\sqrt{1+0}+1}{3}=\frac{2}{3}$$

**6.2. Раскрытие неопределенностей типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.** Для раскрытия неопределенности этого типа обычно используется метод деления числителя и знаменателя на наивысшую степень переменной.

**Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^2}{x^2+1}$. Имеем неопределенность типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Наивысшая степень числителя и знаменателя равна двум. Делим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-3x^2}{x^2+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-3}{1+0}=-3.$$

Здесь мы учли, что $\left\{\frac{1}{\infty}\right\}=0$:

**Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+4}}$. Выделяем наивысшие степени числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+4}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$=\frac{(1-0)^2}{0\sqrt{1+0}}=\left\{\frac{1}{0}\right\}=\infty.$$

Неопределенности остальных типов обычно сводят к неопределенностям типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ путем алгебраических преобразований.

**6.3. Задания к теме.** Найти пределы:

**1.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$, **2.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-2x+3}$, **3.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$,

**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2-9}$, **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+5}$, **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$,

**7.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, **8.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$,

---

**9.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$, **10.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

**11.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$, **12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$.

**Ответы: 1.** $\frac{1}{5}$. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $0$. **5.** $\infty$. **6.** $2$. **7.** $1$. **8.** $\frac{2}{3}$. **9.** $\frac{1}{4}$. **10.** $-12$. **11.** $\frac{5}{2}$. **12.** $\sqrt{3}$.

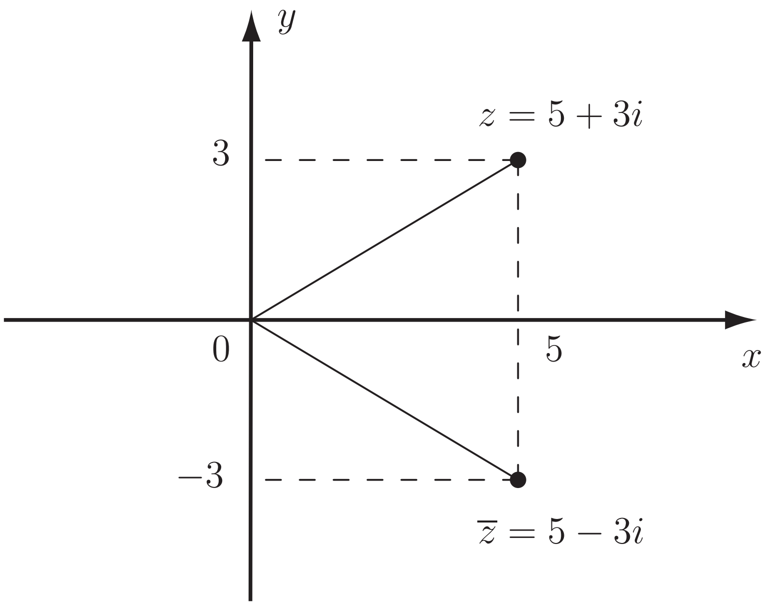
## § 7. Комплексные числа

*Мнимая единица* – это число, квадрат которой равен $-1$:

$i^2=-1$ или $i=\sqrt{-1}$.

*Комплексные числа* – расширение множества вещественных чисел. Любое комплексное число $z$ может быть представлено как формальная сумма $z = x+iy$, где $i$ – мнимая единица, а $x$ и $y$ – вещественные числа, называемые действительной и мнимой частями соответственно: $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$.

Если для геометрической интерпретации вещественных чисел использовалась числовая прямая, то для интерпретации комплексных чисел используется плоскость, где по оси абсцисс откладывается действительная часть, а по оси ординат – мнимая.




Комплексно сопряженным числом к $z = x + iy$ называется число $\overline{z} = x - iy$. Например, для числа $z = 5 + 3i$ комплексно сопряженным будет $\overline{z} = 5 - 3i$.

С комплексными числами тесно связана основная теорема алгебры, которая гласит, что алгебраическое уравнение порядка $n$

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

с комплексными коэффициентами $a_k$ имеет ровно $n$ комплексных корней: $z_1$, $z_2$, $\ldots$, $z_n$. Если все коэффициенты $a_k$ вещественные, корни уравнения будут либо чисто вещественные числа, либо пары комплексно сопряженных корней.

**Пример 1.** Решить квадратное уравнение $x^2 + 4x + 40 = 0$. Вычисляем дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 40 = -144$. Так как $D < 0$ уравнение не имеет вещественных корней, но из основной теоремы алгебры следует, что у квадратного уравнения есть два корня. Учитывая, что $\sqrt{D} = \sqrt{-144} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-1} = 12i$, найдем

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm 12i}{2} = -2 \pm 6i.$$

**Пример 2.** Найти все корни уравнения $x^3 = 8$. Из основной теоремы алгебры следует, что у данного уравнения должно быть три корня:

$$x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x^2+2x+4) = 0.$$

Из условия обращения первой скобки в нуль находим первый корень: $x_1 = 2$, из условия обращения в нуль второй скобки – два остальных:

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -12 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{3}i$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} = -1 - \sqrt{3}i, \qquad x_3 = -1 + -\sqrt{3}i.$$

**7.1. Задания к теме.** Найти все корни уравнений:

**1.** $x^2 + 25 = 0,$ **2.** $x^2 - 2x + 5 = 0,$ **3.** $x^3 + 8 = 0,$

**4.** $x^4 + 5x^2 - 36 = 0,$ **5.** $x^4 + 4x^2 + 4 = 0,$ **6.** $x^4 + 4 = 0,$

---

**7.** $x^4 - 6x^3 + 10x^2 = 0,$ **8.** $x^4 = 81,$ **9.** $x^6 + 64 = 0.$

**Ответы:** **1.** $\pm 5i$. **2.** $1 \pm 2i$. **3.** $-2$, $1 \pm \sqrt{3}$. **4.** $\pm 2$, $\pm 3i$. **5.** $\pm\sqrt{2}i$, $\pm\sqrt{2}i$. **6.** $\pm 1 \pm i$. **7.** $0$, $0$, $3 \pm i$. **8.** $\pm 3$, $\pm 3i$. **9.** $\pm 2i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$.

## § 8. Вычисление производных.

*Производной* функции $f(x)$ называется функция, обозначаемая как $f'(x)$ равная пределу отношения

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### 8.1. Таблица производных элементарных функций

1. $(C)' = 0$ 2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

5. $(e^x)' = e^x$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$

**8.2. Правила вычисления производных.** Для вычисления производных (или, другими словами, дифференцирования) применяются следующие правила:

1. $(Cu)' = Cu'$ – вынесение постоянного множителя.
2. $(u+v)' = u' + v'$ – дифференцирование суммы.
3. $(uv)' = u'v + uv'$ – дифференцирования произведения.
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ – дифференцирование дроби.
5. Если $y = f(u)$, а $u = g(x))$, то $y(x) = f[g(x)]$ – сложная функция (функция от функции). Ее производная $y' = f'(u) \cdot g'(x)$.

**Пример 1.** Найти производную функции $y = 2x^3 - 3\sin x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Используем первое и второе правила дифференцирования:

$$y' = \left(2x^3\right)' + (-3\sin x)' + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 2(x^3)' - 3(\sin x)' + \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 6x^2 - 3\cos x - \frac{2}{3}x^{\left(-\frac{2}{3}-1\right)} = 6x^2 - 3\cos x - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = 6x^2 - 3\cos x - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

**Пример 2.** Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$.

Используем правило дифференцирования дроби:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{(\cos x)' x^2 - \cos x (x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{(-\sin x)x^2 - (\cos x)2x}{x^4} = -\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}.$$

**Пример 3.** Найти производную функции $y = \sin x^2$.

Здесь $y(x)$ – сложная функция, где внешняя функция $f(u) = \sin u$ и внутренняя $u = g(x) = x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = (\sin(x^2))' = (\sin u)'_u \cdot (x^2)'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

**Пример 4.** Найти производную $y = \operatorname{arctg}\left(x^3 e^{2x}\right)$.

По правилу дифференцирования сложной функции вначале берем производную от внешней функции ($\operatorname{arctg} u$):

$$y' = \left(\operatorname{arctg}(x^3 e^{2x})\right)' = \frac{1}{1 + (x^3 e^{2x})^2} \cdot \left(x^3 e^{2x}\right)' = \ldots$$

Далее нам потребуется формула дифференцирования произведения:

$$\ldots = \frac{1}{1 + x^6 e^{4x}} \cdot \left((x^3)' e^{2x} + x^3 \left(e^{2x}\right)'\right) = \ldots$$

Функция $e^{2x}$ также является сложной, поэтому

$$\ldots = \frac{3x^2 e^{2x} + x^3 e^{2x} (2x)'}{1 + x^6 e^{4x}} = \frac{3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x}}{1 + x^6 e^{4x}} = \frac{(3 + 2x) x^2 e^{2x}}{1 + x^6 e^{4x}}.$$

**8.3. Задания к теме.** Найти производные функций:

**1.** $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$. **2.** $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$. **3.** $y = x^2 \cos x$.

**4.** $y = \frac{\cos x}{x^2}$. **5.** $y = x^2 2^x$. **6.** $y = (1 - 5x)^4$. **7.** $y = \sqrt{1 - x^2}$.

**8.** $y = \sqrt{\cos 4x}$. **9.** $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}$.

**10.** $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}\right)$. **11.** $y = \ln \sqrt{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}$.

**12.** $y = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$.

**13.** $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}$. **14.** $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$.

---

**15.** $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$. **16.** $y = \frac{\sqrt{4x + 1}}{x^2}$. **17.** $y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$.

**18.** $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$. **19.** $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$.

**Ответы: 1.** $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$. **2.** $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **3.** $x(2\cos x-x\sin x)$. **4.** $(2\cos x-$ $-x\sin x)/x^3$. **5.** $2^x(2x+x^2\ln x)$. **6.** $-20(1-5x)^3$. **7.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **8.** $-2\operatorname{tg}4x\sqrt{\cos 4x}$. **9.** $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$. **10.** $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$. **11.** $\frac{2}{1-4x^2}$. **12.** $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. **13.** $\frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$. **14.** $\arccos x$. **15.** $\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **16.** $-\frac{2(3x+1)}{x^3\sqrt{4x+1}}$. **17.** $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. **18.** $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **19.** $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$.

## § 9. Исследование функций.

**9.1. Исследование возрастания и убывания функции.** Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на отрезке $[a,b]$, если для любых $x_1$ и $x_2>x_1$ на этом отрезке $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$. Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами монотонности.

**Достаточное условие возрастания(убывания) функции.** Если функция дифференцируема на этом отрезке и $f'(x)>0$, то функция возрастает. Если $f'(x)<0$, то функция убывает.

**9.2. Нахождение точек экстремума функции.** Точка $x=x_0$ называется точкой *максимума* (*минимума*) для функции $y=f(x)$, если $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим) значением функции в некоторой окрестности этой точки. Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – ее экстремумами.

**Необходимым условием экстремума** является равенство нулю или отсутствие первой производной функции в точке $x_0$, т.е. $f'(x_0)=0$ или не существует. Эти точки называются *критическими*.

**Первым достаточным условием экстремума** в точке $x_0$ является смена знака у первой производной функции при переходе $x$ через точку $x_0$. Если $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет знак плюс на минус, то в точке $x_0$ функция имеет максимум, в противном случае – минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то экстремума нет.

**Второе достаточное условие экстремума**. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в критической точке $x_0$. Если $f''(x_0)>0$ $(<0)$, то точка

$x_0$ является точкой минимума (максимума).

**9.3. Исследование выпуклости функции.** Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* (*вниз*) на интервале $(a, b)$, если касательные к графику функции на этом интервале расположены выше (ниже) графика функции.

**Достаточное условие выпуклости функции.** Если функция дважды дифференцируема на этом отрезке и $f''(x) > 0$, то функция является выпуклой вниз. Если $f''(x) < 0$, то функция является выпуклой вверх.

Точки, в которых выпуклость переходит в вогнутость, или наоборот, называются *точками перегиба* функции. При переходе через эти точки вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

**9.4. Асимптоты к графику функции.** Прямая называется *асимптотой* к графику функции, если при стремлении к бесконечности расстояние от графика до прямой стремится к нулю.

Асимптоты бывают *вертикальными*, они показывают поведение функции в окрестности особой точки, когда $y \to \pm\infty$, и наклонными, дающими представление о поведении функции при $x \to \pm\infty$. Если $a$ – особая точка, то уравнение вертикальной асимптоты $x = a$.

Кривая $y = f(x)$ имеет *наклонную* асимптоту при $x \to \infty$, уравнение которой $y = kx + b$, если существуют пределы:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b.$$

В случае $k = 0$ асимптота называется *горизонтальной*, ее уравнение $y = b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

**9.5. План исследования функции и построения ее графика.**

1. Область определения функции, ее особые точки, вертикальные асимптоты.
2. Исследование поведения функции при $x \to \infty$. Наклонные (горизонтальные) асимптоты.
3. Вид функции (четная/нечетная/общего вида). Периодичность.
4. $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ нули функции, интервалы знакопостоянства.
5. $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ точки экстремума, интервалы монотонности.

6. $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ точки перегиба, интервалы выпуклости.

**Пример 1.** Исследовать функцию $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$ и построить её график.

1. Область существования функции – вся числовая ось, то есть $(-\infty, \infty)$. Следовательно, у этой кривой нет особых точек и вертикальных асимптот.

2. Найдем предел функции при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

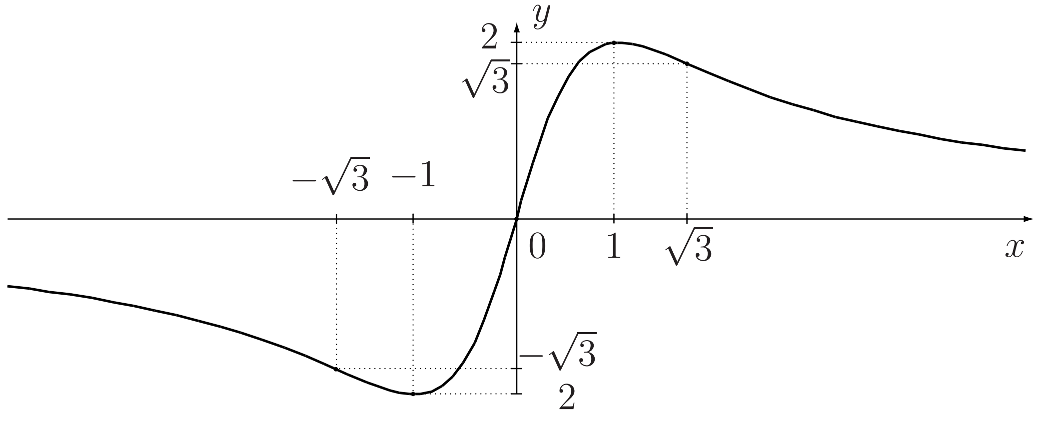
3. $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{4x}{x^2+1} = -f(x)$. Значит, функция является нечетной и ее график симметричен относительно начала координат.

4. $f(x) = \frac{4x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$ – нуль функции. Функция отрицательна при $x \in (-\infty, 0)$ и положительна при $x \in (0, \infty)$.

5. $f'(x) = -\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. У функции две критические точки. При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, на этих интервалах функция убывает. При $x \in (-1, 1)$ $f'(x) > 0$ функция возрастает. Точка $x = -1$ – это точка минимума функции, точка $x = 1$ – точка максимума.

6. $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0 или x = \pm\sqrt{3}$. При $x \in (infty, -sqrt3) \cup (0, \sqrt{3})$ вторая производная $f''(x) < 0$, на этих интервалах функция выпукла вверх. На интервалах $x \in (-sqrt3, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ $f''(x) > 0$ и функция выпукла вниз.

Строим график функции, учитывая точки максимума и минимума, три точки перегиба и горизонтальную асимптоту:



### 9.6. Задания к теме.

Исследовать функцию и построить ее график.

**1.** $y = x^2 + 4x + 5$, **2.** $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$, **3.** $y = \dfrac{1}{1+x^2}$,

**4.** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$, **5.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$, **6.** $y = x^2 e^{-x}$,

---

**7.** $y = x^3 + 6x^2 + 9x$, **8.** $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, **9.** $y = xe^{-x^2/2}$.

## § 10. Нахождение наибольших и наименьших значений величин.

1. Решеткой длиной 120м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.
2. В треугольник с основанием $a$ и высотой $h$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его площадь.
3. Из квадратного листа картона со стороной $a$ вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезанного квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?
4. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10см. При каком большем основании ее площадь будет наибольшей?
5. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения равен 18м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?
6. В полукруг радиуса $R$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его размеры.
7. Из круга вырезан сектор, содержащий угол $\alpha$, а затем свертывается в конус. При каком угле $\alpha$ объем конуса будет наибольшим.

**Ответы:** **1.** 30м × 60м. **2.** $ah/4$. **3.** $a/6$. **4.** 20 см. **5.** $\frac{18}{\pi+4} \approx 2.5$. **6.** $S_{\max} = R^2$ при высоте $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. **7.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

# § 11. Неопределенный интеграл. Вычисление интегралов методами разложения и замены переменной.

*Первообразной* функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Поскольку $(F(x) + C)' = f(x)$, где $C$ – произвольная постоянная, у любой функции $f(x)$ бесчисленное множество первообразных.

Множество всех первообразных одной функции называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

## 11.1. Таблица неопределенных интегралов.

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1)$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Приведенный список не исчерпывает все функции, которые можно проинтегрировать. Существуют приемы, позволяющие проинтегрировать более сложные функции.

**11.2. Интегрирование методом разложения.** Некоторые интегралы можно представить в виде линейной комбинации табличных интегралов, пользуясь свойством линейности интеграла:

$$\int \big[Af(x)+Bg(x)\big]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx.$$

**Пример 1.** Вычислить $\int \frac{x^2-2}{x^3}dx$. Представим подынтегральную дробь в виде разности двух дробей и интеграл от разности заменим на разность интегралов:

$$\int \frac{x^2-2}{x^3}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx = \int x^{-1}dx - 2\int x^{-3}dx =$$

$$= \ln x - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln x + \frac{1}{x^2} + C.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. Воспользуемся тождеством $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Тогда получим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

**Пример 3.** Вычислить $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$. Мы не изменим подынтегральную функцию, если вычтем и прибавим в числителе единицу и разность $x^4-1$ представим в виде $(x^2-1)(x^2+1)$:

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int x^2dx - \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

**11.3. Интегрирование методом замены переменной.** Пусть $x = \varphi(t)$. Тогда дифференциал $dx = \varphi'(t)dt$ и справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

**Пример 4.** Вычислить $\int \sqrt{4x-1}dx$. Сделаем замену $t = 4x - 1$. Тогда $dt = (4x-1)'dx = 4dx$ и $dx = \frac{1}{4}dt$. Следовательно,

$$\int \sqrt{4x-1}dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(4x-1)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$$

**Пример 5.** Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$. В знаменателе выделим полный квадрат: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ и сделаем замену $t = x+1$. При такой замене $dt = dx$. Теперь

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

**Пример 6.** Найти $\int e^{-x^2}xdx$. Сделаем замену $t = -x^2$. Тогда $dt = (-x^2)'dx = -2xdx$ и $dx = dt/(-2x)$:

$$\int e^{-x^2}xdx = \int e^t x\left(\frac{dt}{-2x}\right) = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

**Пример 7.** Найти $\int \operatorname{tg} xdx$. Сделаем замену $t = \cos x$, тогда $dt = (\cos x)'dx = -\sin xdx$ и $\sin xdx = -dt$:

$$\int \operatorname{tg} xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

**11.4. Задания к теме.** Вычислить интегралы:

**1.** $\displaystyle\int \frac{10x^3+3}{x^4}dx$, **2.** $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$, **3.** $\displaystyle\int \cos^2 xdx$,

**4.** $\displaystyle\int (2x+3)^{100}dx$, **5.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$, **6.** $\displaystyle\int \operatorname{ctg} xdx$,

**7.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$, **8.** $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$,

**9.** $\int \frac{(x^2+1)^3}{x^4}dx,$ **10.** $\int \frac{4x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx,$ **11.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx,$

**12.** $\int \sqrt{4x+2}dx,$ **13.** $\int \sin(ax+b)dx,$ **14.** $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx,$

**15.** $\int \frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}},$ **16.** $\int x\sqrt{x^2+1}dx.$

**Ответы: 1.** $10\ln x - \frac{1}{x^3} + C$. **2.** $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln x + C$. **3.** $\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$. **4.** $\frac{(2x+3)^{101}}{202} + C$. **5.** $\frac{\operatorname{tg} 5x}{5} + C$. **6.** $\ln\sin x + C$. **7.** $\ln(1+\ln x) + C$. **8.** $\frac{(1+x^3)^{2/3}}{2} + C$. **9.** $\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$. **10.** $3\sqrt[3]{x}(x-1) + C$. **11.** $-\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$. **12.** $\frac{(4x+2)^{3/2}}{6} + C$. **13.** $-\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$. **14.** $-\frac{1}{3\sin^3 x} + C$. **15.** $-\frac{\ln(1-3e^{2x})}{6} + C$. **16.** $\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$.

## § 12. Интегрирование по частям.

Этот метод основан на формуле

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \quad \text{или, сокращенно,} \quad \int udv = uv - \int vdu.$$

По частям берутся интегралы следующих видов:

$$1. \int \underbrace{P_n(x)}_{u} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}}_{v'} dx, \qquad 2. \int \underbrace{P_n(x)}_{v'} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ln x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{Bmatrix}}_{u} dx,$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен.

**Пример 1.** Найти $\int xe^x dx$. Обозначим $u = x, v' = e^x$. Тогда $u' = 1$ и $v = \int e^x dx = e^x$. Применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$$

**Пример 2.** Найти $\int (\ln x)^2 dx$. В этом примере применим метод интегрирования по частям дважды:

$$\int (\ln x)^2 dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = (\ln x)^2, & u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}, \\ v' = 1, & v = x \end{array} \right\} =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int x\ln x\frac{1}{x}dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u=\ln x, & u'=\frac{1}{x} \\ v'=1, & v=x \end{array} \right\} = x\cdot(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= x\cdot(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$$

### 12.1. Задания к теме.

Вычислить интегралы:

**1.** $\int x\ln(x-1)dx$, **2.** $\int x\operatorname{arctg} x dx$, **3.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$,

**4.** $\int (x-2)\cos 2x dx$, **5.** $\int (4-3x)e^{-3x}dx$, **6.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$,

---

**7.** $\int (2+3x)e^{2x}dx$, **8.** $\int (x+3)\sin x dx$, **9.** $\int x^2\ln x dx$,

**10.** $\int \arcsin x dx$.

**Ответы: 1.** $\frac{(x^2-1)\ln(x-1)}{2} - \frac{x^2+2x}{4} + C$. **2.** $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2}$. **3.** $x\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1} - \frac{\sqrt{4x-1}}{4} + C$. **4.** $\frac{(2x-4)\sin 2x + \cos 2x}{4} + C$. **5.** $(x-1)e^{-3x} + C$. **6.** $4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x}\arcsin x + C$. **7.** $\frac{(6x+1)e^{2x}}{4} + C$. **8.** $\sin x - (x+3)\cos x + C$. **9.** $\frac{x^3(3\ln x - 1)}{9} + C$. **10.** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

## § 13. Определенный интеграл. Вычисление площадей

*Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ называется выражение вида $\int_a^b f(x)dx$. Здесь над и под знаком интеграла появляются концы отрезка, по которому интегрируют, называемые *пределами интегрирования*.

**13.1. Вычисление определенного интеграла.** Для того, чтобы вычислить такой определенный интеграл, следует использовать любую первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ в формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла используется неопределенный интеграл.

**Пример 1.** Вычислить $\int_0^1 x^5dx$. Мы знаем, что первообразной для функции $x^5$ является функция $\frac{x^6}{6}$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 x^5dx = \frac{x^6}{6}\bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{0}{6} = \frac{1}{6}.$$

Вычисление первообразной, как мы уже убедились, часто бывает довольно долгим процессом, где могут использоваться (и не один раз) методы замены переменной и интегрирования по частям. Рассмотрим эти методы в процессе вычисления определенного интеграла.

**13.2. Метод замены переменной в определенном интеграле.** Если сделать замену $t = \varphi(x)$ в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$, то необходимо изменить пределы интегрирования в новом интеграле, где переменной интегрирования становится новая переменная $t$. Нужно в качестве нового нижнего предела интегрирования надо взять значение $\alpha = \varphi(a)$, а в качестве верхнего предела – $\beta = \varphi(b)$.

**Пример 2.** Вычислить$\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\cos^5 x+3\sin^2 x\cos x)dx$. Вынесем $\cos x$ за скобку и выразим оставшуюся в скобках функцию $\cos^4 x$ через $\sin x$: $\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$. Получим:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left[(1-\sin^2 x)^2 + 3\sin^2 x\right] \cos x dx.$$

Нетрудно видеть, что удобно сделать замену: $t = \sin x$. При этом $dt = \cos x dx$ и выражение под интегралом становится зависимым только от $t$. Теперь необходимо изменить пределы интегрирования. Нижним пределом становится $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, а верхним пределом $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Поэтому

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}(\cos^5 x + 3\sin^2 x\cos x)dx = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}[(1-t^2)^2 + 3t^2]dt =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} (1+t^2+t^4)dt = \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{109\sqrt{3}}{160} - \frac{73\sqrt{2}}{120}.$$

**13.3. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.** Этот метод также можно применять в определенном интеграле, при этом необходимо расставить пределы интегрирования:

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv|_a^b - \int\limits_a^b vu'dx.$$

.

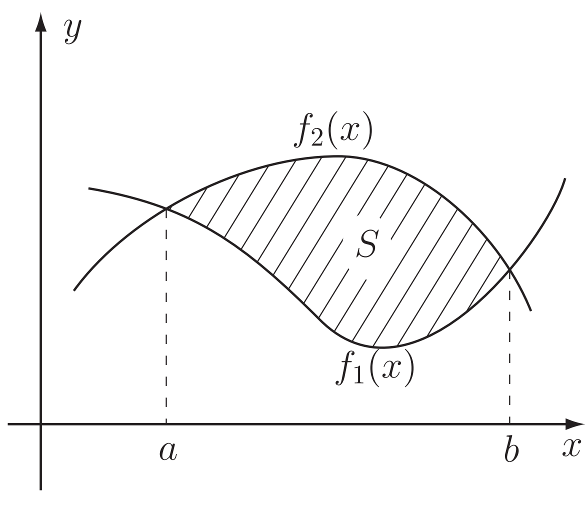
**Пример 3.**

$$\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & u' = \frac{1}{x^2+1} \\ v' = x, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Bigg|_0^1 - \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

**13.4. Вычисление площади области.** Определенный интеграл применяется при вычислении площадей областей. Пусть необходимо вычислить площадь области, расположенной между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ над отрезком $[a, b]$:



Тогда

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

**Пример 4.** Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Прежде всего найдем точки пересечения кривых: $x^2 = 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$. Таким образом, пределами интегрирования будут числа $a = -1$, $b = 1$.

Вычислим теперь площадь по формуле. Кривая $y = 2 - x^2$ над отрезком $[-1, 1]$ находится выше кривой $y = x^2$. Следовательно,

$$S = \int\limits_{-1}^{1} [(2 - x^2) - x^2]dx = \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

**13.5. Задания к теме.** Вычислить площадь области, расположенной между двумя кривыми:

**1.** $y = 9 - x^2$ и $y = 0$.

**2.** $y = \sqrt{16 - x^2}$ и $y = 0$.

**3.** $y = (x - 2)^3$ и $y = 4x - 8$.

**4.** $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

**Ответы: 1.** 36. **2.** 256/3. **3.** 8. **4.** 9.

# § 14. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением $n$-го порядка называется соотношение вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Решить дифференциальное уравнение – это значит, определить функцию $y(x)$, удовлетворяющее этому соотношению.

Простейшее дифференциальное уравнение вида $y'(x) = f(x)$ имеет решение $y(x) = \int f(x)dx$. Это решение определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Решения более сложных дифференциальных уравнений также находятся с точностью до произвольных постоянных (их число равно порядку уравнения).

Так же, как не любая функция может быть проинтегрирована, и представлена в виде элементарных функций, так и не любое дифференциальное уравнение имеет решение, выражающееся через элементарные функции. Мы рассмотрим лишь несколько простых классов дифференциальных уравнений, для которых можно найти аналитическое решение.

**14.1. Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.** Такое уравнение имеет вид $y' = f(x)g(y)$. Запишем производную в виде отношения дифференциалов: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ и разнесем в разные части выражения, содержащие $x$ и $y$. Мы получим равенство двух дифференциалов: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. После интегрирования правой части по $x$, а левой – по $y$ мы получим слева функцию, зависящую от $y$, а справа – функцию, зависящую от $x$, отличающихся на константу: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.

Зависимость между $x$ и $y$, полученная при решении дифференциального уравнения, задает в плоскости $xOy$ семейство кривых из-за присутствия произвольного параметра С. Для того, чтобы выбрать из этого множества единственную кривую, задают *начальное условие* $y(x_0) = y_0$. Таким образом, из множества кривых выбирается единственная – проходящая через точку $(x_0, y_0)$. Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию, называется *задачей Коши.*

**Пример 1.** Найти решение уравнения $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} = 1$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$.

Представим производную в уравнении в виде отношения дифференциалов и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} = 1$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Проинтегрируем обе части последнего соотношения по соответствующим переменным и получим связь между функцией и аргументом:

$$-\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C.$$

Теперь нужно удовлетворить начальному условию $y(0) = 0$. Подставляя заданные значения в полученное решение, получим $-1 = 0 + C$ или $C = -1$. Следовательно, из всех решений следует выбрать то, где константа $C = -1$, то есть, имеем соотношение

$$-\sqrt{1-y^2} = \arcsin x - 1$$

или, выразив $y$, получим

$$y(x) = \pm\sqrt{2\arcsin x - \arcsin^2 x}.$$

**Пример 2.** Найти решение дифференциального уравнения $(1+e^x)y' = ye^x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Интегрируя обе части, получим

$$\ln y = \ln(1+e^x) + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = C(e^x+1).$$

Подставив в полученное решение уравнения значения $x = 0$ и $y = 2$, получим $C = 1$. Поэтому решением поставленной задачи Коши является $y = e^x + 1$.

**14.2. Задания к теме.** Решить задачи Коши для дифференциальных уравнения при заданных начальных условиях:

1. $y'y(x^2-1) = \sqrt{1+y^2}$, $y(0) = 0$.
2. $xy' = -y(1+\ln y)$, $y(1) = 1$.
3. $y'(e^{2x}+5)y = -e^{2x}$, $y(0) = -1$.
4. $y'y\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+y^2}$, $y(0) = 0$.
5. $y'(e^{-x}+1)(y+2) = -e^{-x}$, $y(0) = 0$.
6. $y'y(1+\cos x) = -\sin x$, $y(0) = -1$.

7. $y'y(x^2-1)=\sqrt{2-y^2}$, $y(0)=0$.

8. $y'(e^{2x}-1)y^2=-e^{2x}$, $y(0)=2$.

**Ответы: 1.** $y=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}+1\right)^2-1}$. **2.** $y=e^{\frac{1}{x}-1}$. **3.** $y=-\sqrt{1+\ln 6-\ln(e^{2x}+5)}$. **4.** $y=\pm\sqrt{4-4\sqrt{x^2+1}+x^2}$. **5.** $y^2+4y=2\ln\frac{e^x+1}{2}-2x$. **6.** $y=-\sqrt{2\ln(1+\cos x)-\ln 4+1}$. **7.** $\sqrt{2-y^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\sqrt{2}$. **8.** $y=\sqrt[3]{8-\frac{3}{2}\ln\frac{e^{2x}-1}{e^2-1}}$.

## § 15. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_1y'+p_0y=f(x),$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ – постоянные коэффициенты.

*Однородным* линейным уравнением называются уравнения с нулевой правой частью $\big(f(x)=0\big)$.

Для решения такого уравнения записывается алгебраическое уравнение $n$-й степени

$$k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\ldots+p_1k+p_0=0,$$

называемое *характеристическим уравнением.*

В соответствии с основной теоремой алгебры уравнение $n$ степени имеет ровно $n$ корней, считая все вещественные и комплексные корни с учетом их кратности: $k_1$, $k_2$, …, $k_n$. Каждому из корней соответствует свое частное решение $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x),$$

содержащее $n$ произвольных постоянных и позволяющее решать любую задачу Коши с начальными данными $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.

Действительно, такая задача сведется к поиску конкретных значений постоянных $C_1$, $C_2$, $\ldots$, $C_n$.

Рассмотрим различные случаи корней характеристического уравнения и виды соответствующих им частных решений.

**а) Простой вещественный корень.** Простому вещественному корню $k_1$ характеристического уравнения соответствует частное решение $y_1(x) = e^{k_1 x}$.

**Пример 1.** Решить однородное дифференциальное уравнение $y''' - 5y'' + 6y' = 0$. Запишем характеристическое уравнение $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$. Это уравнение имеет три простых корня: $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Частными решениями для этих корней будут функции $y_1(x) = e^{0x} = 1$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$. Общим решением исходного дифференциального уравнение будет функция $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

**б) Вещественный корень кратности $m$.** Если корень $k_1$ характеристического уравнения имеет кратность $m$, то, соответствующие ему $m$ частных решений имеют вид $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = x e^{k_1 x}$, $\ldots$, $y_m(x) = x^{m-1} e^{k_1 x}$.

**Пример 2.** Решить однородное дифференциальное уравнение $y^{(6)} - 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^6 - 2k^5 + k^4 = 0$ или $k^4(k-1)^2 = 0$, и следовательно, имеет корни $k_1 = 0$ (кратности четыре) и $k_2 = 1$ (кратности два). Поэтому общим решением исходного дифференциального уравнения будет являться функция $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^x + C_6 x e^x$.

**в) Простой комплексный корень.** При решении алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами наличие комплексного корня $k_1 = \alpha + i\beta$ обеспечивает наличие комплексно сопряженного корня $k_2 = \alpha - i\beta$. Этой паре комплексных корней соответствуют частные решения $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

**Пример 3.** Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)} + 4y'' = 0$. Характеристическим уравнением является уравнение $k^4 + 4k^2 = 0$ или $k^2(k^2 + 4) = 0$. Корнями этого уравнения являются $k_1 = 0$ (кратности 2) и комплексные корни $k_2 = 2i$, $k_3 = -2i$. Поэтому общее решение имеет вид $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

**г) Комплексные корни кратности $m$.** В случае, когда характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\alpha \pm i\beta$ кратности $m$, соответствующие этим корням частные решения соответствующего однородного дифференциального уравнения имеют вид $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ и аналогичные решения с синусом: $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

**Пример 4**. Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)}+4y'''+14y''+20y'+ 25y=0$. Характеристическое уравнение можно представить в виде $(k^2+2k+ 5)^2=0$, следовательно, корнями характеристического уравнения являются числа $-1\pm 2i$ (кратности 2). Поэтому общим решение дифференциального уравнения будет функция $y(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2x\cos 2x+C_3\sin 2x+C_4x\sin 2x)$.

**15.1. Задания к теме.** Решить уравнения:

**1.** $y''-4y'+3y=0,$ **2.** $y''-6y'+9y=0,$ **3.** $y''+4y=0,$

**4.** $y^{IV}-16y=0,$ **5.** $y'''-8y=0,$ **6.** $4y^{IV}-3y''-y=0,$

---

**7.** $y''+3y'+2y=0,$ **8.** $y''+2y'+5y=0,$ **9.** $y^{IV}+8y''+16y=0,$

**Ответы: 1.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$. **2.** $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$. **3.** $y=C_1\cos 2x+ C_2\sin 2x$. **4.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. **5.** $y=C_1e^{2x}+ e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$. **6.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos\frac{x}{2}+C_4\sin\frac{x}{2}$. **7.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$. **8.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **9.** $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+ (C_3+C_4x)\sin 2x$.

## § 16. Системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение системы предполагает, что мы должны найти 2 функции $x(t)$ и $y(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} x' = p_{11}x(t) + p_{12}y(t), \\ y' = p_{21}x(t) + p_{22}y(t). \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} p_{11} - k & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Оно представляет собой квадратное уравнение и оно имеет два корня $k_1$ и $k_2$. Общее решение $x(t)$ находится по этим корням так же, как и в 15.. Для нахождения $y(t)$ используется уравнение системы.

**Пример 1.** Решить систему

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - k & 1 \\ 3 & 4 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Оно имеет два различных корня: $k_1 = 1$, $k_2 = 5$. Поэтому $x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$. Из первого уравнения

$$y(t) = x' - 2x = (C_1e^t + 5C_2e^{5t}) - 2(C_1e^t + C_2e^{5t}) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Ответ: $x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$, $y(t) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

**Пример 2.** Решить систему

$$\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -3 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 1 \pm 3i.$$

Поэтому $x(t) = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t$. Теперь из первого уравнения системы найдем $y(t) = \frac{1}{3}(x - x') = -C_2 e^t \cos 3t + C_1 e^t \sin 3t$.

**Пример 3.** Решить систему

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет корень $k = 3$ кратности два. Поэтому $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$. Из первого уравнения найдем $y(t) = x' - 2x = (C_1 + C_2)e^{3t} + C_2 t e^{3t}$.

**16.1. Задания к теме.** Решить следующие системы:

**1.** $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$

**Ответы: 1.** $x(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$, $y(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$. **2.** $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2$, $y(t) = -C_1 e^{3t} + 2C_2$. **3.** $x(t) = e^{2t}(C_1 + C_2 t)$, $y(t) = e^{2t}(C_1 - C_2 + C_2 t)$. **4.** $x(t) = e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$, $y(t) = e^{3t}((C_1 - 2C_2)\cos 2t + (C_2 + 2C_1)\sin 2t)$.

# Глава II.

# Работа в программе Maxima

## § 17. Знакомство с программой Maxima

**17.1. Простейшие операции.** Ввод любой команды в Maxima заканчивается символом “;” или “$”. Первый символ используется, если результат выполнения команды надо вывести на экран, а второй – когда команда выполняется без вывода (также этот символ используется при выводе графиков). Выполнение команды происходит при нажатии комбинации “`Shift+Enter`” или “`Ctrl+Enter`”.

Вычислим сумму дробей $\frac{1}{3}+\frac{3}{7}$. Запишем в программе команду

```
--> 1/3+3/7;
```

и нажмем “`Shift+Enter`”. В результате получим ответ:

(%) $\frac{16}{21}$

Если результат надо получить в десятичной форме, после команды следует дописать “`, numer`”:

```
--> 1/3+3/7, numer;
```

(%) $0.76190476190476$

Программа выводит 16 знаков числа. Изменить это число (например, когда требуется меньшая точность) можно командой `fpprintprec`, указав, сколько знаков числа следует выводить:

```
--> fpprintprec:5;
```

Теперь, при выводе числа в десятичной записи Maxima будет выдавать лишь 5 знаков числа:

```
--> 11/3-3/7, numer;
```
(%) $3.2381$

Для четырех основных математических операций используются символы "+", "-", "*", "/". Отметим, что если в обычной записи знак умножения иногда опускается, в программе Maxima его следует писать всегда. Для указания приоритета операций используются круглые скобки (символы "(" и ")"). Так, для того, чтобы вычислить, чему равна дробь $\dfrac{6(3+4)}{7-3}$, надо использовать следующую команду

```
--> 6*(3+4)/(7-3);
```

Для возведения в степень используется символ "^". Для того, чтобы вычислить $2^{10}$, $5^{-2}$, $\sqrt[3]{27}$ следует писать команды:

```
--> 2^10; 5^(-2); 27^(1/3);
```
(%) $1024$

(%) $\dfrac{1}{25}$

(%) $3$

Для квадратного корня можно также использовать функцию `sqrt()`. Найдем $\sqrt{169}$ и $\sqrt{170}$:

```
--> sqrt(169); sqrt(170)
```
(%) $13$

(%) $\sqrt{170}$

Найдем $\sqrt{170}$ в десятичной форме:

```
--> sqrt(170), numer;
```
(%) $13.038$

**17.2. Переменные и постоянные** Постоянные в Maxima начинаются с символа "%". Так, числа $\pi$, $e$, $i$ следует писать так: "%pi", "%e", "%i". Найдем численное значение $\pi$ и возведем $i$ в квадрат:

```
--> %pi, numer;
```
(%) $3.1416$

```
--> %i^2;
```
(%) $-1$

Буквы латинского алфавита программа понимает как переменные. Заглавные и строчные буквы считаются различными переменными. Программа понимает и русские буквы, но из за того, что многие из них имеют одинаковое написание с латинскими, во избежание путаницы, лучше их не использовать. Заметим также, что при записи латинскими буквами названий греческих букв, при выводе программа запишет результат греческими:

```
--> beta-alpha
```
(%) $\beta-\alpha$

Для присваивания переменным значений используется символ ":" (хотя в обычной записи для этого используется символ "="). Зададим $a = 5$ и $b = 10$. Присвоим переменной $c$ значение $a + b$ и переменной $d$ значение $c \cdot b$:

```
--> a:5;b:10;
```
(%) $5$

(%) $10$

```
--> c:a+b; d:c*b;
```
(%) $15$

(%) $150$

**17.3. Основные математические функции.** В таблице приведен список основных математических функций.

Отметим, что при записи функции в программе Maxima аргумент следует брать в круглые скобки.

Найдем $|\operatorname{arctg}(\ln e)| + \sqrt{e^{\sin\frac{\pi}{3}}}$:

```
--> abs(atan(log(%e)))+sqrt(exp(sin(%pi/3)));
```
(%) $\dfrac{\pi}{4}+e^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

| Запись в Maxima | Функция | Описание |
|---|---|---|
| `abs(x)` | $\lvert x\rvert$ | модуль числа |
| `sqrt(x)` | $\sqrt{x}$ | квадратный корень |
| `exp(x)` | $e^x$ | экспонента |
| `log(x)` | $\ln x$ | натуральный логарифм |
| `sin(x)` | $\sin x$ | тригонометрические функции |
| `cos(x)` | $\cos x$ | |
| `tan(x)` | $\operatorname{tg} x$ | |
| `cot(x)` | $\operatorname{ctg} x$ | |
| `asin(x)` | $\arcsin x$ | обратные тригонометрические функции |
| `acos(x)` | $\arccos x$ | |
| `atan(x)` | $\operatorname{arctg} x$ | |
| `acot(x)` | $\operatorname{arcctg} x$ | |

Функциям можно присваивать имена (командой присваивания ":") и находить их числовые значения при заданном аргументе. Например, функции $\ln 3x + e^{\sqrt{x}}$ присвоим имя func и найдем ее точное и приближенное (в десятичной записи) значение при $x = 5$:

```
--> func:log(3*x)+exp(sqrt(x));
```

(%) $\log(3\,x) + e^{\sqrt{x}}$

```
--> func, x=5;
```

(%) $\log(15) + e^{\sqrt{5}}$

```
--> func, x=5, numer;
```

(%) 12.065

## 17.4. Задания к теме.

**1.** Вычислить $\dfrac{\sqrt{25}+1}{8^{2/3}-1}$.

**2.** Найти значение выражения $\dfrac{\pi^2}{1+\sqrt{e-1}}$ в десятичной записи.

**3.** Задать $a = 2$, $b = a + \dfrac{1}{a}$, $c = b^a$. Найти сумму $a + b + c$.

**4.** Присвоить функции $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ имя th и вычислить значения этой функции при *а*) $x = 1$, *б*) $x = \ln(2)$, *в*) $x = -4$.

*Ответы*: **1.** 2; **2.** 4.2710; **3.** 43/4 **4.** *а*) 0.7616, *б*) 0.6, *в*) $-0.9993$.

## § 18. Преобразование арифметических выражений

Познакомимся с основными командами, служащими для обработки математических выражений, т.е. представления результата в нужном для пользователя виде.

**18.1. Раскрытие скобок и разложение на множители.** Для раскрытия скобок в выражении используется команда expand(). Раскроем скобки в выражении $(x + y)^5$

```
--> expand((x+y)^5);
```

(%) $y^5 + 5\,x\,y^4 + 10\,x^2\,y^3 + 10\,x^3\,y^2 + 5\,x^4\,y + x^5$

Для разложения на множители в программе Maxima используется команда factor(). Разложим на множители $x^6 - 1$:

```
--> factor(x^6-1);
```

(%) $(x-1)\,(x+1)\,\left(x^2 - x + 1\right)\,\left(x^2 + x + 1\right)$

**18.2. Упрощение арифметических выражений.** Для приведения выражений к простому виду существуют команды ratsimp() и radcan(). Первая команда работает с арифметическими выражениями, а вторая упрощает выражения с дробными степенями, логарифмами и экспонентами.

Упростим дробь $\dfrac{x+t}{x^2 - t^2}$:

```
--> ratsimp((x+t)/(x^2-t^2));
```

(%) $\dfrac{1}{x - t}$

Упростим выражение $f = \ln \dfrac{e^{4w}}{z^6}$. Запишем вначале его под именем f:

```
--> f:log(exp(4*w)/z^6);
```

Попробуем преобразовать командой `ratsimp()`:

```
--> ratsimp(f);
```

(%) $\log\left(\frac{e^{4\,w}}{z^6}\right)$

Как мы видим, команда `ratsimp()` упростить это выражение не смогла. Выполним упрощение командой `radcan()`:

```
--> radcan(f);
```

(%) $4\,w-6\log\left(z\right)$

**18.3. Упрощение тригонометрических выражений.** Для преобразований тригонометрических выражений существуют команды `trigexpand()`, `trigreduce()`, `trigsimp()`. Первая команда раскладывает все тригонометрические функции от сумм и кратных углов через функции одинарного угла.

Запишем $\sin 4x$ через функции аргумента $x$:

```
--> trigexpand(sin(4*x));
```

(%) $4\cos\left(x\right)^3\sin\left(x\right)-4\cos\left(x\right)\,\sin\left(x\right)^3$

Запишем $\mathrm{tg}(a+b-c)$ через функции от аргументов $a$, $b$, $c$:

```
--> trigexpand(tan(a+b-c));
```

(%) $-\frac{-\tan\left(a\right)\,\tan\left(b\right)\,\tan\left(c\right)+\tan\left(c\right)-\tan\left(b\right)-\tan\left(a\right)}{\tan\left(b\right)\,\tan\left(c\right)+\tan\left(a\right)\,\tan\left(c\right)-\tan\left(a\right)\,\tan\left(b\right)+1}$

Команда `trigreduce()` выполняет свертывание всех произведений тригонометрических функций в тригонометрические функции от сумм. Запишем $\sin(a+$ $+b)\sin(a)\sin(a-b)$ в виде суммы:

```
--> trigreduce(sin(a-b)*sin(a)*sin(a+b));
```

(%) $\frac{\sin\left(2\,b+a\right)}{4}-\frac{\sin\left(2\,b-a\right)}{4}-\frac{\sin\left(3\,a\right)}{4}+\frac{\sin\left(a\right)}{4}$

Команда `trigsimp()` пытается упросить выражение, применяя к нему простейшие тригонометрические тождества типа $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Упростим выражение

```
--> trigsimp(1-cos(x)^2);
```

(%) $\sin\left(x\right)^2$

Наилучшего результата в преобразовании тригонометрических выражений можно добиться, комбинируя `trigsimp()`, `trigreduce()` и `ratsimp()`/`radcan()`.

### 18.4. Задания к теме.

1. Задать функцию $f(t) = \dfrac{e^{\sin 2t+\cos t} - 1}{1+\ln^2 t}$ и найти ее значение при $t = \pi/3$.
2. Разложить на множители полином $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$.
3. Упростить $\dfrac{16r(x+r)^3 - (x-r)^4 + x^4}{(x+r)^2 - (x-r)^2}$.
4. Упростить $\dfrac{\sqrt{x-a}(x+a) - (x-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.
5. Упростить $\cos^3\alpha \sin 3\alpha + \sin^3\alpha\cos 3\alpha$.

*Ответы*: **1.** 2.9135; **2.** $(x-1)(x^2+1)^2$; **3.** $6x^2 + 6rx + 20r^2$ **4.** $\frac{2a}{\sqrt{x+a}}$; **5.** $\frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

## § 19. Операции с матрицами

**19.1. Задание матриц.** Матрицы вводятся с помощью команды `matrix`, каждая строка пишется в квадратных скобках. Например, зададим матрицу $A$:

```
--> A:matrix([1,2,3], [4,5,6], [7,8,9]);
```

(%) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Можно получить доступ к любому элементу матрицы, записав его индексы в квадратных скобках. Если написать лишь один индекс, Maxima выведет заданную строку.

```
--> A[2,3];A[2];
```

(%) $6$

(%) $[4, 5, 6]$

Команда `transpose()` транспонирует матрицу.

```
--> transpose(A);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (\%)$$

С помощью этой команды можно вывести заданный столбец:

```
--> transpose(A)[3];
```

(%) $[3, 6, 9]$

Команды addrow/addcol добавляют к матрице дополнительную строку/ряд. Заметим, что эти команды не изменяют исходную матрицу (то есть выполнения предыдущих команд матрица $A$ так и останется исходной матрицей $3 \times 3$), а создают новую матрицу. Чтобы использовать полученную матрицу в последующих расчетах, ей необходимо дать имя. Так матрицу $A1$, равную матрице $A$ с добавленной четвертой нулевой строкой можно задать командой

```
--> A1: addrow(A, [0,0,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\%)$$

Создадим матрицу $A2$, добавим к $A$ новый столбец:

```
--> A2: addcol(A, [9,9,9]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix} \quad (\%)$$

Убрать ненужные строки или столбцы из матрицы можно командой submatrix. Убираемые номера строк надо писать через запятую до имени исходной матрицы, а номера столбцов – после. Например, удалим из матрицы $A$ первую строку и третий столбец. Полученной матрице дадим имя $A3$

```
--> A3: submatrix(1, A, 3);
```

(%) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

**19.2. Простейшие операции с матрицами.** Матрица $A$ у нас уже введена, зададим еще одну матрицу $B$:

```
--> B:matrix([1,1,1], [0,1,2], [1,0,0]);
```

(%) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Команды "+" и "-" выполняют сложение и вычитание матриц

```
--> A+B; A-B;
```

(%) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Команда "*" выполняет поэлементное умножение. Для матричного умножения есть команда ".":

```
--> A*B; A.B;
```

(%) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 12 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 14 \\ 16 & 15 & 23 \end{pmatrix}$

Есть также команды поэлементного "^" и матричного "^^" возведения в целую степень:

```
--> A^2; A^^2;
```

(%) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 36 \\ 49 & 64 & 81 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$

Определитель находится командой `determinant()`:

```
--> determinant(A);
```

(%) $0$

```
--> determinant(B);
(%) 1
```

Обратная матрица находится возведением в степень $-1$:

```
--> C: B^^(-1);
```

(%) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Проверяем

```
--> B.C; C.B;
```

(%) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 19.3. Задания к теме.

1. Задать матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найти $\det(A)$ и матрицу $X = A^{-1} \cdot B$.

2. Получить матрицы $A1$ и $A2$ добавлением к матрице $A$ строчки/столбца элементов матрицы $B$.

3. Из матрицы $A$ получить матрицу $A3$, заменив ее второй столбец элементами матрицы $B$.

*Ответ*: **1.** $-8$, $[2, 3, 0]$.

## § 20. Решение уравнений и систем уравнений

**20.1. Аналитическое нахождение корней уравнений.** Для решения уравнения используется команда `solve()`.

Решим квадратное уравнение $x^2 - ax + 5 = 0$, записав его вначале под именем eq:

```
--> eq:x^2-a*x+5=0; solve(eq, x);
```

(%) $[x = a - \sqrt{a^2 - 5}, x = \sqrt{a^2 - 5} + a]$

Второй аргумент в команде `solve` указывает, что надо найти. Например, найдем из того же уравнения переменную $a$:

```
--> solve(eq, a);
```

(%) $[a = \dfrac{x^2 + 5}{2x}]$

Программа находит также комплексные корни. Найдем все три корня уравнения $x^3 = 1$. Найденные корни запишем под именем `roots`:

```
--> roots: solve(x^3=1, x);
```

(%) $[x = \dfrac{\sqrt{3}\, i - 1}{2}, x = -\dfrac{\sqrt{3}\, i + 1}{2}, x = 1]$

Команда `solve` результат выдает в виде списка (матрицы с одной строкой). Если нам нужен лишь второй корень, то его можно получить командой

```
--> roots[2];
```

(%) $x = -\dfrac{\sqrt{3}\, i + 1}{2}$

Этот корень записан в виде выражения. Если для дальнейших расчетов нам требуется лишь его числовое значение (то есть лишь правая часть выражения, после знака =), то для этого используется команда `rhs()`:

```
--> rhs(roots[2]);
```

(%) $-\dfrac{\sqrt{3}\, i + 1}{2}$

**20.2. Аналитическое решение систем уравнений.** Команда `solve` может решать и системы уравнений. Уравнения и переменные пишутся в квадратных скобках через запятую. Решим систему

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Для этого вначале запишем исходные уравнения под именами eq1 и eq2:

```
--> eq1:2*x+5*y=9; eq2:x^2+y^2=5;
```

Далее, для решения системы используем команду `solve()`:

```
--> solve([eq1, eq2], [x, y]);
```

(%) $[[x=2,y=1],[x=-\frac{22}{29},y=\frac{61}{29}]]$

Если система уравнений линейна, можно решать и недоопределенные системы. Решим систему

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$$

```
--> eq1:x+y+z=3; eq2:x+2*y+3*z=6;

--> solve([eq1, eq2], [x, y, z]);
```

(%) $[x=\%r1,y=3-2\%r1,z=\%r1]$

Мы видим, решение нашлось с точностью до постоянной `%r1`.

**20.3. Численное нахождение корней уравнений.** Точное решение удается найти не всегда. Попробуем найти корни уравнения $x^5-6x+2=0$:

```
--> eq:x^5-6*x+2=0; solve(eq, x);
```

(%) $[0=x^5-6\,x+2]$

В этом случае Maxima решить уравнение не смогла. Корни этого уравнения можно найти численно. Если требуется найти корни полинома (как в нашем случае) можно использовать команду `allroots()`. Найдем все корни уравнения eq:

```
--> allroots(eq);
```

(%) $[x=0.33402,x=-1.63921,x=1.57561\,i-0.08112,x=-1.57561\,i-$
$-0.08112,x=1.46744]$

Так как наше уравнение было пятой степени, программа нашла все пять корней, три из них – вещественные, а два – комплексные.

Для поиска корней произвольной функции используется команда `find_root()`. Этой команде надо указать отрезок (то есть наименьшее и наибольшее значение $x$), на котором расположен корень уравнения. Если на этом отрезке корней нет, Maxima выдаст ошибку. Если на отрезке несколько корней, то Maxima найдет лишь один из корней или выдаст ошибку. Поэтому перед использованием команды `find_root()` необходимо провести дополнительное исследование, например, построить график функции и убедиться, что на задаваемом отрезке расположен лишь один корень.

Найдем корень уравнения $\cos(x) = x^2 + x$ на отрезка $x \in [0, 3]$:

```
--> find_root(cos(x)=x^2+x, x, 0, 3);
```

(%) $0.55$

Если взять другой отрезок, например, $[-5, 0]$, то можно найти еще один корень:

```
--> find_root(cos(x)=x^2+x, x, -5, 0);
```

(%) $-1.2512$

**20.4. Численное решение систем уравнений.** Для численного решения систем уравнений в программе Maxima используется метод Ньютона. Для этого необходимо вначале загрузить пакет `mnewton` командой:

```
--> load(mnewton);
```

Решим систему

$$\begin{cases} x + 3\ln x - y^2 & = 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 & = 0. \end{cases}$$

Запишем исходные уравнения под именами eq1 и eq2:

```
--> eq1:x+3*log(x)-y^2; eq2:2*x^2-x*y-5*x+1;
```

Команда `solve` данную систему решить не может и поэтому найдем решение численно. Для этого используется команда `mnewton`. Этой команде необходима начальная точка. Если корней у системы несколько, численно найдется лишь один корень, обычно ближайший к начальной точке. Если начальная точка расположена далеко от корней, решение может и не найтись. Для решения нашей системы в качестве начальной точки возьмем $x = 5$ и $y = 5$:

```
--> mnewton( [eq1,eq2], [x,y], [5,5]);
```

(%) $[[x = 3.7568, y = 2.7798]]$

Сменив начальную точку на $x = 1$ и $y = -1$, найдем другое решение системы:

```
--> mnewton( [eq1,eq2], [x,y], [1,-1]);
```

(%) $[[x = 1.3735, y = -1.525]]$

### 20.5. Задания к теме.

1. Решить уравнение $x^3 - 2a^2x + a^3 = 0$.

2. Численно найти оба корня уравнения $e^x = x + 3$.

3. Найти решение систем уравнений:

а) $\begin{cases} y &= x^2 - 1, \\ x &= y^2 - 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z &= R, \\ x - 2y + 4z &= 3, \\ 3x - y + 5z &= 2. \end{cases}$

4. Найти численное решение системы: $\begin{cases} 3^x - \dfrac{y}{x} &= 5, \\ 2^y + x &= 4. \end{cases}$

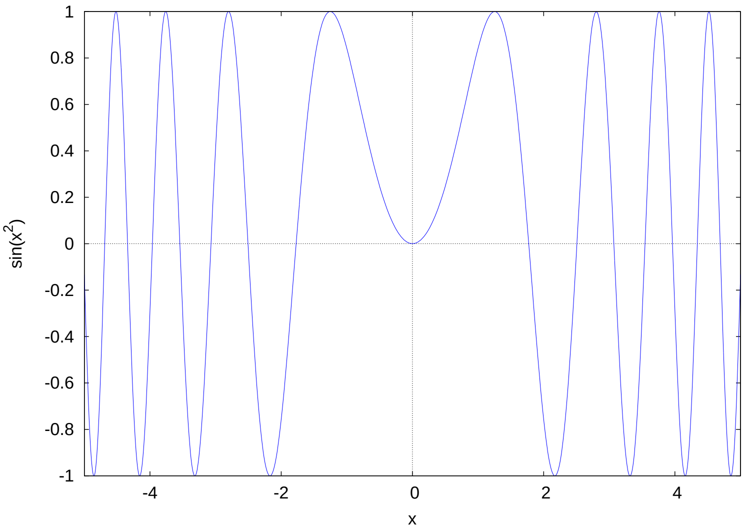
*Ответы*: **1.** Уравнение имеет три корня: $x_1 = -\frac{(\sqrt{5}+1)\,a}{2}$, $x_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)\,a}{2}$, $x_3 = a$; **2.** $x_1 = -2.9475$, $x_2 = 1.5052$; **3.** а) система имеет 4 решения: $x_1 = -1$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = -1$; $x_3 = y_3 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $x_4 = y_4 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; б) $x = \frac{6\,R-31}{25}$, $y = -\frac{7\,R-7}{25}$, $z = -\frac{R-6}{5}$; **4.** $x = 1.5986$, $y = 1.2639$.

## § 21. Построение графиков

**21.1. Построение графиков явно заданных функций.** Для построения графиков есть команды `plot2d()` и `wxplot2d()`. Первая строит график в отдельном окне, вторая – встраивает в лист вычислений. Заметим, при открытом окне с графиком дальнейшие вычисления в программе невозможны, поэтому это окно после просмотра графика необходимо закрыть.

Построим график функции $y = \sin(x^2)$ на отрезке $x \in [-5, 5]$:

```
--> plot2d(sin(x^2), [x, -5, 5])$
--> wxplot2d(sin(x^2), [x, -5, 5])$
```

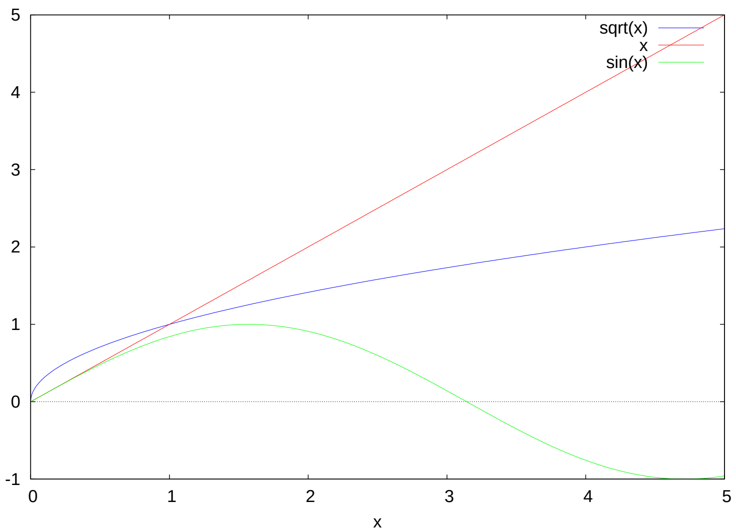



Интервал изменения ординаты программа выбирает сама, исходя из минимальных и максимальных значений функции. Этот интервал можно задать и самому. Построим график $y = \frac{1}{x^2}$ на отрезке $x \in [-5, 5]$ для интервала изменения $y \in [0, 5]$:

```
--> wxplot2d(1/(x^2), [x, -5, 5], [y, 0, 5])$
```

Для построения на одном чертеже нескольких графиков исходные функции записывают через запятую в квадратных скобках:

```
--> wxplot2d([sqrt(x), x, sin(x)], [x, 0, 5])$
```




**21.2. Построение графиков параметрически заданных функций.** Если функция задана в параметрическом виде, используется опция parametric. Построим график функции $x(t) = \cos 3t$, $y(t) = \sin 4t$ в интервале изменения параметра $t \in [-\pi, \pi]$:

```
-->  wxplot2d([parametric, cos(3*t), sin(4*t),
     [t,-%pi,%pi], [nticks,100]])$
```

Параметр nticks задает количество точек, по которым строится график. Чем больше это значение, тем более гладким будет построенная кривая, но при этом увеличивается время, необходимое для ее построения.

Частным случаем параметрически задания функции является задание в полярной системе координат. Построим график кардиоиды $r(\varphi) = 1 - \sin\varphi$:

```
-->  r:1-sin(t);
```

```
-->  wxplot2d([parametric, r*cos(t), r*sin(t),
     [t,-%pi,%pi], [nticks,100]])$
```

**21.3. Построение графиков дискретных множеств.** Еще одной опцией команды plot2d является discrete. Она строит график по заданному набору точек. Зададим координаты шести точек под именем pts и построим график линии, их соединяющий:

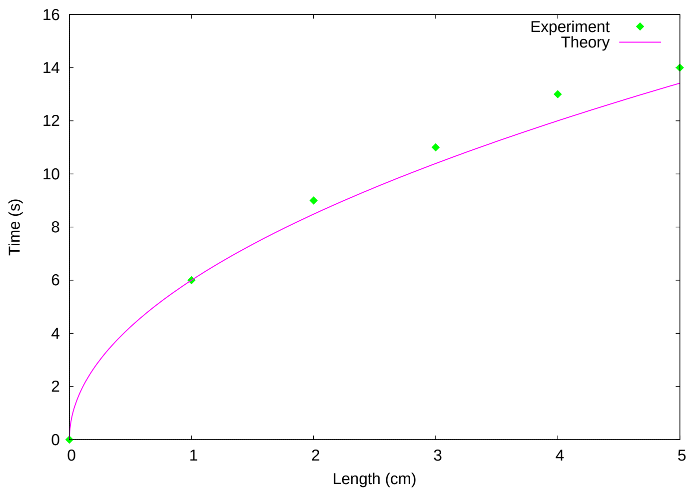
```
-->  pts:[[0,0],[1,6],[2,9],[3,11],[4,13],[5,14]];
```

```
-->  wxplot2d([discrete, pts]);
```

**21.4. Опции команды plot2d.** Команда plot2d имеет множество опций, позволяющих настроить внешний вид чертежа. Для знакомства с некоторыми из них наберем команду:

```
-->  plot2d([[discrete,pts], 6*sqrt(x)], [x,0,5],
     [y,0,16], [style, [points,4,9,12], [lines,3,4]],
     [legend, "Experiment", "Theory"],
     [xlabel, "Length (cm)"], [ylabel, "Time (s)"])$
```

Эта команда строит график двух функций, первая задана дискретным набором точек pts, вторая функцией $6\sqrt{x}$.




Опции, которые были использованы при построении:

`style` – задает стиль линии. Возможные значения `lines`, `points`, `linespoints`. Команда `lines` имеет две дополнительные числовые опции, задающие толщину линии и ее цвет. У команды `points` три опции, задающие размер символа, его цвет и его форму. Команда `linespoints` имеет 4 опции: толщина линии, размер символа, цвет, форма.

`legend` – задает подписи к линиям графиков. Команда `[legend, false]` убирает окно с подписями линий графиков.

`xlabel` – задает подпись к оси абсцисс.

`ylabel` – задает подпись к оси ординат.

Другие возможные опции:

`[box, false]` – отменяет построение рамки вокруг рисунка с графиками.

`[axes, false]` – отменяет построение осей координат.

`[logx]` – ось абсцисс будет логарифмической.

`[logy]` – ось ординат будет логарифмической.

### 21.5. Задания к теме.

1. На одном чертеже постройте графики функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = e^{-x^2}$ ($x \in [-4, 4]$).

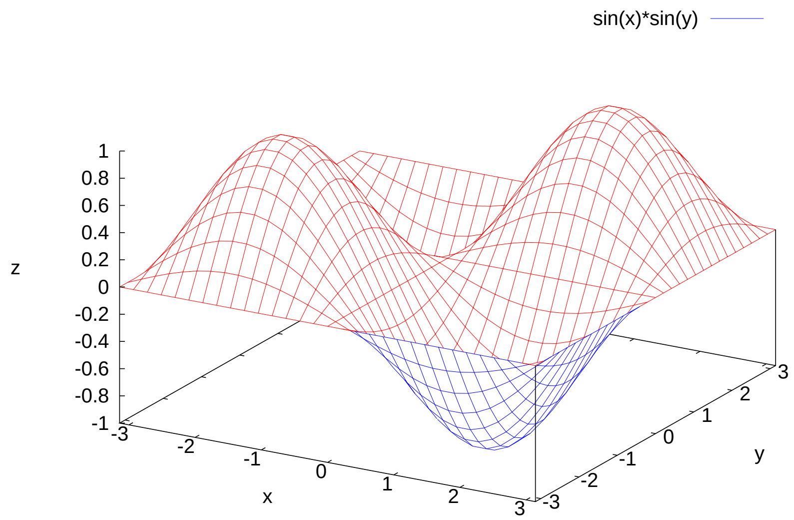
2. Постройте график функции: $\begin{cases} x(t) = \cos t + \cos 5t, \\ y(t) = \sin t - \sin 5t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

3. Постройте пятиконечную звезду, задав координаты ее вершин в виде набора точек.

# § 22. Построение поверхностей

**22.1. Построение явно заданных поверхностей.** Для построения трехмерной поверхности функции двух аргументов есть команды `plot3d()` и `wxplot3d()`. Если для построения использовалась команда `plot3d()`, то нарисованную поверхность можно изучить с разных сторон, вращая его с помощью мышки. Построим с помощью этой команды график функции $z = \sin x \sin y$ на прямоугольнике $x \in [-\pi, \pi]$, $y \in [-\pi, \pi]$:

```
--> plot3d(sin(x)*sin(y),[x,-%pi,%pi],[y,-%pi,%pi])$
```

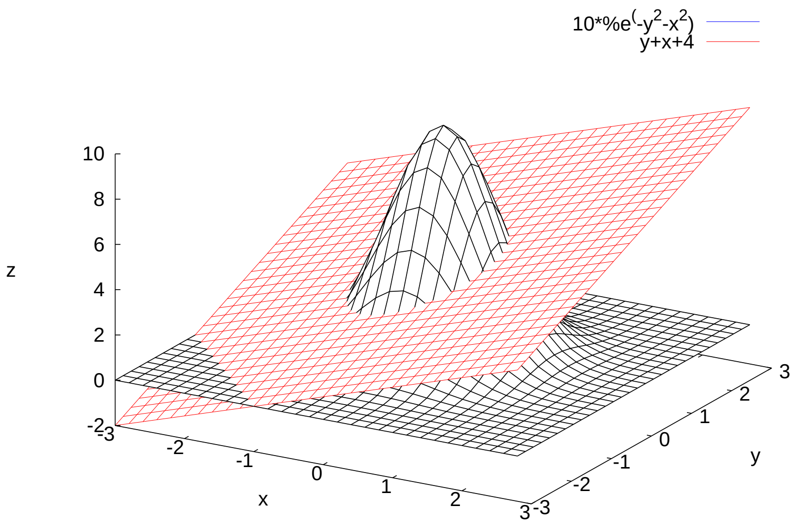



Диапазон изменения значений функции $z \in [z_0, z_1]$ можно выбирать самому, для этого следует к аргументам команды дописать опцию "`[z, z0, z1]`".

На одном чертеже можно разместить графики двух функций, если задать их через запятую в квадратных скобках. Построим две поверхности, заданные функциями $f_1(x, y) = x + y + 4$ и $f_2(x, y) = 10e^{-(x^2+y^2)}$:

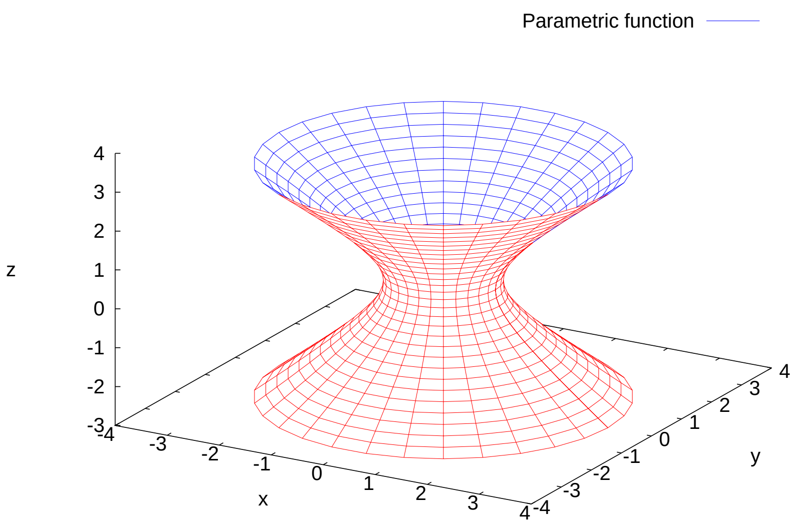
```
--> plot3d([x+y+4, 10*exp(-(x^2+y^2)), [x,-3,3],
    [y,-3,3]], [palette,false])$
```

Использованная здесь опция `[palette, false]` отключает закраску поверхности.




**22.2. Построение параметрически заданной поверхности.** Если поверхность задана параметрически (от двух параметров $u$ и $v$), зависимости $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ следует писать в квадратных скобках через запятую. В качестве примера построения параметрически заданной поверхности рассмотрим пример построения однополостного гиперболоида:

```
--> plot3d([sqrt(1+v^2)*cos(u),sqrt(1+v^2)*sin(u),v],
    [u,0,2*%pi], [v,-3,3])$
```



**22.3. Опции команды plot3d.** Опция `grid` задает число точек разбиения по каждой переменной. Чем больше задаваемое число, тем более гладкой будет построенная поверхность, но увеличивается время ее построения. Пример построения первой поверхности с разбиением $100 \times 100$:

```
--> plot3d(sin(x)*sin(y), [x,-%pi,%pi], [y,-%pi,%pi],
    [grid,100,100])$
```

Опция `color` задает два цвета, в которую следует окрасить нижнюю и верхнюю сетку поверхности. Для того, чтобы она сработала, необходима отключить закраску опцией `[palette,false]`:

```
--> plot3d(sin(x)*sin(y), [x,-%pi,%pi], [y,-%pi,%pi],
    [palette,false],[color,red,green])$
```

Опция `[mesh_lines_color,false]` отключает прорисовку сетки:

```
--> plot3d(sin(x)*sin(y), [x,-%pi,%pi], [y,-%pi,%pi],
    [mesh_lines_color,false])$
```

**22.4. Задания к теме.**

1. На одном чертеже постройте обе части двухполостного гиперболоида $z = \pm\sqrt{1+x^2+y^2}$ ($x \in [-3,3]$, $y \in [-3,3]$).

2. Постройте график тора: $\begin{cases} x = & (2-\cos v)\cos u - 1, \\ y = & (2-\cos v)\sin u - 1, \\ z = & \sin v \end{cases}$ в пределах $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

## § 23. Вычисление пределов

**23.1. Команда `limit`.** Для вычисления пределов в программе Maxima есть команда `limit()`. Найдем первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$:

```
--> limit(sin(x)/x, x, 0);
(%) 1
```

Для обозначения плюс/минус бесконечности используются символы `inf`/`minf`. Найдем второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$:

```
--> limit((1+1/x)^x, x, inf);
```
(%) $e$

Можно находить и односторонние пределы. Для этого в аргументах команды `limit()` надо дописать `plus` для правосторонних и `minus` для левосторонних. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}$ :

```
--> limit(1/x, x, 0, plus);
```
(%) $\infty$

```
--> limit(1/x, x, 0, minus);
```
(%) $-\infty$

### 23.2. Задания к теме.

1. Найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}, \quad \text{б) } \lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

2. Вычислить

$$\text{а) } \lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}, \quad \text{б) } \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+ax}\right).$$

*Ответы*: **1.** а) 8; б) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; **2.** а) $\sqrt{2\pi}$; б) $a$.

## § 24. Дифференцирование.

**24.1. Вычисление производной явной функции.** Для нахождения производной в программе Maxima есть команда `diff()`. Найдем $y'$ и $y''$ функции $y=x^5$:

```
--> f: x^5;
```
(%) $x^5$

```
--> diff(f, x);
```
(%) $5\,x^4$

```
--> diff(f, x, 2);
```

(%) $20\,x^3$

Второй аргумент этой команды определяет переменную дифференцирования, а третий – порядок производной. Команда `diff` работает и в случае функции многих переменных для нахождения частных производных. Вычислим $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}$ для функции $f(x,y) = x^5 y^3$:

```
--> f: x^5*y^3;
```

(%) $x^5\,y^3$

```
--> diff(f, x, 2, y, 1);
```

(%) $60\,x^3\,y^2$

Вычисленную производную программа Maxima выводит в непреобразованном виде. Поэтому для записи производной в удобном виде полученную производную преобразовывают с помощью команд § 18.

**24.2. Нахождение производной неявной функции.** По умолчанию все переменные в Maxima считаются независимыми. Поэтому результат выполнения команды

```
--> diff(y, x);
```

будет нулевой

(%) $0$

Чтобы декларировать, что одна переменная зависит от другой используется команда `depends()`:

```
--> depends(y,x);
```

Теперь результат выполнения команды

```
--> diff(y, x);
```

будет другой:

(%) $\dfrac{d}{d\,x}\,y$

Это используется при нахождении производной неявной функции. Найдем $y'$ неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 1$. Зададим вначале ее под именем `f`:

```
--> f:x^2+y^2=1;
```

(%) $y^2+x^2=1$

Производную f запишем под именем g:

```
--> g:diff(f, x);
```

(%) $2\,y\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+2\,x=0$

Осталось из равенства g выразить производную. Для этого используем команду solve():

```
--> solve(g, diff(y,x));
```

(%) $[\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{x}{y}]$

### 24.3. Задания к теме.

1. Найти производные функций:

$$y=\sqrt{1+\sin 6x},\; y=\arcsin\frac{x-1}{x},\; s=\ln(\sqrt{e^{2t}+1})-\operatorname{arctg}(e^t).$$

2. Найти производную 6 порядка для функции $y=e^{-x}\sin x$.

3. Найти $y'$ для неявно заданной функции $\operatorname{arctg} y=x+y$.

*Ответы*: **1.** $\frac{3\cos(6x)}{\sqrt{\sin(6x)+1}}$; $\frac{1}{\sqrt{2x-1}|x|}$; $\frac{(e^t-1)e^t}{e^{2t}+1}$; **2.** $8e^{-x}\cos x$; **3.** $-\frac{y^2+1}{y^2}$ .

## § 25. Интегрирование

**25.1. Вычисление неопределенных интегралов.** Для вычисления интегралов используется команда integrate(). Вычислим $\int \ln^3 x dx$:

```
--> integrate(log(x)^3, x);
```

(%) $x\left(\log(x)^3-3\log(x)^2+6\log(x)-6\right)$

Также, как и в случае дифференцирования, результат интегрирования Maxima выводит в непреобразованном виде. Поэтому для получения результата в более удобном виде полученную функцию преобразовывают с помощью команд § 18.. Вычислим, например, $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx$:

```
--> f: sin(x)^3/cos(x)^3;
--> F:integrate(f, x);
```

(%) $\dfrac{\log\left(\sin(x)^2-1\right)}{2}-\dfrac{1}{2\sin(x)^2-2}$

```
--> F1: trigsimp(F);
```

(%) $\dfrac{\cos(x)^2\log\left(-\cos(x)^2\right)+1}{2\cos(x)^2}$

```
--> F2: expand(F1);
```

(%) $\dfrac{\log\left(-\cos(x)^2\right)}{2}+\dfrac{1}{2\cos(x)^2}$

Если результат зависит от значений постоянных, Maxima спросит об этом пользователя. Так, в следующем примере, необходимо ввести “p” (positive) в случае a>0 или “n” (negative) в случае a<0.

```
--> integrate(1/(x^2-a), x);
Is a positive or negative? p;
```

(%) $\dfrac{\log\left(\frac{2x-2\sqrt{a}}{2x+2\sqrt{a}}\right)}{2\sqrt{a}}$

Выбираем другой вариант:

```
--> integrate(1/(x^2-a), x);
Is a positive or negative? n;
```

(%) $\dfrac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{-a}}\right)}{\sqrt{-a}}$

**25.2. Аналитическое вычисление определенных интегралов.** В случае определенного интеграла в команде `integrate` дописываем пределы интегрирования. Найдем $\int\limits_0^2 \dfrac{1}{x^3+1}dx$:

```
--> integrate(1/(x^3+1), x, 0, 2);
```

(%) $\dfrac{\log(3)}{6}+\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Пределы интегрирования могут быть и бесконечными. Вычислим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$:

```
--> integrate(exp(-x^2), x, minf, inf);
```

(%) $\sqrt{\pi}$

Некоторые интегралы Maxima может записать через специальные функции. Для вычисления численного значения таких интегралов используется команда `numer`. Вычислим $S = \int\limits_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$:

```
--> S: integrate(1/log(x), x, 2, 3);
```

(%) $\mathrm{gamma\_incomplete}(0, -\log(2)) - \mathrm{gamma\_incomplete}(0, -\log(3))$

```
--> S, numer;
```

(%) $1.1184$

**25.3. Численное вычисление определенных интегралов.** Если определенный интеграл не вычисляется, то Maxima просто запишет его в символьном виде. Можно найти приближенное значение интеграла численными методами. Это можно сделать командой `quad_qags()`. Вычислим $\int\limits_1^2 \ln x\, e^{x^2} dx$:

```
--> quad_qags(log(x)*exp(x^2), x, 1, 2);
```

(%) $[8.057, \quad 8.945\,10^{-14}, \quad 21, \quad 0]$

Maxima выведет на экран четыре числа. Первое число, $8.057$ – приближенное значение интеграла, второе, $8.945 \cdot 10^{-14}$ – точность вычисления, третье, 21 – число использованных разбиений, четвертое, 0 – код ошибки. Если код ошибки равен нулю, значит проблем при вычислении интеграла не возникло.

**25.4. Задания к теме.**

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x^4 + ax^3}, \qquad \int \frac{b^2 - x^2}{(x^2+b^2)^4} dx, \qquad \int \sin^6 x\, dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\int\limits_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}, \qquad \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx, \qquad \int\limits_0^{\pi} \ln(1+\sin^2 x) dx.$$

*Ответы*: **1.** $\frac{1}{a^3}\ln\frac{x}{x+a}+\frac{2x-a}{2a^2x^2}$; $\frac{1}{4b^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}+\frac{x(3x^4+8b^2x^2+9b^4)}{12b^4(x^2+b^2)^3}$; $\frac{5}{16}x-\frac{15}{64}\sin 2x+$ $+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x$; **2.** $\frac{\pi}{12a}$; $\frac{\ln 2}{2}\approx 0.3465$; $1.1827$.

## § 26. Аналитическое решение дифференциальных уравнений и систем

**26.1. Решение дифференциального уравнения первого порядка.** По умолчанию все переменные в Maxima являются независимыми. Поэтому, перед тем как приступить к заданию и решению дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, необходимо указать, что переменная $y$ зависит от $x$:

```
--> depends(y,x);
```

(%) $[\mathrm{y}\,(x)]$

Решим дифференциальное уравнение $y'=2-y$. Запишем его под именем `eqn`:

```
--> eqn: diff(y,x)=2-y;
```

(%) $\frac{d}{d\,x}\,y=2-y$

Для решения дифференциального уравнения используется команда `ode2()`. Решение запишем под именем `sol`:

```
--> sol: ode2(eqn, y, x);
```

(%) $y=e^{-x}\,(2\,e^{x}+\%c)$

Постоянную $c$ можно найти, если даны начальные условия. Для этого есть команда `ic1()`. Решение с начальными условиями $(x=0,\ y=0)$ запишем под тем же именем `sol`:

```
--> sol: ic1(sol, x=0, y=0);
```

(%) $y=e^{-x}\,(2\,e^{x}-2)$

Построим график полученной функции на отрезке $x\in[0,5]$. Команда `rhs(sol)` выдает только правую часть выражения `sol` (т.е. отбрасывает “$y=$”):

```
--> wxplot2d(rhs(sol), [x,0,5])$
```

**26.2. Решение дифференциального уравнения второго порядка.** Для решения дифференциального уравнения второго порядка используется та же команда ode2(). Две постоянные находятся из начальных условий ($x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$) командой ic2(). Приведем процесс решения уравнения $y'' = y$ с начальными условиями $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$:

```
--> eqn: diff(y,x,2)=y;
```

(%) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y = y$

```
--> sol: ode2(eqn, y, x);
```

(%) $y = \%k1\,e^x + \%k2\,e^{-x}$

```
--> sol: ic2(sol, x=0, y=2, diff(y,x)=-1);
```

(%) $y = \frac{e^x}{2} + \frac{3\,e^{-x}}{2}$

Строим график полученной функции:

```
--> wxplot2d(rhs(sol), [x,0,2])$
```

**26.3. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем с помощью преобразования Лапласа.** Для решения линейного дифференциального уравнения (или системы линейных дифференциальных уравнений) можно использовать команду desolve(). Предварительно необходимо задать начальные условия с помощью команды atvalue(). Схему решения продемонстрируем на двух примерах.

**Пример 1**. Решить уравнение $y''' + y'' = 6x + e^x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

Задаем исходное уравнение под именем eqn:

```
--> eqn: diff(f(x),x,3)+diff(f(x),x,2)=6*x+exp(x);
```

Искомую функцию обозначаем как f(x). Заметим, что аргумент в скобках писать в данном случае обязательно. Теперь зададим начальные условия:

```
--> atvalue(f(x), x=0, 1);
--> atvalue(diff(f(x),x), x=0, 2);
--> atvalue(diff(f(x),x,2), x=0, 3);
```

Далее, находим f(x) командой desolve():

```
--> desolve(eqn, f(x));
```

(%) $\mathrm{f}(x)=\frac{e^{x}}{2}+\frac{17e^{-x}}{2}+x^{3}-3x^{2}+10x-8$

**Пример 2**. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'=y-x+e^{t}, \\ y'=x-y+e^{t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=a, \\ y(0)=b. \end{cases}$$

Задаем уравнения:

```
--> eqn1: diff(x(t),t)=y(t)-x(t)+exp(t);
--> eqn2: diff(y(t),t)=x(t)-y(t)+exp(t);
```

И начальные условия:

```
--> atvalue(x(t), t=0, a);
--> atvalue(y(t), t=0, b);
```

Решаем систему:

```
--> desolve([eqn1, eqn2], [x(t),y(t)]);
```

(%) $[\mathrm{x}\,(t)=e^{t}-\frac{(b-a)\;e^{-2\,t}}{2}+\frac{b+a-2}{2},$

$\mathrm{y}\,(t)=e^{t}+\frac{(b-a)\;e^{-2\,t}}{2}+\frac{b+a-2}{2}]$

## 26.4. Задания к теме.

1. Решить уравнение $y'+xy=xy^{2}$ если $y(0)=2$.

2. Решить уравнение $y''y+(y')^{2}=0$ при начальных условиях: $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

3. Решить уравнение $y'''-4y'=16x^{3}$ при начальных условиях: $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

*Ответы*: **1.** $y=\frac{2}{2-e^{x^{2}/2}}$; **2.** $y=2\sqrt{x+1}$; **3.** $y=e^{2\,x}+e^{-2\,x}-x^{4}-3x^{2}-2$.

# § 27. Численное решение дифференциальных уравнений и систем

Для численного решения дифференциальных уравнений и систем необходимо предварительно загрузить пакет dynamics:

```
--> load(dynamics);
```

**27.1. Численное решение ДУ первого порядка** Численное интегрирование дифференциального уравнения методом Рунге – Кутта выполняется командой rk(). Предварительно дифференциальное уравнение необходимо записать в виде $y' = f(x, y)$, то есть выразить производную в явном виде.

Численное решение рассмотрим на примере. Проинтегрируем уравнение $y' = 1 - 2y$. Правую часть уравнения сохраним под именем eqn:

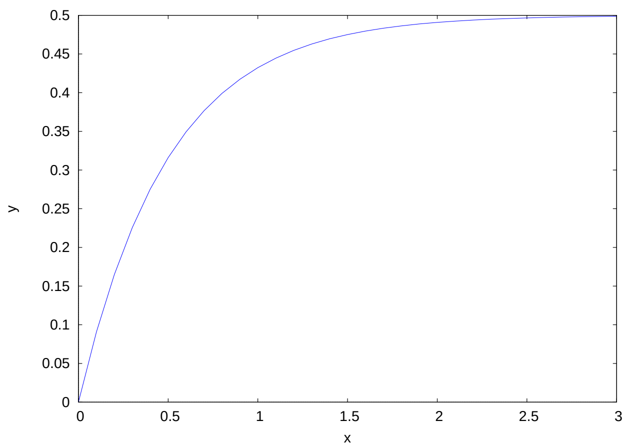
```
--> eqn: 1-2*y;
```

Интегрирование проведем на отрезке от 0 до 3 с шагом 0.1 при начальном условии $y(0) = 0$. Результат запишем под именем pts:

```
--> pts: rk(eqn, y, 0, [x, 0, 3, 0.1]);
```

В результате получим 31 пару чисел $[x_i, y_i]$. Их можно изобразить в виде графика командой plot2d с опцией discrete:

```
--> wxplot2d([discrete, pts])$
```




**27.2. Численное решение систем дифференциальных уравнений.** Системы дифференциальных уравнений решаются с использованием той же команды rk(). Уравнения, искомые переменные и начальные условия к ним перечисляются в квадратных скобках.

**Пример.** Решить систему

$$\begin{cases} x' = x - xy, \\ y' = xy - y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

на отрезке $t \in [0, 5]$.

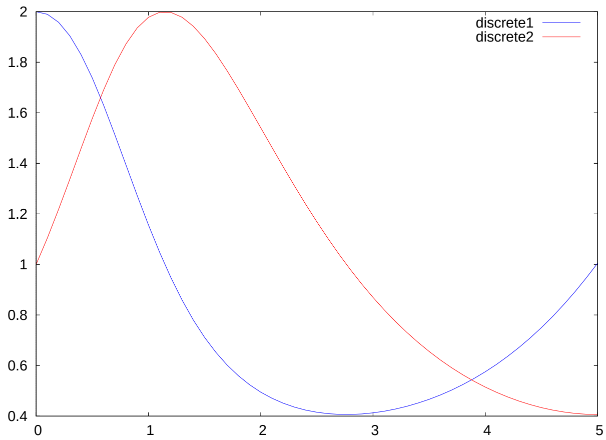
```
--> eq1: x-x*y; eq2: -y+x*y;
--> pts: rk([eq1,eq2], [x,y], [2,1], [t,0,5,0.1]);
```

В наборе pts записаны тройки чисел $[t_i, x_i, y_i]$. Для того, чтобы построить графики функций $x(t)$ и $y(t)$ необходимо создать наборы пар чисел $[t_i, x_i]$ и $[t_i, y_i]$. Для этого используется команда makelist. Сохраним наборы таких пар чисел под именами xt и yt:

```
--> xt: makelist([pts[i][1], pts[i][2]],
    i, 1, length(pts))$
--> yt: makelist([pts[i][1], pts[i][3]],
    i, 1, length(pts))$
```

Теперь построим оба графика на одном чертеже:

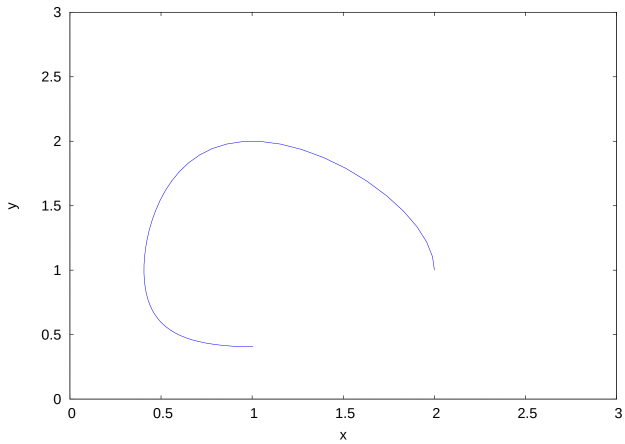
```
--> wxplot2d([[discrete, xt], [discrete, yt]])$
```




Можно построить график в фазовой плоскости. Для этого предварительно создадим набор пар точек $[x_i, y_i]$ под именем yx:

```
--> yx: makelist([pts[i][2], pts[i][3]],
    i, 1, length(pts))$
```

```
--> wxplot2d([[discrete, yx]], [x,0,3], [y,0,3])$
```




**27.3. Построение векторного поля направлений траекторий в фазовой плоскости.** В случае системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка с помощью программы Maxima можно построить векторное поле направлений в фазовой плоскости. Это делается с использованием команды `plotdf`.

Возьмем ту же систему дифференциальных уравнений

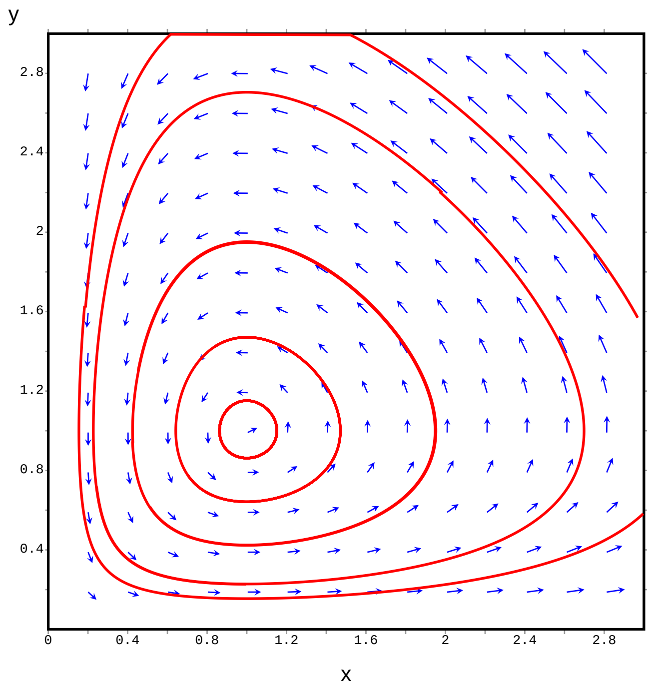
```
--> eq1: x-x*y; eq2: -y+x*y;
```

В фазовой плоскости нарисуем траекторию, начинающуюся в точке $x = 2, y = 1$ в направлении роста $t$:

```
--> plotdf([eq1, eq2], [x,y], [x, 0, 3], [y, 0, 3],
    [trajectory_at, 2, 1], [direction, forward])$
```

С использованием мыши в окне с графиком фазовой плоскости можно нарисовать и другие траектории.

Если в исходной система уравнений содержится один или несколько параметров, можно проводить исследование влияния этих параметров на получаемые поля траекторий в фазовой плоскости.




Рассмотрим систему с двумя параметрами:

$$\begin{cases} x' = x - xy - ax^2, \\ y' = xy - y - c. \end{cases}$$

```
--> eq1:x-x*y-a*x^2; eq2:-y+x*y-c;
--> plotdf([eq1,eq2], [x,y], [x, 0, 3], [y, 0, 3],
    [sliders,"a=-1:1,c=-1:1"]);
```

В нижней части экрана с фазовой плоскостью появляется два бегунка, позволяющие изменять значения параметров $a$ и $c$.

### 27.4. Задания к теме

1. Проинтегрировать уравнение $y' = x\sin y - 1$ на отрезке $x \in [0, 10]$ при начальном условии $y(0) = 2$.

2. Проинтегрировать систему на отрезке $t \in [0, 15]$:

$$\begin{cases} x' = & x - xy - 0.1x^2, \\ y' = & -y + xy - 0.1y^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

## § 28. Основные команды программы Maxima

**Список основных математических функций**

| Запись в Maxima | Функция | Описание |
|---|---|---|
| `abs(x)` | $\lvert x\rvert$ | модуль числа |
| `sqrt(x)` | $\sqrt{x}$ | квадратный корень |
| `exp(x)` | $e^x$ | экспонента |
| `log(x)` | $\ln x$ | натуральный логарифм |
| `sin(x)` | $\sin x$ | тригонометрические функции |
| `cos(x)` | $\cos x$ | |
| `tan(x)` | $\operatorname{tg} x$ | |
| `cot(x)` | $\operatorname{ctg} x$ | |
| `asin(x)` | $\arcsin x$ | обратные тригонометрические функции |
| `acos(x)` | $\arccos x$ | |
| `atan(x)` | $\operatorname{arctg} x$ | |
| `acot(x)` | $\operatorname{arcctg} x$ | |

### Команды преобразования выражений

`expand(`*выражение*`);` – раскрытие скобок.

`factor(`*выражение*`);` – разбиение на множители.

`ratsimp(`*выражение*`);`
`radcan(`*выражение*`);`
`trigsimp(`*выражение*`);`
– упрощение выражения.

### Решение уравнений

`solve(`$f(x) = 0$`, x);` – решение уравнения $f(x) = 0$.

`solve([`$f(x,y)=0$`, `$g(x,y)=0$`], [x, y]);` – решение системы уравнений.

`find_root(`$f(x) = 0$`, x, `$x_a$`, `$x_b$`);` – численное решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $x \in [x_a, x_b]$.

**Построение графиков**

`plot2d(`$f(x)$`, [x,`$x_a$`,`$x_b$`], [y,`$y_a$`,`$y_b$`])$` – построение графика функции $y = f(x)$ в прямоугольнике $x \in [x_a, x_b]$, $y \in [y_a, y_b]$.

`plot2d([`$f(x)$`, `$g(x)$`], [x,`$x_a$`,`$x_b$`])$` – построение графиков двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ для $x \in [x_a, x_b]$.

`plot2d([discrete, pts])$` – построение графика по набору пар чисел $[x_i, y_i]$, записанных под именем `pts`.

`plot3d(`$f(x,y)$`, [x,`$x_a$`,`$x_b$`], [y,`$y_a$`,`$y_b$`], [z,`$z_a$`,`$z_b$`])$` – построение поверхности $z = f(x, y)$ для $x \in [x_a, x_b]$, $y \in [y_a, y_b]$, $z \in [z_a, z_b]$.

**Математический анализ**

`limit(`$f(x)$`, x, `$x_a$`);` – нахождение предела $f(x)$ при $x \to x_a$.

`diff(`$f(x)$`, x);` – нахождение производной функции $f(x)$.

`diff(`$f(x)$`, x, `$k$`);` – нахождение $k$-той производной $f(x)$.

`integrate(`$f(x)$`, x);` – нахождение интеграла от $f(x)$.

`integrate(`$f(x)$`, x, `$x_a$`, `$x_b$`);` – нахождение определенного интеграла от функции $f(x)$ по отрезку $[x_a, x_b]$.

`quad_qags(`$f(x)$`, x, `$x_a$`, `$x_b$`);` – численное нахождение определенного интеграла.

**Дифференциальные уравнения**

`sol: ode2(`$f(x, y, \texttt{diff}(y, x)) = 0$`, y, x);` – нахождение решения `sol` дифференциального уравнения $f(x, y, y') = 0$.

`ic1(sol, x=`$x_0$`, y=`$y_0$`);` – нахождение постоянной в решении `sol` из начального условия $y(x_0) = y_0$.

`pts: rk(`$f(x,y)$`, y, `$y_0$`, [x,`$x_0$`,`$x_1$`,`$dx$`]);` – численное решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $x \in [x_0, x_1]$ при условии $y(x_0) = y_0$. Решение записывается под именем `pts` и представляет собой набор пар чисел $[x_i, y_i]$, где $x_i$ меняется с $x_0$ до $x_1$ с шагом $dx$.

# Литература


1. *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов. М.: Физматлит, 2004.
2. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2006.
3. *Стахин Н.А.* Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений MAXIMA. М.:, 2008.
4. *Ильина В.А., Силаев П.К.* Система аналитических вычислений MAXIMA для физиков-теоретиков. М.: МГУ, 2007.