

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра аэрогидромеханики

Н.Б.Ильинский, Д.Ф.Абзалилов

**ОБРАТНЫЕ
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

Учебное пособие

к курсу

Обратные краевые задачи механики жидкости и газа

Часть II

Казань – 2006

УДК 517.9

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета
Протокол № 3 от 7 декабря 2006 г.

Рецензент
профессор В.В.Клоков

Н.Б.Ильинский, Д.Ф.Абзалилов.

Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. Учебное пособие к курсу “Обратные краевые задачи механики жидкости и газа”, часть II. – Казань: КГУ, 2006 г. – 62 с.

Методическое пособие основано на курсе лекций, читаемых Н.Б.Ильинским на протяжении 20-ти последних лет, предназначено студентам-механикам III–V курсов механико-математического факультета.

©Казанский государственный
университет, 2006

Содержание

Используемые аббревиатуры и обозначения.....	6
Введение.....	7
1 О введении комплексного потенциала течения.....	9
2 Основная ОКЗА.....	11
2.1 Постановка основной ОКЗА.....	11
2.2 Сведение основной ОКЗА к внешней ОКЗ для аналитической функции с простым полюсом и логарифмической особенностью на бесконечности.....	13
3 Решение основной ОКЗА способом сопоставления плоскостей.....	16
3.1 Метод Манглера.....	16
3.2 Параметрические уравнения контура крылового профиля в ОКЗА.....	20
3.3 Условия разрешимости ОКЗА.....	20
3.4 Особенности функции $\xi(\gamma)$ в ОКЗА.....	21
3.5 Введение функции $\xi_1(\gamma)$. Выделение особенности у $\eta(\gamma)$	22
3.6 Запись решения $z(\zeta)$ и условий разрешимости через функцию $\xi_1(\gamma)$	23
4 Способ Тумашева решения основной ОКЗА.....	25
4.1 Аналитическое решение ОКЗА способом Тумашева....	25
4.2 Условия разрешимости ОКЗА в способе Тумашева....	27

4.3	Особенности функции $T(\zeta)$. Введение функции $T_1(\zeta)$, запись решения	28
5	Квазирешение основной ОКЗА	30
5.1	Идея квазирешения основной ОКЗА, определения	30
5.2	Построение квазирешения основной ОКЗА в простейшем случае	34
5.3	Построение квазирешения ОКЗА при фиксировании скорости v_* в задней кромке	36
5.4	Построение квазирешения ОКЗА при фиксированном значении v_* и минимизации нормы производной	40
6	О задании скорости как функции дуговой координаты s искомого контура	43
6.1	Преимущества задания скорости как функции длины дуги s	43
6.2	Гидродинамически целесообразные распределения скорости	44
7	ОКЗА в рамках модели ПС	46
7.1	Основные допущения теории ПС	46
7.2	Условия безотрывного обтекания крылового профиля	47
7.3	Постановка ОКЗА в рамках модели ПС	49
7.4	Основные этапы решения	50
7.5	Квазирешение. Итерационный процесс	51
8	ОКЗА с учетом сжимаемости потока	52

8.1	Математическая модель дозвукового течения идеального газа	52
8.2	Частный случай несжимаемой жидкости ($\rho = 1$)	55
8.3	Математическая модель газа Чаплыгина	55
8.4	Решение ОКЗА по модели газа Чаплыгина	58
8.5	Условия разрешимости и построение квазирешения	59
	Достижения и нерешенные проблемы ОКЗА	61
	Литература	62

Используемые аббревиатуры и обозначения

ОКЗА	— обратная краевая задача аэрогидродинамики
ИНЖ	— идеальная несжимаемая жидкость
ГЦРС	— гидродинамически целесообразные распределения скорости
ПС	— пограничный слой
$z = x + iy$	— комплексная координата физической плоскости
$w = \varphi + i\psi$	— комплексный потенциал течения
$\zeta = \rho e^{i\gamma}$	— комплексная координата канонической плоскости
L_z	— контур крылового профиля
D_z	— область течения в плоскости z (внешность L_z)
$L_w, L_\zeta = e^{i\gamma}$	— образы L_z в плоскостях w и ζ , $0 \leq \gamma \leq 2\pi$
D_w, D_ζ	— образы D_z в плоскостях w и ζ
A, B	— точки разветвления и схода потока на контуре профиля
ℓ, b	— периметр и хорда крылового профиля
s	— дуговая абсцисса L_z , $0 \leq s \leq \ell$
ε	— постоянная, угол в точке B равен $\varepsilon\pi$, $1 \leq \varepsilon \leq 2$
$v(s)$	— распределение скорости по контуру крылового профиля
v_∞	— скорость набегающего потока
$\chi(\zeta) = \xi + i\eta = \ln \frac{dz}{d\zeta}$	— аналитическая функция (метод Манглера)
$\xi(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) = \ln \left \frac{ds}{d\gamma} \right $	— действительная часть $\chi(\zeta)$ на L_ζ
$T(\zeta) = S - i\theta = \ln \frac{dw}{dz}$	— аналитическая функция (метод Тумашева)
$S(\gamma) = \operatorname{Re} T(e^{i\gamma}) = \ln v$	— действительная часть $T(\zeta)$ на L_ζ

Введение

Обратные краевые задачи аэрогидродинамики (ОКЗА) составляют часть общей теории обратных краевых задач. Суть ОКЗА заключается в определении формы крылового профиля (изолированного, многокомпонентного или являющегося элементом решетки) по заданному на его поверхности распределению давления (или скорости), обеспечивающему требуемые аэрогидродинамические характеристики. На практическую важность решения таких задач исследователи обратили внимание в конце 20-х – начале 30-х годов прошлого столетия. К этому времени уже были существенно развиты методы решения прямых задач (о расчете распределения давления по заданному профилю и других его аэрогидродинамических характеристик) и все чаще стали возникать проблемы построения (конструирования) профиля, обладающего заданными свойствами. Математическими выражениями таких проблем и явились ОКЗА.

Первые постановки ОКЗА в конце 20-х – начале 30-х годов дали Ф. Вейниг, А. Бетц и В. Манглер. Решение ОКЗА с доведением до практических результатов по проектированию крыловых профилей и профилей решеток турбомашин получены Л. А. Симоновым, Г. Ю. Степановым, М. Глауэртом, Р. Эшплером и др.

Существенное продвижения в исследовании ОКЗА достигнуты Г. Г. Тумашевым, давшему точное и эффективное решение многих задач аэрогидродинамики. Для профилей с гидродинамическими

особенностями решение ОКЗА построено М. Т. Нужиным [1].

Достигнутые в этой области результаты послужили основой методов проектирования ламинарных профилей, гидропрофилей, лопаток турбомашин, высоконесущих профилей. Эти достижения позволили говорить об определенных преимуществах такого подхода при проектировании. Однако оставались открытыми такие важные теоретические вопросы, как корректность постановок задач, описание возможных решений и другие.

Первые результаты по постановке ОКЗА и разработке теоретических подходов к их решению показали, что такие задачи являются некорректными. Это объясняется тем, что исходные данные в ОКЗА в значительной степени произвольны и поэтому решение для них существует лишь при выполнении условий физической реализуемости решения. К таковым в ОКЗА относятся условия замкнутости искомого контура крылового профиля, условие совпадения заданной и найденной в результате решения задачи величин скорости набегающего потока (будем называть их условиями разрешимости), а также условие простоты этого контура (условие однолиственности решения).

В значительной степени эти проблемы удалось решить благодаря методу квазирешений ОКЗА, разработанному А. М. Елизаровым, Н. Б. Ильинским, А. В. Поташевым.

Таким образом, ОКЗА составляют широкий класс задач, для решения которых необходимы специальные подходы и изучению которых посвящены к настоящему времени сотни работ. Библиография методов решения отдельных ОКЗА содержится в [2].

1 О введении комплексного потенциала течения

Рассмотрим плоскопараллельное безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ). Напомним, как получается из основных уравнений гидродинамики комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ в виде аналитической функции.

Из условия несжимаемости следует уравнение $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ или, записанное через проекции,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Из условия, что течение безвихревое, следует $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ или

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Как известно (2) есть необходимое и достаточное условие потенциальности поля скоростей, т.е. существования скалярной функции $\varphi(x, y)$ (потенциала скорости) такой, что

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), получим $\Delta \varphi = 0$, где Δ – оператор Лапласа.

Выражение (1) есть необходимое и достаточное условие существования функции тока $\psi(x, y)$ такой, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (2), получим $\Delta\psi = 0$. Кроме того, из (3) и (4) следуют уравнения Коши – Римана

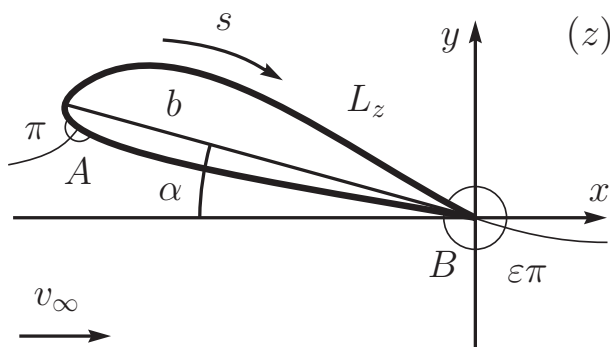
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Таким образом, φ и ψ – сопряженные гармонические функции. Следовательно, комплексный потенциал $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ течения – аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$.

2 Основная ОКЗА

2.1 Постановка основной ОКЗА

В физической плоскости z искомый непроницаемый крыловой профиль L_z обтекается плавно (т.е. без срыва потока) плоским потенциальным установившимся потоком ИНЖ со скоростью v_∞ . Контур профиля является гладким, за исключением задней кромки B , угол в ней равен $\varepsilon\pi$ ($1 \leq \varepsilon \leq 2$). Точку B схода потока выберем за начало координат, в рамках гипотезы Жуковского – Чаплыгина она будет являться точкой схода потока. Ось x направим параллельно набегающему потоку.



Пусть точка A есть точка разветвления потока, скорость в ней равна нулю. При $\varepsilon < 2$ кромку B будем называть угловой, скорость в ней также равна нулю; при $\varepsilon = 2$ заднюю кромку B будем называть острой, значение скорости в ней обозначим $v_* > 0$.

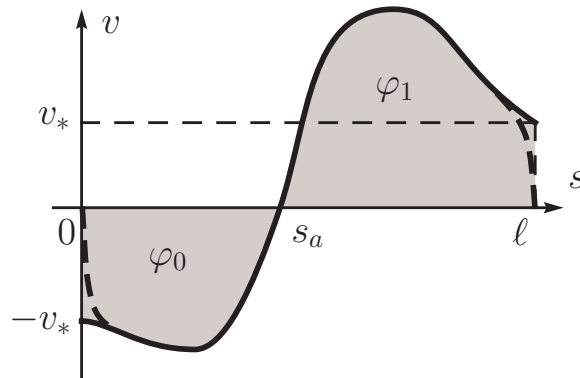
Рассмотрим поведение скорости вблизи задней кромки. В области комплексного потенциала w контуру соответствует разрез вдоль

оси абсцисс, угол в точке B равен 2π . То есть функция $w(z)$ переводит угол $\varepsilon\pi$ в 2π , и из теории конформных отображений следует, что в окрестности точки B поведение функции $(w(z) - w_b)|_B \sim (z - z_b)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ (с точностью до множителя). Следовательно, модуль скорости

$$v(z) = \left| \frac{dw}{dz} \right| \sim |z - z_b|^{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \quad (6)$$

и при $\varepsilon < 2$ имеем $v(z)|_{z_b} = 0$; при $\varepsilon = 2$ справедливо $v(z)|_{z_b} \sim 1 > 0$.

Введем дуговую абсциссу s искомого контура профиля так, чтобы при ее возрастании вдоль поверхности профиля от $s = 0$ в задней кромке B до $s = \ell$ на ней же область течения оставалась слева (ℓ – периметр контура профиля). Пусть s_a – значение дуговой абсциссы в точке A разветвления потока.



Вдоль поверхности профиля задано распределение величины скорости $v(s)$:

$$v = f(s), \quad 0 \leq s \leq \ell, \quad (7)$$

где $f(s)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера, обращающаяся в нуль в точке s_a и непрерывно дифференцируемая в этой точке, а также принимающая значения $f(\ell) = -f(0) = v_*$ (случай

острой кромки) или $f(\ell) = f(0) = 0$ (случай угловой кромки). Знак скорости связан с направлением обхода, поэтому на нижней поверхности $f(s) < 0$, $0 < s < s_a$ (направление скорости противоположно направлению обхода) и $f(s) > 0$, $s_a < s < \ell$ (направления скорости и обхода контура совпадают).

Из приведенных выше параметров считаются заданными v_∞ , ℓ , s_a , ε . Требуется найти контур L_z , хорду b , угол атаки α , аэродинамические силы и момент. Задачу в такой постановке будем называть основной ОКЗА.

2.2 Сведение основной ОКЗА к внешней ОКЗ для аналитической функции с простым полюсом и логарифмической особенностью на бесконечности

При сделанных предположениях относительно потока существует комплексный потенциал течения, который обозначим $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. В окрестности бесконечно удаленной точки комплексный потенциал потока будет иметь вид

$$w(z)|_\infty = v_\infty z - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (8)$$

где Γ – циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему L_z a_k – комплексные постоянные. Первое слагаемое в (8) представляет собой комплексный потенциал однородного плоскопараллельного потока, а второе – вихря (знак “–” перед этим слагаемым связан с тем, что $\Gamma > 0$ соответствует вихрю, закрученному по

часовой стрелке).

Так как крыловой профиль непроницаем, то контур профиля есть линия тока; примем на нем $\psi = 0$. Тогда величина скорости

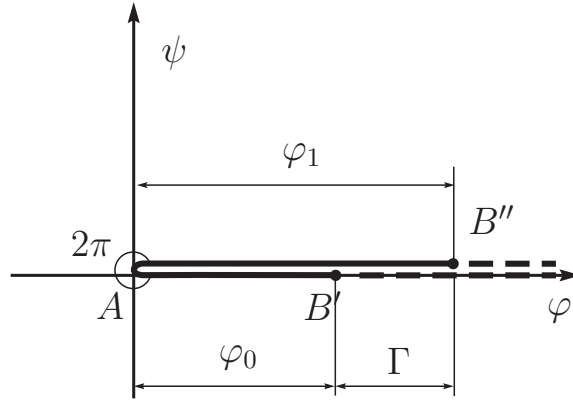
$$v = f(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Выберем $\varphi = 0$ в точке разветвления потока s_a . Тогда

$$\varphi(s) = \int_{s_a}^s f(s) ds. \quad (9)$$

Пусть $\varphi_0 = \varphi(0) = \int_{s_a}^0 f(s) ds$, $\varphi_1 = \varphi(\ell) = \int_{s_a}^{\ell} f(s) ds$ – величины потенциалов на нижней и верхней поверхностях профиля. Обе эти величины являются положительными, т.к. $f(s) < 0$ при $0 < s < s_a$ и $f(s) > 0$ при $s_a < s < \ell$. Тогда для циркуляции Γ скорости имеем

$$\Gamma = \oint_{L_z} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \int_0^{\ell} f(s) ds = \int_0^{s_a} f(s) ds + \int_{s_a}^{\ell} f(s) ds = \varphi_1 - \varphi_0. \quad (10)$$



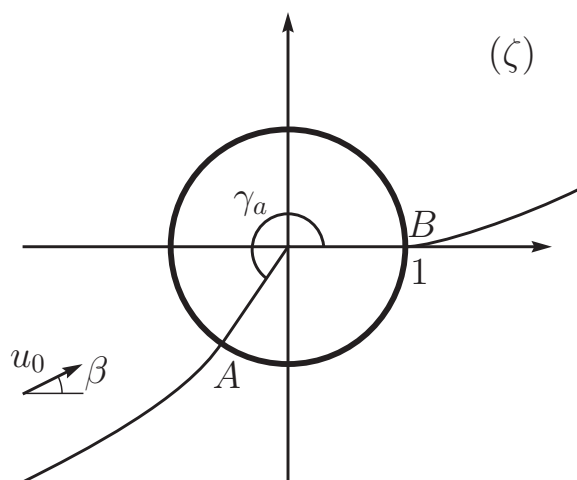
Таким образом, с чисто математической точки зрения, поставленная задача аэрогидродинамики свелась к внешней ОКЗ для аналитической функции $w(z)$, имеющей в бесконечно удаленной точке простой полюс и логарифмическую особенность типа вихря, по известному на искомой границе области значению $w(z)$: $\text{Im } w(z)|_{L_z} = 0$, $\text{Re } w(z)|_{L_z}$ определяется по (9).

Заметим, что $w(z)$ является неоднозначной функцией, т.к. содержит $\ln z$. Для выделения одной ветви в области G_z проведем разрез от точки B до бесконечности по сходящей с контура профиля линии тока. Тогда в полученной области с разрезом функция $w(z)$ будет однозначной и терпящей скачок на линии разреза; в плоскости w область G_w представляет собой всю плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси ($\varphi > 0$).

3 Решение основной ОКЗА способом сопоставления плоскостей

3.1 Метод Манглера

Введем в рассмотрение каноническую область, представляющую собой внешность круга единичного радиуса в плоскости $\zeta = re^{i\gamma}$, т.е. $|\zeta| > 1$. Для взаимно однозначного отображения области G_z на G_ζ потребуем, чтобы $z = \infty \mapsto \zeta = \infty$ и $z_b = 0 \mapsto \zeta_b = 1$. При этих условиях функция $z(\zeta)$, согласно теореме Римана, определится единственным образом.



Рассмотрим поток, обтекающий эту окружность со скоростью на бесконечности равной $u_0 e^{i\beta}$ и циркуляцией Γ , где u_0 и β – неизвестные пока постоянные, Γ определяется из (10). Как известно (см., напр., [3]), такой комплексный потенциал имеет вид

$$w(\zeta) = u_0 \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + C, \quad (11)$$

где $C = C_1 + iC_2$ – комплексная постоянная.

Найдем значения $w(\zeta)$ (11) на границе $\zeta = e^{i\gamma}$:

$$w(e^{i\gamma}) = u_0(e^{i(\gamma-\beta)} + e^{-i(\gamma-\beta)}) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + C_1 + iC_2.$$

Отделив действительную и мнимую части, получим

$$\varphi(\gamma) = \operatorname{Re} w(e^{i\gamma}) = 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + C_1, \quad (12)$$

$$\psi(\gamma) = \operatorname{Im} w(e^{i\gamma}) = C_2.$$

Эти выражения содержат 4 неизвестные вещественные постоянные: u_0, β, C_1, C_2 . Найдем их из условия, что $w(\zeta)$ (11) отображает G_ζ с разрезом от точки B до бесконечности по линии схода потока на известную область G_w с разрезом. Добавив еще одну неизвестную γ_a (угловую координату точки A), запишем систему из 5-ти уравнений:

$$\varphi(\gamma_a) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_1, \quad \psi(\gamma_a) = 0,$$

$$\varphi'(\gamma_a) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Из третьего уравнения сразу найдем $C_2 = 0$, а для оставшихся параметров получим систему:

$$\begin{cases} 2u_0 \cos(\gamma_a - \beta) - \frac{\Gamma\gamma_a}{2\pi} + C_1 = 0, \\ 2u_0 \cos \beta + C_1 = \varphi_1, \\ 2u_0 \sin(\gamma_a - \beta) + \frac{\Gamma}{2\pi} = 0, \\ 2u_0 \sin(-\beta) + \frac{\Gamma}{2\pi} = 0. \end{cases}$$

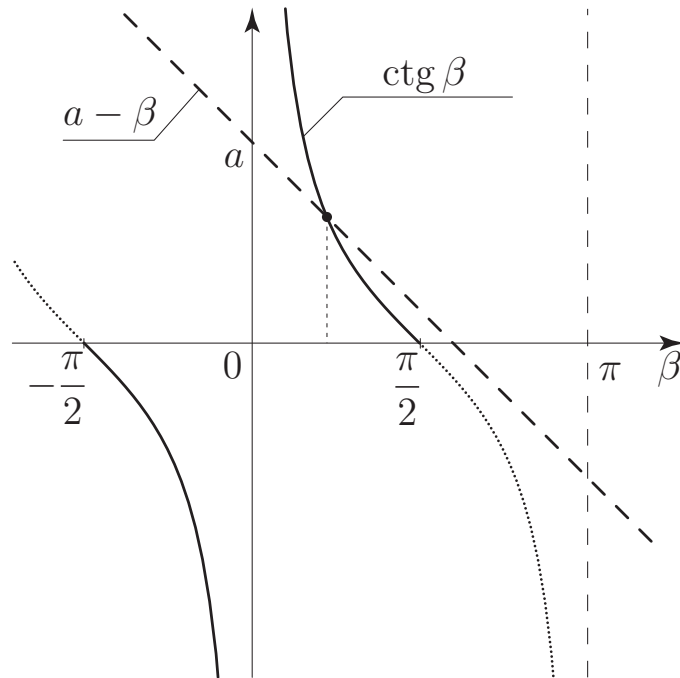
Выразим u_0, γ_a и C_1 через β . Из последнего уравнения $u_0 = \frac{\Gamma}{4\pi \sin \beta}$. Из 3-го и 4-го следует $\sin(\gamma_a - \beta) = \sin(-\beta)$, откуда $\gamma_a - \beta = \pi + \beta$ или

$\gamma_a = \pi + 2\beta$. Второе уравнение служит для определения постоянной $C_1 = \varphi_1 - 2u_0 \cos \beta = \varphi_1 - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{ctg} \beta$.

И, наконец, из первого уравнения системы следует трансцендентное уравнение для нахождения β :

$$\operatorname{ctg} \beta = a - \beta, \quad a = \frac{\pi}{\Gamma} \varphi_1 - \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Из условий $\varphi_1 > 0$, $\varphi_0 > 0$ следует $|a| > \frac{\pi}{2}$. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ уравнение (13) имеет единственное решение, что легко показывается графически.



Заметим, что величина β характеризует отклонение крылового профиля от направления бесциркуляционного обтекания и называется абсолютным или теоретическим углом атаки.

Зная β , найдем остальные величины: u_0 , γ_a и C_1 . Таким образом, $w(\zeta)$ определена. Далее, сопоставляя $\varphi(s)$ из (9) и $\varphi(\gamma)$ из (12), установим зависимость

$$s = s(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \quad (14)$$

Эта зависимость является монотонно убывающей от $s(0) = \ell$ до $s(2\pi) = 0$.

Далее решение строится известным путем по общим формулам. В области G_ζ вводится в рассмотрение аналитическая функция

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| + i \arg \frac{dz}{d\zeta} = \xi + i\eta.$$

На границе единичной окружности действительная часть этой функции

$$\xi(\gamma) = \ln \left| \frac{ds}{d\gamma} \right| = \ln |s'(\gamma)|, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi,$$

известна. Следовательно, по формуле Шварца для внешности единичного круга имеем

$$\chi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + i\beta_0, \quad (15)$$

где β_0 – действительная постоянная (ее значение будет найдено в параграфе 3.3).

Учтя, что точке $\zeta = 1$ соответствует $z = 0$, функцию $z(\zeta)$ определим по формуле

$$z(\zeta) = \int_1^\zeta e^{\chi(\zeta)} d\zeta. \quad (16)$$

3.2 Параметрические уравнения контура крылового профиля в ОКЗА

Учтя $d\zeta = ie^{i\gamma}d\gamma$, отделим в (16) действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} x(\gamma) = -\int_0^\gamma \left| \frac{ds}{d\gamma} \right| \sin[\eta(\gamma) + \gamma] d\gamma, \\ y(\gamma) = \int_0^\gamma \left| \frac{ds}{d\gamma} \right| \cos[\eta(\gamma) + \gamma] d\gamma, \end{cases} \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \quad (17)$$

где $\eta(\gamma)$ – значение мнимой части $\chi(\zeta)$ на границе, определяющееся через сингулярный интеграл Гильберта

$$\eta(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma + \beta_0. \quad (18)$$

Таким образом, (17) есть параметрическое уравнение искомого контура L_z

3.3 Условия разрешимости ОКЗА

Под условиями разрешимости основной ОКЗА понимаются условия замкнутости искомого контура L_z крылового профиля и условие совпадения задаваемой v_∞ с определяемой в процессе решения.

Рассмотрим поведение $\chi(\zeta)$ на бесконечности. Из (15) имеем

$$\chi(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\gamma) d\gamma + i\beta_0.$$

С другой стороны

$$\chi(\infty) = \ln \left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_\infty = \ln \left. \frac{dz}{dw} \right|_\infty \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_\infty = \ln \frac{u_0 e^{-i\beta}}{v_\infty} = \ln \frac{u_0}{v_\infty} - i\beta.$$

Из сравнения мнимых частей $\chi(\infty)$ найдем неизвестный параметр $\beta_0 = -\beta$. Приравняв действительные части, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\gamma) d\gamma = \ln \frac{u_0}{v_\infty}. \quad (19)$$

Так как величина v_∞ задана, условие (19) представляет собой ограничение.

Для замкнутости контура надо потребовать однозначности функции $z(\zeta)$ (16). Однозначность $z(\zeta)$ будет выполнена при равенстве нулю вычета подынтегральной функции $e^{\chi(\zeta)}$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Несложно показать, что это условие выполняется при равенстве нулю вычета $\chi(\zeta)$ на бесконечности. Из (15) следует, что

$$\operatorname{res}_\infty \chi(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 0. \quad (20)$$

Условия (19), (20) и есть условия разрешимости. Удовлетворить их можно за счет вариации $\xi(\gamma)$, т.е. за счет изменения $s(\gamma)$, и, следовательно, исходного $v(s)$.

Но при изменении $v(s)$ можно “растерять” все положительные свойства, которыми должен обладать искомый профиль. О том, как “правильно” следует варьировать исходные данные задачи, будет рассказано в главе 5.

3.4 Особенности функции $\xi(\gamma)$ в ОКЗА

Рассмотрим функцию $\xi(\gamma) = \ln \left| \frac{ds}{d\gamma} \right|$. Исследуем ее поведение в критических точках A и B .

В окрестности точки A имеем $z - z_a \sim (\zeta - \zeta_a)^1$. Продифференцировав, получим $\frac{dz}{d\zeta} \sim 1$. Следовательно, $\xi(\gamma_a) = \ln 1$ и особенности у $\xi(\gamma)$ в точке A нет.

В окрестности точки B функция $z(\zeta)$ переводит угол π в угол $\pi\varepsilon$, следовательно $z - z_b \sim (\zeta - \zeta_b)^\varepsilon$. Производная $\frac{dz}{d\zeta} \sim (\zeta - \zeta_b)^{\varepsilon-1}$ и при $\varepsilon > 1$ в точке B обращается в нуль. Для $\xi(\gamma)$ в окрестности γ_b имеем

$$\xi(\gamma) \sim \ln |(e^{i\gamma} - e^{i\gamma_b})^{\varepsilon-1}| \sim (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_b}{2} \right|. \quad (21)$$

Таким образом, функция $\xi(\gamma)$ имеет логарифмическую особенность в точке B и не принадлежит классу гельдеровских функций. Поэтому при вычислении $\eta(\gamma)$ по (18) и, следовательно, нахождении контура профиля возникают вычислительные трудности.

3.5 Введение функции $\xi_1(\gamma)$. Выделение особенности у $\eta(\gamma)$

Учтя поведение $\xi(\gamma)$ (21) и то, что $\gamma_b = 0$, введем в рассмотрение функцию

$$\xi_0(\gamma) = (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right|.$$

Несложно показать, что она является действительной частью $\chi_0(\zeta) = (\varepsilon - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)$ на единичной окружности (Заметим, что функция $(\varepsilon - 1) \ln(\zeta - 1)$ тоже на границе имеет действительную часть, равную $\xi_0(\gamma)$, но в отличие от χ_0 она имеет логарифмическую особенность на бесконечности).

Рассмотрим теперь функцию $\xi_1(\gamma) = \xi(\gamma) - \xi_0(\gamma)$. На отрезке $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ она не имеет особенностей, т.к. особенности $\xi(\gamma)$ и $\xi_0(\gamma)$ в точке B взаимно уничтожились.

Запишем $\eta(\gamma)$ (18) через $\xi_1(\gamma)$:

$$\eta(\gamma) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_0(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma}_{\eta_0(\gamma)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma}_{\eta_1(\gamma)} - \beta.$$

Интеграл η_1 существует в смысле главного значения по Коши, т.к. $\xi_1(\gamma)$ не имеет особенностей и удовлетворяет условию Гельдера. Вычислим интеграл η_0 в явном виде. Он является интегралом Гильберта и представляет собой мнимую часть $\chi_0(\zeta)$ на границе

$$\eta_0(\gamma) = \operatorname{Im} \chi_0(e^{i\gamma}) = (\varepsilon - 1) \operatorname{Im} \ln(1 - e^{-i\gamma}) = (\varepsilon - 1) \frac{\pi - \gamma}{2}.$$

Таким образом, для вычисления $\eta(\gamma)$ вместо (18) имеем следующую формулу

$$\eta(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma + (\varepsilon - 1) \frac{\pi - \gamma}{2} - \beta.$$

3.6 Запись решения $z(\zeta)$ и условий разрешимости через функцию $\xi_1(\gamma)$

Запишем $\chi(\zeta)$ (15) через $\xi_1(\gamma)$:

$$\chi(\zeta) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_0(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma}_{\chi_0(\zeta)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma}_{\chi_1(\zeta)} - i\beta.$$

Первый интеграл представляет собой формулу Шварца для внешности круга с ядром $\xi_0(\gamma)$, а т.к. $\xi_0(\gamma) = \operatorname{Re} \chi_0(e^{i\gamma})$, то он равен $\chi_0(\zeta)$.

Второй интеграл $\chi_1(\zeta)$ – аналитическая функция, не имеющая особенностей как внутри области, так и на границе.

Подставив полученное выражение для $\chi(\zeta)$ в (16), получим

$$z(\zeta) = \int_1^{\zeta} e^{(\varepsilon-1)\ln(1-\frac{1}{\zeta})} e^{\chi_1(\zeta)} e^{-i\beta} d\zeta = e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1} e^{\chi_1(\zeta)} d\zeta. \quad (22)$$

Таким образом, найдена формула для $z(\zeta)$, в которой особенность в точке $\zeta = 1$ выделена в явном виде. Можно записать и параметрические уравнения контура (17) через $\xi_1(\gamma)$, для чего достаточно заменить в нем $\left|\frac{ds}{d\gamma}\right|$ на $e^{\xi_0(\gamma)+\xi_1(\gamma)} = \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\varepsilon-1} e^{\xi_1(\gamma)}$.

Для полного решения задачи осталось записать через $\xi_1(\gamma)$ условия разрешимости. Подставим $\xi(\gamma) = \xi_0(\gamma) + \xi_1(\gamma)$ в (19) и (20):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_0(\gamma) d\gamma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\gamma) d\gamma = \ln \frac{u_0}{v_\infty},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_0(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 0.$$

Первые интегралы в этих условиях можно вычислить напрямую, но легче опять учесть тот факт, что $\xi_0(\gamma) = \operatorname{Re} \chi_0(e^{i\gamma})$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_0(\gamma) d\gamma = \operatorname{Re} \chi_0(\infty) = (\varepsilon - 1) \ln 1 = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_0(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = \operatorname{res}_\infty \chi_0(\zeta) = (\varepsilon - 1) \operatorname{res}_\infty \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) = -(\varepsilon - 1).$$

В итоге получим формулы, выраженные через $\xi_1(\gamma)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\gamma) d\gamma = \ln \frac{u_0}{v_\infty}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = \varepsilon - 1. \quad (23)$$

4 Способ Тумашева решения основной ОКЗА

4.1 Аналитическое решение ОКЗА способом Тумашева

Постановка задачи и начало решения такие же, что и в методе Манглера. Вводится в рассмотрение комплексный потенциал обтекания единичного круга (11); находятся параметры β , u_0 , γ_a и C ; устанавливается зависимость (14). Вместо функции $\chi(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta}$, как это было сделано Манглером, Тумашев использует функцию Жуковского

$$T(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = \ln v - i\theta = S - i\theta,$$

где v и θ – модуль и аргумент вектора скорости в физической плоскости. На единичной окружности $|\zeta| = 1$ имеем $T(e^{i\gamma}) = S(\gamma) - i\theta(\gamma)$, где действительная часть $S(\gamma) = \ln[v(s(\gamma))]$ известна.

Следовательно, по формуле Шварца

$$T(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + i\beta_0. \quad (24)$$

Найдем действительную постоянную β_0 , используя тот же прием, что и в методе Манглера. На бесконечности

$$T(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\gamma) d\gamma + i\beta_0 = \ln v_\infty - i\theta_\infty.$$

Так как ось x выбрана параллельно скорости набегающего потока, то $\theta_\infty = 0$ и, отделив действительные и мнимые части, получим $\beta_0 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\gamma) d\gamma = \ln v_\infty, \quad (25)$$

Найдем теперь $z(\zeta)$. Производная равна

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-1} \frac{dw}{d\zeta} = e^{-T(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta}.$$

Входящую в это соотношение производную $\frac{dw}{d\zeta}$ найдем, продифференцировав $w(\zeta)$ (11):

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 \left(e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}.$$

Если воспользоваться методом особых точек Чаплыгина и учесть, что $\frac{dw}{d\zeta}$ имеет нули первого порядка в точках ζ_a и $\zeta_b = 1$ и равна $u_0 e^{-i\beta}$ на бесконечности, получим несколько другую запись

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right). \quad (26)$$

Легко показать, что обе записи $\frac{dw}{d\zeta}$ эквивалентны.

Следовательно,

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^\zeta e^{-T(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta. \quad (27)$$

Для нахождения координат искомого контура перейдем в (27) на границу и отделим действительную и мнимую части. Получим

параметрические уравнения контура профиля

$$\begin{cases} x(\gamma) = 4 \int_0^\gamma \frac{u_0}{v(\gamma)} \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta(\gamma) d\gamma, \\ y(\gamma) = 4 \int_0^\gamma \frac{u_0}{v(\gamma)} \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta(\gamma) d\gamma, \end{cases} \quad (28)$$

где мнимая часть $T(\zeta)$ определяется через интеграл Гильберта

$$\theta(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma. \quad (29)$$

Знак “−” перед интегралом связан с тем, что $\theta(\gamma) = -\operatorname{Im} T(e^{i\gamma})$.

4.2 Условия разрешимости ОКЗА в способе Тумашева

Условие совпадения заданной скорости v_∞ с определяемой в процессе решения уже было получено (см. (25)). Условие замкнутости находится из требования однозначности $z(\zeta)$ и представляет собой равенство нулю вычета у $\frac{dz}{d\zeta}$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Найдем этот вычет. Так как

$$T(\zeta) = S(\infty) + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \dots,$$

то

$$e^{-T(\zeta)} = e^{-S(\infty)} e^{-\frac{a_{-1}}{\zeta} + \dots} = e^{-S(\infty)} \left(1 - \frac{a_{-1}}{\zeta} + \dots \right).$$

Из (26) следует

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \left(1 - \frac{\zeta_a + 1}{\zeta} + \dots \right).$$

Поэтому

$$\frac{dz}{d\zeta} = e^{-T(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} = e^{-S(\infty)u_0} e^{-i\beta} \left(1 - \frac{a_{-1} + \zeta_a + 1}{\zeta} + \dots \right). \quad (30)$$

Так как

$$a_{-1} = \operatorname{res}_{\infty} T(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma, \quad (31)$$

то получим комплексное условие замкнутости искомого контура

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = -(1 + \zeta_a). \quad (32)$$

4.3 Особенности функции $T(\zeta)$. Введение функции $T_1(\zeta)$, запись решения

Комплексно сопряженная скорость $\frac{dw}{dz}$ обращается в нуль в критической точке A и при $\varepsilon < 2$ в точке B . Следовательно, функция $T(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz}$ имеет одну (при $\varepsilon = 2$) или две (при $\varepsilon < 2$) логарифмические особенности. Исследуем характер этих особенностей.

В точке разветвления потока $w - w_a \sim (\zeta - \zeta_a)^2$, $z - z_a \sim (\zeta - \zeta_a)$. Следовательно, $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} / \frac{dz}{d\zeta} \sim (\zeta - \zeta_a)^{2-1}$. Функция $T(\zeta)$ ведет себя $T(\zeta) \sim \ln(\zeta - \zeta_a)$.

В точке схода потока $w - w_b \sim (\zeta - \zeta_b)^2$, $z - z_b \sim (\zeta - \zeta_b)^\varepsilon$. Поэтому $\frac{dw}{dz} \sim (\zeta - \zeta_b)^{2-\varepsilon}$ и функция $T(\zeta) \sim (2 - \varepsilon) \ln(\zeta - \zeta_b)$.

Учтем, что $\zeta_b = 1$. Для исключения этих двух особенностей введем функцию $T_0(\zeta)$, содержащую все особенности $T(\zeta)$:

$$T_0(\zeta) = (2 - \varepsilon) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) + \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right).$$

Разность $T_1(\zeta) = T(\zeta) - T_0(\zeta)$ уже будет аналитической функцией, не содержащей особенностей как внутри области, так и на границе единичного круга. Заменяя в (27) $T(\zeta)$ на сумму $T_0(\zeta) + T_1(\zeta)$, получим

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1} e^{-T_1(\zeta)} d\zeta. \quad (33)$$

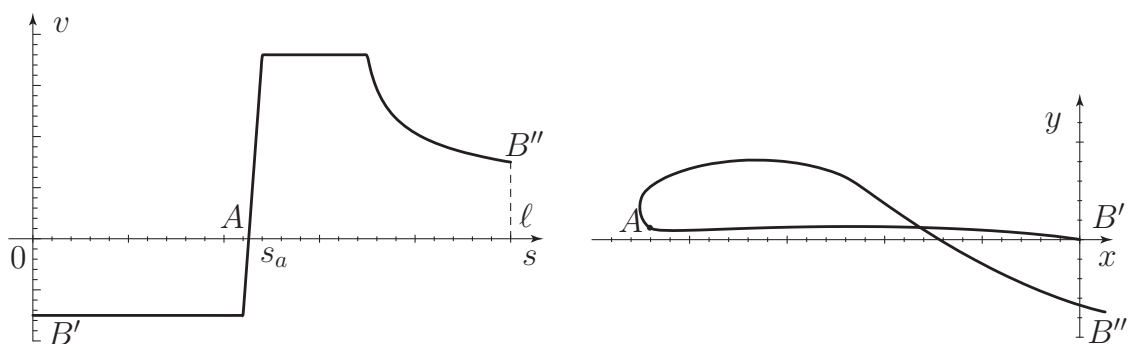
Аналогично тому, как это было сделано в методе Манглера, можно получить параметрические уравнения контура крылового профиля, записанные через функцию без особенностей $S_1(\gamma) = \operatorname{Re} T_1(e^{i\gamma})$. Условия разрешимости (25) и (32), записанные через $S_1(\gamma)$, примут вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1(\gamma) d\gamma = \ln v_\infty, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_1(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 1 - \varepsilon. \quad (34)$$

5 Квазирешение основной ОКЗА

5.1 Идея квазирешения основной ОКЗА, определения

Пусть задано распределение скорости $v(s)$, удовлетворяющее требованиям, сформулированным в постановке основной ОКЗА. При решении по формулам Манглера и Тумашева контур профиля может получиться разомкнутым и самопересекающимся, т.е. не простым, а определяемая в процессе решения скорость v_∞ не совпадающей с заданной. Это говорит о том, что не выполнены условия разрешимости и однолиственности, т.е. условия физической реализуемости решения. Следовательно, ОКЗА оказывается неразрешимой. Нарушается одно из требований корректности по Адамару, именно, требование существования решения в нужном классе решений.



На рисунке показан пример построения контура $y(x)$ крылового профиля, построенного по исходному распределению скорости $v(s)$, $0 \leq s \leq \ell$. Контур $B'AB''$ получился незамкнутым и не простым, а скорость \tilde{v}_∞ , определенная в процессе решения, не совпадающей с

заданной v_∞ , именно, $\tilde{v}_\infty = 0.947v_\infty$.

Трудность заключается в том, что эти условия физической реализуемости выражаются не через исходное $v(s)$, а через $\xi_1(\gamma)$ в методе Манглера и $S_1(\gamma)$ в методе Тумашева. Чтобы проверить выполнение условий физической реализуемости для заданной $v(s)$, необходимо провести половину решения. Если бы удалось выразить эти условия через $v(s)$, то можно было бы описать и выделить класс корректных по Адамару задач, а именно, ОКЗА с распределением $v(s)$, удовлетворяющим условиям физической реализуемости. Но таких результатов пока в ОКЗА не получено.

Таким образом, ОКЗА некорректна по Адамару и ее решение в общем случае не существует. Поэтому для таких задач вводится понятие квазирешения.

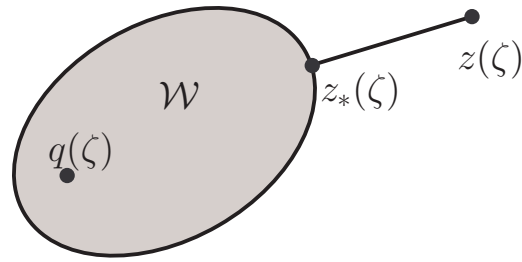
Под квазирешением некорректной задачи понимают такое обобщенное решение, которое при достаточно общих условиях в отличие от истинного решения корректно по Адамару. В частном случае, когда условия физической реализуемости выполняются автоматически, квазирешение совпадает с обычным решением.

Таким образом, наша задача состоит в следующем.

1. Дать определение квазирешения ОКЗА.
2. Доказать корректность этого квазирешения по Адамару.
3. Разработать алгоритм построения квазирешения ОКЗА.

Опишем вначале общую идею построения квазирешения, данную В.К.Ивановым. Обозначим через \mathcal{W} множество корректности задачи, т.е. выделенный нами нужный класс искомых решений (для ОКЗА это множество функций $z(\zeta)$, соответствующих простым и

замкнутым контурам крыловых профилей, обтекаемых с заданной скоростью v_∞ набегающего потока). Кроме того, в определение \mathcal{W} можно заложить и другие конструктивные условия, например, критерии безотрывного обтекания, ограничения на толщину профиля, условия устойчивости и т.п.

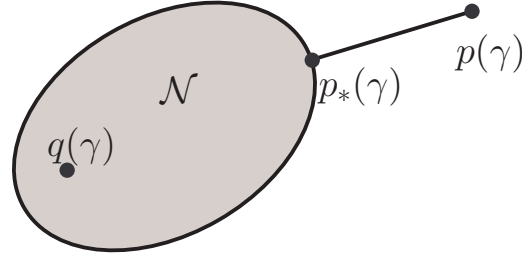


Если заданному $v(s)$ соответствует $z(\zeta)$ из \mathcal{W} , то оно и будет решением нашей задачи. Если контур не попадает в \mathcal{W} , то в качестве квазирешения выбирается некоторый элемент $z_*(\zeta) \in \mathcal{W}$. Так как число таких элементов бесконечно, а единственность решения является одним из требований корректности по Адамару, необходимо наложить дополнительное требование, выделяющее из всех $z_*(\zeta)$ “наилучший”.

Искомое решение ОКЗА строится по вспомогательной функции $\xi_1(\gamma)$ (в методе Манглера) или $S_1(\gamma)$ (в методе Тумашева). Эту функцию, найденную по известной $v(s)$, обозначим $p(\gamma)$. Введем множество корректности \mathcal{N} таких элементов $q(\gamma)$, для которых выполняются условия разрешимости (23) или (34); условия однолиственности пока опустим. Так как условия разрешимости выражаются через $p(\gamma)$ линейно, удастся показать выпуклость и компактность \mathcal{N} .

Пусть $p(\gamma)$ не попадает в \mathcal{N} . Тогда в качестве элемента \mathcal{N} , соответствующего квазирешению $z_*(\zeta)$ выберем такой элемент $p_*(\gamma) \in$

\mathcal{N} , чтобы $p_*(\gamma)$ по некоторому дополнительному требованию был наилучшим.



Одно из таких возможных требований состоит в максимальной близости $p_*(\gamma)$ к $p(\gamma)$. Такая близость понимается в смысле метрики функционального пространства, в котором лежат $p_*(\gamma)$ и $p(\gamma)$:

$$\|p_*(\gamma) - p(\gamma)\|_{L_2[0,2\pi]} = \min_{q(\gamma) \in \mathcal{N}} \|q(\gamma) - p(\gamma)\|_{L_2[0,2\pi]}.$$

Существование элемента $p_*(\gamma)$ следует из компактности, а единственность и устойчивость – из выпуклости множества \mathcal{N} .

Квазирешением основной ОКЗА называется аналитическая в области $|\zeta| > 1$ с простым полюсом на бесконечности функция $z_*(\zeta)$, осуществляющая конформное отображение внешности единичного круга на внешность искомого крылового профиля, которая однозначно определяется по функции $p_*(\gamma)$, принадлежащей множеству корректности \mathcal{N} и минимизирующей на нем заданный функционал

$$J(q) = \|q(\gamma) - p(\gamma)\|_{L_2[0,2\pi]}.$$

Далее $z_*(\zeta)$ определяется по формуле (22) (метод Манглера) или (33) (метод Тумашева).

5.2 Построение квазирешения основной ОКЗА в простейшем случае

Пусть $p(\gamma)$ – вспомогательная функция, построенная по $v(s)$. Зададим множество корректности

$$\mathcal{N} = \left\{ q(\gamma) \in \mathbb{H}, 0 \leq \gamma \leq 2\pi : q(0) = q(2\pi), J_1(q) = \int_0^{2\pi} q(\gamma) d\gamma = A_1, \right. \\ \left. J_2(q) = \int_0^{2\pi} q(\gamma) \cos \gamma d\gamma = A_2, J_3(q) = \int_0^{2\pi} q(\gamma) \sin \gamma d\gamma = A_3 \right\},$$

где постоянные A_1, A_2, A_3 зависят как от метода решения, так и от параметров v_∞, ε (см. (23) и (34)).

Используя определение нормы в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, найдем расстояние от $p(\gamma)$ до элемента $q(\gamma)$

$$J_0(q) = \|q(\gamma) - p(\gamma)\|_{L_2[0, 2\pi]}^2 = \int_0^{2\pi} r^2(\gamma) d\gamma, \quad r(\gamma) = q(\gamma) - p(\gamma).$$

Итак, элемент $p_*(\gamma)$ множества \mathcal{N} будет являться решением следующей задачи: требуется найти такую функцию $q(\gamma)$, чтобы

$$J_0(q) \rightarrow \min, \quad J_k(q) = A_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Эта задача представляет собой простейшую задачу вариационного исчисления. Решим ее методом неопределенных множителей Лагранжа. Составим функционал

$$\Phi(q) = J_0(q) + \mu_1 J_1(q) + \mu_2 J_2(q) + \mu_3 J_3(q) = \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(q, \gamma) d\gamma,$$

$$\mathcal{L}(q, \gamma) = r^2(\gamma) + [\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma] q(\gamma).$$

В точке оптимума ($q = p_*$) производная \mathcal{L}'_q должна равняться нулю

$$\mathcal{L}'_q = 2r(\gamma) + [\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma] = 0,$$

откуда следует

$$r(\gamma) = -\frac{1}{2} [\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma] \equiv r_*(\gamma). \quad (35)$$

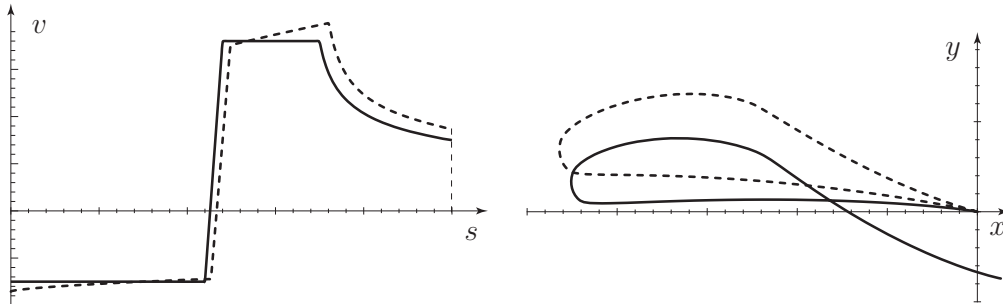
Так как $\mathcal{L}''_q = 2 > 0$, то точка оптимума $p_*(\gamma) = p(\gamma) + r_*(\gamma)$ является точкой глобального минимума задачи. Неопределенные коэффициенты μ_1 , μ_2 , μ_3 находятся из условия выполнения трех условий разрешимости.

После подстановки (35) в ограничения J_1 , J_2 , J_3 , получим

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} p(\gamma) d\gamma - A_1 \right], \quad \mu_2 = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} p(\gamma) \cos \gamma d\gamma - A_2 \right],$$

$$\mu_3 = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} p(\gamma) \sin \gamma d\gamma - A_3 \right].$$

То есть, чтобы построить квазирешение, необходимо соответствующим образом изменить первые три коэффициента разложения $p(\gamma)$ в ряд Фурье. Именно так и поступал Манглер в своей работе 1938 г. по решению ОКЗА. Но он делал это интуитивно, мы же показали, что “подбор” первых трех коэффициентов в ряде Фурье будет квазирешением в смысле минимизации $J_0(q)$ по норме пространства $L_2[0, 2\pi]$.



На рисунке сплошной линией показано исходное распределение $v(s)$ скорости и соответствующий ему незамкнутый самопересекающийся контур. Штриховой линией показаны контур квазирешения, полученный путем изменения первых трех коэффициентов разложения $p(\gamma)$ в ряд Фурье, и соответствующее ему $v(s)$.

Более сложные виды квазирешений.

1. Функционал берется не от функций, а от производных, т.е. минимизируется $\|q'(\gamma) - p'(\gamma)\|_{L_2[0,2\pi]}$.
2. Зафиксировано значение скорости v_* в задней кромке.
3. Квазирешение проводится не на всем отрезке $[0, 2\pi]$, а на его части $[\gamma_1, \gamma_2]$, например, на нижней поверхности профиля.

Для построения квазирешения в этих случаях необходимо задействовать все коэффициенты ряда Фурье.

5.3 Построение квазирешения ОКЗА при фиксировании скорости v_* в задней кромке

Рассмотрим случай построения крыловых профилей с острой задней кромкой. Найдем квазирешение в случае, когда значение скорости в задней кромке фиксировано. Это означает, что значение $q(0) = q(2\pi) = p(0)$ зафиксировано. Таким образом, появилось четвертое ограничение. Множество корректности в этой задаче будет

$$\mathcal{N} = \left\{ q(\gamma) \in \mathbb{H}, 0 \leq \gamma \leq 2\pi : q(0) = q(2\pi) = p(0), J_1(q) = \int_0^{2\pi} q(\gamma) d\gamma = \right. \\ \left. = A_1, J_2(q) = \int_0^{2\pi} q(\gamma) \cos \gamma d\gamma = A_2, J_3(q) = \int_0^{2\pi} q(\gamma) \sin \gamma d\gamma = A_3 \right\},$$

Пусть $r(\gamma) = q(\gamma) - p(\gamma)$. Дадим постановку полученной задачи относительно новой неизвестной функции $r(\gamma)$.

Требуется минимизировать функционал

$$J_0(r) = \|q(\gamma) - p(\gamma)\|_{L_2[0,2\pi]}^2 = \int_0^{2\pi} r^2(\gamma) d\gamma$$

при условиях

$$J_1(r) = \int_0^{2\pi} r(\gamma) d\gamma = B_1, \quad J_2(r) = \int_0^{2\pi} r(\gamma) \cos \gamma d\gamma = B_2,$$

$$J_3(r) = \int_0^{2\pi} r(\gamma) \sin \gamma d\gamma = B_3, \quad r(0) = r(2\pi) = 0,$$

где постоянные B_1, B_2, B_3 известны:

$$B_1 = A_1 - \int_0^{2\pi} p(\gamma) d\gamma, \quad B_2 = A_2 - \int_0^{2\pi} p(\gamma) \cos \gamma d\gamma,$$

$$B_3 = A_3 - \int_0^{2\pi} p(\gamma) \sin \gamma d\gamma.$$

Множество корректности примет вид

$$\mathcal{M} = \left\{ r(\gamma) \in \mathbb{H}, 0 \leq \gamma \leq 2\pi : r(0) = r(2\pi) = 0, J_1(r) = \int_0^{2\pi} r(\gamma) d\gamma = \right. \\ \left. = B_1, J_2(r) = \int_0^{2\pi} r(\gamma) \cos \gamma d\gamma = B_2, J_3(r) = \int_0^{2\pi} r(\gamma) \sin \gamma d\gamma = B_3 \right\}.$$

Представим функцию $r(\gamma)$ рядом Фурье

$$r(\gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma).$$

Тогда, учитывая равенство Парсеваля, функционал $J_0(r)$ запишем в виде

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma) \right)^2 d\gamma = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

В результате поиск неизвестной функции $r(\gamma)$ сведется к поиску неизвестных коэффициентов a_k, b_k , доставляющих минимум функционалу

$$J_0(a_k, b_k) = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right] \rightarrow \min. \quad (36)$$

Нетрудно убедиться, что интегралы J_1, J_2, J_3 также выражаются через коэффициенты ряда Фурье:

$$J_1 = \pi a_0, \quad J_2 = \pi a_1, \quad J_3 = \pi b_1.$$

Из трех ограничений-равенств J_1, J_2, J_3 получим

$$a_0 = \frac{B_1}{\pi}, \quad a_1 = \frac{B_2}{\pi}, \quad b_1 = \frac{B_3}{\pi}.$$

Таким образом, первые 3 коэффициента ряда Фурье находятся из условия выполнения трех ограничений.

Оставшееся ограничение-равенство $r(0) = 0$, записанное через коэффициенты a_k , примет вид

$$J_4(a_k, b_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0. \quad (37)$$

Требуется найти такие коэффициенты $a_k, b_k, k = 2, \dots, \infty$, при которых функционал (36) принимает минимальное значение и выполняется ограничение (37) (коэффициенты a_0, a_1, b_1 уже найдены).

Для решения этой задачи вновь воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим функционал

$$\Phi(a_k, b_k) = J_0 + \mu J_4 = \pi \frac{a_0^2}{2} + \mu \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\pi(a_k^2 + b_k^2) + \mu a_k]$$

и приравняем нулю его производные по a_k и b_k ($k = 2, \dots, \infty$):

$$\begin{aligned} \Phi'_{a_k} = 2\pi a_k + \mu = 0, & \quad \Rightarrow \quad a_k = -\frac{\mu}{2\pi}, \quad k = 2, \dots, \infty. \\ \Phi'_{b_k} = 2\pi b_k = 0, & \quad b_k = 0, \end{aligned}$$

Неизвестный множитель μ найдем из оставшегося ограничения

$$J_4(a_k, b_k) = \frac{a_0}{2} + a_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu}{2\pi} = 0.$$

Под знаком суммирования стоит постоянная величина, поэтому суммы этого ряда не существует. Ограничим бесконечную сумму n членами

$$J_{4(n)}(a_k, b_k) = \frac{B_1}{2\pi} + \frac{B_2}{\pi} - \sum_{k=2}^n \frac{\mu}{2\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{B_1 + 2B_2}{n-1}.$$

Оставшиеся коэффициенты разложения $r(\gamma)$ в ряд Фурье будут

$$a_k = -\frac{B_1 + 2B_2}{2\pi(n-1)}, \quad k = 2, \dots, \infty,$$

и элемент $r_*(\gamma)$ подмножества $\mathcal{M}_{(n)} \subset \mathcal{M}$ (то есть функций из \mathcal{M} , представляемых в виде конечного ряда Фурье с не более чем n членами) будет иметь вид

$$r_*(\gamma) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{B_1}{2} + B_2 \cos \gamma + B_3 \sin \gamma - \frac{B_1 + 2B_2}{2(n-1)} \sum_{k=2}^n \cos k\gamma \right].$$

При стремлении n к бесконечности получим в пределе разрывную функцию

$$r_*(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma = 0, \\ \frac{1}{\pi}[\frac{B_1}{2} + B_2 \cos \gamma + B_3 \sin \gamma], & 0 < \gamma < 2\pi, \\ 0, & \gamma = 2\pi, \end{cases}$$

которая уже не будет принадлежать классу гельдеровских функций.

5.4 Построение квазирешения ОКЗА при фиксированном значении v_* и минимизации нормы производной

В предыдущем параграфе задача нахождения квазирешения при фиксированной скорости в задней кромке оказалась не вполне корректной, так как при ее решении мы пришли к расходящемуся ряду. Немного изменим задачу и в качестве нормы возьмем интеграл от квадрата разности производных

$$J_0(r) = \|q'(\gamma) - p'(\gamma)\|_{L_2[0,2\pi]}^2 = \int_0^{2\pi} r'^2(\gamma) d\gamma.$$

Ограничения остаются прежними, поэтому множество корректности \mathcal{M} не изменилось.

Опять представим искомую функцию $r(\gamma)$ в виде ряда Фурье $r(\gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma)$. Тогда $r'(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos k\gamma - a_k \sin k\gamma)$. Используя равенство Парсеваля, получим

$$J_0(a_k, b_k) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \rightarrow \min. \quad (38)$$

Как и в предыдущем параграфе из трех ограничений равенств J_1, J_2, J_3 найдем

$$a_0 = \frac{B_1}{\pi}, \quad a_1 = \frac{B_2}{\pi}, \quad b_1 = \frac{B_3}{\pi},$$

а последнее ограничение имеет вид (37).

Итак, требуется найти такие коэффициенты $a_k, b_k, k = 2, \dots, \infty$, при которых функционал (38) принимает минимальное значение и выполняется ограничение (37). Опять используем метод множителей Лагранжа. Составим функционал

$$\Phi(a_k, b_k) = J_0 + \mu J_4 = \mu \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\pi k^2 (a_k^2 + b_k^2) + \mu a_k]$$

и приравняем нулю его производные по a_k и b_k ($k = 2, \dots, \infty$):

$$\begin{aligned} \Phi'_{a_k} = 2\pi k^2 a_k + \mu = 0, & \quad \Rightarrow \quad a_k = -\frac{\mu}{2\pi k^2}, \quad k = 2, \dots, \infty. \\ \Phi'_{b_k} = 2\pi k^2 b_k = 0, & \quad b_k = 0, \end{aligned}$$

Подставив выражения для a_k в (37), получим

$$J_4(a_k, b_k) = \frac{a_0}{2} + a_1 - \frac{\mu}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0.$$

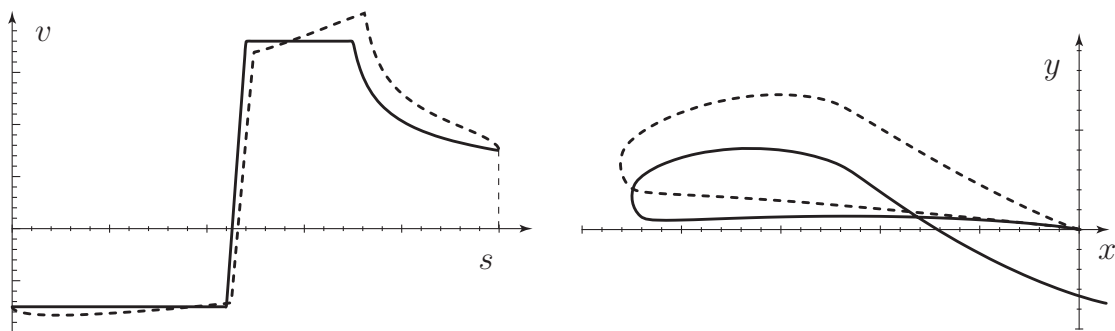
Сумма этого ряда существует $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

Найдем неизвестную постоянную

$$\mu = \frac{\pi(a_0 + 2a_1)}{(\frac{\pi^2}{6} - 1)} \quad \Rightarrow \quad a_k = -\frac{3(B_1 + 2B_2)}{\pi(\pi^2 - 6)k^2} \quad k = 2, \dots, \infty.$$

Итак, мы нашли все коэффициенты разложения $r(\gamma)$ в ряд Фурье, следовательно, и элемент $r_*(\gamma)$ в виде бесконечного ряда Фурье

$$r_*(\gamma) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{B_1}{2} + B_2 \cos \gamma + B_3 \sin \gamma - \frac{3(B_1 + 2B_2)}{(\pi^2 - 6)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\gamma}{k^2} \right].$$



На рисунке показан пример нахождения квазирешения при фиксированном значении v_* и минимизации нормы производной. Сплошной линией показаны исходное распределение скорости и соответствующий ему незамкнутый самопересекающийся контур; штриховой – контур квазирешения и соответствующее ему распределение скорости. Заметим, что в задней кромке ($s = 0, \ell$) скорость не изменилась, зато внутри отрезка разность между исходным и модифицированным распределением скорости больше, чем в примере на стр. 35.

6 О задании скорости как функции дуговой координаты s искомого контура

6.1 Преимущества задания скорости как функции длины дуги s

Задание распределения скорости как функции от s обладает рядом преимуществ по сравнению с заданием, например, хордовой диаграммы (т.е. $v(x)$), годографа скорости ($v(\theta)$) или зависимости от параметра γ канонической плоскости.

1. Заранее известна величина подъемной силы $R_y = \rho v_\infty \Gamma$, где ρ – плотность среды, а $\Gamma = \int_0^L v(s) ds$ – циркуляция скорости.
2. Можно оценить коэффициент подъемной силы

$$c_y = \frac{2R_y}{b\rho v_\infty^2} = \frac{2\Gamma}{bv_\infty},$$

т.к. длина хорды b профиля, как правило, составляет величину, несколько меньшую половины периметра $b \approx 0.47L$.

3. Задание $v(s)$ позволяет точно определить строение контура профиля в окрестности критических точек, в частности, определить радиус кривизны $r \approx \frac{2v_\infty}{v'(s_a)}$. В точке схода потока, как уже было сказано ранее, $v(s) \sim (2 - \varepsilon) \ln |s - s_b|$.
4. Если предположить, что пограничный слой (ПС) на построенном профиле при обтекании его потоком вязкой жидкости достаточно тонкий (при больших числах $Re \sim 10^6 \div 10^7$ это имеет место),

то задание $v(s)$ позволяет провести расчет ПС и оценить значение коэффициента профильного сопротивления, например, по формуле Сквайра-Юнга

$$c_x \approx 2 \frac{\delta_b^{**}}{b} \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12b}}{2}}, \quad H_{12b} = \delta_b^* / \delta_b^{**},$$

где характеристики ПС δ_b^{**} – толщина потери импульса в задней кромке, δ_b^* – толщина вытеснения в задней кромке.

5. Можно приближенно вычислить аэродинамическое качество

$$K = \frac{c_y}{c_x} \approx \frac{\Gamma}{v_\infty \delta_b^{**}} \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12b}}{2}}.$$

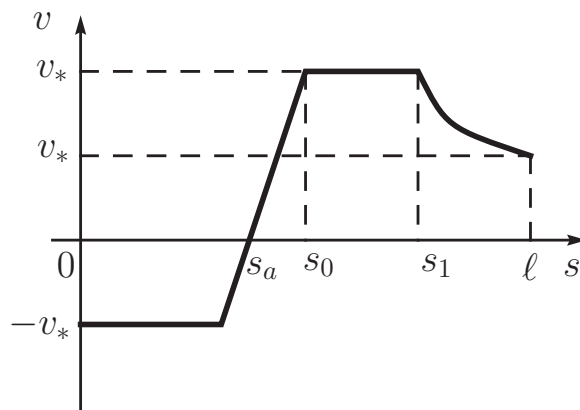
6. Можно задавать распределения скорости, обеспечивающие безотрывность обтекания, т.к. известные критерии отрыва ПС выражаются, как правило, через $v(s)$ (см. параграф 7.2).

6.2 Гидродинамически целесообразные распределения скорости

Гидродинамически целесообразные распределения скорости (ГЦРС) – это такие распределения скорости $v(s)$, которые отражают свойства, присущие нужному классу решений. К требованиям ГЦРС в первую очередь относятся следующие положения.

1. Решение должно соответствовать принятой в постановке задачи математической модели. Это означает, что для модели ИНЖ должно быть ограничение на максимум $v(s)$. Именно, для крыловых профилей дозвуковой авиации $v_{\max} \leq (2 \div 3)v_\infty$. Кроме того, обтекание крылового профиля должно быть безотрывным.

2. Решение должно быть физически реализуемо. Это значит, что контур L_z должен быть замкнутым и простым, а скорости v_∞ , определяемая в процессе решения, совпадать с заданной. Также могут вводиться дополнительные ограничения на кривизну L_z и на толщину, связанные с прочностными свойствами крыла.
3. Желательно получить оптимальное решение, т.е. крыловой профиль с минимальным c_x и максимальными c_y , $K = c_y/c_x$.



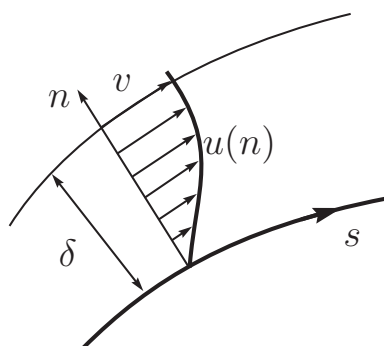
На рисунке изображен пример ГЦРС. Участок $s_0 \leq s \leq s_1$ с постоянной скоростью v_{\max} называется “полкой”, а все распределение – полочным. На участке $s_1 \leq s \leq l$ закон падения скорости от v_{\max} до v_* задается по критерию безотрывности (см. параграф 7.2 и [4]).

7 ОКЗА в рамках модели ПС

7.1 Основные допущения теории ПС

Воздух – это вязкий газ. Рассмотрим лишь вязкую жидкость, хотя решение ОКЗА для вязкого газа также существует. Учет вязкости очень важен, т.к. только в этом случае определяется одна из важнейших аэродинамических характеристик крылового профиля – это коэффициент профильного сопротивления c_x (в ИНЖ как известно $c_x = 0$).

Для учета вязкости потока можно использовать уравнения Навье – Стокса. Однако эти уравнения затрудняют поиск решения ОКЗА. При больших числах Рейнольдса ($Re \sim 10^6 \div 10^7$) достоверные результаты дает решение задач с учетом вязкости по модели ПС.



Основные предположения ПС.

1. Обтекание профиля должно быть безотрывным, влияние вязкости сказывается лишь в сравнительно тонком ПС в следе за профилем. В этом слое скорость возрастает от 0 на поверхности профиля до скорости v во внешнем потоке; v – это такая

скорость в ПС, которая с заданной степенью точности совпадает со скоростью внешнего безвихревого потока в той же точке. Вне ПС поток считается идеальным.

2. Распределение давления по поверхности профиля, обтекаемого безотрывно вязкой жидкостью, совпадает с распределением давления по части поверхности полутела вытеснения, обтекаемого также безотрывно потоком ИНЖ. Эта часть полутела вытеснения получается путем наращивания на контур профиля толщины вытеснения δ^* . А все полутело получается путем наращивания δ^* на контур профиля и линию тока, сходящую с задней кромки при обтекании потоком ИНЖ.
3. Тело вытеснения в следе ограничено двумя конгруэнтными (т.е. совпадающими при наложении) линиями тока; скорости в соответствующих точках этих линий одинаковы.
4. Вне ПС поток жидкости является идеальным и несжимаемым, течение безвихревое.

Таким образом, задача нахождения контура профиля, обтекаемого вязкой жидкости, сводится к задаче нахождения контура полутела вытеснения, обтекаемого ИНЖ.

7.2 Условия безотрывного обтекания крылового профиля

Один из известных критериев безотрывного обтекания записывается в следующем виде

$$-\frac{v'(s)}{|v(s)|} \delta^{**}(s) \leq F(\text{Re}^{**}), \quad F(\text{Re}^{**}) = B \cdot (\text{Re}^{**})^{-1/m}, \quad (39)$$

где $\delta^{**}(s)$ – толщина потери импульса ПС, $Re^{**} = \frac{|v(s)|\delta^{**}(s)}{\nu}$ – местное число Рейнольдса (ν – кинематический коэффициент вязкости), B и m – известные взаимосвязанные эмпирические постоянные. Их значения для разных типов ПС и наиболее известных методов приведены в таблице

Тип ПС	Ламин.	Турбул.
Метод:	Кочина – Лойцянк.	Прандтля – Бури
m	1	4
B	0.0681	0.065
a	0.45	1.25
b	5.35	4.86
A	1	0.01256
f_0	-0.0681	-5.18

С критерием (39) тесно связан интегральный метод Кочина – Лойцянского расчета ПС. Опишем его. Для характеристики профиля скорости $u(n)$ в каждом сечении ПС вводится формпараметр $f(s)$. Для его расчета по заданному $v(s)$ используется формула

$$f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_a}^s |v(s)|^{b-1} ds \right|, \quad (40)$$

где a и b – постоянные, зависящие от типа ПС (см. табл.). Толщина потери импульса находится по формуле

$$\delta^{**}(s) = \left[\left(A \frac{|v(s)|}{v'(s)} f(s) \right)^m \frac{\nu}{|v(s)|} \right]^{1/(m+1)}, \quad (41)$$

где A – еще одна эмпирическая постоянная, зависящая от вида ПС и метода (см. табл.).

Запишем (39) в несколько преобразованном виде

$$-\frac{v'(s)}{|v(s)|} [\delta^{**}(s)]^{\frac{m+1}{m}} \left(\frac{|v(s)|}{\nu} \right)^{1/m} \leq B.$$

Подставив $\delta^{**}(s)$ (41), получим соотношение

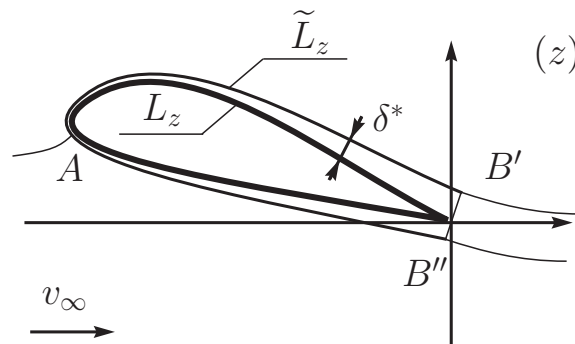
$$-\frac{v'(s)}{|v(s)|} \left[\left(A \frac{|v(s)|}{v'(s)} f(s) \right)^m \frac{\nu}{|v(s)|} \right]^{\frac{1}{m}} \left(\frac{|v(s)|}{\nu} \right)^{1/m} \leq B,$$

которое после преобразования перейдет в критерий безотрывности ПС, записанный через формпараметр $f(s)$:

$$f(s) \geq f_0 = -\frac{B}{A}. \quad (42)$$

Для получения безотрывных распределений на участках падения скорости в ГЦРС поступают следующим образом: задают распределение $f(s)$, удовлетворяющее условию (42) и из (40) определяют распределение $v(s)$ скорости. Тем самым гарантируется безотрывность обтекания крыловых профилей, построенных в результате решения ОКЗА по этим $v(s)$.

7.3 Постановка ОКЗА в рамках модели ПС



Дадим постановку ОКЗА в рамках модели ПС. Искомый непроницаемый замкнутый контур L_z с острой кромкой B в плоскости z обтекается безотрывно плоским установившимся потоком вязкой жидкости с образованием ПС со скоростью на бесконечности v_∞ . Границу полутела вытеснения над профилем обозначим \tilde{L}_z . На \tilde{L}_z задается распределение скорости $v(s)$ внешнего течения (напомним, что в силу вязкости жидкости на самом контуре L_z выполняется условие прилипания $v = 0$). Так как давление поперек ПС постоянно, то задание $v(s)$ на \tilde{L}_z равносильно заданию распределению давления $p(s)$ на L_z . Эти распределения связаны интегралом Бернулли

$$p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p(s) + \frac{\rho v^2(s)}{2}.$$

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические характеристики.

7.4 Основные этапы решения

1. **Нахождение \tilde{L}_z по $v(s)$.** Это обычная ОКЗА в рамках модели ИНЖ, для ее решения можно использовать метод Манглера или Тумашева. Единственное отличие состоит в том, что контур \tilde{L}_z должен быть не замкнут, а разомкнут на заданную величину Δz .
2. **Расчет ПС.** По заданному $v(s)$ находят $f(s)$ (40) и $\delta^{**}(s)$ (41). Для нахождения $\delta^*(s)$ используется соотношение

$$\delta^*(s) = H_{12}[f(s)]\delta^{**}(s),$$

где $H_{12}(f)$ определяется по эмпирической формуле Каменецкого

$$H_{12}(f) = 1.35 - 0.0701f + 0.02913f^2 + 0.01083f^3 + 0.001606f^4.$$

3. **Нахождение L_z .** Для этого от найденного контура \tilde{L}_z отступают по нормали на величину $\delta^*(s)$.

Итак, для получения замкнутого контура крылового профиля L_z контур \tilde{L}_z должна быть разомкнут на величину, равную по модулю сумме толщин вытеснения на верхней и нижней сторонах крылового профиля

$$\Delta z = -i(\delta_{\text{В}}^* + \delta_{\text{Н}}^*)e^{i\theta_b},$$

где θ_b – угол наклона касательной в задней кромке.

Условия разрешимости для метода Тумашева в этом случае будут следующие (с учетом того, что $\varepsilon = 2$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1(\gamma) d\gamma = \ln v_\infty, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_1(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = -1 + i \frac{v_\infty e^{i\beta}}{2\pi u_0} \Delta z. \quad (43)$$

7.5 Квазирешение. Итерационный процесс

Построение квазирешения аналогично квазирешению для ИНЖ. Выполнение условий разрешимости (43) достигается путем “подправления” первых трех коэффициентов ряда Фурье (35). Но при построении квазирешения меняется исходное $v(s)$, что ведет к изменению $\delta_{\text{В}}^*$, $\delta_{\text{Н}}^*$, θ_b , т.е. Δz . Следовательно, правая часть (43) изменяется, построенный после квазирешения профиль оказывается разомкнутым и необходимо повторение процесса квазирешения. Таким образом строится итерационный процесс. Его сходимость при некоторых ограничениях доказана.

8 ОКЗА с учетом сжимаемости потока

Для того, чтобы результаты при расчете в ИНЖ были достоверны, необходимо, чтобы выполнялось условия ИНЖ. Одним из них является условие несжимаемости потока, т.е. скорость должна быть на порядок меньше скорости звука.

В таблице приведены скорости обтекания крыловых профилей, использующихся на практике.

№	Назначение	Скорость	Скорость звука
1	Профиль подводного крыла скоростного судна	90 км/ч	5400 км/ч
2	Стабилизирующее крыло гоночного автомобиля	180 км/ч	1190 км/ч
3	Крыло самолета дозвуковой авиации	720 км/ч	1190 км/ч

В первом и втором случаях пользоваться моделью ИНЖ можно, в третьем – нельзя, необходимо учитывать сжимаемость потока.

8.1 Математическая модель дозвукового течения идеального газа

Напомним вначале некоторые определения из [3].

Если где-нибудь в потоке газа скорость v равна местной скорости звука a , то такая скорость называется критической $v = a_*$.

Отношение скорости v в данном потоке к a_* (одинаковой для всего потока) $\lambda = v/a_*$ называется скоростным напором или приведенной скоростью.

Отношение скорости v к местной скорости звука $M = v/a$ называется числом Маха.

Число Маха характеризует, будет ли поток дозвуковым ($M < 1$) или сверхзвуковым ($M > 1$).

Рассмотрим плоское потенциальное дозвуковое течение идеального газа. Пусть ρ – его плотность, λ_x , λ_y – проекции приведенной скорости на оси координат.

Для нахождения этих трех неизвестных функций, зависящих от x и y , используют следующие уравнения:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \lambda_y}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_x}{\partial y} = 0 \quad - \text{усл. потенциальности,} \quad (44)$$

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho \lambda_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \lambda_y}{\partial y} = 0 \quad - \text{усл. неразрывности,} \quad (45)$$

$$\rho = \rho(\lambda) \quad - \text{усл. баротропности процесса,} \quad (46)$$

т.е. когда плотность ρ зависит только от давления p (ρ и λ связаны уравнением Бернулли).

Из (44) следует существование потенциала φ , т.е.

$$d\varphi = \lambda_x dx + \lambda_y dy \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (47)$$

Из (45) следует существование функции тока ψ , т.е.

$$d\psi = -\rho \lambda_y dx + \rho \lambda_x dy \quad \Leftrightarrow \quad \rho \lambda_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -\rho \lambda_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (48)$$

Пусть λ и θ – модуль и аргумент приведенной скорости $\lambda_x + i\lambda_y = \lambda e^{i\theta}$, т.е.

$$\lambda_x = \lambda \cos \theta, \quad \lambda_y = \lambda \sin \theta.$$

Подставив эти соотношения в (47) и (48), получим

$$d\varphi = \lambda(\cos \theta dx + \sin \theta dy), \quad d\psi = \rho\lambda(-\sin \theta dx + \cos \theta dy).$$

Выразим из этих соотношений dx и dy :

$$dx = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\sin \theta}{\rho\lambda} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\cos \theta}{\rho\lambda} d\psi.$$

Введя комплексную переменную $z = x + iy$, можем записать

$$dz = \left(d\varphi + i \frac{d\psi}{\rho} \right) \frac{e^{i\theta}}{\lambda}. \quad (49)$$

Это условие устанавливает связь между переменными x и y физической плоскости и переменными φ и ψ . Будем искать функции λ и θ в виде зависимости от φ и ψ . Так как $dz = \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi$, то из (49) имеем

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{e^{i\theta}}{\lambda}, \quad \frac{dz}{d\psi} = \frac{ie^{i\theta}}{\rho\lambda}.$$

Условие существования полного дифференциала $\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial \psi} = \frac{\partial^2 z}{\partial \psi \partial \varphi}$ позволяет записать

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{e^{i\theta}}{\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{ie^{i\theta}}{\rho\lambda} \right).$$

Расписав последнее соотношение и отделив действительные и мнимые части, получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}. \quad (50)$$

Система (50) служит для отыскания функций $\lambda(\varphi, \psi)$ и $\theta(\varphi, \psi)$ при наличии условия $\rho = \rho(\lambda)$. Далее для нахождения течения в физической плоскости используется соотношение (49).

8.2 Частный случай несжимаемой жидкости ($\rho=1$)

Если $\rho = 1$, то система (50) примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi},$$

или, если ввести $S = \ln \lambda$, то

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial S}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

Эта система является системой Коши – Римана и можно ввести комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ и аналитическую функцию $T(w) = S(\varphi, \psi) - i\theta(\varphi, \psi)$. Из (49) следует

$$dz = (d\varphi + i\psi) \frac{e^{i\theta}}{e^S} = e^{-T(w)} dw \quad \Rightarrow \quad T(w) = \ln \frac{dw}{dz}.$$

Именно такую функцию и использовал Тумашев, когда решал ОКЗА.

В общем случае $\rho \neq \text{const}$. Получить точное решение системы (50) не удастся даже в случае адиабатического баротропного процесса

$$\rho(\lambda) = \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \quad (51)$$

где \varkappa – постоянная адиабаты (для воздуха $\varkappa \approx 1.4$).

8.3 Математическая модель газа Чаплыгина

Чаплыгин в начале XX века предложил заменить зависимость (51) такой приближенной зависимостью, для которой система (50) перешла бы в систему Коши – Римана.

Введем функцию $\tilde{S} = \tilde{S}(\lambda)$. Перейдем от λ к \tilde{S} в (50):

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \left[\frac{\rho d\lambda}{\lambda d\tilde{S}} \right] \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \left[\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right) \frac{d\lambda}{d\tilde{S}} \right] \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \varphi}.$$

Для того, чтобы эта система удовлетворяла условиям Коши – Римана, необходимо выполнение условий

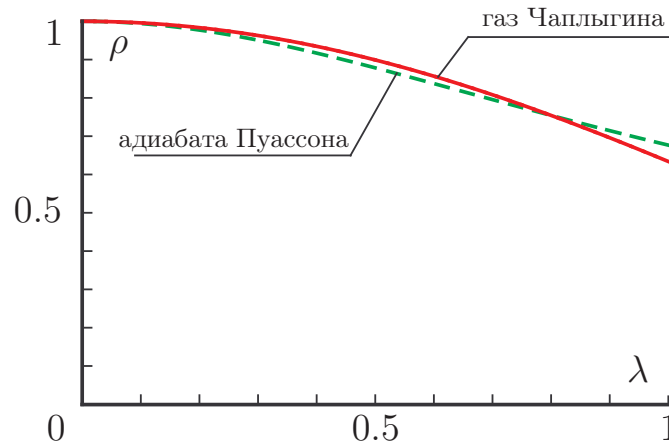
$$\frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{d\tilde{S}}{d\lambda} \right)^{-1} = 1, \quad \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right) \left(\frac{d\tilde{S}}{d\lambda} \right)^{-1} = -1.$$

Эта система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения неизвестных $\rho = \rho(\lambda)$ и $\tilde{S} = \tilde{S}(\lambda)$.

Решив ее, найдем

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}}, \quad \tilde{S} = \ln \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}}, \quad (52)$$

где c^2 – некоторая постоянная. За счет ее выбора можно приблизить данные зависимости к реальным физическим. В частности, при $c^2 = 0$ получаем случай несжимаемой жидкости. При $c^2 = 0.296$ зависимости практически совпадают с истинными зависимостями баротропного адиабатического процесса.



На рисунке приведены кривые $\rho(\lambda)$, где ρ – безразмерная плотность, отнесенная к плотности при $\lambda = 0$. При $c_2 = 0.296$ теоретическая зависимость $\rho(\lambda)$ (первая формула (52)) достаточно точно аппроксимирует реальную $\rho(\lambda)$ (формула (51) при $\varkappa = 1.4$).

Учитывая (52), нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\frac{1}{\lambda} = e^{-\tilde{s}} - c^2 e^{\tilde{s}}, \quad \frac{1}{\rho\lambda} = e^{-\tilde{s}} + c^2 e^{\tilde{s}}. \quad (53)$$

Пользуясь этими соотношениями, в физическую плоскость перейдем по (49):

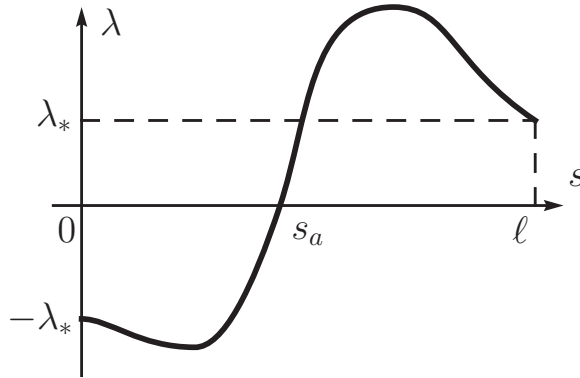
$$dz = \left(\frac{1}{\lambda} d\varphi + i \frac{1}{\rho\lambda} d\psi \right) e^{i\theta} = e^{-\tilde{s}+i\theta} (d\varphi + id\psi) - c^2 e^{\tilde{s}+i\theta} (d\varphi - id\psi).$$

Введем комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ и аналитическую (следствие выполнения условий Коши – Римана) функцию $\tilde{T}(w) = \tilde{S}(\varphi, \psi) - i\theta(\varphi, \psi)$. Тогда, подставив (53) в (49), получим

$$dz = e^{-\tilde{T}(w)} dw - c^2 \overline{e^{\tilde{T}(w)} dw}. \quad (54)$$

Заметим, что в этом случае функция $z = z(w)$ уже не будет аналитической вследствие наличия в (54) слагаемого с комплексным сопряжением. Лишь в случае несжимаемой жидкости ($c^2 = 0$) слагаемое с сопряжением пропадает, вследствие чего $z = z(w)$ становится аналитической функцией.

8.4 Решение ОКЗА по модели газа Чаплыгина



Искомый гладкий контур длины ℓ обтекается безотрывно потоком идеального газа по модели газа Чаплыгина. Задано распределение приведенной скорости $\lambda = \lambda(s)$ и число M_∞ Маха на бесконечности.

Число M Маха и приведенная скорость λ связаны соотношением

$$\lambda = \frac{M \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2}} \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{\lambda \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2}}.$$

Поэтому вместо M_∞ можно задать λ_∞ и по формуле определить M_∞ .

Далее решение проводится аналогично решению ОКЗА для ИНЖ по методу Тумашева. По заданному $\lambda(s)$ находим $\varphi(s)$, циркуляцию $\Gamma = \varphi(\ell) - \varphi(0)$.

Вводим в рассмотрение каноническую область $|\zeta| > 1$. Находим параметры u_0, β обтекания единичного круга потоком ИНЖ. Сравнив $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(s)$, определим зависимость $s = s(\gamma)$.

Далее рассмотрим аналитическую функцию $\tilde{T}(\zeta) = \tilde{S} - i\theta$. Действительную часть этой функции на границе определим по заданно-

му $\lambda(s)$ по второму соотношению (52). По формуле Шварца восстановим $\tilde{T}(\zeta)$ (формула, аналогичная (24), $\beta_0 = 0$).

Для построения искомого контура используем (54), откуда

$$z(\zeta) = \int_1^{\zeta} e^{-\tilde{T}(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta - c^2 \overline{\int_1^{\zeta} e^{\tilde{T}(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta}. \quad (55)$$

Входящая в это соотношение производная $\frac{dw}{d\zeta}$ имеет вид (26).

8.5 Условия разрешимости и построение квазирешения

Как и случае ИНЖ, существует условие совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения. Оно получается при рассмотрении $\tilde{T}(\zeta)$ на бесконечности

$$\tilde{S}(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = \ln \frac{2\lambda_\infty}{1 + \sqrt{1 + 4c^2\lambda_\infty^2}}.$$

Для получения условия, выполнение которого обеспечит замкнутость контура, возьмем интеграл по окружности L_R бесконечно большого радиуса, охватывающего контур L_z . С учетом (55) получим:

$$\oint_{L_R} dz = 2\pi i \operatorname{res}_\infty \left[e^{-\tilde{T}(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} \right] + c^2 2\pi i \operatorname{res}_\infty \left[e^{\tilde{T}(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} \right] = 0.$$

Подставив в это соотношение вычеты на бесконечности (см. (30))

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_\infty \left[e^{-\tilde{T}(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} \right] &= -e^{-\tilde{S}(\infty)} u_0 e^{-i\beta} [1 + \zeta_a + a_{-1}], \\ \operatorname{res}_\infty \left[e^{\tilde{T}(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} \right] &= -e^{\tilde{S}(\infty)} u_0 e^{i\beta} [1 + \zeta_a - a_{-1}], \end{aligned}$$

будем иметь

$$[1 + \zeta_a + a_{-1}] - c^2 e^{2\tilde{S}(\infty)} [1 + \zeta_a - \zeta_a \bar{a}_{-1}] = 0. \quad (56)$$

Возьмем от (56) сопряжение

$$[1 + \bar{\zeta}_a + \bar{a}_{-1}] - c^2 e^{2\tilde{S}(\infty)} [1 + \bar{\zeta}_a - \bar{\zeta}_a a_{-1}] = 0. \quad (57)$$

Исключив из (56) и (57) величину \bar{a}_{-1} , найдем a_{-1} и результат подставим в (31)

$$a_{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = -(1 + \zeta_a) \frac{1 - c^2 e^{2\tilde{S}(\infty)}}{1 + c^2 e^{2\tilde{S}(\infty)}}.$$

Таким образом, установлены три условия разрешимости для ОКЗА по модели газа Чаплыгина. Вид этих условий отличается от (25), (32) лишь постоянными в правых частях. Поэтому для построения квазирешения в случае газа Чаплыгина используются те же методы, что и в случае ИНЖ.

Достижения и нерешенные проблемы ОКЗА

К настоящему моменту в теории ОКЗА достигнуто следующее.

1. Исследованы ОКЗА для проницаемых крыловых профилей.
2. Решены задачи построения крыловых профилей с выдувом реактивной струи.
3. Исследованы ОКЗА для механизированных профилей (т.е. профилей с закрылками и предкрылками).
4. Рассмотрены смешанные ОКЗА.
5. Разработаны методы построения крыловых профилей экранопланов и решеток турбомашин.
6. Исследованы ОКЗА для профилей в диапазоне углов атаки.
7. Исследован широкий класс оптимизационных ОКЗА.
8. Изучены ОКЗА по хордовой диаграмме скорости.

К числу нерешенных проблем следует отнести следующие.

1. Построение квазирешения ОКЗА с учетом условий однолиственности.
2. Получение условий физической реализуемости решений ОКЗА через исходные данные.
3. Построение квазирешений ОКЗА для многосвязных областей (бипланы, трипланы).
4. ОКЗА для трансзвуковых течений.

Литература

1. *Тумашев Г.Г., Нуэжин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во КГУ, 1965.
2. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
4. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.