Бутылка Клейна и другие замечательные поверхности

Проф. Насыров С.Р.

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ
www.kpfu.ru/imm

*Изображения и фотографии взяты из открытых источников в интернете

Раз моряки, погожим днем
Пустились по морю втроем.
Но не в тазу - была у них
Бутылка Клейна на троих.
Три моряка в бутылку сели
В ней не страшны ни шторм, ни мели.
Но оказалось им на горе
И судно в море, и в судне море.

Фредерик Уинзор

Феликс Клейн
(1849-1925)

Содержание лекции

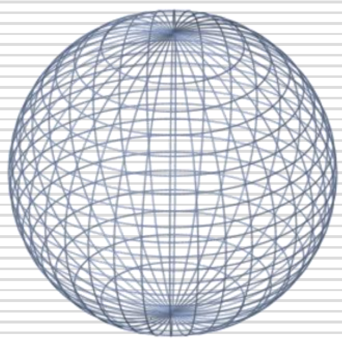
- Поверхности. Примеры.
- Ориентируемые и неориентируемые поверхности
- Построение поверхностей склеиванием квадрата
- Триангуляция поверхности. Эйлерова характеристика
- Связная сумма поверхностей
- Классификация компактных поверхностей

Поверхности

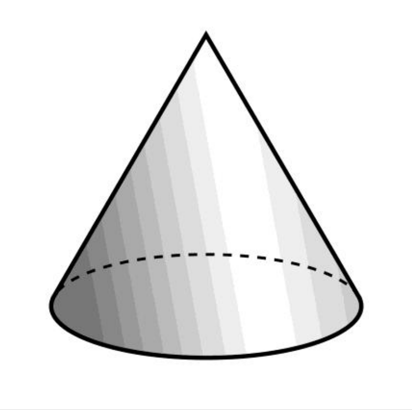
- Что такое поверхность?
- Какие поверхности вы знаете?
- Какие примеры вы можете привести?

Поверхность – это то, что вблизи каждой своей точки устроено как круг.

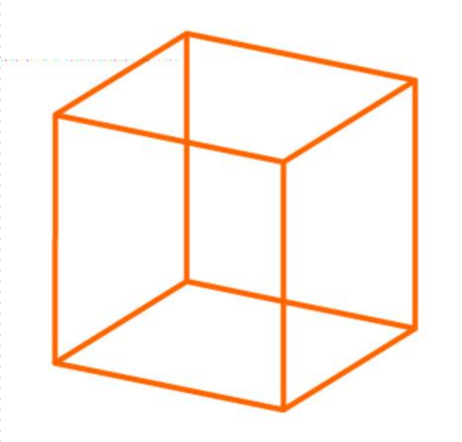
Примеры поверхностей



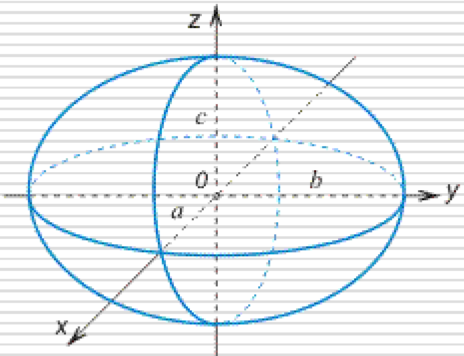
сфера



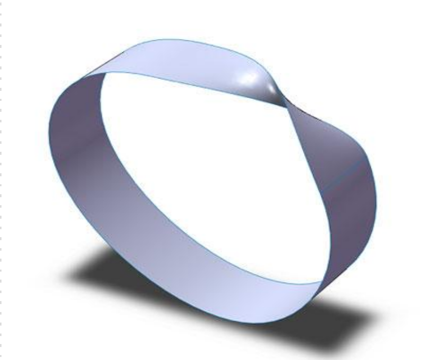
конус



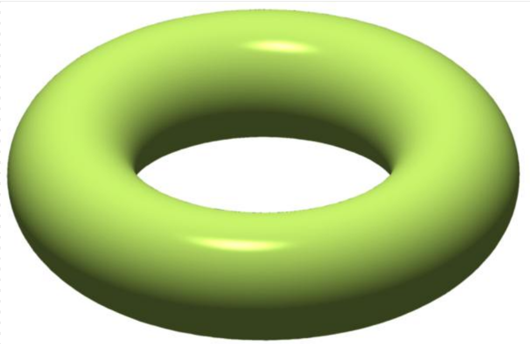
поверхность куба



эллипсоид



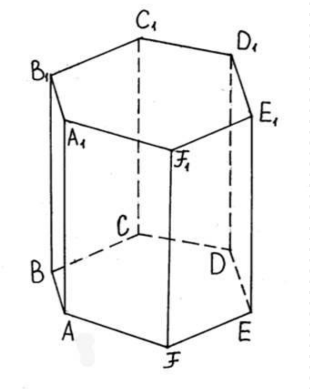
лист мебиуса



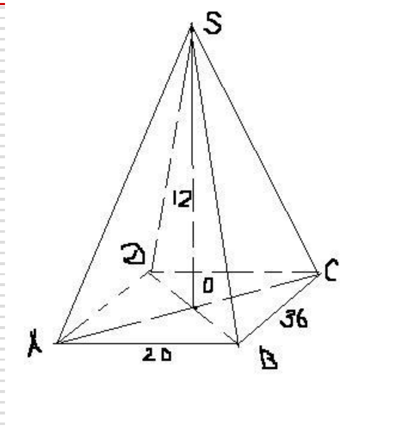
тор

Еще примеры

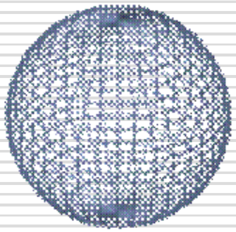
цилиндр



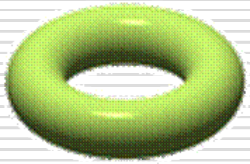
призма



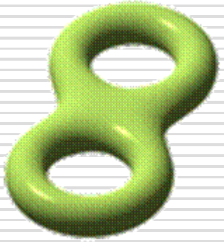
пирамида



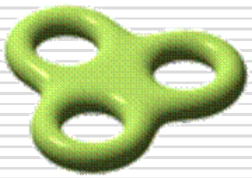
род 0



род 1

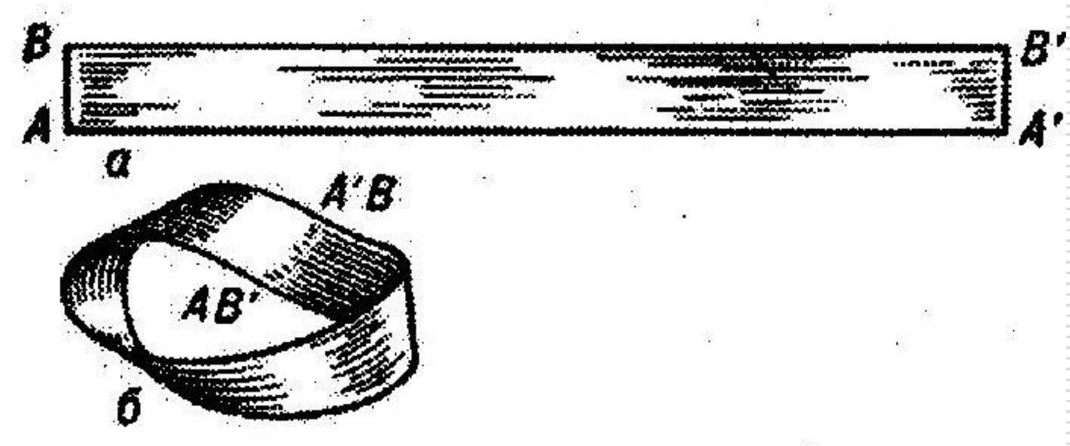


род 2



род 3

Лист Мебиуса



Август Мебиус (1790-1868)

Лист Мебиуса – односторонняя поверхность! Что получится, если разрезать его вдоль средней линии?

Ориентируемые и неориентируемые поверхности

Поверхность называется *неориентируемой*, если она содержит в себе какой-то лист Мебиуса.

В противном случае поверхность называется *ориентируемой*.

У ориентируемой поверхности есть две стороны, у неориентируемой - одна.

Примеры ориентируемых и неориентируемых поверхностей

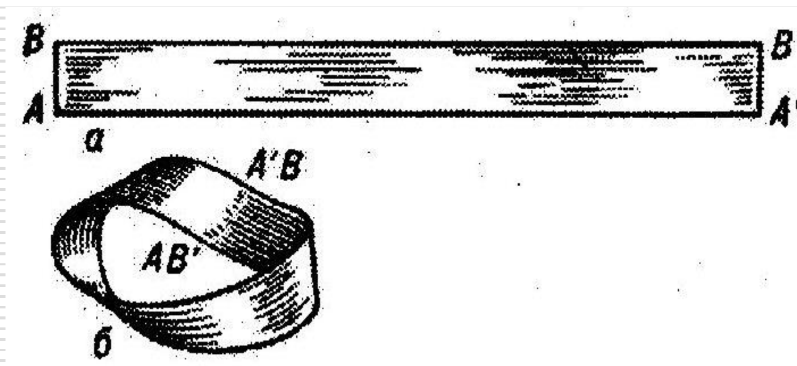
- Ориентируемые – шар, конус, цилиндр, тор, крендель…
- Неориентируемые – лист Мебиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость…
- Различных типов ориентируемых и неориентируемых поверхностей бесконечно много. Как классифицировать все типы поверхностей?
- Будем рассматривать только компактные поверхности без края, т.е. поверхности, которые можно склеить из конечного числа топологических треугольников, у которых ни одна сторона не остается не склеенной со стороной другого треугольника.

Топология

Топология – наука о непрерывных отображениях. Объекты, которые можно получить друг из друга непрерывной деформацией, в топологии не различаются. Например, сфера и поверхность куба устроены одинаково. Боковая поверхность цилиндра и кольцо также с точки зрения топологии – одна поверхность.

Построение поверхностей склеиванием квадрата (прямоугольника)

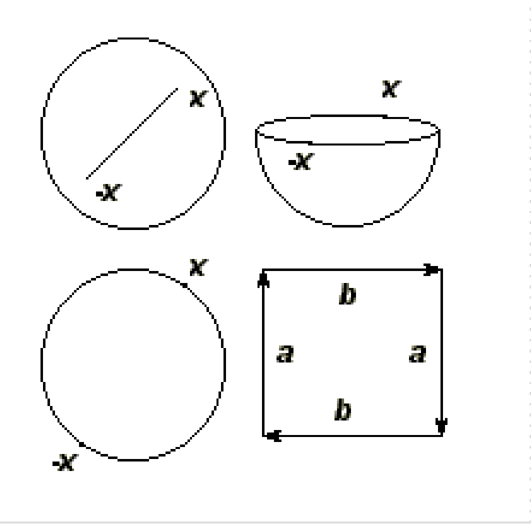
- Ленту Мебиуса можно получить слеиванием противоположных сторон прямоугольника «крест-накрест»:



- Если же склеить их обычным образом, то получим боковую поверхность цилиндра. Склеивая затем у цилиндра граничные окружности, получим тор.

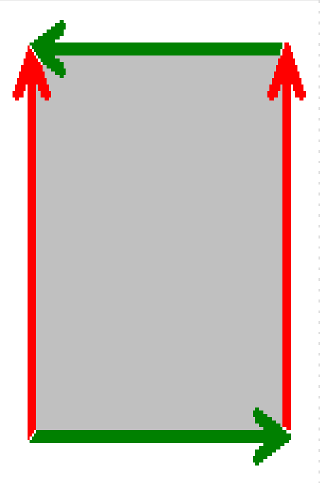
Проективная плоскость

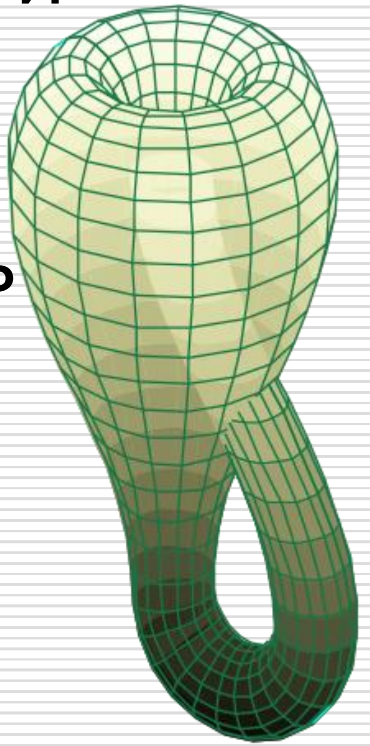
- Если же склеить в прямоугольнике обе пары сторон «крест-накрест», то получится неориентируемая поверхность, которая называется проективной плоскостью.



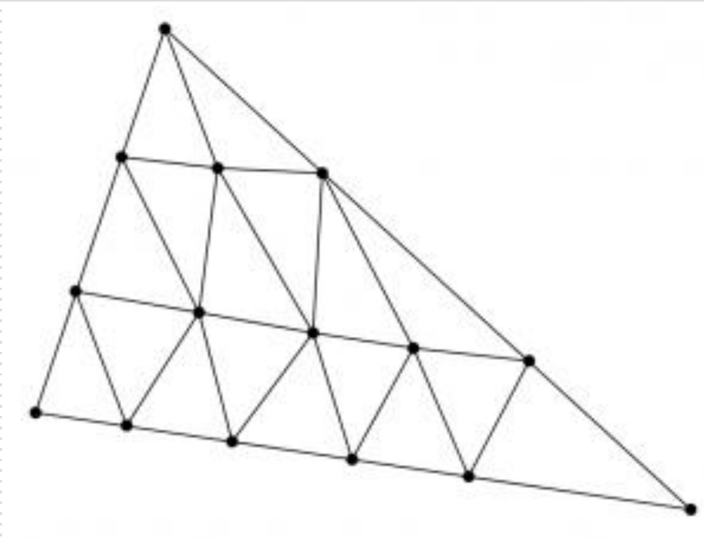
Бутылка Клейна и проективная плоскость

- Если же у боковой поверхности цилиндра склеить окружности перехлестом, то получится неориентируемая поверхность бутылка Клейна.

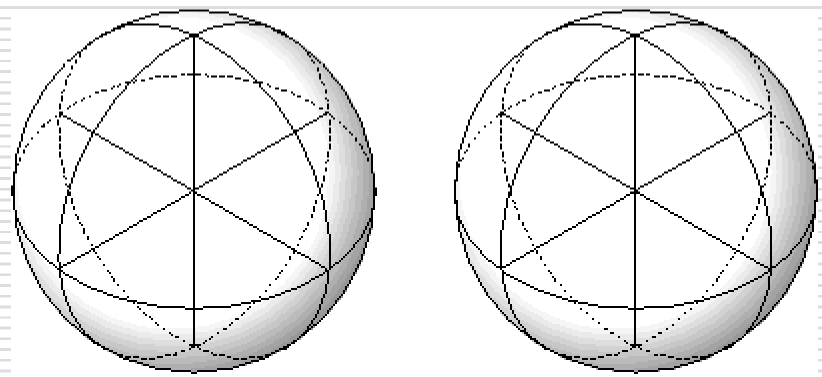




Триангуляция поверхности

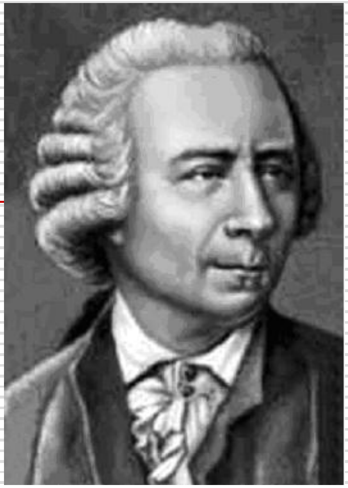


Триангуляция многоугольника (области)



Триангуляция поверхности (на примере сферы)

Эйлерова характеристика



Леонард Эйлер
(1707-1783)

Эйлерова характеристика X(S) поверхности S:

$$X(S)=n0-n1+n2$$

n0 – число вершин триангуляции,
n1 – число сторон триангуляции,
n3 – число треугольников триангуляции.

Теорема 1. *Эйлерова характеристика не зависит от выбора триангуляции.*

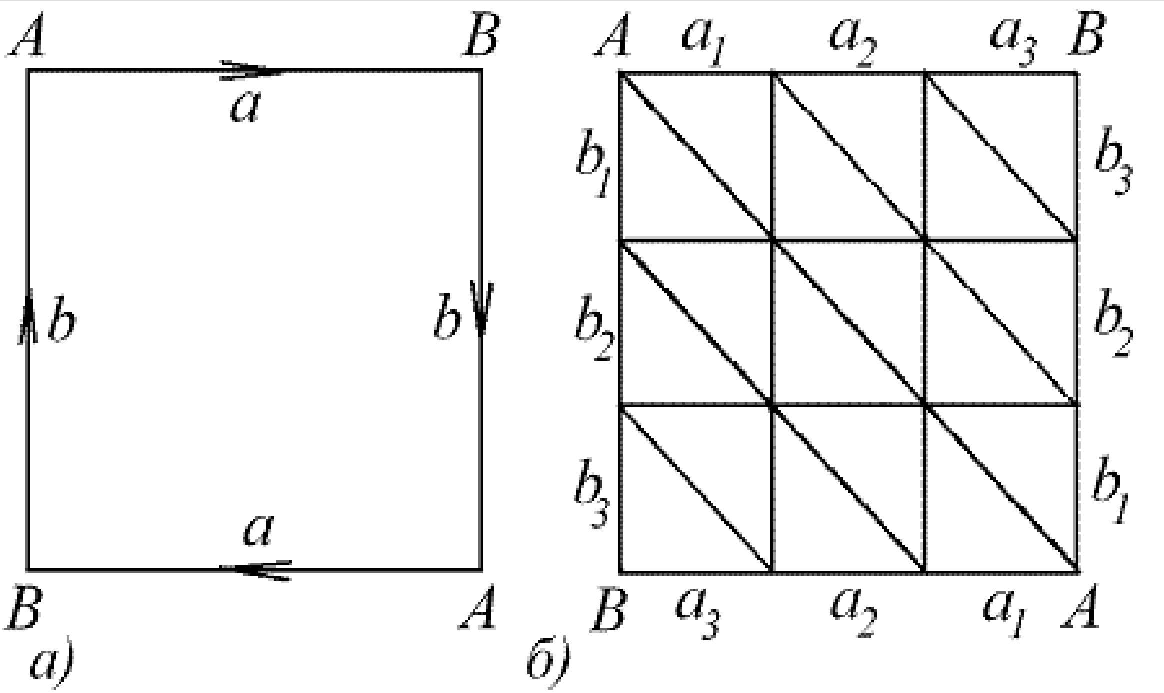
Эйлерова характеристика некоторых поверхностей

- Сфера X= 2
- Тор X= 0
- Крендель X=-2
- Бутылка Клейна X=0
- Проективная плоскость X=1

На самом деле эйлерова характеристика и ориентируемость полностью характеризуют тип компактной поверхности (без края).

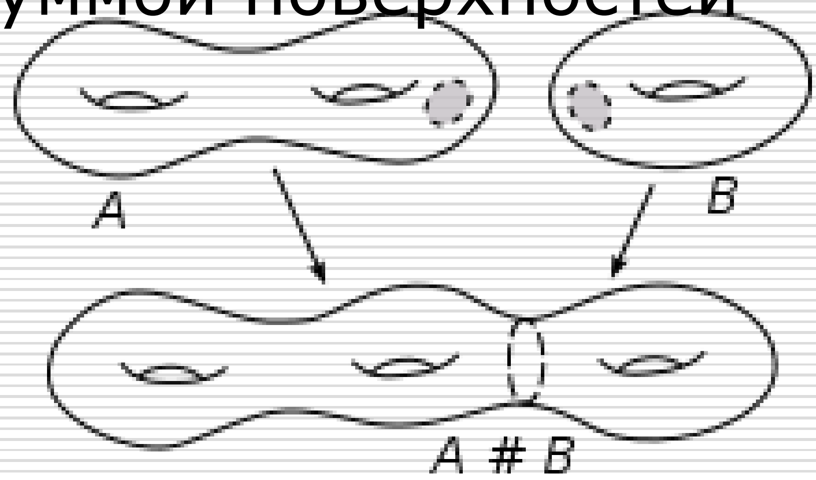
Триангуляция и эйлерова характеристика проективной плоскости

- n0= 10, n1=27, n2=18. X=1.



Связная сумма поверхностей

- Пусть есть две поверхности A и B. Вырежем из них обеих топологические круги и склеим получившиеся окружности. В результате получим поверхность A#B, которая называется связной суммой поверхностей A и B.



- **Теорема 2.** X(A#B)= X(A)+X(B)-2.
- **Теорема 3.** *Любая ориентируемая поверхность S устроена топологически как сфера, или как тор, или как связная сумма n торов,* n>1.В последнем случае X(S)=2-2n.
- **Теорема 4.** *Любая неориентируемая поверхность S устроена топологически как проективная плоскость, или как* связная *сумма n проективных плоскостей,* n>1. *В последнем случае* X(S)=2-n.

Литература

- В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология. выпуск 21 серии «Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1982. 160 с.
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: Пер. с нем. Изд. 3-е. М.: 1981. 343 с.
- Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология: Введение. М.: Мир, 1977.