МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО “КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ”

Р.М. ХУСНУТДИНОВ, А.В. МОКШИН, Г.Р. МУХАМЕТЗЯНОВА

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО КУРСУ ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВА (ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА)

КАЗАНЬ – 2012

Печатается по решению учебно-методического совета
Института физики
Казанского (Приволжского) федерального университета

УДК 539(075)
ББК 22.31я73
Х98

Научный редактор
д-р физ.-мат. наук, проф. **Р.Х. Сафаров**

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. (КГЭУ) **А.С. Ситдиков**
канд. физ.-мат. наук, доц. (КФУ) **Ф.М. Гафаров**

Хуснутдинов Р.М., Мокшин А.В., Мухаметзянова Г.Р.
Методическая разработка по курсу электронная теория вещества (физика твердого тела). – Казань: К(П)ФУ, 2012. – 28 с.

ISBN 978-5-87730-486-4

Предложенные задачи охватывают основные вопросы курса "Электронная теория вещества" и могут быть использованы на практических занятиях, а также для самостоятельного решения в целях освоения материала изучаемого курса.

Пособие предназначено для студентов физических факультетов.

ISBN 978-5-87730-486-4

Задачи и упражнения

1. Найти, сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку:
   1) примитивной решетки кубической сингонии;
   2) объемноцентрированной решеткой ромбической сингонии;
   3) гранецентрированной решетки кубической сингонии;
   4) базоцентрированной решетки ромбической сингонии;
   5) примитивной решетки гексагональной сингонии.

2. Определить число элементарных ячеек кристалла объемом $V = 1$ м^3:
   1) CsCl (решетка объемноцентрированная кубической сингонии);
   2) меди (решетка гранецентрированная кубической сингонии);
   в) бария (решетка объемноцентрированная кубическая).

3. Определить плотность ρ кальция (решетка гранецентрированная кубическая), если расстояние между ближайшими атомами составляет $d = 0.393$ нм.

4. Стронций имеет гранецентрированную кубическую решетку. Определите расстояние d между ближайшими соседними атомами, если параметр решетки $a = 0.605$ нм.

5. Найти плотность кристалла неона при 20 K, если известно, что решетка имеет гранецентрированную кубическую структуру. Постоянная решетки a при той же температуре равна 0.452 нм.

6. Найти плотность кристалла стронция, обладающего решеткой гранецентрированной кубической сингонии, если расстояние d между ближайшими соседними атомами составляет 0.43 нм.

7. Ванадий имеет объемноцентрированную кубическую решетку. Определить параметр решетки a и расстояние между ближайшими соседними атомами d.

8. Никель имеет гранецентрированную кубическую решетку. Определить параметр решетки a и расстояние между ближайшими соседними атомами d.

9. Найти постоянную решетки a и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристаллов:
1) алюминия (решетка имеет гранецентрированную кубическую структуру);
2) вольфрама (решетка имеет объемноцентрированную кубическую структуру).

10. Для решетки, имеющей основные векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{i}$; $\vec{a}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{a}_3 = 2\vec{k}$, определить основные векторы обратной решетки, а также объемы элементарных ячеек прямой и обратной решеток.

11. Пусть ромбическая решетка имеет три основных вектора $\vec{a}_1 = 5\vec{i}$; $\vec{a}_2 = 2\vec{j}$; $\vec{a}_3 = \vec{k}$, длины которых выражены в нм. Определить размеры и форму первой зоны Бриллюэна.

12. Вектора примитивных трансляций гексагональной пространственной решетки можно выбрать в виде: $\vec{a}_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}$; $\vec{a}_2 = -\frac{\sqrt{3}a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}$; $\vec{a}_3 = c\vec{k}$. Показать, что объем примитивной ячейки равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c$, векторы примитивных трансляций обратной решетки равны $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}a}\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j}$; $\vec{b}_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}a}\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j}$; $\vec{b}_3 = \frac{1}{c}\vec{k}$. Описать и начертить первую зону Бриллюэна гексагональной пространственной решетки.

13. Векторы примитивных трансляций объемноцентрированной кубической решетки имеют вид: $\vec{a}_1 = \frac{a}{2}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$; $\vec{a}_2 = \frac{a}{2}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$; $\vec{a}_3 = \frac{a}{2}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$, где a – сторона обычного элементарного куба, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты, параллельные ребрам куба. Показать, что:
1) объем примитивной элементарной ячейки равен $1/2a^3$;
2) векторы примитивных трансляций обратной решетки есть $\vec{b}_1 = \frac{1}{a}(\vec{i} + \vec{j})$; $\vec{b}_2 = \frac{1}{a}(\vec{j} + \vec{k})$; $\vec{b}_3 = \frac{1}{a}(\vec{j} + \vec{k})$;

3) объем элементарной ячейки обратной решетки равен $2\left(\dfrac{2\pi}{a}\right)^3$.

14. Определить:
    1) среднюю энергию $\langle\varepsilon\rangle$ линейного одномерного квантового осциллятора при $T = \theta_E$, ($\theta_E = 200$ K);
    2) энергию системы, состоящей из $N = 10^{25}$ квантовых трехмерных осцилляторов, при $T = \theta_E$, ($\theta_E = 300$ K).

15. Найти частоту ν колебаний атомов серебра по формуле теории теплоемкости Эйнштейна, если $\theta_E = 165$ K.

16. Во сколько раз изменится средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle$ квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \theta_E/2$ до $T_2 = \theta_E$? Учесть нулевую энергию.

17. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение молярной внутренней энергии кристалла при его нагревании на $\Delta T = 2$ K от температуры $T = \theta_E/2$.

18. В рамках теории теплоемкости твердых тел Эйнштейна, определить изменение молярной внутренней энергии кристалла при его нагревании от нуля до $T_1 = 0.1\theta_E$, ($\theta_E = 300$ K).

19. Вычислить (по теории Эйнштейна) молярную нулевую энергию кристалла цинка ($\theta_E = 230$ K).

20. Найти отношение средней энергии квантового линейного одномерного осциллятора к энергии такого же осциллятора, вычисленной по классической теории. Вычисление произвести для температур:
    1) $T = 0.1\theta_E$,
    2)$T = \theta_E$, где θ_E – характеристическая температура Эйнштейна.

21. Рассматривая твердое тело в Дебаевской модели установить функцию распределения $g(\omega)$ для кристаллов с трехмерной кристаллической решеткой.

22. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = \dfrac{9N}{\omega_D^3}\omega^2$ для трехмерной кристаллической решетки, вывести формулу для энергии кристалла, содержащего N атомов одного сорта.

23. Используя формулу молярной энергии для трехмерного кристалла $E_m = 9RT(T/\theta_D)^3 \displaystyle\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1}dx$, получить выражение для молярной теплоемкости. Найти предельное выражение для молярной теплоемкости при низких ($T \ll \theta_D$) и высоких ($T \gg \theta_D$) температурах (θ_D – температура Дебая).

24. Вычислить (по теории Дебая) молярную нулевую энергию кристалла меди ($\theta_D = 320$ К).

25. Определить максимальную частоту ω_D собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая с $\theta_D = 180$ К.

26. Вычислить максимальную частоту Дебая ω_D, если известно, что молярная теплоемкость серебра C_m при $T = 20$ К ($T \ll \theta_D$) равна 1.7 Дж/(моль·К).

27. Вычислить (по теории Дебая) теплоемкость алмаза массой $m =$ 1 г при $T = \theta_D$.

28. Молярная теплоемкость серебра при $T = 20$ К оказалась равной 1.65 Дж/(моль·К). Вычислить по значению теплоемкости характеристическую температуру θ_D. Условие $T \ll \theta_D$ считать выполненным.

29. Вычислить (по Дебаю) удельную теплоемкость хлористого натрия при температуре $T = \theta_D/20$. Условие $T \ll \theta_D$ считать выполненным.

30. Вычислить (по теории Дебая) теплоемкость цинка массой $m =$ 100 г при температуре $T = 10$ К. Принять $\theta_D = 300$ К, $T \ll \theta_D$.

31. Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0.1\theta_D$ к нулевой энергии. Считать $T \ll \theta_D$.

32. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение молярной внутренней энергии кристалла при его нагревании от нуля до $T = 0.1\theta_D$. Принять $\theta_D = 300$ К, $T \ll \theta_D$.

33. Используя квантовую теорию теплоемкости твердых тел Дебая, вычислить изменение молярной внутренней энергии кристалла при его нагревании на 2 К от температуры $T = \theta_D/2$.

34. Найти отношение θ_E/θ_D характеристических температур Эйнштейна и Дебая.
Указание: использовать выражение для нулевых энергий, вычисленных теориями Эйнштейна и Дебая.

35. Установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристаллов с двумерной решеткой (т.е. кристалла, состоящего из невзаимодействующих слоев). При выводе принять, что число собственных колебаний Z ограничено и равно $3N$, где N – число атомов в рассматриваемом объеме.

36. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = \dfrac{6N}{\omega_D^2}\omega$ для кристалла с двумерной решеткой, вывести формулу для внутренней энергии кристалла, содержащего N атомов.

37. Получить выражение для молярной теплоемкости C_r, используя формулу для молярной внутренней энергии кристалла с двумерной решеткой $E_m = 6RT\left(\dfrac{T}{\theta_D}\right)^2 \displaystyle\int_0^{\theta_D/T} \dfrac{x^2}{e^x - 1}dx$.

38. Найти предельное выражение для молярной теплоемкости кристалла при $T \ll \theta_D, T \gg \theta_D$.

39. Вычислить молярную внутреннюю энергию кристалла с двухмерной решеткой, если $\theta_D = 350$ К.

40. Установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристалла с одномерной решеткой (атомы кристалла образуют цепи, невзаимодействующие друг с другом). Принять, что число собственных колебаний Z ограничено и равно $3N$, где N – число атомов в рассматриваемом объеме.

41. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = 3N/\omega_D$ для кристалла с одномерной решеткой, вывести формулу для внутренней энергии кристалла, содержащего N атомов.

42. Получить выражение для молярной теплоемкости, используя формулы для молярной внутренней энергии кристалла с одномерной решеткой $E_m = 3RT(T/\theta_D)\displaystyle\int_0^{\theta_D/T} \frac{x}{e^x - 1}dx.$

43. Найти предельное выражение для молярной теплоемкости одномерного кристалла при $T \ll \theta_D$ и $T \gg \theta_D$.

44. Вычислить молярную нулевую энергию кристалла с одномерной решеткой, если $\theta_D = 300$ К.

45. Определить квазиимпульс фонона, соответствующего частоте $\omega = 0.1 \cdot \omega_D$. Усредненная скорость звука v в кристалле равна 1380 м/с, $\theta_D = 100$ К. Дисперсией волн пренебречь.

46. Найти энергию фонона, соответствующего максимальной частоте Дебая ω_D, если $\theta_D = 250$ К.

47. Длина волны фонона частоты $\omega = 0.01 \cdot \omega_D$ равна $\lambda = 52$ нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Дебая θ_D, если усредненная скорость звука v в кристалле равна 4.8 км/с.

48. Характеристическая температура Дебая θ_D для вольфрама равна 310 К. Определить длину волны фононов λ, соответствующих частоте $\omega = 0.1 \cdot \omega_D$. Вычислить усредненную скорость звука в вольфраме. Дисперсией волн в кристалле пренебречь.

49. Период решетки одномерного кристалла d (кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом) равен 0.3 нм. Определить максимальную энергию E_{max} фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость звука в кристалле равна 5 км/с.

50. Определить усредненную скорость звука в кристалле, характеристическая температура θ_D которого равна 300 К. Межатомное расстояние d в кристалле равно 0.25 нм.

51. Зависит ли среднее число фононов $\langle n_i \rangle$ строго определенной частоты ω_i, возбуждаемых при данной температуре в некотором кристаллическом образце, от числа атомов в этом образце?

52. Как зависит число фононов dn с частотами от ω до $\omega + d\omega$, возбуждаемых при данной температуре в некотором кристаллическом образце, от числа N атомов в этом образце?

53. Найти характер температурной зависимости полного числа фононов в кристалле в области низких и высоких температур.

54. Какое количество $\langle n_m \rangle$ фононов максимальной частоты возбуждается в среднем при температуре $T = 400$ К в кристалле, если $\theta_D = 200$ К?

55. Определить максимальное значение энергии фонона и среднее число фононов с максимальной энергией при $T = 300$ К, если $\theta_D = 208$ К.

56. Рассеяние света прозрачным твердым телом можно рассматривать как результат взаимодействия фотонов с фононами, считая при этом, что фотоны в веществе обладают импульсом $p = \dfrac{\hbar\omega}{c} n$, где n – показатель преломления вещества, c – скорость света в вакууме. С помощью законов сохранения энергии и импульса показать, что свет, рассеянный под углом θ, будет содержать кроме несмещенной компоненты две смещенные, относительный сдвиг которых равен $\Delta\lambda/\lambda = \pm\dfrac{8nv}{c}\sin^2\theta/2$, где λ – длина волны падающего излучения, v – скорость звука в веществе.

57. Зависит ли средняя энергия свободных электронов в кристалле от числа атомов, образующих кристалл?

58. Что происходит с интервалом между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле при увеличении объема металла в 3 раза?

59. Написать выражение для интервала $\Delta\varepsilon$ между соседними уровнями электронов проводимости в металле.

60. Взяв объем образца V металла равным 1 см^3, вычислить интервал (в эВ) между соседними уровнями энергии свободных электронов для различных значений энергии E:
   а) 0.1 эВ;
   б) 1 эВ;
   в) 3 эВ;
   г) 5 эВ.

61. Определить концентрацию свободных электронов в металле при абсолютном нуле. Энергию Ферми принять равной 1 эВ.

62. Определить отношение концентраций свободных электронов при $T = 0$ K в литии n_1 и цезии n_2, если известно, что энергия Ферми в этих металлах, соответственно, равна 4.72 и 1.53 эВ.

63. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при абсолютном нуле. Уровень Ферми для натрия $E_F = 3.12$ эВ. Плотность натрия $\rho = 970$ кг/м^3.

64. Вычислить среднее значение энергии электронов в металле при абсолютном нуле, если $E_F = 7$ эВ.

65. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить:
   а) энергию уровня Ферми при абсолютном нуле $E_F(0)$ для меди;
   б) среднюю энергию свободных электронов в меди при $T = 0$ K.

66. Металл находится при абсолютном нуле. Определить во сколько раз число электронов с энергией от 0 до $E_F/2$ меньше числа электронов с энергиями от $E_F/2$ до E_F.

67. Кусок металла объемом $V = 20$ см^3 находится при абсолютном нуле. Определить число свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального P_{max} не более, чем на $0.1 \cdot P_{max}$. Энергия Ферми 5 эВ.

68. Определить отношение концентрации n_{max} электронов в металле при абсолютном нуле, энергия которых отличается от максимальной не более, чем на ΔE, к концентрации n_{min} электронов, энергии которых не превышают $E = \Delta E$. ΔE принять равным $0.01E$.

69. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле энергию, превышающую среднюю?

70. Какое число η свободных электронов занимает в среднем уровень с энергией, равной энергии Ферми E_F?

71. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0$ K больше в алюминии, чем в меди, если уровни Ферми, соответственно, равны 11.7 эВ и 7 эВ?

72. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле энергию, превышающую половину максимальной?

73. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся в интервале $\Delta\varepsilon = 0.05$ эВ ниже и выше уровня Ферми, для двух температур
1) $T_1 = 250$ K,
2) $T_2 = 58$ K.

74. Зная распределение электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(p)$ электронов по импульсам. Найти частный случай распределения по импульсам при $T = 0$ K.

75. По функции распределения $dn(p)$ электронов в металле по импульсам установить распределение $dn(v)$ по скоростям:
1) при любой температуре T;
2) при $T = 0$ K.

76. Определить максимальную скорость электронов в металле при $T = 0$ K, если уровень Ферми $E_F = 5$ эВ.

77. Выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0$ K через максимальную скорость v_{max}. Вычислить $\langle v \rangle$ для металла, уровень Ферми E_F которого при $T = 0$ K равен 6 эВ.

78. Металл находится при температуре $T = 0$ K. Определить, во сколько раз число электронов со скоростями от $v_{max}/2$ до v_{max} больше числа электронов со скоростями от 0 до $v_{max}/2$.

79. Выразить среднеквадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ электронов в металле при $T = 0$ через максимальную скорость v_{max} электронов. Функция распределения электронов по скоростям считать известной.

80. Зная распределение $dn(v)$ электронов в металле по скоростям, выразить $\left\langle \dfrac{1}{v} \right\rangle$ через максимальную скорость v_{max} электронов в металле. Металл находится при $T = 0$ К.

81. Определить уровень Ферми E_F в собственном полупроводнике, если энергия активации ΔE_0 равна 0.1 эВ. За нулевой уровень отсчета кинетической энергии электронов принять низший уровень зоны проводимости.

82. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0.48$ Ом·м. Определить концентрацию носителей заряда (подвижности электронов и дырок, соответственно, равны 0.36 и 0.16 м^2/(В·с)).

83. Удельная проводимость кремния с примесями равна 112 Ом/м. Определить подвижность дырок и их концентрацию, если постоянная Холла $R_H = -3.66 \cdot 10^{-4}$ м^3/Кл. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

84. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной $l = 1$ см и длиной $L = 10$ см помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0.2$ Тл. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению L) приложено постоянное напряжение $U = 300$ В. Определить холловскую разность потенциалов U_H на гранях пластины, если постоянная Холла $R_H = 0.1$ м^3/Кл, удельное сопротивление $\rho = 0.5$ Ом·м.

85. Тонкая пластина из кремния шириной $l = 2$ см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0.5$ Тл). При плотности тока $j = 2$ мкА/мм^2, направленного вдоль пластины холловская разность потенциалов U_H оказалась равной 2.8 В. Определить концентрацию носителей тока.

86. Длинноволновый край полосы поглощения чистого германия лежит вблизи длины волны $\lambda_0 = 0.19$ мк. Оценить ширину запрещенной зоны германия.

87. Красная граница фотоэффекта сурьмяно-цезиевого фотокатода соответствует длине волны $\lambda_1 = 650$ нм (при очень низких температурах). Красная граница собственной фотопроводимости отвечает $\lambda_2 = 2.07$ мк. Определить положение дна зоны проводимости данного полупроводника относительно вакуума.

88. Вычислить и сравнить между собой концентрации электронов проводимости при температуре $T = 300$ К:
а) в чистом беспримесном полупроводнике, ширина запрещенной зоны которого равна 1 эВ,
б) в полупроводнике n-типа, энергия активация примесных атомов которого равна 0.2 эВ.

89. Напряженность поля в образце кремния собственной проводимости $E = 400$ В/м, а подвижности электронов и дырок равны 0.12 и 0.025 м^2/Вс. Определить:
1) скорости дрейфа электронов и дырок;
2) удельное сопротивление. Положить, что концентрация собственных носителей тока $2.5 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$;
3) полный дрейфовый ток, если площадь поперечного сечения образца $0.03 \cdot 10^{-4}$ м^2.

90. Пластинка из серебра шириной 2 см, толщиной 0.5 мм помещена в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B =$ 1 Тл, перпендикулярное широкой грани. Вдоль пластинки течет ток $I = 50$ А. Разность потенциалов, обусловленная эффектом Холла, равна 10 мкВ; соответствующее электрическое поле образует правовинтовую систему с векторами $\vec{j}$ и $\vec{B}$. Найти постоянную Холла R_H, полагая, что заряд каждого носителя тока равен $|e|$. Определить концентрацию этих носителей.

91. В некотором полупроводнике, у которого подвижность электронной проводимости в $\eta = 2$ раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдался. Найти отношение концен-

траций дырок и электронов проводимости в этом полупроводнике.

92. При изменении эффекта Холла пластинку из полупроводника p-типа ширины 10 мм и длины 50 мм поместили в магнитное поле с индукцией $B = 5$ кГс. К концам пластинки приложили разность потенциалов $U = 10$ В. При этом Холловская разность потенциалов оказалась $U_H = 50$ мВ и удельное сопротивление $\rho = 2.5$ Ом·см. Найти концентрацию дырок и их подвижность.

93. При измерении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией $B = 5$ кГс поперечная напряженность электрического поля в чистом беспримесном германии оказалась в $\eta = 10$ раз меньше продольной напряженности электрического поля. Найти разность подвижностей электронов проводимости и дырок в данном полупроводнике.

94. В некотором полупроводнике, у которого подвижность электронной проводимости в $\eta = 2$ раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдался. Найти отношение концентраций дырок и электронов проводимости в этом полупроводнике.

95. Температура катода равна 2000 К. Какую разность потенциалов надо приложить между катодом и анодом, чтобы эмиссионный ток увеличился на 10%? Плоскопараллельные пластины находятся на расстоянии 1 см друг от друга.

96. Оценить минимальную температуру T дейтериевой плазмы, при которой дейтоны с одинаковыми скоростями, равными наиболее вероятному значению при этой температуре, смогут преодолеть кулоновский барьер при лобовом соударении. Распределение по скоростям считать максвелловским, радиус дейтона принять равным 2 ферми.

97. Энергию термоядерных нейтронов, возникающих в результате реакции $\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}^3 \to \mathrm{He}^4 + n$ можно использовать, если окружить зону реакции оболочкой, которая их поглощает с положительным тепловым эффектом, например, оболочкой, содержащей

Li^6. Тогда $n + \mathrm{Li}^6 \to \mathrm{H}^3 + \mathrm{He}^4$. Найти полную энергию, выделяющуюся в результате синтеза ядер H^2 и H^3 с учетом последней реакции.

98. Оценить среднюю продолжительность термоядерной реакции в чисто дейтериевой плазме с плотностью 1 г/см^3 при температуре $2 \cdot 10^7$ K.
Указание: Произведение эффективного сечения термоядерной реакции на относительную скорость взаимодействующих ядер, усредненное по распределению скоростей для дейтериевой плазмы $(\overline{\sigma v})_{dd} = 1.5 \cdot 10^{-19} \dfrac{1}{T^{2/3}} e^{-42.5/T^{1/3}}$ м^3/с, где T – температура плазмы, млн.град.

99. Какое количество термоядерных реакций dt и dd протекает за 1 с в 1 см^3 дейтериево-тритиевой смеси плазмы, концентрации ядер дейтерия и трития у которой n_d и n_t?

100. Найти мощность, освобождаемую в 1 см^3 дейтериево-тритиевой плазме при температуре $T = 2 \cdot 10^7$ K в результате протекания термоядерных реакций $d + t \to_2 He^4 + n$, если концентрация дейтерия и трития $n_d = n_t = 10^{16}$ ядер/см^3.
Указание: Произведение эффективного сечения термоядерной реакции на относительную скорость взаимодействующих ядер, усредненное по распределению скоростей для дейтериевой плазмы $(\overline{\sigma v})_{dt} = 1.6 \cdot 10^{-17} \dfrac{1}{T^{2/3}} e^{-42.5/T^{1/3}}$ м^3/с.

101. Найти радиус сферического термоядерного реактора, заполненного дейтериевой плазмой при температуре T и концентрации ядер n, предположив, что теплоотвод из активной зоны осуществляется только в виде теплового излучения в соответствии с законом излучения Стефана-Больцмана. Для простоты считать, что T и n однородны по объему.
а) Вычислить температуру плазмы, при которой радиус такого реактора будет наименьшим $R = R_{min}$.
б) Вычислить R_{min} при $n = 10^{20}$ ядер/см^3; энергия выделяющаяся в одном акте синтеза, равна в среднем 3.64 МэВ.
в) Объяснить, почему закон Стефана-Больцмана не применим к системам разреженной плазмы небольших размеров.

102. Определить энергию, необходимую для разогрева 1 г смеси, состоящей из одинакового количества атомов H^2 и Li^6, от комнатной температуры до температуры 10^7 K, при которой плазму считать полностью ионизованной.

103. Пусть плазма имеет вид плоскопараллельного слоя и под действием некоторой причины произошло смещение всех электронов на x относительно ионов в направлении, перпендикулярном к поверхности слоя. Найти с помощью этой модели частоту возникающих электронных колебаний плазмы.

104. Показать, что электромагнитная волна с частотой $\omega < \omega_p$ испытывает в плазме полное внутреннее отражение.

105. Вычислить концентрацию электронов в плазме, для которой наблюдается запирание пучков радиоизлучения с длиной волны большей $\lambda_0 = 1.7$ см.

106. При зондировании разреженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что радиоволны с $\lambda > \lambda_0 = 0.75$ м испытывают полное внутренне отражение. Найти концентрацию свободных электронов в этой плазме.

107. Концентрация электронов на Солнце на расстоянии $r = 0.06R$ от границы фотосферы, где R - радиус Солнца, примерно равна $n_e = 2 \cdot 10^8$ см$^{-3}$. Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигнуть Земли, если длина волны (в вакууме) равна:
1) 1 м;
2) 10 м;
3) 50 м?

108. Заряженная частица влетает в почти однородное осесимметричное постоянное поле под углом $\alpha = 45°$ к направлению вектора магнитной индукции. Магнитная индукция возрастает на 10% при некотором перемещении частицы. Каково при этом относительное изменение радиуса шага спирали, по которой движется частица?

109. Определить радиус кривизны траектории электрона, имеющего энергию $E = 100$ эВ в магнитном поле $B = 10^3$ Гс.

110. В однородном магнитном поле $B = 500$ Гс по окружности радиуса $r = 10$ см движется электрон. Затем поле медленно увеличивается до 4500 Гс. Определить радиус окружности, по которой движется электрон в конце процесса.

111. Предположим, что ток $I = 200$ кА протекает в тонком поверхностном слое цилиндрического плазменного шнура с равновесным сечением $\zeta = 8$ см^2. Определить равновесное значение напряженности магнитного поля на поверхности шнура и давление внутри плазмы.

112. При каком поле магнитное давление на плазму будет составлять 8 атм? Считать, что внутри плазмы магнитное поле отсутствует.

113. Плазма имеет вид тонкого цилиндрического слоя, по которому течет ток I_p. По оси расположен металлический стержень с током I обратного направления, магнитное поле которого препятствует сжатию плазменного слоя под действием его собственного магнитного поля и обеспечивает удержание данного слоя в равновесном состоянии на некотором расстоянии от оси.
1) При каком соотношении I_p и I будет такое равновесие? Считать, что магнитное поле в плазме отсутствует.
2) Вычислить температуру изотермической водородной плазмы в данной системе, если $I_p = 600$ кА, диаметр цилиндрического слоя $d = 0.1$ см, концентрация ядер $n = 10^{16}$ см$^{-3}$.

114. Определить намагниченность тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора μ_B, а концентрация атомов $6 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

115. Магнитная восприимчивость f марганца равна $1.21 \cdot 10^{-4}$. Вычислить намагниченность марганца в магнитном поле напряженностью $H = 100$ кА/м, $\rho(Mn) = 7.4$ г/см^3.

116. При температуре $T_1 = 300$ К и магнитной индукции $B = 0.5$ Тл была достигнута определенная намагниченность I парамагнетика. Определить магнитную индукцию B_2, при которой сохранится та же намагниченность, если температуру T_2 повысить до 480 К.

117. Прямоугольный ферромагнитный брусок объемом $V = 10$ см^3 приобрел в магнитном поле $H = 800$ А/м, магнитный момент $p_m = 0.8$ А·м^2. Определить магнитную проницаемость ферромагнетика.

118. Вычислить среднее число $\langle n \rangle$ магнетонов Бора, приходящихся на один атом железа, если при насыщении намагниченность I_0 железа равна 1.84 МА/м.

119. При каких значениях индукции внешнего магнитного поля в железе действующее поле совпадает (с относительной погрешностью не более 1%) и молекулярным полем Вейсса, если температура Кюри равна 770° C и намагниченность при насыщении $I_0 = 2 \cdot 10^6$ А/м.

120. На один атом железа в незаполненной $3d$-оболочке приходится четыре неспаренных электрона. Определить теоретическое значение намагниченности I_o железа при насыщении.

121. Над сверхпроводящей плоскостью расположен тонкий прямой проводник, по которому течет постоянный ток. Полагая линейную плотность проводника $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м, найти на какой высоте над плоскостью будет свободно висеть проводник с током.

122. Пользуясь выражением $\lambda_L^2 = \dfrac{m}{\mu_0 n q^2}$ для лондоновской глубины проникновения, где m – удвоенная масса электрона, $q = -2e$, n – половина концентрации электронов проводимости, оценить значение глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводнике.

123. Известно, что сильные магнитные поля разрушают сверхпроводящее состояние. Пользуясь зависимостью $H_k(T) = H_{ko}[1 - (T/T_k)^2]$, где H_{ko} - критическое поле при абсолютном нуле, оценить значение критического поля для ванадия($T_k = 5.3$ K, $H_{ko} = 1370$ Гс), индия ($T_k = 3.4$ K, $H_{ko} = 293$ Гс) при температуре 1 K, 2 K, 3 K. Отразить зависимость $H_k(T)$ графически.

124. Оценить величину кванта магнитного потока $\Phi_0 = \dfrac{2\pi\hbar}{q}$, $q = -2e$ в эффекте макроскопического квантования, наблюдаемого в сверхпроводящем кольце.

Ответы и указания

1. 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 2; 5) 1.

2. 1) $1.44 \cdot 10^{28}$; 2) $2.1 \cdot 10^{28}$.

5. $1.46 \cdot 10^3$ кг/м^3.

6. $2.6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

9. 1) 0.404 нм; 0.286 нм; 2) 0.316 нм; 0.274 нм.

14. $2.99 \cdot 10^{-21}$ Дж; 134 кДж.

15. 3.44 ТГц.

16. в 3.74 раза.

17. 36 кДж/моль.

18. 340 Дж/моль.

19. 2.87 МДж/моль.

21. $g(\omega) = 9N\omega^2/\omega_D^3$.

22. $E = 9NkT\left(\dfrac{T}{\theta_D}\right)^3 \displaystyle\int_0^{\theta_D/T} \dfrac{x^3dx}{e^x - 1}$, $\theta_D = \hbar\omega_D/k$.

24. 2.99 Дж.

25. $2.36 \cdot 10^{13}$ с $^{-1}$.

26. $2.75 \cdot 10^{13}$ с $^{-1}$.

31. $5.2 \cdot 10^{-3}$.

32. 14.6 кДж.

33. $E = 2.49, R \cdot \Delta T = 41.4$ кДж.

34. 3/4.

35. $g(\omega) = \dfrac{6N}{\omega_D^2}\omega$.

36. $E = 6NkT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2 \cdot \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^2dx}{e^x - 1}.$

39. 2.91 МДж.

40. $g(\omega) = 3N/\omega_D$.

41. $E = 3NkT\left(\frac{T}{\theta_D}\right) \int_0^{\theta_D/T} \frac{x}{e^x - 1}dx.$

44. 1.87 МДж/моль.

45. 10^{-25} н.с.

46. $3.45 \cdot 10^{-21}$ Дж.

47. 443 К.

48. 4.8 нм.

49. $1.1 \cdot 10^{-21}$ Дж.

50. 3.13 км/с.

51. нет, $\langle n_i \rangle = 1/e^{\hbar\omega/kT} - 1$.

52. $dn(\omega) = 9N\left(\frac{\hbar}{k\theta_D}\right)^3 \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$

53. $T \gg \theta_D$, $n = \frac{9}{e}N\frac{T}{\theta_D}$; $T \ll \theta_D$,

$$n = 9N\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{e^x - 1} = 9N\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \cdot 0.245.$$

54. $\langle n_m \rangle = 1/[\exp(\theta_D/T) - 1] = 1.54$.

55. 0.0187 В; 1.0.

57. Нет.

58. Уменьшается в 3 раза.

59. $\Delta\varepsilon = (2\pi\hbar)^3/4\pi V(2m)^{3/2}\sqrt{E}$.

60. а) $4.7 \cdot 10^{-22}$ эВ; б) $1.5 \cdot 10^{-22}$ эВ; в) $0.85 \cdot 10^{-22}$ эВ; г) $0.66 \cdot 10^{-22}$ эВ.

61. $4.57 \cdot 10^{-27}$ м^3.

62. 5.41.

63. 0.9 эл-н/атом.

64. 4.2 эВ.

65. а) 7 эВ; б) 4.2 эВ.

66. 1.83.

67. $2.8 \cdot 10^{22}$ эл-нов.

68. 14.9.

69. $\eta = 0.54$.

70. $\langle n \rangle = 1$.

71. В 3 раза.

72. $\eta = 0.65$.

73. 1) 0.893, 0.119; 2) 0.999955, $4.5 \cdot 10^{-5}$.

74. $dn(p) = \dfrac{1}{\pi^2\hbar^3}\dfrac{p^2 dp}{\exp\left(\dfrac{p^2/2m - E_F}{kT}\right)}$ при $T \neq 0$ K;

$dn(p) = \dfrac{1}{\pi^2\hbar^3} p^2 dp$ при $T = 0$ K.

75. $dn(\upsilon) = \dfrac{m}{\pi^2\hbar^3}\dfrac{\upsilon^2 d\upsilon}{\exp\left(\dfrac{m\upsilon^2 - 2E_F}{2kT}\right)}$ при $T \neq 0$ K;

$dn(\upsilon) = \dfrac{m}{\pi^2\hbar^3}\upsilon^2 d\upsilon$ при $T = 0$ K.

76. $\upsilon_{max} = \sqrt{2E_F/m} = 1.32$ Мм/с.

77. $\langle \upsilon \rangle = \dfrac{3}{4}\upsilon_{max} = 1.09$ Мм/с.

78. в 7 раз.

79. $\overline{\langle \upsilon \rangle} = \sqrt{3/5\upsilon_{max}}$.

80. $\left\langle \frac{1}{\upsilon} \right\rangle = \frac{3}{2\upsilon_{max}}$.

81. -0.05 эВ.

82. $2.5 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

83. $3.5 \cdot 10^{-2}$ м^2/В·с; $2 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$.

84. 1.2 В.

85. $5.25 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$.

86. 0.62 эВ.

87. $E = 2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 1.31$ эВ.

88. а) $7.7 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$; б) $5 \cdot 10^7$ см$^{-3}$.

89. 48 м/с; $1.73 \cdot 10^3$ Ом; 0.696 мкА.

90. $6.2 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

91. $n^+/n^- = \eta^2 = 4$.

92. $n = 5 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$; $\mu = 0.05$ м^2/В·с.

93. $\mu^- - \mu^+ = 1/\eta B = 0.2$ м^2/В·с.

94. $n^+/n^- = n^2 = 4$.

95. 1880 В.

96. $\upsilon_{prob} = \sqrt{2\frac{kT}{m}}$, $E_{kin} = kT$, $2E_{kin} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_0}$, $T = 2.1 \cdot 10^9$ К.

97. 17.6+4.8=22 МэВ.

98. $\tau = 1/n\overline{\sigma\upsilon} \approx 1.5 \cdot 10^{-3}$ с.

99. $n_d n_t(\overline{\sigma\upsilon})_{dt} + \frac{n^2 d}{2}(\overline{\sigma\upsilon})_{dd}$, где черта означает усреднение по всем возможным значениям скоростей.

100. $P = Qn_d n_t(\overline{\sigma\upsilon}) = 36$ Вт/см^3.

101. $\int_0^R 4\pi r^2 dr Q \frac{n^2}{2}(\overline{\sigma v}) = 4\pi R^2 \sigma T^4$, $R = 3\sigma T^4 / \frac{n^2}{2} Q$.

а) Воспользовавшись выражением, которое определяет зависимость $\overline{\sigma v}$ от температуры T, для дейтериевой плазмы, и условием $\frac{dR}{dT} = 0$ получим $T = 2.8 \cdot 10^7$ К.

б) $R_{min} = 2.6 \cdot 10^9$ м.

в) Такие системы прозрачны для собственного излучения, поэтому тепловое равновесие между излучением и частицами плазмы установится не может.

102. $E = \frac{3}{2} kT \frac{N_A m}{A_1 + A_2}(Z_1 + Z_2 + Z_3) = 9.35 \cdot 10^4$ кДж, где m – масса смеси, Z_1 и Z_2 – число электронов в атомах, A_1 и A_2 – атомные веса атомов.

103. $m_e \ddot{x} = -eE = \frac{ne^2 x}{\varepsilon_0}$; $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m_e}$.

104. $R(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2$. Уравнение волны $E = E_0 e^{-i(\omega t - kx)}$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. При частотах $\omega < \omega_p$ показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = i\kappa$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = i\frac{2\pi\kappa}{\lambda_0}$, где λ_0 – длина волны в вакууме. В этом случае $E = E_0 e^{-2\pi x\kappa/\lambda_0}$ т.е. возникает стоячая волна с экспоненциальной убывающей амплитудой.

105. $n_e = 4\pi^2 c^2 m_e \varepsilon_0 / e^2 \lambda_0^2 = 5 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$.

106. $n_e = 2 \cdot 10^{10}$ м$^{-3}$.

107. 1) да 2), 3) нет.

108. $r^2 B^2 = r_0^2 B_0^2$, если $B = 1.1 B_0$, то $r^2 = \frac{r_0^2}{1.1}$, следовательно, $r = 0.95 r_0$, т.е. радиус спирали уменьшается на 5%, т.к. $\omega = \frac{|q|B}{m}$, то $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{B}{B_0}$. Обратное отношение периодов равно $T/T_0 = 1/1.1$. Если U_0 и U – скорости частицы в направлении магнитного поля соответственно при магнитной индукции B_0 и B, то отношение шагов спирали будет равно $\frac{h}{h_0} = UT/U_0 T_0 = \Big(1 +$

$\dfrac{\Delta U}{U_0}\Big)\dfrac{T}{T_0}$, где $\Delta\omega = U - U_0$. Согласно $\Delta\left(\dfrac{mU^2}{2}\right) = mU\Delta U$ и $\Delta A = -\dfrac{|q|U_1 r_0}{2}\Delta B$, где $\Delta B = B - B_0$, U_1 – поперечная магнитной индукции скорость, можно получить $\Delta = -\dfrac{|q|}{2m}\cdot \dfrac{U_1}{U_0}r_0\cdot(B - B_0)$ причем $r_0 = \dfrac{U_0}{\omega_0}$, а $\omega_0 = \dfrac{|q|B\omega}{m}$. Следовательно, $\dfrac{\Delta U}{U_0} = -0.1\dfrac{U_1}{U_0}$. Но $\dfrac{U}{U_0} = tg\alpha = 1$, и значит $\dfrac{h}{h_0} = 0.86$. Указание: $A = -\dfrac{|q|u_1 r_0}{2}\Delta B$ находим из следующих соображений: $\overrightarrow{F} = q[\overrightarrow{U}\overrightarrow{B}]$, $F_r = |q|U_1 B_r$, где B_r – радиальная составляющая поля, $B_r = -\dfrac{1}{2}r\dfrac{\partial B}{\partial Z}$, $dA = F_Z dZ = -\dfrac{|q|U_1 r}{2}dB$.

109. $r = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{\sqrt{2Wm}}{eB} = 0.34$ мм.

110. $\dfrac{1}{2}mv_\perp^2/B = const$, с другой стороны $\dfrac{m_0 v_\perp^2}{2} = |q|v_\perp B$ и следовательно $Br^2 = const$. Отсюда $r = r_0\sqrt{\dfrac{B_0}{B}} = 3.33$ см.

111. $p = 25.5$ атм. $H_0 = 1.92\cdot 10^6$ А/м.

112. $H = 1.014\cdot 10^6$ А/м.

113. 1) Для равновесия необходимо, чтобы магнитное давление с внутренней и внешней поверхности плазменного слоя было одинаково. Отсюда $B^2 = (B_p - B)^2$ и $I_p = 2I$.
2) $T = I_p^2/4\pi d^2 c^2 nk = 2\cdot 10^6$ К.

114. 556 кА/м.

115. 12.1 А/м.

116. 0.75 Тл.

117. 101.

118. $2.36\mu_B$.

119. При $B \ll \beta I$ имеем $B_{loc} \approx \beta I$. Принимая $N \approx 10^{29}$ м$^{-3}$ как число атомов в единице объема, из $\theta = \beta I_H^2/3Nk$ находим $\beta \sim 10^{-3}$. $B \ll 10^{-3} I_H = 2 \cdot 10^3$ Тл, $B_{loc} = \beta I$ по условию справедливо с погрешностью не более 1%, т.е. при $B < 0.01 \cdot 2 \cdot 10^3$ Тл или $B < 20$ Тл.

120. 3.13 МА/м.

121. Внутри сверхпроводника магнитное поле равно нулю. Из граничных условий следует, что на его поверхности обращается в нуль нормальная компонента индукции магнитного поля, создаваемого плоскостью, можно воспользоваться методом изображений – мысленно поместить под плоскостью на таком же расстоянии прямой ток, текущий в обратном направлении. Сила, действующая на единицу длины тока со стороны изображения, есть $F = IB$, где B – магнитная индукция поля, создаваемого изображением. Эта сила направлена вверх. Условие, при котором проводник будет свободно висеть над плоскостью на расстоянии h, запишется в виде: $F = \rho g$ или $\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi 2\hbar} = \rho g$. Отсюда следует, что $\hbar = \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi\rho g} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ м.

122. 50 нм – типичное экспериментальное значение.

124. $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15}$; B$= 2.07 \cdot 10^{-7}$ Мкс.

Литература

[1] Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики / А.И. Ансельм. - М.: Наука, 1973.

[2] Жирифалько Л. Статистическая физика твердого тела / Л. Жирифалько. - М.: Мир, 1975.

[3] Займан Дж. Принципы теории твердого тела / Дж. Займан. - М.: Мир, 1974.

[4] Займан Дж. Электроны и фононы / Дж. Займан. - М.: ИЛ, 1962.

[5] Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. - М.: Наука, 1978.

[6] Давыдов А.С. Физика твердого тела / А.С. Давыдов. - М.: Наука, 1976.

[7] Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников / А.И. Ансельм. - М.: Наука, 1978.

[8] Свирский М.С. Электронная теория вещества / М.С. Свирский. - М.: Просвещение, 1980.

[9] Ландау Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 1964.

[10] Каганов М.И. Природа магнетизма / М.И. Каганов, В.М. Цукерник. - М.: Наука, 1982.

[11] Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции / Л.А. Арцимович. - М.: Физматгиз, 1963.

[12] Арцимович Л.А. Что каждый физик должен знать о плазме / Л.А. Арцимович. - М.: Атомиздат, 1976.

[13] Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа / Л. Спитцер. - М.: Мир, 1965.

[14] Ораевский В.Н. Плазма на Земле и в космосе / В.Н. Ораевский. - Киев: Наукова Думка, 1980.

[15] Иоффе А.Ф. Физика полупроводников / А.Ф. Иоффе. - М.: Мир, 1974.

[16] Шалимова К.В. Физика полупроводников / К.В. Шалимова. - М.: Энергоатомиздат, 1971.

[17] Кресин В.З. Сверхпроводимость и сверхтекучесть / В.З. Кресин. - М.: Наука, 1978.

[18] Юльметьев Р.М. Методическая разработка по курсу “Электронная теория вещества” / Р.М. Юльметьев, Л.Н. Шахмуратова. - Казань: Издательство КГПИ, 1984.

[19] Эдельман В.С. Вблизи абсолютного нуля. Библиотека “Квант”. / В.С. Эдельман. - М.: Наука, 1983.