МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. МОКШИН, Р.М. ЮЛЬМЕТЬЕВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ “КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА”

РАЗДЕЛ №2:

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

КАЗАНЬ 2012

УДК 530.1

Издание осуществлено при финансовой поддержке
фонда РНП (грант №2.1.1.741)

Научный редактор
д-р физ.-мат. наук, проф. **Р.Х. Сафаров**

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. (КГЭУ) **А.С. Ситдиков**
канд. физ.-мат. наук, доц. (КФУ) **Ф.М. Гафаров**

Мокшин А.В., Юльметьев Р.М. Квантовомеханические операторы и их свойства: учебно-методическое пособие по квантовой механике. – Казань: КФУ, 2012. – 19 с.

В данном учебно-методическом пособии представлены задачи по курсу «Квантовая механика», основные положения и формулы, необходимые для решения задач, а также примеры с решениями типичных задач.

Пособие предназначено для студентов физических факультетов педагогических специальностей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В качестве вводных строк к данному учебному пособию мы хотели бы привести выдержку из известной статьи В. Вайскопфа "ФИЗИКА В XX ВЕКЕ" опубликованной в журнале "Успехи Физических наук" (Том 101, вып. 4, 1970г.):

"Космологические аспекты поведения вещества обнаруживают, что квантовая физика электрона не играет большой роли во Вселенной. Лишь изредка вещество находится в таком состоянии, когда существенны квантовые свойства электронов, вращающихся вокруг ядер. В большинстве случаев вещество или слишком горячее, или же чересчур разреженное. Но именно в тех специальных условиях, когда могут образовываться квантовые орбиты, *природа формирует атомы, комбинации их, макромолекулы и живые организмы.* И как раз при этом происходит величайшее событие во Вселенной, когда Природа в форме человека начинает познавать сама себя."

Прочной опорой квантовой механики является элегантный и мощный математический аппарат, основанный на теории операторов. Развитый изначально в квантовой механике для описания внутриядерных и атомарных процессов, и ставший затем надежным "инструментом" в квантовой химии, он достиг в настоящее время такого уровня, что находит успешное применение в изучении биофизических процессов в отдельных клетках живых систем.

§4. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Основой математического аппарата квантовой механики является *теория линейных самосопряженных операторов*, в соответствии с которой каждой физической величине сопоставляется оператор или операторное выражение. В таком случае говорят, что физические величины изображаются операторами.

В математике, как известно, оператором называется правило, по которому сопоставляются две функции $u(x)$ и $f(x)$ из одного и того же множества. Другими словами, оператор определяет некоторое *действие*. Для того, чтобы отличать операторы от переменных и функций, их обычно обозначают латинскими буквами со значком $\widehat{\ }$ сверху (например, $\widehat{L}$).

1. Оператор $\widehat{A}$ называется **линейным**, если он удовлетворяет условию

$$\widehat{A}(C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2) = C_1\widehat{A}\Psi_1 + C_2\widehat{A}\Psi_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные вещественные или комплексные числа, Ψ_1 и Ψ_2 – волновые функции.

2. Каждому линейному оператору $\widehat{A}$ можно поставить в соответствие линейный, **сопряженный** ему, оператор $\widehat{A}^+$, удовлетворяющий условию

$$\int \Psi_1^*\widehat{A}\Psi_2 dx = \int \Psi_2(\widehat{A}^+\Psi_1)^* dx.$$

3. Отметим свойства сопряженных операторов

$a)$ $(\widehat{A}^+)^+ = \widehat{A}$;

$b)$ $(\alpha\widehat{A})^+ = \alpha^*\widehat{A}^+$;

$c)$ $(\widehat{A}+\widehat{B})^{+} = \widehat{A}^{+} + \widehat{B}^{+}$;

$d)$ $(\widehat{A}\widehat{B})^{+} = \widehat{B}^{+}\widehat{A}^{+}$,

4. Если оператор, сопряженный данному, совпадает с ним, т.е. $\widehat{A} = \widehat{A}^{+}$, то оператор $\widehat{A}$ называется **эрмитовым** или **самосопряженным**.

5. **Суммой** операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называется оператор $(\widehat{A}+\widehat{B})$, действующий по правилу

$$(\widehat{A}+\widehat{B})\Psi = \widehat{A}\Psi + \widehat{B}\Psi.$$

6. **Произведением** двух линейных эрмитовых операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называется оператор $\widehat{C} = \widehat{A}\widehat{B}$, действующий по правилу

$$\widehat{C}\Psi = \widehat{A}(\widehat{B}\Psi).$$

7. **Коммутатором** двух операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называется оператор, обозначаемый символом $[\widehat{A},\widehat{B}]$ и определяемый следующим образом:

$$[\widehat{A},\widehat{B}]\Psi = (\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A})\Psi = \widehat{A}\widehat{B}\Psi - \widehat{B}\widehat{A}\Psi.$$

Если $[\widehat{A},\widehat{B}] = 0$, то операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называются **коммутирующими**.

8. Оператор $\widehat{A}^{-1}$ называется **обратным** оператору $\widehat{A}$, если выполняется равенство

$$(\widehat{A}\widehat{A}^{-1})\Psi = (\widehat{A}^{-1}\widehat{A})\Psi \equiv \Psi.$$

9. Оператор $\widehat{E}$ называется **единичным**, если его действие на любую волновую функцию Ψ не меняет ее, т.е.

$$\widehat{E}\Psi \equiv \Psi.$$

10. Целая положительная степень линейного самосопряженного оператора есть

$$\widehat{A}^n \Psi = \underbrace{\widehat{A}\widehat{A}\ldots(\widehat{A}}_{n}\Psi),$$

где равенство справа раскрывается в соответствии с правилом произведения операторов (см. свойство **6.**).

Таблица 1: **Основные квантовомеханические операторы**

Динамическая переменная классической механики	Оператор квантовой механики
Радиус-вектор и координаты: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\hat{\vec{r}} = \hat{x}\vec{i} + \hat{y}\vec{j} + \hat{z}\vec{k}$, где $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$, $\hat{z} = z$
Импульс: $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$	$\hat{\vec{p}} = \hat{p_x}\vec{i} + \hat{p_y}\vec{j} + \hat{p_z}\vec{k}$, где $\hat{p_x} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p_y} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p_z} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}$
Момент импульса: $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$, где $M_x = yp_z - zp_y$, $M_y = zp_x - xp_z$, $M_z = xp_y - yp_x$	$\hat{\vec{M}} = [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}]$, где $\hat{M}_x = y\widehat{p_z} - z\hat{p_y}$, $\hat{M}_y = z\hat{p_x} - x\hat{p_z}$, $\hat{M}_z = x\hat{p_y} - y\hat{p_x}$
Квадрат момента импульса: $\vec{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$	$\hat{\vec{M}}^2 = \hat{M_x}^2 + \hat{M_y}^2 + \hat{M_z}^2$
Кинетическая энергия: $T = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$	$\hat{T} = \dfrac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m}$
Полная энергия: $E = T + U(\vec{r})$, $U(\vec{r})$ - потенциальная энергия	Гамильтониан: $H = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U(\vec{r}) =$ $= -\dfrac{\hbar^2}{2m}\triangle + U(\vec{r})$, $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

Пример 1. Найти коммутатор $[\dfrac{\partial}{\partial x}, x]$.

Решение: Для того, чтобы найти коммутатор, нужно подействовать им на произвольную волновую функцию Ψ. Здесь $\widehat{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\widehat{B} = x$. Тогда согласно определению коммутатора запишем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi = \frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) - x\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi + x\frac{\partial\Psi}{\partial x} - x\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi.$$

Следовательно, коммутатор $[\dfrac{\partial}{\partial x}, x]$ представляет собой единичный оператор $\widehat{E}$, т.е. $[\dfrac{\partial}{\partial x}, x] = \widehat{E}$, т.к. будучи примененным к произвольной волновой функции Ψ, он не меняет ее.

Пример 2. Доказать следующее операторное равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2x\frac{\partial}{\partial x} + x^2 + 1.$$

Доказательство: Раскроем операторное выражение в левой части равенства. Для этого подействуем им на произвольную волновую функцию Ψ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)^2 \Psi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\Psi\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\Psi\right) + \\ &+ x\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\Psi\right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi + x\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \\ &+ x\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x^2\Psi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2x\frac{\partial}{\partial x} + x^2 + 1\right]\Psi.\end{aligned}$$

Пример 3. Доказать, что если выполняется условие $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 1$, то справедливо следующее равенство: $[\widehat{A}, \widehat{B}^2] = 2\widehat{B}$.

Доказательство: Учитывая определение коммутатора, можно переформулировать задание следующим образом: Доказать, что

$$[\widehat{A}, \widehat{B}^2] = \widehat{A}\widehat{B}^2 - \widehat{B}^2\widehat{A} = 2\widehat{B}, \tag{1}$$

если выполняется

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} = 1. \tag{2}$$

Для доказательства выпишем из условия (2) следующее соотношение для операторного произведения $\widehat{A}\widehat{B}$, которое мы в дальнейшем будем использовать

$$\widehat{A}\widehat{B} = 1 + \widehat{B}\widehat{A}. \tag{3}$$

Подействуем левым операторным выражением в равенстве (1) на Ψ. Получаем

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{A}\widehat{B}}\widehat{B}\Psi - \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A}\Psi &= (1+\widehat{B}\widehat{A})\widehat{B}\Psi - \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A}\Psi = \Psi + \widehat{B}\underline{\widehat{A}\widehat{B}}\Psi - \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A}\Psi = \\
&= \widehat{B}\Psi + \widehat{B}(1+\widehat{B}\widehat{A})\Psi - \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A}\Psi = \\
&= 2\widehat{B}\Psi + \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A}\Psi - \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A}\Psi = 2\widehat{B}\Psi,
\end{aligned}$$

где при выводе мы использовали условие (3). Таким образом, мы доказали, что

$$[\widehat{A}, \widehat{B}^2] = 2\widehat{B}.$$

Пример 4. Найти правила коммутации операторов $\hat{M}_x$ и $\hat{y}$.

Решение: Подействуем коммутатором $[\hat{M}_x, \hat{y}]$ на произвольную волновую функцию Ψ, выразив оператор проекции момента импульса через операторы координаты и импульса:

$$\begin{aligned}
[\hat{M}_x, \hat{y}]\Psi &= \hat{M}_x\hat{y}\Psi - \hat{y}\hat{M}_x\Psi = (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)\hat{y}\Psi - \hat{y}(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)\Psi = \\
&= \hat{y}\hat{p}_z\hat{y}\Psi - \hat{z}\hat{p}_y\hat{y}\Psi - \hat{y}^2\hat{p}_z\Psi - \hat{y}\hat{z}\hat{p}_y\Psi = \\
&= \hat{y}^2\hat{p}_z\Psi - \hat{y}^2\hat{p}_z\Psi + \hat{z}\underbrace{(\hat{y}\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{y})}_{[\hat{y},\hat{p}_y]}\Psi = i\hbar\hat{z}\Psi. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Примечание: При получении результата использовались известные коммутаторные соотношения

$$[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar, \quad [\hat{y}, \hat{p}_z] \;=\; 0 \quad | \Rightarrow \quad \hat{y}\hat{p}_z = \hat{p}_z\hat{y},$$

Пример 5. Доказать, что оператор $\hat{A} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ является самосопряженным.

Доказательство: Интегрируя по частям и принимая во внимание,

$$\hat{A}^* = \hat{A} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad (5)$$

а функции Ψ_1 и Ψ_2 – непрерывны и обращаются в нуль на границах области определения, получаем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\hat{A}\Psi_2 dx &= -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}dx = -\left.\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\right|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}dx = \left.\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\Psi_2\right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\Psi_1^*}{\partial x^2}\Psi_2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2(\hat{A}\Psi_1)^* dx.\end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{A} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ – самосопряженный оператор.

Пример 6. Найти оператор $\hat{A}^+$, сопряженный к данному оператору $\hat{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Решение: Интегрируя по частям и учитывая, что волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 – непрерывны и обращаются в нуль на границах интервала $(-\infty, \infty)$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\hat{A}\Psi_2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}dx = \Psi_1^*\Psi_2|_{-\infty}^{\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2\left(-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)^* dx,\end{aligned}$$

где $\quad \hat{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{A}^+ = -\dfrac{\partial}{\partial x}.$

Отметим также, что оператор $\hat{A}$ не является самосопряженным, т.к. $\hat{A} \neq \hat{A}^+$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Проверить следующие операторные соотношения:

4.1 $\hat{A}\hat{B}\Psi = \hat{C}\Psi$, $\hat{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\hat{B} = \hat{x}$, $\hat{C} = 1 + \hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x}$.

4.2 $x^2 \dfrac{d}{dx} \cdot \dfrac{1}{x} = x\dfrac{d}{dx} - 1$.

4.3 $\left(1 + \dfrac{d}{dx}\right)^2 = 1 + 2\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$.

4.4 $\left(x + \dfrac{d}{dx}\right)^2 = 1 + x^2 + 2x\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$.

4.5 $\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}x\right)^2 = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx}$.

4.6 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

4.7 Найти $\hat{A}^3$, если $\hat{A} = \dfrac{d}{dx} + \dfrac{1}{x}$.

4.8 Перемножить операторы $(\hat{A} - \hat{B})$ и $(\hat{A} + \hat{B})$.

4.9 Найти результаты применения операторов $\dfrac{d^2}{dx^2}x^2$ и $\left(\dfrac{d}{dx}x\right)^2$ к следующим функциям:

$a)$ $\cos(x)$,

$b)$ $\exp(x)$,

$c)$ $\sin(kx)\exp(-\alpha x)$, где $k, \alpha = \text{const}$,

$d)$ $\cos(kx)\exp(-\beta x)$, где $k, \beta = \text{const}$.

4.10 Найти следующие коммутаторы:
a) $\left[x\dfrac{d}{dx}, x\right]$, b) $\left[\dfrac{d^2}{dx^2}, x^2\right]$, c) $\left[\dfrac{d^3}{dx^3}, x^3\right]$, d) $\left[x^2\dfrac{d^2}{dx^2}, x^2\right]$.

Проверить следующие равенства для коммутаторов:

4.11 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad \left[\hat{x}^2, \hat{p}_x\right] = 2i\hbar\hat{x}.$

4.12 $[f(x), \hat{p}_x] = i\hbar\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}.$

4.13 $\left[f(x), \hat{p}_x^2\right] = 2i\hbar\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\hat{p}_x + \hbar^2\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}.$

4.14 $[\hat{x}, \Delta] = \dfrac{2i}{\hbar}\hat{p}_x.$

4.15 $\left[\hat{x}^2, \left[\hat{x}, \hat{p}_x^2\right]\right] = 4\hbar^2\hat{x}.$

4.16 $\left[x, \hat{H}\right] = \dfrac{i\hbar}{m}\hat{p}_x$, где $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{U}\,(x).$

4.17 $\left[\hat{H}, \hat{p}_x\right] = i\hbar\dfrac{\partial\hat{U}}{\partial x}.$

4.18 $\left[\hat{H}, \hat{p}_x^2\right] = 2i\hbar\hat{p}_x\dfrac{\partial U}{\partial x} + \hbar^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$

4.19 a) $\left[\hat{M}_x, \hat{p}_z\right] = -i\hbar\hat{p}_y$, b) $\left[\hat{M}_x, \hat{p}_y\right] = i\hbar\hat{p}_z$,
c) $\left[\hat{M}_x, \hat{p}_x\right] = \left[\hat{M}_y, \hat{p}_y\right] = \left[\hat{M}_z, \hat{p}_z\right] = 0$, d) $\left[\hat{M}_x, x\right] = 0.$

4.20 $\left[\hat{M}_x, \hat{p}_x^2\right] = 0$, $\left[\hat{M}_x, \hat{p}_x\right] = 0.$

4.21 $\left[\hat{M}_+, \hat{M}_-\right] = 2\hbar\hat{M}_z$, где $\hat{M}_\pm = \hat{M}_x \pm i\hat{M}_y.$

4.22 $\left[\hat{M}_x, \hat{p}^2\right] = 0$, $\left[\hat{M}_x^2, \hat{p}^2\right] = 0.$

4.23 $\left[\hat{\vec{M}}^2, \hat{M}_\alpha\right] = 0$, где $\alpha = x, y, z.$

4.24 $\left[\hat{M}_x, \hat{M}_y\right] = i\hbar\hat{M}_z$, $\left[\hat{M}_y, \hat{M}_z\right] = i\hbar\hat{M}_x$, $\left[\hat{M}_z, \hat{M}_x\right] = i\hbar\hat{M}_y.$

4.25 Доказать, что если $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$, то $\left[\left(\hat{A} + \hat{B}\right), \left(\hat{A} - \hat{B}\right)\right] = 0.$

4.26 Доказать, что если $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 1$, то a) $\left[\hat{A}, \hat{B}^3\right] = 3\hat{B}^2$;
b) $\left[\hat{A}^2, \hat{B}^2\right] = 2\left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right).$

4.27 Доказать коммутаторные соотношения:

a) $\left[\left(\sum\limits_i \hat{A}_i\right), \hat{B}\right] = \sum\limits_i \left[\hat{A}_i, \hat{B}\right]$,

b) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$,

c) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$,

d) $\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$.

4.28 Найти условие, при котором гамильтониан заряженной частицы во внешнем магнитном поле $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2,$$

где $\vec{A}$ - векторный потенциал, можно записать в следующей форме

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e}{mc}\hat{\vec{p}}\vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2.$$

4.29 Найти правило коммутации $\left[\hat{\vec{p}}, \vec{A}\right]$, где $\vec{A}$ - векторный потенциал в случае однородного магнитного поля.

4.30 Проверить, является ли линейным оператор:

a) операции взятия комплексного сопряжения;

b) операция $\sqrt{\ldots}$ - извлечение квадратного корня;

c) $\hat{p}_x$;

d)$\hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{M}_z$;

e) Δ;

f) $\hat{H}$;

g) умножение на постоянное число C.

4.31 Показать, что если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ являются линейными, то операторы $\hat{A}+\hat{B}$ и $\hat{A}\hat{B}$ также являются линейными.

4.32 Проверить самосопряженность следующих операторов:
a) x; b) $\dfrac{\partial}{\partial x}$; c) $i\dfrac{\partial}{\partial x}$; d) Δ.

4.33 Показать, что операторы a)$\hat{p}_x$, b)$\hat{p}^2$, c)$\hat{M}_z$, d)$\hat{M}_2$, e)$\hat{H}$ являются самосопряженными.

4.34 Если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ являются самосопряженными операторами, будут ли самосопряженными следующие операторы:
a)$\hat{A}+\hat{B}$, b) $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$, c) $i\left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right)$.

4.35 Показать, что если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - два самосопряженных коммутирующих оператора, то $\hat{A}\hat{B}$ - тоже самосопряженный оператор.

4.36 Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - некоммутирующие, но самосопряженные. Будут ли в этом случае сопряженными:
a) оператор $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$, b) оператор $i\left[\hat{A},\hat{B}\right]$.

4.37 Найти оператор, сопряженный с оператором
a)$\dfrac{d}{dx}$, b) $i\dfrac{d}{dx}$, c)$-i\dfrac{d}{dx}+x$, d)$\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x}$, e)$\dfrac{d^2}{dx^2}$.
Какие из этих операторов являются самосопряженными?

4.38 Доказать, что оператор $\hat{A}^n$, где n – целое положительное число, является самосопряженным, если оператор $\hat{A}$ - самосопряженный.

4.39 Дан оператор $\hat{A}=\hat{B}\hat{C}$. Показать, что оператор $\hat{A}^+$, сопряженный оператору $\hat{A}$, равен произведению сопряженных операторов $\hat{B}^+$ и $\hat{C}^+$, т.е. $\hat{A}^+=\hat{C}^+\hat{B}^+$.

4.40 Найти оператор, сопряженный с оператором: a) $x\hat{p}_x$; b) $i\hat{p}_x$.

4.41 Доказать самосопряженность оператора $\hat{p}_x^2$.

4.42 Найти оператор, переводящий $\Psi(x)$ в $\Psi(x+a)$.

4.43 Выразить оператор параллельного переноса $\hat{T}\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}+\vec{a})$ через оператор импульса.

4.44 Найти результат действия оператора $\mathrm{e}^{k\frac{\partial}{\partial x}}$ на волновую функцию $\Psi(x)$.

4.45 Является ли оператор комплексного сопряжения ($\hat{A}\Psi = \Psi^*$) линейным?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

4.7 $\dfrac{d^3}{dx^3}+\dfrac{3}{x}\dfrac{d^2}{dx^2}$.

4.8 $\left(\hat{A}-\hat{B}\right)\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\hat{A}^2-\hat{B}^2+\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)$.

4.9 a) $\left(2-x^2\right)\cos x-4x\sin x$; $\quad\left(1-x^2\right)\cos x-3x\sin x$;
b) $\left(2+4x+x^2\right)\mathrm{e}^x$; $\quad\left(1+3x+x^2\right)\mathrm{e}^x$.

4.10 a) x, b) $2+4x\dfrac{\partial}{\partial x}$, c) $6+18x\dfrac{\partial}{\partial x}+9x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, d) x^3.

4.28 $\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)=\mathrm{div}\vec{A}=0$.

4.29 $[\hat{\vec{p}},\vec{A}]=-i\hbar\,\mathrm{rot}\vec{A}$.

4.34 a) да, b) да, c) нет.

4.36 a) нет, b) да.

4.37 a) $-\dfrac{\partial}{\partial x}$, b) $i\dfrac{\partial}{\partial x}$, c) $x-i\dfrac{\partial}{\partial x}$, d) $-\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}$, e) $-\dfrac{d^2}{dx^2}$.
Самосопряженными являются операторы b), c) и e).

Примечание: Иметь в виду, что на бесконечности волновые функции обращаются в нуль.

4.40 a) $\hat{p}_x x$, b)$-i\hat{p}_x$.

4.41 Иметь в виду, что на бесконечности волновые функции и их производные обращаются в нуль.

4.42 Нам требуется найти оператор $\hat{T}_a$ осуществляющий перенос вдоль оси x на величину a, т.е. $\hat{T}_a\Psi(x)=\Psi(x+a)$.

Полагая a малым, разложим $\Psi(x+a)$ в ряд по степеням a:
$$\hat{T}_a\Psi(x)=\Psi(x+a)=\Psi(x)+a\frac{d\Psi}{dx}+\frac{a^2}{2!}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{d^n\Psi(x)}{dx^n}.$$

Сравнивая полученное выражение с разложением
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$, получим $\hat{T}_a = \mathrm{e}^{a\frac{d}{dx}}$.

4.43 $\hat{T}_a = \mathrm{e}^{i(\vec{a},\vec{p})/\hbar}$, так как $\vec{p} = \dfrac{\hbar}{i}\nabla$ или $\nabla = \dfrac{i}{\hbar}\vec{p}$.

4.44 Задача, обратная задаче 42, если положить $a = k$.

4.45 Да.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д.И. *Основы квантовой механики.* – М.: Высшая школа, 1963.

2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Квантовая механика.* – М.: Физматгиз,1963.

3. Соколов А.А., Лоскутов Ю.М., Тернов И.М. *Квантовая механика.* –М.: Просвещение, 1965.

4. Соколов А.А., Тернов И.М. *Квантовая механика и атомная физика.* –М.: Просвещение, 1970.

5. Матвеев А.Н. *Квантовая механика и строение атома.* –М.: Высшая школа, 1965.

6. Давыдов А.С. *Квантовая механика.* –М.: Наука, 1973.

7. Ферми Э. *Квантовая механика.* –М.: Мир, 1968.

8. Шифф Л. *Квантовая механика.* – М.: Мир, 1959.

9. Гольдман П.П., Кривченко В.Д. *Сборник задач по квантовой механике.* –М: Гостехиздат, 1957.

10. Коган В.И., Галицкий В.М. *Сборник задач по квантовой механике.* –М: Гостехиздат, 1956.

11. Иродов И.Е. *Сборник задач по атомной и ядерной физике.* –М.: Атомиздат, 1971.

12. Скачков В.В. и др. *Сборник задач по ядерной физике.* –М.: Атомиздат, 1963.

13. *Фейнмановские лекции по физике.* –М.: Мир, 1969.

14. Флюгге З. *Задачи по квантовой механике.* –М.: Мир, 1973.