

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Механико-математический факультет
Кафедра аэрогидромеханики*

Н.Б. Ильинский, Р.Ф. Марданов

**ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ**

*Учебное пособие к курсу
Обратные краевые задачи механики жидкости и газа
Часть III*

КАЗАНЬ – 2007

УДК 517.9

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета
Протокол № 4 от 1 марта 2007 г.

Рецензент
профессор А.Г. Егоров

Ильинский Н.Б., Марданов Р.Ф.

Обратные краевые задачи теории фильтрации. Учебное пособие к курсу “Обратные краевые задачи механики жидкости и газа”, часть III. – Казань: КГУ, 2007 г. – 56 с.

Методическое пособие основано на курсе лекций, читаемых Н.Б. Ильинским на протяжении 20-ти последних лет, предназначено студентам-механикам III–V курсов механико-математического факультета.

©Казанский государственный
университет, 2007

Содержание

Используемые обозначения	5
1 Теория фильтрации и ее значение	6
1.1 Об основоположниках теории фильтрации	6
1.2 Явление фильтрации. Теоретическая схема фильтрации	7
1.3 Закон Дарси	9
1.4 Плоская установившаяся фильтрация тяжелой несжи- маемой жидкости. Основные уравнения. Связь с ТФКП	11
1.5 Об устройстве гидротехнических сооружений на рав- нинных реках	13
1.6 Граничные условия на примере фильтрации в земля- ной плотине	16
2 Построение подземного контура плотины по эпюре скоростей фильтрации	18
2.1 Построение подземного контура флютбета по эпюре скоростей фильтрации при $T = \infty$	18
2.2 Обобщение задачи построения подземного контура флютбета по эпюре скоростей на случай $T < \infty$	23
3 Построение подземного контура плотины по эпюре напоров	29
3.1 Построение подземного контура флютбета по эпюре напоров	29
3.2 Исследование полученного решения	31

3.3	Фильтрационный расчет построенного контура основания гидросооружения	34
3.4	Случай неограниченной глубины водопроницаемого слоя	36
4	Построение подземного контура плотины по эпюре противодействия	39
4.1	Построение подземного контура флютбета по эпюре фильтрационного противодействия	39
4.2	Случай неограниченной глубины водопроницаемого слоя	41
5	Обратные задачи фильтрации в земляных плотинах и из каналов	43
5.1	Обратная задача фильтрации в земляной плотине. Вариант А	43
5.2	Обратная задача фильтрации в земляной плотине. Вариант В	46
5.3	Обратная задача фильтрации из канала	47
6	Место обратных краевых задач среди краевых задач с неизвестными границами	51
	Литература	56

Используемые обозначения

l — ширина флютбета (канала)

L — длина подземного контура

s — дуговая абсцисса подземного контура ($0 \leq s \leq L$)

k — коэффициент фильтрации грунта

h — напорная функция

H — напор

T — глубина залегания водоупора (дренирующего слоя)

v — скорость фильтрации

p — давление, противодействие

J — градиент напора

Q — фильтрационный расход

$z = x + iy$ — комплексная координата физической плоскости

$w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал течения

$\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная координата канонической плоскости

D_z — область фильтрации в плоскости z

D_w, D_ζ — образы D_z в плоскостях w и ζ

$Z = X + iY, M$ — главный вектор и главный момент сил
фильтрационного противодействия

1 Теория фильтрации и ее значение

Теория фильтрации занимается изучением законов движения жидкостей, газов и их смесей (газированной жидкости) в пористых и трещиноватых средах. Запросам практики теория фильтрации удовлетворяет путем разработки методов фильтрационного расчета различных гидротехнических сооружений в процессе их проектирования, строительства и эксплуатации. Теория фильтрации играет большое значение при расчетах:

- бетонных и земляных плотин, их конструкций и размеров;
- котлованов, ограждаемых перемычками и дренажными устройствами;
- затопляемых территорий;
- оросительных и осушительных каналов;
- притока нефти к скважинам и их расположения;
- притока газа и подземных вод к горным выработкам.

1.1 Об основоположниках теории фильтрации

1852–1856гг., Г. Дарси экспериментально установил линейную связь между скоростью фильтрации воды и градиентом напора, получившую название закона Дарси. Наличие этой связи позволило указать некоторые теоретические зависимости, применимые к расчету фильтрации в ряде простейших случаев практики.

1860-е гг., *Ж. Дюпюи*, опираясь на закон Дарси, начал теоретические исследования фильтрации в грунтовых руслах и осесимметричной фильтрации к колодцам.

1880-е гг., *Ф. Форхгеймер* рассмотрел более сложные задачи по фильтрации при наличии горизонтального водоупора.

1889 г., *Н.Е. Жуковский* в работе “Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод” заложил математические основы теории фильтрации.

1922 г., *Н.Н. Павловский* в монографии “Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения” создал фундамент, послуживший основой школы гидротехники.

Не останавливаясь на ученых, внесших существенный вклад в создание и развитие теории фильтрации нефти и газа, назовем специалистов по разработке математических методов исследования краевых задач фильтрации грунтовых вод под бетонными и в земляных плотинах, из каналов и различных дренажных устройств, это *П.Я. Полубаринова-Кочина, Е.А. Замарин, Н.Н. Веригин, С.Н. Нумеров, П.Ф. Фильчаков* и другие. Обратные краевые задачи теории фильтрации под бетонными плотинами в общей постановке первым поставил и исследовал *М.Т. Нужсин*.

1.2 Явление фильтрации. Теоретическая схема фильтрации

Движение жидкости, газа или газированной жидкости в пористой среде называют фильтрацией. Пористую среду можно предста-

вить в виде твердого тела, заключающего в себе большое количество соединенных между собой пустот или же прорезанного большим количеством трещин (рис. 1).

Отсутствие закономерностей в распределении пор и трещин не позволяет определить скорости жидкости в любой точке поры или трещины. Да такое определение не имело бы и практического значения, так как важно знать осредненное движение жидкости в грунте. С этой

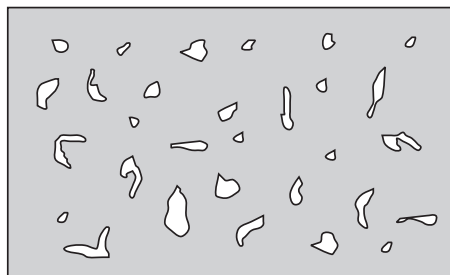


Рис. 1

целью вводят осредненные характеристики пористой среды, а сложное реальное течение заменяют фиктивным сплошным потоком той же жидкости, непрерывно заполняющим объемы пор и скелета грунта, что позволяет находить расходы, скорости и давления в пределах малых площадок, величина которых, однако, велика по сравнению с размерами пор грунта.

Введем следующие величины: S – площадь образца пористой среды, S_p – площадь пор в образце, $m = S_p/S$ – коэффициент пористости среды, Q – реальный расход, $v_* = Q/S_p$ – средняя скорость в порах, постоянная в пределах S .

Скорость v_* равна действительному расходу Q жидкости через площадь S , поделенному на площадь S_p сечения всех пор данного образца. Дальше, отвлекаясь от размеров и формы пор, считают, что жидкость движется через всю площадку S . Такой поток является фиктивным. Скорость v этого фиктивного потока в пределах

площадки S будет

$$v = Q/S, \quad v = v_* \frac{S_p}{S} = mv_*$$

и называется *скоростью фильтрации*.

Итак, фиктивный фильтрационный поток, заменяющий реальный поток фильтрующей жидкости, должен обладать следующими свойствами.

Расход фиктивного фильтрационного потока через любую выделенную в пористой среде площадку равен расходу реального потока через эту площадку.

Скорости фиктивного фильтрационного потока распределены непрерывно в его объеме; они связаны со средними скоростями в порах зависимостью $v = mv_*$, где v – скорость фильтрации, v_* – средняя скорость реального потока, m – коэффициент пористости.

1.3 Закон Дарси

Прежде чем перейти к рассмотрению опытных законов теории фильтрации, изложим некоторые сведения из гидромеханики. При установившемся движении невязкой несжимаемой жидкости в трубке с гладкими стенками имеет место уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g y = \text{const}$$

или

$$\frac{p}{\rho g} + y + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, p – давление, v – скорость. Первое слагаемое в (1) называют пьезометрической высотой, второе – геометрической, а третье – скоростной высотой или скоростным напором. Уравнение (1) говорит, что для всех точек трубки (горизонтальной или наклонной) сумма трех высот остается постоянной. Величина $h = p/\rho g + y$ называется пьезометрическим напором или просто напором. Тогда перепишем (1) в виде $h + \frac{v^2}{2g} = \text{const}$. Отсюда видно, что если бы жидкость двигалась в трубке без сопротивления и с постоянной скоростью, то напор h был бы постоянным по ее длине. Но в реальной пористой среде, вследствие влияния вязкости, жидкость испытывает сопротивление и, как показывают многочисленные опыты, напор h при $v = \text{const}$ уже не является постоянным (см. рис. 2).

Введем в рассмотрение J – гидравлический уклон или градиент

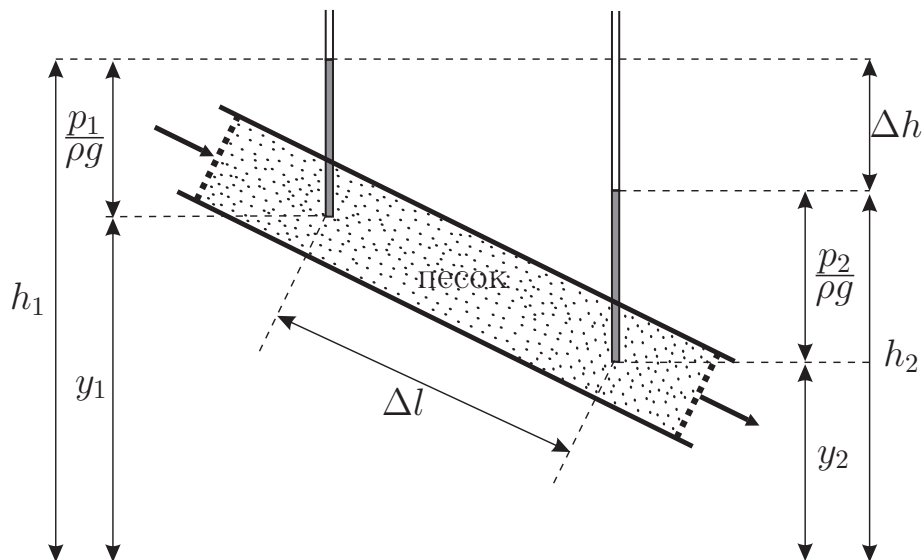


Рис. 2

напора

$$J = - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta l} = - \frac{dh}{dl}.$$

Эксперименты показывают, что скорость фильтрации является функцией градиента напора $v = f(J)$. Для многих грунтов (пески, глины, мелкотрещиноватые скальные грунты) имеет место линейная зависимость скорости v от градиента J :

$$v = kJ = -k \frac{dh}{dl}, \quad (2)$$

где коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом фильтрации и имеет размерность скорости. Он равен скорости фильтрации при $J = 1$. Равенство (2) было установлено Г. Дарси в 1856г. и носит название закона Дарси. Коэффициент фильтрации k – это характеристика пористой среды и фильтрующейся жидкости. Выражение для расхода в результате получим в виде $Q = kSJ$ (здесь S – площадь поперечного сечения трубки).

1.4 Плоская установившаяся фильтрация тяжелой несжимаемой жидкости. Основные уравнения. Связь с ТФКП

Рассмотрим фильтрацию жидкости в вертикальной плоскости. Перепишем закон Дарси (2) в векторном виде

$$\mathbf{v} = k\mathbf{J}, \quad \text{где } \mathbf{J} = -\nabla h, \quad \mathbf{v}(v_x, v_y), \quad \mathbf{J}\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

или

$$v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} - k \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j},$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} – орты осей координат x, y .

Тогда в проекциях будем иметь

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (3)$$

Так как в силу принятой математической модели течения среда сплошная, то имеет место уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Введем функцию $\varphi = -kh$, тогда, считая $k = \text{const}$ в пределах всей области фильтрации в силу предположения однородности и изотропности грунта из (3), будем иметь $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и, подставив в (4), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

То есть введенная функция $\varphi(x, y)$ – гармоническая функция, являющаяся потенциалом скорости фильтрации. С другой стороны, выражение (4) есть необходимое и достаточное условие существования функции тока $\psi(x, y)$ такой, что $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Таким образом, соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

представляют условия Коши-Римана для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ и, следовательно, существует комплексный потенциал фильтрационного потока

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy.$$

1.5 Об устройстве гидротехнических сооружений на равнинных реках

Схема гидротехнического сооружения на равнинной реке в плане представлена на рис. 3. Здесь слева направо расположены земляная плотина, здание гидроэлектростанции с турбинами для выработки электроэнергии, бетонная водосливная плотина для сброса излишков воды, шлюз для пропуски судов и снова земляная плотина (серым показано бывшее русло реки).

На рис. 4 изображено сечение поперек земляной плотины, расположенной на водонепроницаемом основании (водоупоре). Фильтрация происходит через плотину из верхнего бьефа в нижний при наличии участка высачивания. На этом рисунке

H_1 – уровень воды в верхнем бьефе (перед плотиной);

H_2 – уровень воды в нижнем бьефе (за плотиной);

$H = H_1 - H_2$ – напор;

AB – граница верхового откоса плотины;

DE – граница низового откоса плотины;

BC – депрессионная кривая;

CD – участок высачивания.

На рис. 5 показано сечение бетонной водосливной плотины. Фильтрация происходит под флютбетом плотины. На рисунке

AB – граница верхнего бьефа;

CD – граница нижнего бьефа;

BC – подземный контур плотины (флютбет).

При проектировании гидротехнических сооружений, работающих в условиях напорной фильтрации, перед проектировщиком вста-

Схема гидросооружения

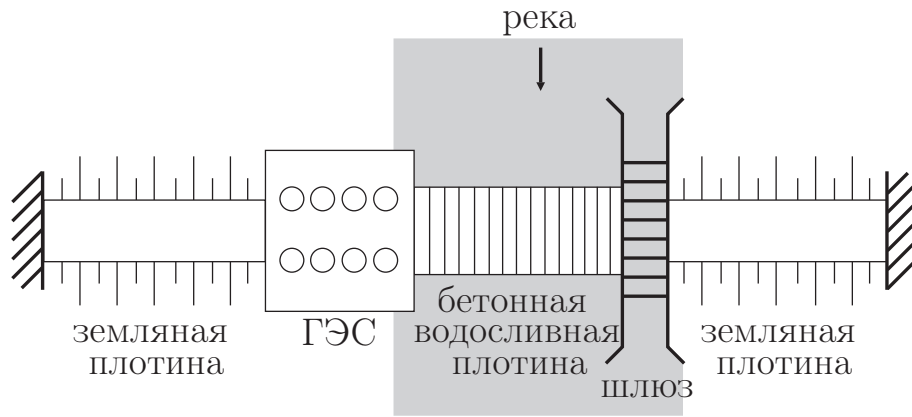


Рис. 3

Земляная плотина

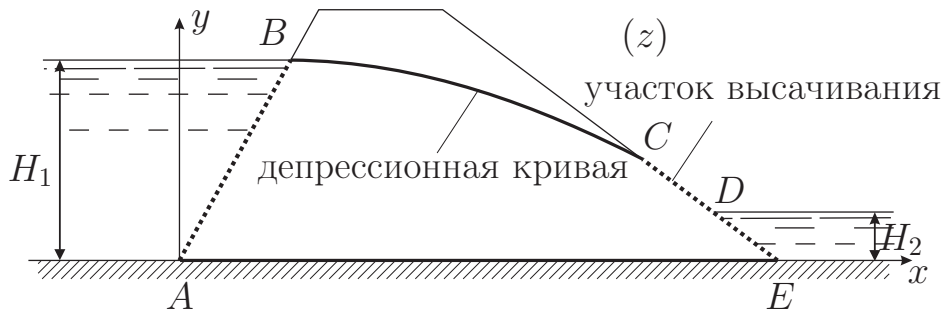


Рис. 4

Бетонная водосливная плотина

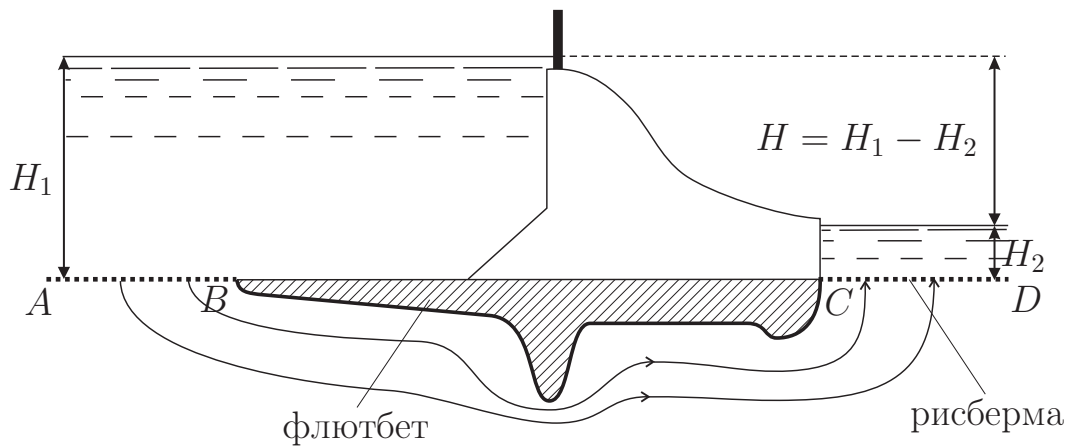


Рис. 5

ет проблема определения рационального подземного контура флютбета, который в первую очередь должен обеспечить безопасный режим фильтрационного потока. Перечислим явления, которые могут привести к опасным последствиям.

Суффозия – вымыв мелких частиц грунта под плотиной, возникающий при превышении скорости фильтрации некоторой критической скорости $v_{кр}$, при которой начинается размыв грунта. При суффозии под флютбетом образуются пустоты, которые могут привести к разрушению плотины. Для предотвращения этого явления целесообразно увеличить длину подземного контура и придать ему плавные очертания (см. рис. 5).

Выпор в нижнем бьефе. При выходе фильтрационного потока в нижний бьеф за плотиной может происходить так называемый выпор грунта, когда частицы грунта выдавливаются фильтрационным потоком. Для борьбы с этим явлением необходимо проектировать подземный контур так, чтобы скорости фильтрации при выходе в нижний бьеф были небольшими. Для предотвращения выпора применяется рисберма: перфорированные бетонные блоки, уложенные на дно реки за плотиной в области выхода фильтрационного потока в нижний бьеф.

Весьма опасным является *давление фильтрационного потока*, действующее на флютбет снизу. Вследствие этого возникают силы, которые приводят к облегчению плотины и могут вызвать разрушение сооружения. К таким же последствиям приводит *архимедова сила*, из-за которой флютбет может “всплыть”.

1.6 Граничные условия на примере фильтрации в земляной плотине

Приведем граничные условия краевой задачи фильтрации в земляной плотине. Пусть заданы форма сечения плотины, коэффициент фильтрации k грунта, напор $H = H_1 - H_2$ и требуется найти форму депрессионной кривой BC , размеры участка высачивания CD и фильтрационный расход Q , то есть определить область фильтрации G_z и комплексный потенциал $w(z) = \varphi + i\psi$ потока в этой области (рис. 4).

Тогда для аналитической функции $w(z)$ имеют место следующие *граничные условия*:

На AB (границе верхового откоса земляной плотины):

$$h = \frac{p_1}{\rho g} + y_1 = H_1, \text{ то есть } \underline{\varphi = -kH_1}.$$

На BC (депрессионной кривой):

$$p = p_{атм} \Rightarrow h = \frac{p_{атм}}{\rho g} + y \Rightarrow \rho g(h - y) = p_{атм} \Rightarrow$$

$$(h - y) = \text{const} = 0, \text{ так как в точке } B \text{ имеем } y = H_1 \text{ и } h = H_1 \text{ или } \underline{\varphi + ky = 0},$$

$\underline{\psi = Q}$, так как при отсутствии испарения или инфильтрации BC – линия тока, Q – расход фильтрующейся жидкости.

На CD (участке высачивания):

$$p = p_{атм} \Rightarrow (\text{аналогично}) \quad \underline{\varphi + ky = 0}.$$

На DE (границе низового откоса земляной плотины): $\underline{\varphi = -kH_2}$.

На AE (границе водоупора): $\underline{\psi = 0}$.

Получили, что на известных участках границы задано одно граничное условие, на неизвестном – два. Из приведенных граничных условий видно, что определение области фильтрации G_z и комплекс-

ного потенциала $w(z)$ свелось к решению краевой задачи для аналитической функции $w(z)$ в области со свободной (неизвестной) границей BC .

2 Построение подземного контура плотины по эюре скоростей фильтрации

2.1 Построение подземного контура флютбета по эюре скоростей фильтрации при $T = \infty$

Этот метод позволяет аналитически строить и изучать подземный контур флютбета любых очертаний. Предоставляется возможность избежать больших скоростей фильтрации, особенно в области выхода потока в нижний бьеф, что предотвращает выпор грунта.

Постановка задачи. Пусть

$$v = f(s), \quad 0 \leq s \leq L$$

– заданное на искомом подземном контуре распределение скорости фильтрации; s – дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки B ;

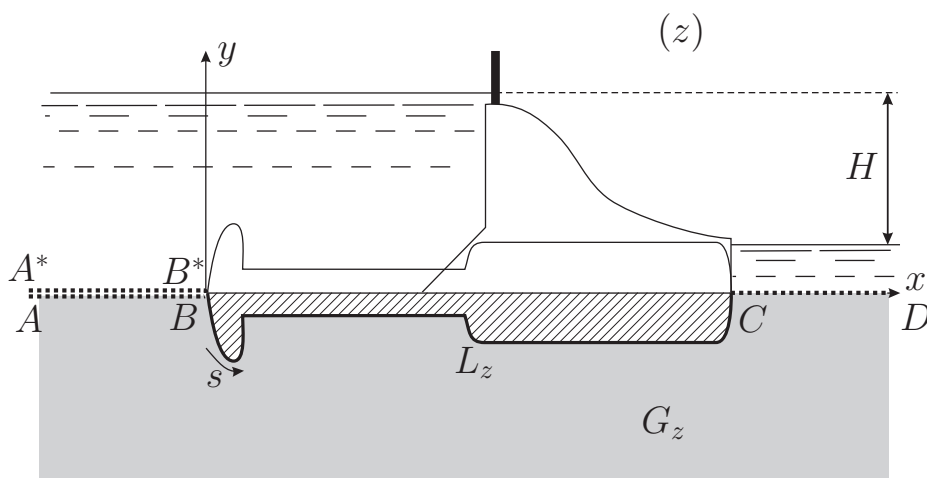


Рис. 6

L – длина искомого контура; $f(s)$ – положительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера всюду при $0 \leq s \leq L$, кроме, может быть, конечного числа точек, где она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Перепад напоров между верхним и нижним бьефами равен H , коэффициент фильтрации – k .

Требуется определить форму подземного контура флютбета BC .

Решение. Выберем начало координат в точке B , а ось x направим параллельно AB . Область фильтрации G_z – полубесконечная область, ограниченная сверху границами бьефов AB , CD и искомым контуром BC (рис. 6). Для аналитической в G_z функции $w(z)$ имеем следующие граничные условия:

на AB : $\varphi = -kH$; на CD : $\varphi = 0$;

на BC : $\psi = 0$, $\varphi(s) = \int_0^s f(s)ds + A_0$.

Константу A_0 определим из условия $\varphi(0) = -kH$, следовательно,

$$\varphi(s) = \int_0^s f(s)ds - kH. \quad (5)$$

Так как $\varphi(L) = 0$, то должно выполняться соотношение

$$\int_0^L f(s)ds = kH, \quad (6)$$

которое является условием разрешимости рассматриваемой задачи.

В плоскости w области G_z соответствует область G_w – полуполоса $ADCD$ (рис. 7,а). Так как в плоскостях z и w линия CD прямая, то функцию $w(z)$ можно аналитически продолжить по принципу симметрии через CD в плоскости z , то есть получить функцию $w(z)$,

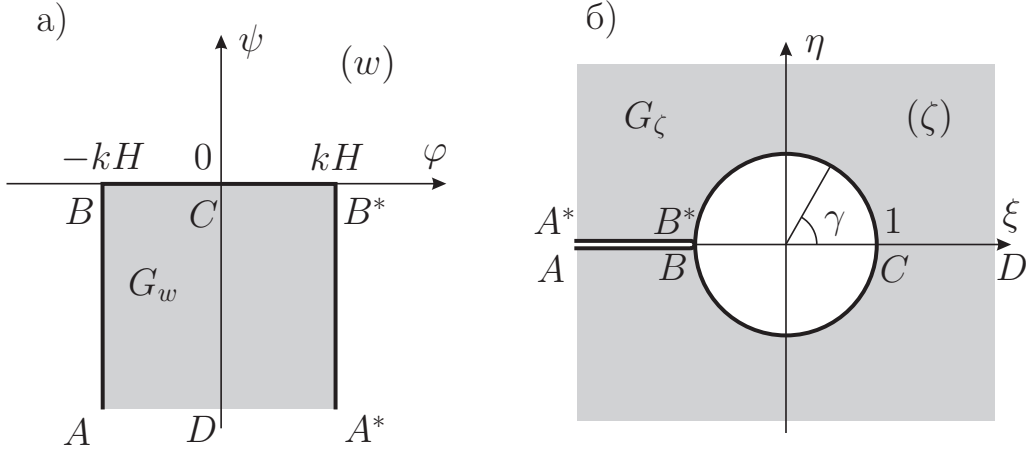


Рис. 7

аналитическую во внешности симметричного контура BCB^* . В плоскости w этой области будет соответствовать полуполоса ABB^*A^* . Функция $w(z)$ является многозначной функцией и имеет логарифмическую особенность в бесконечности. При обходе контура BCB^* в плоскости z реальная часть функции $w(z)$ получает приращение $2kH$.

Рассмотрим область G_ζ – внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ в канонической плоскости ζ (рис. 7,б). В области G_ζ имеем чисто циркуляционное течение с циркуляцией $\Gamma = 2kH$, тогда

$$w(\zeta) = \frac{2kH}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Здесь константа равна нулю, так как в точке C имеем $w(\zeta)|_{\zeta=1} = 0$. Подставив в эту формулу $\zeta = e^{i\gamma}$ и выделив действительную часть на окружности, получим

$$\varphi(\gamma) = \frac{kH}{\pi} \gamma, \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi. \quad (7)$$

Из сопоставления функций (5) и (7) определим зависимость $s(\gamma)$, $-\pi \leq \gamma \leq \pi$.

Введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую функцию

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} = \alpha + i\beta,$$

причем $\text{Im } \chi(\infty) = 0$. Реальная часть этой функции на окружности $|\zeta| = 1$ известна

$$\alpha(\gamma) = \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=e^{i\gamma}} = \ln \frac{ds}{d\gamma}, \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi.$$

Следовательно, функцию $\chi(\zeta)$ можно восстановить по формуле Шварца

$$\chi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\theta) \frac{\zeta + e^{i\theta}}{\zeta - e^{i\theta}} d\theta + ib_0,$$

где $b_0 = 0$, так как $\text{Im } \chi(\infty) = 0$. Для мнимой части функции $\chi(\zeta)$ на окружности имеем

$$\beta(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\theta) \text{ctg} \frac{\theta - \gamma}{2} d\theta.$$

Так как координата z точки B равна нулю, то

$$z(\zeta) = \int_{-1}^{\zeta} e^{\chi(\zeta)} d\zeta. \quad (8)$$

Параметрические координаты подземного конура получим, выделив реальную и мнимую части $z(\zeta)$ на окружности $|\zeta| = 1$ при $-\pi \leq \gamma \leq 0$:

$$x(\gamma) = - \int_{-\pi}^{\gamma} \frac{ds}{d\gamma} \sin[\beta(\gamma) + \gamma] d\gamma,$$

$$y(\gamma) = \int_{-\pi}^{\gamma} \frac{ds}{d\gamma} \cos[\beta(\gamma) + \gamma] d\gamma.$$

Чтобы границы верхнего и нижнего бьефов располагались на одном уровне надо, чтобы при $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ контур BCB^* в плоскости z был замкнут, то есть чтобы функция $z(\zeta)$ была однозначной. Для этого необходимо потребовать, чтобы все вычеты подынтегральной функции $z(\zeta)$ в (8) равнялись нулю. Так как в области G_ζ функция $\chi(\zeta)$ регулярна, то, приравняв нулю вычет в бесконечно удаленной точке, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 0.$$

Легко проверить, что $\alpha(\gamma) = \alpha(-\gamma)$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\gamma) \sin \gamma d\gamma \equiv 0$$

и остается одно вещественное условие разрешимости

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\gamma) \cos \gamma d\gamma = 0. \quad (9)$$

Выполнение условий разрешимости. В приведенном решении получено два условия разрешимости задачи. Первое условие (6) записано через исходные параметры задачи. Если заданная функция $f(s)$ ему не удовлетворяет, то для его выполнения достаточно рассмотреть модифицированную функцию $f^*(s) = f(s) + f_0$, где константу f_0 найдем, подставив $f^*(s)$ в (6).

Второе условие разрешимости (9) записано через промежуточную функцию $\alpha(\gamma)$, которая определяется в процессе решения. Для его выполнения воспользуемся аппаратом квазирешений обратных краевых задач аналогично тому, как это делалось при решении

основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики (ОКЗА). Здесь, в отличие от ОКЗА, не три, а всего одно условие, выражающееся через $\alpha(\gamma)$. Проведя выкладки по аналогии с квазирешением ОКЗА, получим квазирешение рассматриваемой задачи

$$\alpha^*(\gamma) = \alpha(\gamma) - A \cos \gamma, \quad A = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\gamma) \cos \gamma d\gamma.$$

2.2 Обобщение задачи построения подземного контура флютбета по эпюре скоростей на случай $T < \infty$

Постановка задачи та же, что и в пункте 2.1, за исключением того, что глубина залегания водоупора теперь конечна и равна T .

Требуется определить форму подземного контура флютбета BC и фильтрационный расход Q под плотиной.

Решение. В отличие от предыдущей задачи область фильтрации G_z теперь помимо границ бьефов AB и CD и неизвестного подземного контура BC ограничена снизу непроницаемым водоупором AND (рис. 8,а). Для аналитической в G_z функции $w(z)$ запишем граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} \text{на } AB: \varphi &= -kH/2; & \text{на } CD: \varphi &= kH/2; & \text{на } AD: \psi &= -Q; \\ \text{на } BC: \psi &= 0, & \varphi(s) &= \int_0^s f(s)ds - \frac{kH}{2}. \end{aligned}$$

На функцию $f(s)$ так же накладывается условие разрешимости (6).

В плоскости w области G_z будет соответствовать область G_w – прямоугольник $ABCD$ (рис. 8,б). Введем вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, в которой области течения будет соответствовать нижняя полуплоскость $\text{Im } \zeta < 0$ (область G_ζ) с приведенной

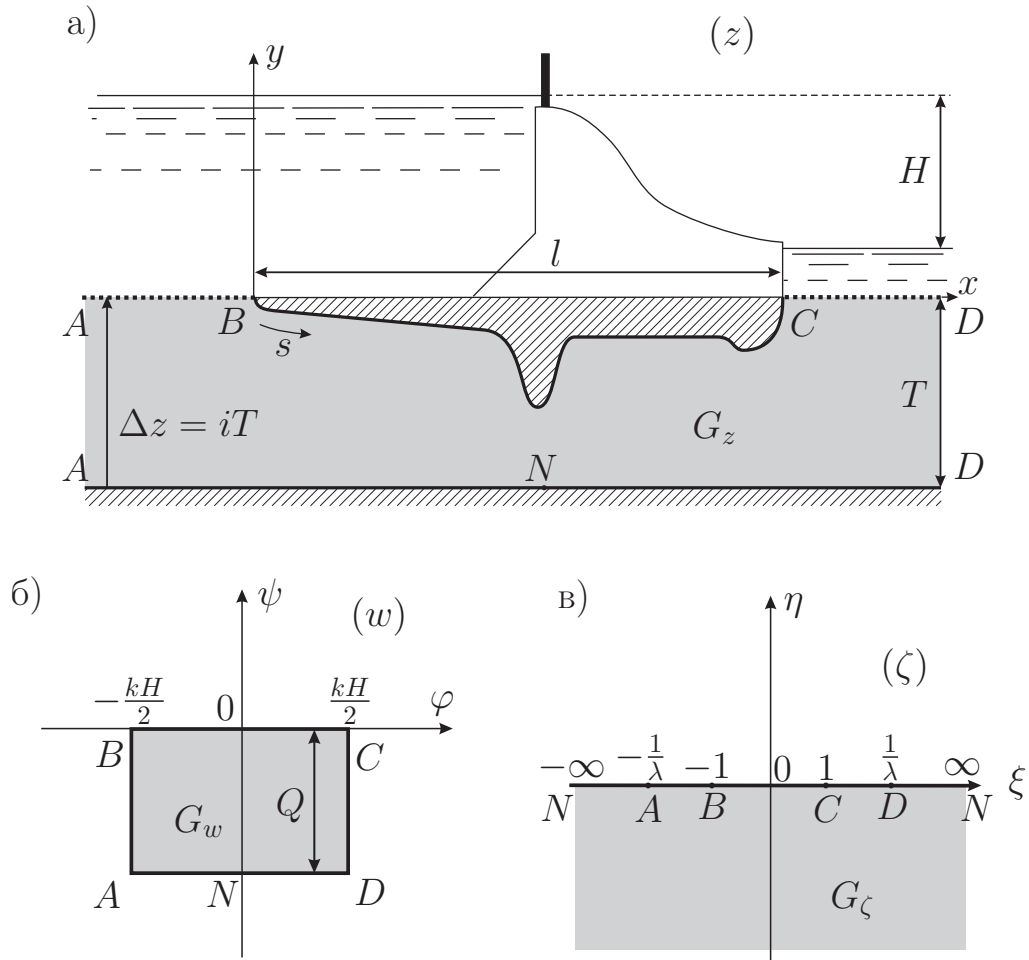


Рис. 8

на рис. 8,в нормировкой точек.

Отображение области G_w на G_ζ строится по формуле Кристоффеля-Шварца

$$\zeta = \operatorname{sn} \frac{2Kw}{kH}, \quad (10)$$

где sn – эллиптический синус. Параметр λ удовлетворяет соотношению

$$\frac{K'}{K} = \frac{2Q}{kH}, \quad (11)$$

где $K = K(\lambda)$, $K' = K(\lambda')$, $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ – полные эллиптические

интегралы первого рода. Разрешив (10) относительно w , получим

$$w = \frac{kH}{2K} F(\arcsin \zeta, \lambda), \quad (12)$$

где

$$F(\arcsin \zeta, \lambda) = \int_0^{\zeta} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\lambda^2\tau^2)}}$$

– эллиптический интеграл первого рода при модуле λ , причем $K(\lambda) = F(\pi/2, \lambda)$.

Выделив в (12) реальную часть при $\zeta = \xi \in [-1, 1]$:

$$\varphi(\xi, \lambda) = \frac{kH}{2K} F(\arcsin \xi, \lambda) \quad (13)$$

и сравнив с исходным $\varphi(s)$, получим зависимость дуговой абсциссы s от параметрического переменного ξ :

$$s = s(\xi, \lambda), \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

где параметр λ пока не известен.

Введем в рассмотрение аналитическую функцию

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| + i \arg \frac{dz}{d\zeta} = \alpha + i\beta.$$

Граничные значения $\chi(\zeta)$ имеют вид:

NA	AB	BC	CD	DN
$\beta = \pi$	$\beta = 0$	$\alpha = \ln \frac{ds}{d\xi} = \alpha(\xi, \lambda)$	$\beta = 0$	$\beta = -\pi$

Как видно из таблицы, функция $\chi(\zeta)$ имеет особенность в бесконечно удаленной точке N . Поэтому решение целесообразно построить для функции без особенности

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi(\zeta) + \chi_0(\zeta) = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta},$$

где

$$\chi_0(\zeta) = 2i \arcsin \zeta = \alpha_0 + i\beta_0$$

имеет такое же поведение на бесконечности, что и $\chi(\zeta)$. Граничные условия для функций $\chi_0(\zeta)$ и $\tilde{\chi}(\zeta)$ представлены в следующей таблице:

NA	AB	BC	CD	DN
$\beta_0 = -\pi$	$\beta_0 = -\pi$	$\alpha_0 = 0$	$\beta = \pi$	$\beta = \pi$
$\tilde{\beta} = 0$	$\tilde{\beta} = -\pi$	$\tilde{\alpha} = \alpha(\xi, \lambda)$	$\tilde{\beta} = \pi$	$\tilde{\beta} = 0$

Для функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ в области G_ζ имеем смешанную краевую задачу, решение которой находится по формуле Синьорини

$$\tilde{\chi}(\zeta) = -\frac{R(\zeta)}{\pi i} \left[\int_{-1/\lambda}^{-1} \frac{-i\pi}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau, \lambda)}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \int_1^{1/\lambda} \frac{i\pi}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right], \quad (14)$$

где за $R(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ выбрана ветвь, положительная на отрезке $\zeta = \xi > 1$. Одно условие разрешимости этой смешанной задачи служит для определения $\operatorname{Re} \tilde{\chi}(\infty) = \tilde{\alpha}(\infty) = \alpha_N$. Проведя в (14) вычисления, найдем

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \omega(\zeta, \lambda) + 2i \operatorname{arctg} \frac{\zeta \lambda'}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (15)$$

$$\omega(\zeta, \lambda) = \frac{i\sqrt{1 - \zeta^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau, \lambda)}{\sqrt{1 - \tau^2} (\tau - \zeta)} d\tau. \quad (16)$$

Разрешив соотношение (15) относительно $dz/d\zeta$ и проведя упрощения, получим

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 (\lambda' \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2}{1 - \lambda^2 \zeta^2} e^{\omega(\zeta, \lambda)}. \quad (17)$$

Проинтегрировав (17) с учетом того, что $z(-1) = 0$, будем иметь

$$z(\zeta) = \int_{-1}^{\zeta} \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 (\lambda' \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2}{1 - \lambda^2 \zeta^2} e^{\omega(\zeta, \lambda)} d\zeta.$$

Подставив в эту формулу $\zeta = \xi$, ($-1 \leq \xi \leq 1$), запишем параметрические уравнения искомого подземного конура:

$$x(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \frac{ds}{d\xi} [A(\xi) \cos v(\xi) + B(\xi) \sin v(\xi)] \frac{d\xi}{1 - \lambda^2 \xi^2},$$

$$y(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \frac{ds}{d\xi} [A(\xi) \sin v(\xi) - B(\xi) \cos v(\xi)] \frac{d\xi}{1 - \lambda^2 \xi^2},$$

где

$$A(\xi) = 1 - \xi^2(1 - \lambda') [2 + (1 - \lambda')(1 - 2\xi^2)],$$

$$B(\xi) = 2\xi(1 - \lambda') \sqrt{1 - \xi^2} [1 - \xi^2(1 - \lambda')],$$

а интеграл

$$v(\xi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau, \lambda)}{\sqrt{1 - \tau^2} (\tau - \xi)} d\tau \quad (18)$$

существует в смысле главного значения по Коши.

Определим неизвестный параметр λ . При обходе точки $\zeta = -1/\lambda$ (или $\zeta = 1/\lambda$) по полуокружности малого радиуса в полуплоскости $\text{Im } \zeta < 0$ (рис. 9) функция $z(\zeta)$ получает приращение $\Delta z = 2\pi i(\frac{C_{-1}}{2})$, где

$C_{-1} = \text{res}_{\zeta \rightarrow -1/\lambda} z(\zeta)$ — коэффициент в разложении $\frac{dz}{d\zeta}$ в окрестности

точки A . С другой стороны, при обходе точки A в плоскости z имеем приращение $\Delta z = iT$ (см. рис. 8,а). Приравняв эти приращения, получим связь $T = \pi C_{-1}$.

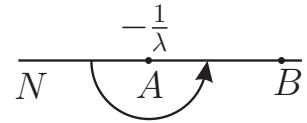


Рис. 9

В окрестности точки A имеет место разложение

$$\left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow -1/\lambda} = \frac{C_{-1}}{\zeta + \frac{1}{\lambda}} + C_0 + C_1\left(\zeta + \frac{1}{\lambda}\right) + \dots \quad (19)$$

Умножив соотношение (17) на $(\zeta + \frac{1}{\lambda})$ и устремив $\zeta \rightarrow -1/\lambda$, найдем зависимость T от λ :

$$T = a(\lambda) \exp[\omega(-1/\lambda)], \quad (20)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2\pi\lambda'^2}{\lambda(1 + \lambda')^2}, \quad \omega(-1/\lambda) = \frac{\lambda'}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau, \lambda)}{\sqrt{1 - \tau^2} (1 + \lambda\tau)} d\tau.$$

Определив из (20) λ , найдем расход Q по формуле

$$Q = \frac{kHK'}{2K}. \quad (21)$$

Уравнение (20) исследовано и доказана его разрешимость при любом T , если $0 < m \leq f(s) \leq M < \infty$, то есть если скорость на подземном контуре нигде не обращается в нуль или бесконечность. Получены условия на $v = f(s)$, при которых решение будет единственным. В полуобратной постановке, то есть когда расход Q задан, из (20) и (21) легко определить T и затем решить задачу по полученным формулам.

3 Построение подземного контура плотины по эюре напоров

3.1 Построение подземного контура флютбета по эюре напоров

Постановка задачи. Пусть

$$h = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

– заданное распределение напора по ширине флютбета (эюра напоров), l – ширина флютбета, $f(x)$ – монотонно убывающая функция, которая имеет однозначную обратную функцию $f^*(h)$, $H/2 \geq h \geq -H/2$, удовлетворяющую условию Гельдера, H – действующий на сооружение напор, k – коэффициент фильтрации. Область фильтрации G_z ограничена по глубине, T – глубина залегания водоупора, фильтрационный расход Q под плотиной так же задан.

Требуется определить форму подземного контура флютбета BC .

Решение этой задачи строится аналогично решению из п. 2.2. На границах области G_z (см. рис. 8) ставятся такие же граничные условия с единственным отличием: на BC вместо $\varphi(s)$ задана $\varphi(x) = -kf(x)$, $0 \leq x \leq l$. В плоскости w области G_z соответствует область G_w : прямоугольник со сторонами kH и Q , а в канонической

плоскости ζ – нижняя полуплоскость (область G_ζ). По известным $\varphi(x)$ и $\varphi(\xi)$ (формула (13), где λ находится из уравнения (11), так как расход Q задан), определим

$$x(\xi) = f^* \left[-\frac{H}{2K} F(\arcsin \xi, \lambda) \right] = \sigma(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (22)$$

Так как функции $f^*(h)$ и $h(\xi)$ гельдеровы, то полученная функция $\sigma(\xi)$ так же удовлетворяет условию Гельдера в интервале $[-1, 1]$.

Рассмотрим аналитическую в области G_ζ функцию $z^*(\zeta) = z(\zeta) + iT$, имеющую следующие граничные значения:

NA	AB	BC	CD	DN
$\text{Im } z^* = 0$	$\text{Im } z^* = T$	$\text{Re } z^* = \sigma(\xi)$	$\text{Im } z^* = T$	$\text{Im } z^* = 0$

Определим эту функцию решением смешанной задачи по формуле

$$z^*(\zeta) = \frac{iR(\zeta)}{\pi} \left[\int_{-1/\lambda}^{-1} \frac{iT}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \int_1^{1/\lambda} \frac{iT}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right],$$

где за $R(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ выбрана ветвь, положительная на отрезке $\zeta = \xi > 1$. Вычислив первый и третий интегралы, получим

$$z(\zeta) = \omega(\zeta) - \frac{2iT}{\pi} \text{arctg} \frac{\lambda \sqrt{1 - \zeta^2}}{\lambda'}, \quad (23)$$

где $\omega(\zeta)$ находится по (16) подстановкой вместо $\alpha(\tau, \lambda)$ функции $\sigma(\tau)$.

Определив по формулам Сохоцкого предельные значения функции $z(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \xi$, когда $-1 \leq \xi \leq 1$, и выделив мнимую часть, найдем

$$y(\xi) = v(\xi) - \frac{2T}{\pi} \text{arctg} \frac{\lambda \sqrt{1 - \xi^2}}{\lambda'}, \quad (24)$$

где $v(\xi)$ определяется по формуле (18) заменой $\alpha(\tau, \lambda)$ на $\sigma(\tau)$.

Таким образом, поставленная задача всегда разрешима и имеет единственное решение. Соотношения (22) и (24) при $-1 \leq \xi \leq 1$ представляют параметрические уравнения искомого подземного контура.

3.2 Исследование полученного решения

Найденная в результате решения область фильтрации G_z может иметь вид, изображенный на рис. 10. Произошло образование так

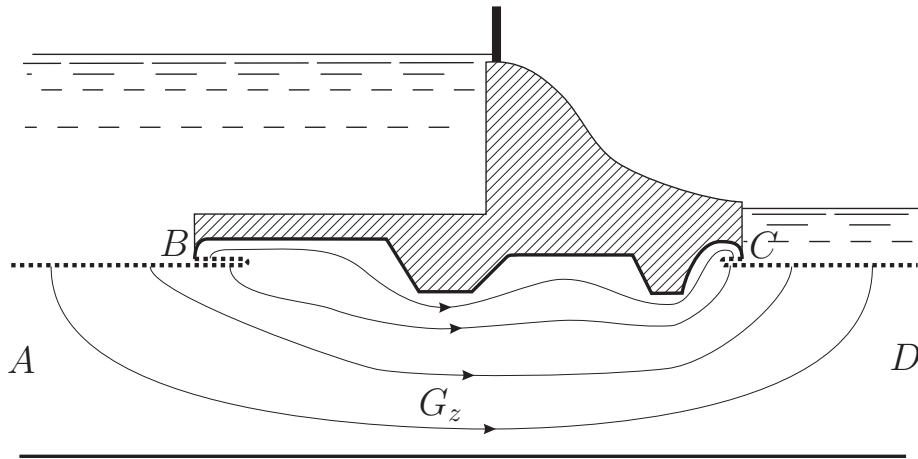


Рис. 10

называемых “загибов” границ бьефов. Действительно, такая форма не противоречит граничным условиям: на участках AB и CD граничные условия для $z(\zeta)$ были $y = 0$.

Получим условия, позволяющие заранее, до нахождения области G_z , убедиться в отсутствии подобных участков. Подставив в (23) $\zeta = \xi$ для $-1/\lambda \leq \xi \leq -1$ и $1 \leq \xi \leq 1/\lambda$ соответственно, найдем:

$$x(\xi) = u(\xi) - \frac{2T}{\pi} \operatorname{arth} \frac{\lambda \sqrt{\xi^2 - 1}}{\lambda'} = \Phi_1(\xi),$$

$$x(\xi) = u(\xi) + \frac{2T}{\pi} \operatorname{arth} \frac{\lambda \sqrt{\xi^2 - 1}}{\lambda'} = \Phi_2(\xi), \quad (25)$$

где

$$u(\xi) = \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2} (\tau - \xi)} d\tau,$$

причем знак “плюс” берется при $-1/\lambda \leq \xi \leq -1$, знак “минус” – при $1 \leq \xi \leq 1/\lambda$.

Очевидно, загибов границ бьефов не будет, если функции $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ в соответствующих интервалах будут монотонно возрастающими, то есть

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} > 0 \quad (-1/\lambda \leq \xi \leq -1),$$

$$\frac{d\Phi_2}{d\xi} > 0 \quad (1 \leq \xi \leq 1/\lambda).$$

Проведя аналитические преобразования, получим следующее условие на модуль λ :

$$\lambda \geq \max(\lambda^*, \lambda^{**}), \quad (26)$$

где

$$\lambda^* = \frac{\pi \Omega(-1)}{\sqrt{\pi^2 \Omega^2(-1) + 4T^2}}, \quad \lambda^{**} = -\frac{\pi \Omega(1)}{\sqrt{\pi^2 \Omega^2(1) + 4T^2}},$$

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma \sqrt{1 - \tau^2}}{d\tau (\tau - \zeta)} d\tau.$$

Оценив интегралы, входящие в (26), запишем простое достаточное условие отсутствия загибов

$$T \geq \frac{D\pi^\delta}{\lambda\delta} \left(\frac{H}{2K} \right)^{1+\delta},$$

где D и δ – постоянная и показатель Гельдера функции $f^{*'}(h)$.

Для того, чтобы искомый подземный контур располагался целиком ниже вещественной оси, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $T > D^*$, где D^* – наибольшее значение функции

$$\frac{\pi v(\xi)}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\lambda \sqrt{1 - \xi^2}}{\lambda'} \right)^{-1}$$

в интервале $-1 \leq \xi \leq 1$.

Также нетрудно показать, что неоднолиственность решения (23) в открытой области не может возникнуть в таких случаях, как, например: самопересечение искомого контура, пересечение подземным контуром линии водоупора или границ бьефов и, наконец, наложение загибов границ бьефов (рис. 11).

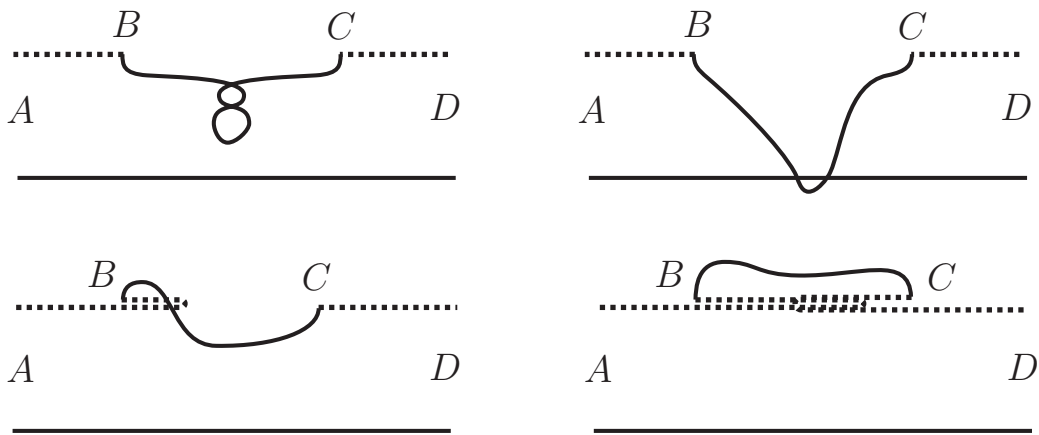


Рис. 11

Строгое доказательство однолиственности решения было дано Л.А. Аксентьевым, показавшим, что во внутренних точках области производная отображающей функции $\frac{dz}{d\zeta}$ вообще не может обращаться в нуль и ограничена, а необходимым и достаточным условием однолиственности замкнутой области \bar{G}_z является полученное выше условие

отсутствия загибов границ бьефов (26).

3.3 Фильтрационный расчет построенного контура основания гидросооружения

Нахождение комплексного градиента фильтрации. Введем в рассмотрение комплексный градиент фильтрации

$$\mathbf{J} = J_x - iJ_y = \frac{1}{k} \frac{dw}{d\zeta} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1}.$$

Подставив производные от выражений (12) и (23), получим

$$\mathbf{J} = -\frac{iH}{2K} \left[\Omega(\zeta) \sqrt{1 - \lambda^2 \zeta^2} + \frac{2\lambda\lambda'T\zeta}{\pi\sqrt{1 - \lambda^2 \zeta^2}} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Обозначив через J_b и J_c соответственно входной и выходной градиенты фильтрации в начальной и конечной точках флютбета и положив в (27) $\zeta = \mp 1$, найдем

$$J_b = -\frac{H}{2K} \left[\frac{2\lambda T}{\pi} - \lambda' \Omega(-1) \right]^{-1}, \quad J_c = \frac{H}{2K} \left[\frac{2\lambda T}{\pi} + \lambda' \Omega(1) \right]^{-1}. \quad (28)$$

Интересно отметить, что из требования $J_b < 0$, $J_c > 0$, физический смысл которых очевиден, вытекает полученное условие отсутствия загибов границ бьефов.

Построение эпюр напоров, скоростей и противодавлений. Определив

$$s(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2} d\xi, \quad (-1 \leq \xi \leq 1)$$

и зная $x = \sigma(\xi)$, найдем зависимость $x(s)$ ($0 \leq s \leq L$), где s – дуговая абсцисса, L – длина подземного контура. Тогда по заданной функции $f(x)$ построим эюру напоров по длине контура $h(s)$.

Эюра скоростей фильтрации по контуру основания плотины запишется в виде

$$v(s) = -k \frac{dh}{ds}, \quad v(\xi) = \frac{kH}{2K \sqrt{(1-\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)}} \left(\frac{ds}{d\xi} \right)^{-1}.$$

Вдоль границы нижнего бьефа будем иметь

$$v_x = 0, \quad v_y = \frac{kH}{2K} \left[\Omega(\xi) \sqrt{1-\lambda^2\xi^2} + \frac{2\lambda\lambda'T\xi}{\pi \sqrt{1-\lambda^2\xi^2}} \right]^{-1}.$$

Последняя формула совместно с (25) представляет параметрические уравнения распределения скорости фильтрации по границе бьефа CD .

Зная эюру напоров $h = f(x)$ и построив подземный контур флютбета $y = y(x)$, найдем эюру фильтрационного противодействия

$$p(x) = \kappa^* [f(x) - y(x)],$$

где κ^* – объемный вес фильтрующейся жидкости.

Определение главного вектора и главного момента сил фильтрационного противодействия. Главный вектор сил фильтрационного противодействия, действующих на единицу длины основания плотины, записывается в виде

$$\mathbf{Z} = X + iY = i\kappa^* \int_{BC} (h - y) dz,$$

откуда для горизонтальной и вертикальной составляющих имеем:

$$X = -\kappa^* \int_{BC} (h - y) dy, \quad Y = \kappa^* \int_{BC} (h - y) dx.$$

Главный момент сил фильтрационного противодействия относительно некоторой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ определяется по формуле

$$M = \kappa^* \int_{BC} (h - y) [(x - x_0) dx + (y - y_0) dy].$$

3.4 Случай неограниченной глубины водопроницаемого слоя

Получение расчетных формул из $T < \infty$ предельным переходом. Решение при неограниченной глубине водопроницаемого слоя может быть получено из случая $T < \infty$, если одновременно устремить к бесконечности расход Q и глубину T . Тогда из соотношения (11) найдем, что $\lambda \rightarrow 0$, то есть формула (10) примет вид

$$\zeta = \sin \frac{\pi w}{kH},$$

а вместо (13) получим

$$\varphi(\xi) = \frac{kH}{\pi} \arcsin \xi. \quad (29)$$

Выберем последовательности чисел $\lambda_n \rightarrow 0$ и $T_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) такими, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n T_n = \pi A, \quad (30)$$

где A – положительная постоянная.

Тогда, осуществив в формуле (23) предельный переход и учтя соотношение (30), получим

$$z(\zeta) = \omega(\zeta) + 2A\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (31)$$

где зависимость $\sigma(\xi)$, входящая в $\omega(\zeta)$, имеет вид

$$\sigma(\xi) = f^* \left[-\frac{H}{\pi} \arcsin \xi \right].$$

Вместо (24) будем иметь

$$y(\xi) = v(\xi) - 2A\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (32)$$

Таким образом, в случае неограниченной глубины водопроницаемого слоя поставленная задача разрешима неединственным образом, в решение входит произвольная постоянная A .

Условие отсутствия загибов границ бьефов (26) переписется в виде

$$A \geq \max(A^*, A^{**}), \quad (33)$$

где

$$A^* = \frac{1}{2}\Omega(-1), \quad A^{**} = -\frac{1}{2}\Omega(1).$$

Способы определения произвольной постоянной. Рассмотрим некоторые способы определения постоянной A . Она может быть найдена по какому-либо дополнительному условию, характеризующему искомый контур. Укажем, например, следующие два способа.

1. Пусть требуется построить подземный контур так, чтобы максимальный выходной градиент по дну нижнего бьефа ($\max J_y$) принимал наперед заданное значение J_0 . Так как для контуров, которые

мы строим, максимум J_y вдоль CD равен J_c , то $J_0 = J_c$. При предельном переходе вторая формула (28) преобразуется к виду

$$J_c = \frac{H}{\pi} [2A + \Omega(1)]^{-1},$$

откуда, задав J_c , найдем

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\pi J_c} - \Omega(1) \right],$$

причем, так как мы будем задавать $J_c > 0$, полученная постоянная A будет удовлетворять условию $A \geq A^{**}$. Следовательно, для выполнения условия (33) достаточно, чтобы $A \geq A^*$. Если последнее удовлетворяться не будет, надо уменьшить величину J_c .

2. Можно определить постоянную A по заданному заглублению флютбета y_0 в некоторой точке с абсциссой x_0 , отличной от 0 и l . Из зависимости $x = \sigma(\xi)$ определим ξ_0 , соответствующую выбранной точке на подземном контуре. Тогда из (32) найдем

$$A = \frac{v(\xi_0) - y_0}{2\sqrt{1 - \xi_0^2}},$$

причем, если (33) выполняться не будет, следует увеличить $|y_0|$.

4 Построение подземного контура плотины по эюре противодействия

4.1 Построение подземного контура флютбета по эюре фильтрационного противодействия

Постановка задачи. Пусть

$$p = \kappa^* p_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

– заданная вдоль ширины флютбета эюра фильтрационного противодействия, где однозначная положительная функция $p_0(x)$ обладает производной, удовлетворяющей условию Гельдера, причем $p_0(0) = H/2$, $p_0(l) = -H/2$; l – ширина флютбета; H – действующий на сооружение напор, κ^* – объемный вес грунтовой воды, k – коэффициент фильтрации. Область фильтрации ограничена по глубине, глубина залегания водоупора T и фильтрационный расход Q под плотиной заданы.

Требуется определить форму подземного контура флютбета BC .

Сведение к нелинейной задаче Гильберта. Решение задачи проведем по аналогии с решениями, изложенными в предыдущих двух главах, вводя аналогичные области G_w и G_ζ в плоскости комплексного потенциала w и канонической плоскости ζ (рис. 8).

Используя выражение (13), определим зависимость

$$h(\xi) = -\frac{1}{k}\varphi(\xi), \quad (34)$$

где модуль λ определяется из уравнения (11).

Учтя, что $p = \kappa^*(h - y)$, и приняв во внимание предыдущую формулу, на участке оси ξ , соответствующем искомому контуру, получим соотношение

$$p_0[x(\xi)] + y(\xi) = h(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (35)$$

На других участках $\text{Im } z(\zeta)$ принимает следующие значения: $y = 0$ при $1 \leq |\xi| < 1/\lambda$, $y = -T$ при $1/\lambda < |\xi| < \infty$.

Таким образом, решение поставленной задачи, то есть определение аналитической в нижней полуплоскости и ограниченной на бесконечности функции $z(\zeta)$, свелось к нелинейной краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами при дополнительном условии: $0 \leq x \leq l$, когда $-1 \leq \xi \leq 1$.

Единственность решения. Предположим, что на участке $[-1, 1]$ оси ξ известна $\text{Re } z(\zeta) = x(\xi)$. Тогда функция $z(\zeta)$ может быть восстановлена по формуле (23). Выделив $\text{Im } z(\zeta)$ на участке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$ и подставив в соотношение (35), получим нелинейное сингулярное интегральное уравнение для определения $x(\xi)$:

$$p_0[x(\xi)] + \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}(\tau - \xi)} d\tau = h^*(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (36)$$

где

$$h^*(\xi) = h(\xi) + \frac{2T}{\pi} \text{arctg} \frac{\lambda\sqrt{1 - \xi^2}}{\lambda'}.$$

Пусть существует два решения $x_1(\xi)$ и $x_2(\xi)$ уравнения (36). Стандартным подходом, рассмотрев функцию $\sigma_1(\xi) = x_2(\xi) - x_1(\xi)$, поставив и решив для нее соответствующую краевую задачу, удается показать, что $\sigma_1(\xi) \equiv 0$. Таким образом, если решение поставленной задачи определения формы подземного контура по эпюре противодействия существует, то оно единственно.

4.2 Случай неограниченной глубины водопроницаемого слоя

Будем полагать, что глубина залегания водоупора $T = \infty$ и соответственно расход $Q = \infty$. Повторив решение из п.3.4, определим функцию $z(\zeta)$ по формуле (31). Выделив $\text{Im } z(\zeta)$ при $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$ и учтя (35), получим уравнение (36), в котором

$$h^*(\xi) = h(\xi) + 2A\sqrt{1 - \xi^2},$$

а $h(\xi)$ определяется по формуле (34) с учетом (29):

$$h(\xi) = -\frac{H}{\pi} \arcsin \xi.$$

Из проведенных в предыдущей главе исследований вытекает, что единственное решение уравнения (36) в случае $T = \infty$, а следовательно, и решение поставленной задачи, будет зависеть от произвольной вещественной постоянной A .

Рассмотрим вопрос существования решения. Будем искать $z(\zeta)$ в виде суммы двух аналитических функций $z(\zeta) = z_1(\zeta) + z_2(\zeta)$. Примем за $z_1(\zeta)$ функцию

$$z_1(\zeta) = -\frac{iH}{\pi} \arcsin \zeta.$$

Тогда, учтя (35) и то, что $\text{Im } z = 0$ при $1 \leq |\xi| < \infty$, $\eta = 0$, для определения $z_2(\zeta)$ получим следующие граничные условия:

$-\infty < \xi \leq -1$	$-1 \leq \xi \leq 1$	$1 \leq \xi < \infty$
$y_2 = -H/2$	$y_2 = -p_0(x(\xi))$	$y_2 = H/2$

Зная, что функция $z_2(\zeta)$ должна иметь в окрестности бесконечно удаленной точки особенность логарифмического характера и простой полюс и учтя, что $0 \leq x \leq l$ при $-1 \leq \xi \leq 1$, можно построить в плоскости $z_2 = x_2 + iy_2$ область G_{z_2} , которая схематично изображена на рис. 12.

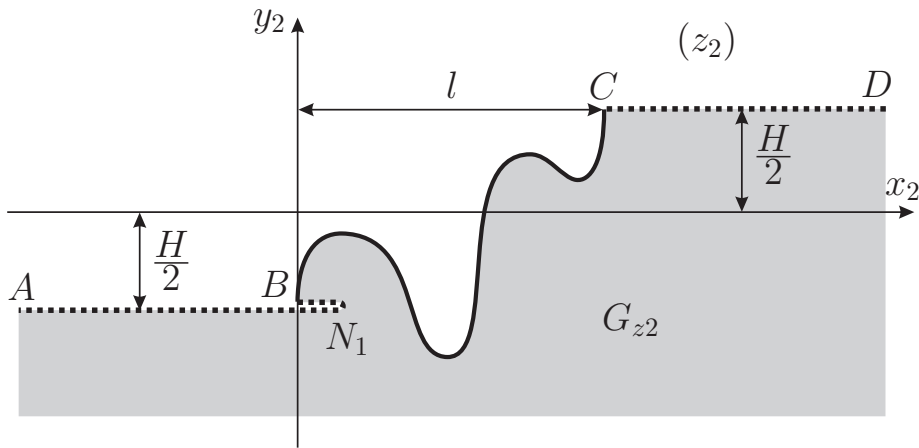


Рис. 12

Из существования конформного отображения области G_{z_2} на G_ζ вытекает безусловная разрешимость нашей задачи. Заметим, что наличие в решении произвольной константы A геометрически иллюстрируется неизвестной заранее величиной разреза BN_1 .

5 Обратные задачи фильтрации в земляных плотинах и из каналов

5.1 Обратная задача фильтрации в земляной плотине. Вариант А

Постановка задачи. Область фильтрации через однородную земляную плотину $ABCDE$, расположенную на горизонтальном водоупоре AE , изображена на рис. 13. Известны коэффициент фильтрации k , высоты воды в бьефах H_1 и H_2 , высота участка высачивания y_c , расход жидкости через плотину Q и расход жидкости через участок высачивания Q_1 . На проницаемых откосах плотины AB , CD и DE заданы функции тока $\psi = \psi_n(\psi)$, $n = \overline{1, 3}$ соответственно. Функции, обратные к $\psi_n(y)$, которые обозначим $y_n(\psi) = \psi_n^{-1}(y)$, существуют, однозначны, не убывают и удовлетворяют условию Гельдера.

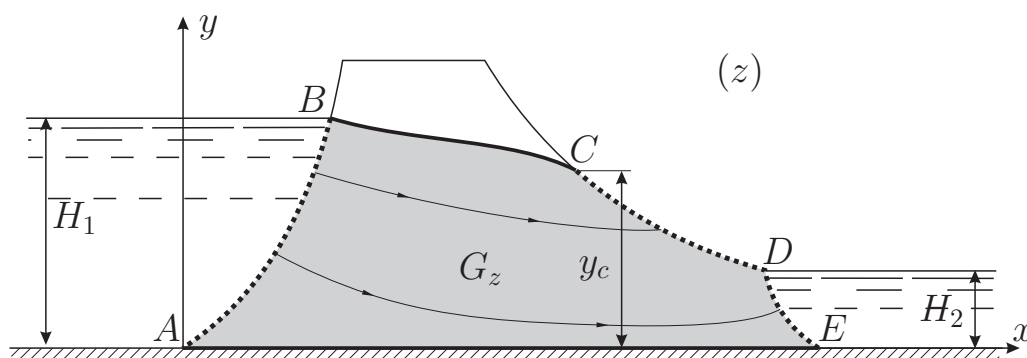


Рис. 13

Требуется определить форму проницаемых участков откосов (верхового AB и низового откоса CDE с участком высачивания CD) и найти депрессионную кривую BC .

Решение. Выберем в физической плоскости $z = x + iy$ начало координат в точке A . Тогда математически задачу можно сформулировать следующим образом. Определить границу области фильтрации G_z и аналитическую в этой области функцию комплексного потенциала $w(z)$, удовлетворяющую на границе следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 \text{на } AB: \quad & \varphi = -kH_1, \quad \psi = \psi_1(y), \quad (0 \leq y \leq H_1); \\
 \text{на } BC: \quad & \varphi = -ky, \quad \psi = 0, \quad (H_1 \geq y \geq y_c); \\
 \text{на } CD: \quad & \varphi = -ky, \quad \psi = \psi_2(y), \quad (y_c \geq y \geq H_2); \\
 \text{на } DE: \quad & \varphi = -kH_2, \quad \psi = \psi_3(y), \quad (H_2 \geq y \geq 0); \\
 \text{на } EA: \quad & \psi = -Q, \quad y = 0.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Заметим, что функции $\psi_n(y)$ должны удовлетворять следующим условиям: $\psi_1(0) = \psi_3(0) = -Q$, $\psi_1(H_1) = \psi_2(y_c) = 0$, $\psi_2(H_2) = \psi_3(H_2) = -Q_1$.

Введем в рассмотрение область G_w в плоскости комплексного потенциала w (рис. 14), которая по граничным условиям (37) определяется полностью. Рассмотрим аналитическую в этой области функцию $z(w) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$. На границе Γ_w области G_w эта функция удовлетворяет следующим граничным усло-

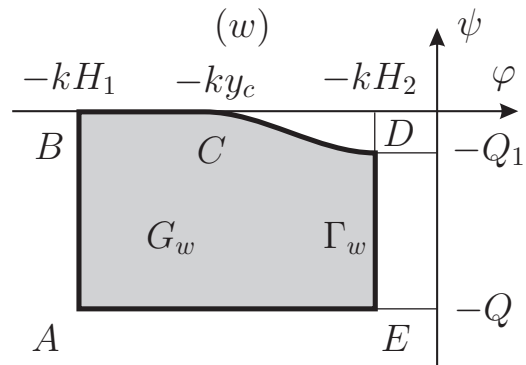


Рис. 14

ВИЯМ:

$$\begin{aligned}
&\text{на } AB: y = y_1(\psi), \quad (-Q \leq \psi \leq 0, \quad 0 \leq y \leq H_1); \\
&\text{на } BC: y = -\varphi/k, \quad (-kH_1 \leq \varphi \leq -ky_c, \quad H_1 \geq y \geq y_c); \\
&\text{на } CD: y = -\varphi/k, \quad (-ky_c \leq \varphi \leq -kH_2, \quad y_c \geq y \geq H_2); \quad (38) \\
&\text{на } DE: y = y_3(\psi), \quad (-Q_1 \geq \psi \geq -Q, \quad H_2 \geq y \geq 0); \\
&\text{на } EA: y = 0, \quad \text{в точке } A: x = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, требуется определить аналитическую и ограниченную в G_w функцию $z(w)$ по заданной на границе мнимой части. Как известно, решение этой задачи существует и единственно. Отобразим конформно область G_w на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ так, чтобы точке $\zeta = \infty$ соответствовала некоторая внутренняя точка участка EA границы Γ_w . Тогда функция $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$ определится по формуле Шварца

$$z(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} + C,$$

где вещественная константа C находится, так как в плоскости z начало координат зафиксировано.

Осуществив в этой формуле предельный переход $\zeta \rightarrow \xi$ и разделив вещественную и мнимую части, получим параметрические уравнения границы профиля плотины

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - \xi} + C, \quad (-\infty < \xi < \infty), \\
y &= y(\xi),
\end{aligned}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

5.2 Обратная задача фильтрации в земляной плочине. Вариант В

В этом варианте **постановка задачи** отличается от предыдущего варианта тем, что верховой откос AB считается известным, а именно, прямолинейным с углом наклона $\pi\theta$, $0 < \theta < 1/2$ к оси x .

Требуется определить проницаемую часть CDE низового откоса и депрессионную кривую BC .

Решение задачи будем проводить по аналогичной схеме. Тогда первое из условий (37) должно быть заменено следующим

$$\text{на } AB : \varphi = -kH_1, \quad x \sin \pi\theta - y \cos \pi\theta = 0.$$

Эти условия также позволяют построить в плоскости w область G_w , на границе которой функция $z(w)$ удовлетворяет условиям, отличающимся от условий (38) первой строкой

$$\text{на } AB : \quad x \sin \pi\theta - y \cos \pi\theta = 0.$$

Полученная задача определения функции $z(w)$ является линейной задачей Гильберта. Индекс задачи равен -1 , следовательно, эта задача разрешима и ее решение единственно. Аналогично введя каноническую плоскость ζ и конформно отобразив G_w на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$, определим функцию $z(\zeta)$ по формуле

$$z(\zeta) = -\frac{R(\zeta)}{\pi} \int_{\xi_e}^{\xi_b} \frac{y(\tau) d\tau}{R(\tau) (\tau - \zeta)},$$

где за $R(\zeta) = (\zeta - \xi_a)^\theta (\zeta - \xi_b)^{1-\theta}$ выбрана ветвь, положительная на участке $\zeta = \xi > \xi_b$, а ξ_a, ξ_b, ξ_e – координаты точек A, B, E в плоскости ζ соответственно.

5.3 Обратная задача фильтрации из канала

Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ рассматривается фильтрация из канала не известной заранее формы. Область фильтрации G_z на глубине $T = H$ подстилается горизонтальным дренирующим слоем AD (рис. 15). Вдоль ширины канала на искомой границе BC задана функция расхода

$$\psi = f(x), \quad (0 \leq x \leq l),$$

где l – ширина канала и $\psi(0) = 0$. Коэффициент фильтрации k и фильтрационный расход Q известны, то есть $\psi(l) = Q$.

Требуется построить профиль канала BC и депрессионные кривые AB и CD .

Решение. Введем в рассмотрение аналитическую в G_z функцию комплексного потенциала $w(z)$. Сформулируем следующую краевую задачу. Определить границу области фильтрации G_z и функцию комплексного потенциала $w(z)$, удовлетворяющую на границе сле-

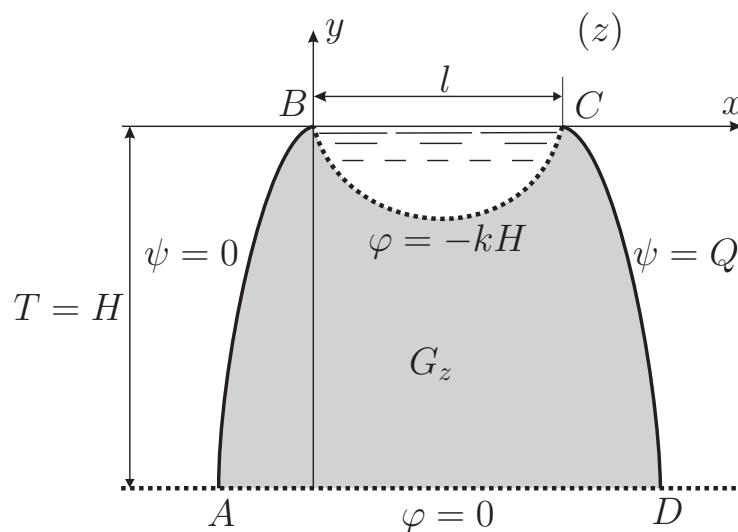


Рис. 15

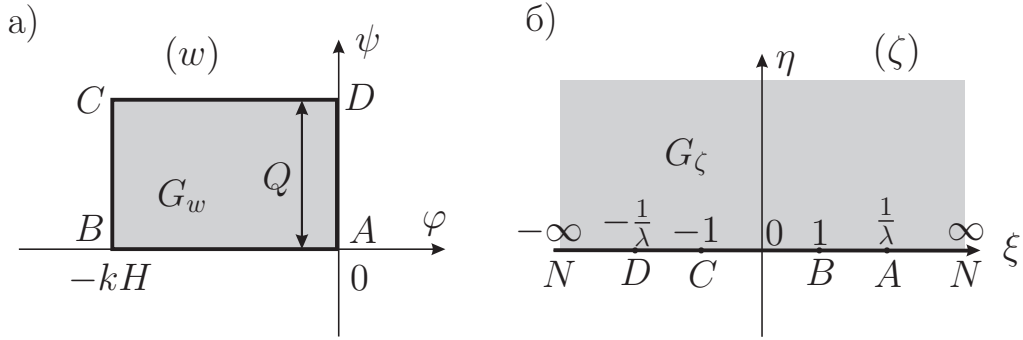


Рис. 16

дующим условиям:

$$\begin{aligned}
 \text{на } AD: \quad \varphi &= 0, & y &= -H; \\
 \text{на } AB: \quad \varphi &= -k(y + H), & \psi &= 0; \\
 \text{на } CD: \quad \varphi &= -k(y + H), & \psi &= Q; \\
 \text{на } BC: \quad \varphi &= -kH, & \psi &= f(x), \quad (0 \leq x \leq l).
 \end{aligned} \tag{39}$$

В плоскости w области фильтрации G_z будет соответствовать прямоугольник G_w со сторонами kH и Q (рис. 16,а). Отобразим конформно G_w на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ (рис. 16,б) в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ функцией

$$w(\zeta) = \frac{iQ}{2K} [K - F(\arcsin \zeta, \lambda)] - kH, \tag{40}$$

где $F(\arcsin \zeta, \lambda)$ – эллиптический интеграл первого рода, а модуль λ находится из соотношения

$$\frac{K'}{K} = \frac{2kH}{Q}.$$

Из (40) найдем:

$$\begin{aligned}
 \text{на } BC: \quad \psi &= \psi(\xi), \quad (-1 \leq \xi \leq 1); \\
 \text{на } AB, CD: \quad \varphi &= \varphi(\xi), \quad (-1 \leq |\xi| \leq 1/\lambda);
 \end{aligned} \tag{41}$$

Введем в рассмотрение функцию Жуковского

$$\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = z + i(H + w/k), \quad (42)$$

откуда

$$\tilde{x} = x - \psi/k, \quad \tilde{y} = y + H + \varphi/k.$$

С учетом (39) запишем граничные условия для функции $\tilde{z}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \text{на } BC: \quad & \tilde{x} = \sigma(\xi), & (-1 \leq \xi \leq 1); \\ \text{на } AB, CD: \quad & \tilde{y} = y + H - (y + H) = 0, & (-1 \leq |\xi| \leq 1/\lambda); \\ \text{на } ND, AN: \quad & \tilde{y} = -H + H + 0 = 0, & (|\xi| \geq 1/\lambda). \end{aligned}$$

Так как на BC зависимость $\psi = f(x)$ задана, то $x = f^{-1}(\psi)$ и, следовательно с учетом (41), $\tilde{x} = f^{-1}[\psi(\xi)] - \frac{1}{k}\psi(\xi) = \sigma(\xi)$.

Таким образом, для $\tilde{z}(\zeta)$ имеем смешанную краевую задачу в верхней полуплоскости. Ее решение находится по формуле

$$\tilde{z}(\zeta) = \frac{R(\zeta)}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - \zeta)}, \quad (43)$$

где за $R(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ выбрана ветвь, положительная на участке $\zeta = \xi > 1$. Подставив (43) в (42) и устремив $\zeta \rightarrow \xi$, с учетом (41) определим параметрические уравнения искомого профиля канала:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= f^{-1}[\psi(\xi)], \\ y(\xi) &= -\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \frac{d\tau}{(\tau - \xi)}, \end{aligned}$$

где $-1 \leq \xi \leq 1$, и уравнения для депрессионных кривых:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{\psi(\xi)}{k} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \frac{d\tau}{(\tau - \xi)}, \\ y(\xi) &= -H - \frac{\varphi(\xi)}{k}. \end{aligned}$$

Здесь на CD ($-1/\lambda \leq \xi \leq -1$) перед интегралом берется знак “—” и $\psi = Q$, а на AB ($1 \leq \xi \leq 1/\lambda$) — знак “+” и $\psi = 0$.

6 Место обратных краевых задач среди краевых задач с неизвестными границами

Обратные краевые задачи (ОКЗ) являются частью обширного класса краевых задач с неизвестными границами (КЗНГ). К этому классу относятся и широко известные обратные задачи теории потенциала и краевые задачи со свободными границами и ряд других. Попытаемся разграничить класс КЗНГ на отдельные подклассы и указать признаки каждого из них.

В качестве первого большого подкласса КЗНГ укажем краевые задачи, получившие название условно корректных. Началом развития условно корректных краевых задач (УККЗ) явились обратные задачи теории потенциала. Решение их во многих случаях приводится к интегральному уравнению Фредгольма I рода. Такие задачи, являясь некорректными по Адамару, стали называться условно корректными по Тихонову. Существование решения в них, как правило, полагается априори, исходя из физики явления. Характерным признаком УККЗ, по которому их можно до решения отличить от других КЗНГ, является то, что на известном участке границы области краевых условий задается два, а на неизвестном – одно (например, найти гармоническую функцию внутри ограниченной области по значениям ее и ее нормальной производной на заданном участке границы области, при этом на искомом участке границы

задается лишь условие сопряжения). Примерами задач этого подкласса КЗНГ являются также задачи теории взрыва на выброс, в которых требуется подобрать форму заряда так, чтобы выемка получила нужную форму, задачи теории фильтрации под плотинами, в которых по заданной эпюре выходных скоростей требуется найти подземный контур флютбета.

В качестве второго подкласса КЗНГ выделим задачи, характерным признаком которых является то, что на известных участках границы задано одно краевое условие, а на искомым – два. Назовем эти задачи смешанными краевыми задачами (СКЗ). Большинство этих задач являются корректными по Адамару, в них удается доказать существование и единственность решения. Существенное различие задач указанных двух подклассов особенно наглядно видно на частных случаях. Пусть искомая функция является аналитической в некоторой области, часть границы которой задана, а часть не известна. Если неизвестный участок границы стремиться к нулю, тогда СКЗ становится известной прямой краевой задачей Шварца, а УККЗ – переопределенной краевой задачей. Если наоборот, вся граница неизвестна, то СКЗ будет хорошо изученной основной ОКЗ для аналитической функции, а УККЗ – недоопределенной.

В свою очередь СКЗ можно подразделить на краевые задачи со свободными границами (КЗСГ) и смешанные обратные краевые задачи (СОКЗ), частным случаем последних являются просто ОКЗ, в которых вся граница является искомой. Для разъяснения целесообразности такого деления обратимся к механическому (физическому) смыслу этих задач.

Во многих задачах математической физики требуется находить вид границ, образующихся в результате рассматриваемого процесса (граница каверны в задачах струйного обтекания, депрессионные кривые в задачах безнапорной фильтрации, границы выемки в задачах взрыва на выброс и др.). Так как форма этих границ является результатом процесса, свойством самого изучаемого явления, то варьироваться по усмотрению исследователя условия на них не могут – они (условия) определяются физикой явления, точнее, моделью явления, например, постоянство скорости и функции тока на струях, постоянство давления и фиксированный вид функции тока на депрессионных кривых и т.п. Такие КЗНГ в научной литературе получили название краевых задач со свободными границами (КЗСГ).

В отличие от КЗСГ в смешанных обратных краевых задачах (СОКЗ) речь идет о границах, которые должны быть созданы независимо от изучаемого процесса еще до его осуществления. В этих задачах требуется отыскать такую форму границы, при которой изучаемый процесс обладал бы нужными свойствами, отвечал бы определенным желаемым условиям (найти форму крыла с требуемым распределением скорости; форму плотины, обладающей определенными фильтрационными характеристиками, и т.д.). Таким образом, исследователь получает возможность, задав соответствующие краевые условия, влиять на процесс в нужном направлении, управлять им. С этих позиций СОКЗ относятся к задачам конструктивного характера. Напомним, что в КЗСГ краевые условия на искомой границе определяются не исследователем, а физикой явления, и, следовательно, КЗСГ являются задачами прогноза,

предсказания.

Отдельным подклассом СОКЗ являются обратные краевые задачи (ОКЗ). Главное их отличие от СОКЗ заключается в том, что вся граница области, на которой задаются два граничных условия – неизвестна. Примером таких задач служит ОКЗ аэрогидродинамики, когда по заданному распределению скорости на полностью неизвестной границе требуется построить крыловой профиль.

Что касается математических постановок КЗСГ и СОКЗ (и ОКЗ в том числе), то их нельзя различать и математическая теория по существу одинакова для всех КЗНГ второго подкласса. Следует отметить, что среди этих задач есть и такие, которые не являются корректными по Адамару в силу наличия промежуточных условий разрешимости. Но и тогда картина их разрешимости отличается от УККЗ: возникает конечное число условий разрешимости, которые часто удается выразить в явном виде, и при их выполнении можно обосновать существование единственного устойчивого решения.

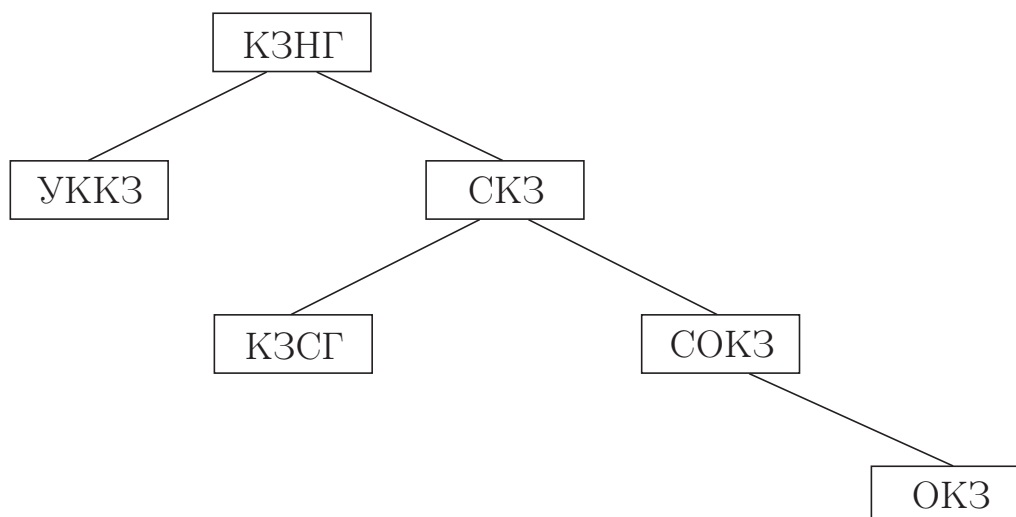


Рис. 17

После всего сказанного изобразим классификацию краевых задач с неизвестными границами в виде следующей схемы (рис. 17). Отметим, что можно указать задачи, содержащие одновременно различные участки неизвестных границ типа КЗСГ и СОКЗ. Например, задачи о построении формы препятствия, обтекаемого с кавитацией, об отыскании откосов земляной плотины с депрессионной кривой и т.д. Примером тесной связи между задачами разных подклассов может служить применение метода квазирешений УККЗ к ОКЗ, в частности к ОКЗ аэрогидродинамики. Рассмотренная классификация, как и любая другая, является в определенной мере условной, относительной и, видимо, может дополняться и уточняться по мере развития теории КЗНГ.

Литература

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. *Аравин В.И. и Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформированной пористой среде. М: ГИТТЛ, 1953. 616 с.
3. *Нужин М.Т., Ильинский Н.Б.* Методы построения подземных контуров гидротехнических сооружений. Казань: Изд-во КГУ, 1963. 140 с.