

ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по научной деятельности

Д.К Нургалиев

« \_\_\_\_\_ » 201 г.

**Программа кандидатского экзамена по специальности**

**Отрасль науки Физико-математические науки**

Группа специальностей 01.01.00- Математика, специальности:

01.01.07- Вычислительная математика

Казань  
2012

## 1. Вопросы программы кандидатского экзамена по специальности

01.01.07 - Вычислительная математика

(шифр)

(наименование)

### Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.

### 1. Функциональный анализ

1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.
2. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.
3. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
4. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.
5. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.
6. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха—Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов).
7. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
8. Пространства функций  $C$ ,  $L_2$ ,  $L_p$ ,  $W_p^1$ . Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре—Стеклова—Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

### 2. Задачи математической физики

1. Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.
2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
3. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).
4. Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля.

### 3. Численные методы

1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.
2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.
3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.
4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.
5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.
6. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.
7. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.
8. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.
9. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.
10. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

***2. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена по специальности***

01.01.07 - Вычислительная математика  
(шифр) (наименование)

## Основная литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи, методы, примеры. Москва: Физматлит, 2001 г.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Физматлит, 2005 г.
3. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
4. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов, Казань: КГУ, 2004 г.
5. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. Казань: КГУ, 2008 г.
6. Карчевский М.М., Шагидуллин Р.Р. Математические модели механики сплошной среды.. Казань: КГУ, 2007 г.

## Дополнительная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
10. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994
13. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
14. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института вычислительной математики и информационных технологий (института) КФУ от 15 марта 2012 года, протокол № 7.

## СОГЛАСОВАНО

Директор института/декан факультета

\_\_\_\_\_ (подпись)

Латыпов Р.Х.

Зав. кафедрой .....

\_\_\_\_\_ (подпись) (Ф.И.О.)

Карчевский М.М.

Зав.отд.аспирантуры и докторантуры .....

\_\_\_\_\_ (подпись)

Е.М.Нуриева