Ф.Г. Авхадиев

Неравенства для интегральных характеристик областей

Учебное пособие

Казань
Казанский государственный университет
2006

УДК 517
ББК 22.161
А22

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета факультета ВМК
Казанского государственного университета

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Обносов,
д.ф.-м.н., профессор А.В. Лапин.

Рекомендовано к опубликованию учебно-методической комиссией механико-математического факультета Казанского государственного университета.

Научный редактор – д.ф.-м.н., профессор С.Р. Насыров.

Авхадиев Ф.Г.

А22 Неравенства для интегральных характеристик областей/Ф.Г. Авхадиев — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006. — 142 с.
ISBN 5-98180-281-2

Учебное пособие предназначено студентам механико-математического факультета и факультета ВМК, знакомым с университетскими курсами математического анализа, дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и математической физики.

УДК 517
ББК 22.161
ISBN 5-98180-281-2

Оглавление

Глава 1

Изопериметрические неравенства

1.1 Классическое неравенство

Классическое изопериметрическое неравенство гласит, что *среди всех плоских фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет круг.* Эту теорему знали уже древние греки. В античную эпоху были также известны более общие задачи, например, задача царицы Дидоны (об области наибольшей площади на берегу моря, ограниченной забором заданной длины со стороны суши), а также изопериметрическое свойство шара в $\mathbb{R}^3$ (т.е. утверждение о том, что среди всех закрытых сосудов с заданной площадью поверхности наибольший объем имеет шар). Однако, только в XIX столетии изопериметрические свойства круга и шара были строго доказаны. В первой половине XIX века Штейнер опубликовал несколько оригинальных, хотя и не совсем строгих, доказательств (он пользовался без обоснования существованием экстремальной области). Первые строгие доказательства были даны Эдлером в 1882 году для круга на плоскости и Шварцем в 1884 году для шара в $\mathbb{R}^3$.

Наиболее известный подход к обоснованию изопериметрических свойств круга и шара связан с различными симметризациями плоских и пространственных множеств. Метод симметризации является одним из глубоко разработанных методов, и с ним можно ознакомиться в ряде книг (см. [6], [12], [13]).

Отметим также, что в настоящее время известно более 10 различных способов обоснования классического изопериметрического неравенства для плоских фигур. Мы приведем здесь доказательство, принадлежащее Гурвицу. Оно не требует специальной подготовки, выходящей за пределы стандартных вузовских курсов по математическому анализу.

Теорема 1.1 *Пусть Ω — область на плоскости, ограниченная замкнутой спрямляемой кривой. Тогда площадь области $S(\Omega)$ и длина ее границы $L(\Omega)$ удовлетворяют неравенству*

$$S(\Omega) \leq \frac{L(\Omega)^2}{4\pi}, \tag{1.1}$$

равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Доказательство Гурвица. Обозначим

$$S = S(\Omega), \qquad L = L(\Omega).$$

Пусть $z = \varphi(s) + i\psi(s)$ – уравнение граничной кривой, s – натуральный параметр (дуговая абсцисса), $s \in [0, L]$. Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют условию Липшица, поэтому мы можем пользоваться сходящимися рядами Фурье

$$x(t) = \varphi(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

и

$$y(t) = \psi(s) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt,$$

где $t = 2\pi s/L$, и, следовательно, $0 \leq t \leq 2\pi$. Функции x и y абсолютно непрерывны по $t \in [0, 2\pi]$, и

$$S = S(\Omega) = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

Пользуясь тем, что $|dz/ds| = 1$ почти всюду по $s \in [0, L]$, получаем

$$L = \int_0^L ds = \int_0^L |dz/ds|^2 ds = \frac{2\pi}{L} \int_0^{2\pi} |x'(t) + iy'(t)|^2 dt.$$

Следовательно, будем иметь

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |x'(t) + iy'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} [x'(t)^2 + y'(t)^2] dt =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Очевидно, доказываемое утверждение (1.1) является простым следствием тривиального неравенства $n \leq n^2$ и элементарных неравенств для арифметических и геометрических средних, а именно:

$$2a_n d_n \leq a_n^2 + d_n^2, \qquad -2b_n c_n \leq b_n^2 + c_n^2.$$

Ясно, что равенство $S = L^2/(4\pi)$ возможно тогда и только тогда, когда для любого натурального числа $n \geq 2$ выполняются равенства $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$, а при $n = 1$

$$a_1 = d_1, \qquad b_1 = c_1.$$

Таким образом, равенство $S = L^2/(4\pi)$ возможно тогда и только тогда, когда уравнение граничной кривой имеет вид

$$x = \frac{a_0}{2} + a_1 \mathrm{cos} t + b_1 \mathrm{sin} t, \quad y = \frac{b_0}{2} - b_1 \mathrm{cos} t + a_1 \mathrm{sin} t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

т.е. граничная кривая является окружностью. Этим и завершается доказательство.

1.2 Неравенство Брунна-Минковского

Пусть X и Y – подмножества $\mathbb{R}^n$. Определим векторную сумму (сумму Минковского)

$$X + Y := \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in X, y \in Y\},$$

а также растяжение

$$sX := \{sx \in \mathbb{R}^n : x \in X\},$$

где s – неотрицательное число. Пусть $|X|$ – n-мерная мера Лебега множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (объем при $n \geq 3$, площадь при $n = 2$).

Рассмотрим простой пример. Пусть X_0 – квадрат в $\mathbb{R}^2$ со стороной длины l и с центром в начале координат, и Y_0 – круг радиуса r с центром в начале координат. Тогда $X_0 + Y_0$ – "квадрат" со стороной $l + 2r$ с закругленными вершинами. Легко вычисляется и оценивается площадь

$$|X_0 + Y_0| = |X_0| + 4lr + |Y_0| \geq |X_0| + 2\sqrt{\pi} lr + |Y_0|$$

$$= |X_0| + 2\sqrt{|X_0||Y_0|} + |Y_0|.$$

Отсюда следует, что

$$|X_0 + Y_0|^{1/2} \geq |X_0|^{1/2} + |Y_0|^{1/2}.$$

Обобщение этого неравенства на случай n-мерных выпуклых тел X и Y называется неравенством Брунна-Минковского. Оно имеет вид

$$|(1-\lambda)X + \lambda Y|^{1/n} \geq (1-\lambda)|X|^{1/n} + \lambda|Y|^{1/n}, \tag{1.2}$$

где λ – любое число из интервала $(0,1)$, и было получено в 1887 году Брунном в случае $n = 3$. В 1910 году Минковский указал на ошибку в доказательстве Брунна, которую тот исправил. Минковский дал также новое доказательство этого неравенства. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда X и Y являются равными с точностью до переноса и расширения.

В 1935 году Л.А. Люстерник доказал, что неравенство (1.2) является верным для произвольных ограниченных и измеримых множеств X и Y. Неравенство (1.2) для произвольных X и Y принято теперь называть *общим неравенством Брунна-Минковского.* В 1954 году Хадвигер и Охман (см. [4] и [13]) дали изумительно простое доказательство общего неравенства Брунна-Минковского. Его мы и приводим ниже.

Сформулируем теперь общее неравенство в несколько иной форме (равносильной, впрочем, неравенству (1.2), примененному к множествам $X_1 = (1-\lambda)X$ и $Y_1 = \lambda Y$).

Теорема 1.2 *Пусть X и Y — непустые компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$|X + Y|^{1/n} \geq |X|^{1/n} + |Y|^{1/n}. \tag{1.3}$$

Доказательство Хадвигера-Охмана. Рассмотрим вначале частный случай, когда X и Y – параллелепипеды, грани которых параллельны координатным плоскостям и ребра которых имеют длины x_k и y_k $(k = 1, \dots, n)$, соответственно. Тогда

$$|X| = \prod_{k=1}^{n} x_k, \qquad |Y| = \prod_{k=1}^{n} y_k, \qquad |X+Y| = \prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k),$$

и неравенство (1.3) для двух параллелепипедов вытекает из следующего неравенства для арифметических и геометрических средних:

$$1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + y_k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k + y_k} \geq$$

$$\geq \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + y_k} \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k + y_k} \right)^{1/n}.$$

Пусть теперь X и Y являются элементарными множествами, т.е. X и Y составлены из конечного числа невырожденных замкнутых параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям. Пусть m – суммарное число составляющих X и Y параллелепипедов, $m > 2$. Применим метод математической индукции по m. Пусть (1.3) верно для элементарных X и Y, когда общее число составляющих X и Y параллелепипедов меньше или равно $(m-1)$ и $m > 2$. Тогда хотя бы одно из множеств X и Y содержит более двух составляющих параллелепипедов.

Предположим, для определенности, что таким множеством является X. Без ограничения общности можно считать, что по обе стороны от гиперплоскости $\{x_n = 0\}$ находятся составляющие X параллелепипеды. Тогда $\{x_n = 0\}$

разбивает X на непустые элементарные множества X_1 и X_2, лежащие в разных полупространствах и такие, что число составляющих параллелепипедов в каждом из множеств X_1 и X_2 будет меньше, чем в X. Через $\mu \in (0, 1)$ обозначим число, определяемое равенством

$$|X_1| = \mu |X|.$$

Параллельно перенесем множество Y так, чтобы гиперплоскость $\{x_n = 0\}$ делила Y на множества Y_1 и Y_2, причем Y_1 и X_1 находятся по одну сторону от $\{x_n = 0\}$ и

$$|Y_1| = \mu |Y|.$$

Естественно, мы учитываем следующие факты: переносы не меняют $|X|$, $|Y|$, $|X + Y|$, а Y_1 и Y_2 – элементарные множества, лежащие в разных полупространствах и такие, что число составляющих параллелепипедов в каждом из них меньше, чем в Y. Так как в каждой из пар (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) не более, чем $(m - 1)$ составляющих параллелепипедов, то очевидные соотношения и предположение индукции позволяют записать

$$|X + Y| \geq |X_1 + Y_1| + |X_2 + Y_2| \geq$$

$$\geq (|X_1|^{1/n} + |Y_1|^{1/n})^n + (|X_2|^{1/n} + |Y_2|^{1/n})^n =$$

$$= \mu(|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})^n + (1 - \mu)(|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})^n =$$

$$= (|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})^n,$$

что и требовалось доказать.

Заметим наконец, что всякий компакт X можно приближать элементарными X_k так, чтобы $|X_k| \to |X|$. Поэтому доказательство неравенства (1.3) завершается предельным переходом

$$|X+Y|^{1/n} \geq \lim_{k\to\infty}|X_k+Y_k|^{1/n} \geq$$

$$\geq \lim_{k\to\infty}(|X_k|^{1/n}+|Y_k|^{1/n}) = |X|^{1/n}+|Y|^{1/n}.$$

Теорема доказана.

1.3 Упражнения

Получите классические изопериметрические неравенства как следствие (1.3), следуя указаниям.

1) Примените (1.3) к множествам X и $Y=\varepsilon B$, где B – замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Должно получиться следующее неравенство

$$|X+\varepsilon B|^{1/n} \geq |X|^{1/n}+\varepsilon|B|^{1/n}, \tag{1.4}$$

причем равенство достигается тогда, когда X является шаром или точкой.

2) Перепишите (1.4) в виде

$$\frac{|X+\varepsilon B|^{1/n}-|X|^{1/n}}{\varepsilon} \geq |B|^{1/n} \tag{1.5}$$

и перейдите к нижнему пределу при $\varepsilon\to 0^+$. Правая часть в неравенстве (1.5) постоянна. Докажите, что предел левой части равен величине

$$\frac{1}{n}|X|^{\frac{1-n}{n}}\sigma(\partial X),$$

где

$$\sigma(\partial X) = \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{|X+\varepsilon B|-|X|}{\varepsilon}$$

есть площадь по Минковскому границы ∂X множества X. Запишите полученное изопериметрическое неравенство, связывающее величины $\sigma(\partial X)$ и $|X|$.

Глава 2

Теоремы сравнения для моментов

В этой главе изложены теоремы сравнения для степенных моментов n-мерного множества Ω. Рассматриваются q-моменты вида

$$\int_\Omega |x|^q f(x)\mathrm{d}x \quad (q > -n),$$

где $f(x)$ – неотрицательная функция, $f \in L^1(\Omega)$.

Напомним, что при $q = 2$ такая величина называется моментом инерции Ω относительно начала координат, если рассматривать функцию f как плотность массы. Основное изопериметрическое неравенство для моментов инерции, доказанное Пойа в случае плоских областей и Бэндл в общем случае (см. [6], [12]), имеет вид

$$\frac{|\Omega|^{1+2/n}}{\int\limits_\Omega |x|^2\mathrm{d}x} \le \frac{|B|^{1+2/n}}{\int\limits_B |x|^2\mathrm{d}x}. \tag{2.1}$$

Здесь $B = B(0,1)$. Неравенство (2.1) является точным для любого шара $\Omega = B(0,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le \rho\}$.

В первом параграфе мы рассмотрим одномерный случай, а именно, рассмотрим одно свойство степенных моментов для $\Omega = (0,\infty)$, восходящее к Гауссу.

2.1 Неравенство Гаусса-Винклера

Пусть $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ – невозрастающая функция, причем

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1. \tag{2.2}$$

Неравенство Гаусса-Винклера является одним из классических результатов теории вероятностей о моментах следующего вида

$$M_p(f) := \int_0^\infty x^p f(x)\,dx \qquad (p > -1).$$

Краткая история вопроса такова. В 1821 году Гаусс опубликовал без доказательства неравенство

$$[3M_2(f)]^2 \le 5M_4(f).$$

В 1866 году Винклер представил следующее его обобщение:

$$[(1+r)M_r(f)]^{1/r} \le [(1+s)M_s(f)]^{1/s} \tag{2.3}$$

при $0 < r < s$, но доказательство Винклера оказалось ошибочным (см. [30]). В 1896 году обоснование неравенства (2.3) для случая $s = 2r > 0$ и для некоторых иных случаев дал Крюгер.

Впервые полное доказательство (2.3) для всех положительных r и s ($s > r$) опубликовал в 1922 году Фабер [18]. Он обосновал более общее неравенство, а именно,

$$[(1+b)M_b(f)]^{c-a} \leq [(1+a)M_a(f)]^{c-b}[(1+c)M_c(f)]^{b-a} \quad (2.4)$$

при условии $0 \leq a < b < c$. Ясно, что при $a = 0$ неравенство Фабера (2.4) эквивалентно неравенству Гаусса-Винклера с показателями $b = r$ и $c = s$. Доказательство Фабера занимает около 15 страниц. Более короткое обоснование в 1931 году дал фон Мизес [19] в предположении, что $s > r > -1$ и f является непрерывно дифференцируемой функцией. Мы даем новое доказательство, опубликованное нами в 2004 году (см. [45]). Оно охватывает общий случай и позволяет описать все экстремальные функции.

Неравенство Гаусса-Винклера в полной общности составляет содержание следующего утверждения.

Теорема 2.1 *Пусть f – неотрицательная, невозрастающая функция на интервале $(0, \infty)$, удовлетворяющая условию (2.2). Если $-1 < r < s$, то справедливо неравенство (2.3). Случай*

$$0 < [(1+r)M_r(f)]^s = [(1+s)M_s(f)]^r < \infty$$

реализуется тогда и только тогда, когда

$$f(x) = f_0(x) := \begin{cases} C, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ 0, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty \end{cases} \quad (2.5)$$

для некоторой положительной постоянной C.

Фактически мы сначала доказываем неравенство Фабера (2.4) для a и b таких, что $-1 < a < b < c$.

Теорема 2.2 *Если* $-1 < a < b < c < \infty$ *и* f *– неотрицательная, невозрастающая функция на интервале* $(0,\infty)$*, удовлетворяющая условию* (2.2)*, то справедливо неравенство Фабера* (2.4)*. Кроме того, для конечных* $M_a(f)$ *и* $M_c(f)$ *знак равенства в* (2.4) *реализуется тогда и только тогда, когда функция* f *равна функции* f_0*, определенной в* (2.5)*.*

Доказательство теорем. Мы получаем (2.3) и (2.4) как следствия неравенства Гельдера для интегралов и следующей леммы.

Лемма 2.1 *Если функция* $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ *является неотрицательной и невозрастающей и удовлетворяет условию* (2.2)*, то функция* $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$*, определенная равенством*

$$\psi(x) = \int_0^x f(t)\,dt - xf(x),$$

имеет следующие свойства:

(1) ψ *– неубывающая функция;*

(2) $\psi(0) := \lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$ *и* $\psi(\infty) := \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 1$*;*

(3) *если величина* $M_p(f)$ *конечна, то*

$$(p+1)M_p(f) = \int_0^\infty x^p\,d\psi(x). \tag{2.6}$$

Доказательство леммы. Из неравенств

$$f(t) \geq f(x) \geq 0 \quad (0 < t \leq x < \infty) \tag{2.7}$$

следует, что

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - x_2 f(x_2) + x_1 f(x_1) \geq$$

$$\geq (x_2 - x_1)f(x_2) - x_2 f(x_2) + x_1 f(x_1) \geq 0$$

при условии $x_2 > x_1 > 0$. Таким образом, свойство (1) доказано.

Пользуясь (2.7) и сходимостью интеграла (2.2), легко получаем

$$xf(x) \leq \int_0^x f(t)\,dt \to 0 \quad (\text{при} \quad x \to 0^+)$$

и

$$xf(x) \leq 2\int_{x/2}^x f(t)\,dt \to 0 \quad (\text{при} \quad x \to \infty).$$

Вместе с (2.2) эти соотношения доказывают свойство (2).

Ясно, что $M_p(f) = \infty$ при $p \leq -1$. Следовательно, если величина $M_p(f)$ конечна, то $p + 1 > 0$,

$$x^{p+1} f(x) \leq (1+p)\int_0^x t^p f(t)\,dt \to 0 \quad (\text{при} \quad x \to 0^+)$$

и

$$x^{p+1} f(x) \leq 2^{p+1}\int_{x/2}^x t^p f(t)\,dt \to 0 \qquad (\text{при} \quad x \to \infty).$$

Интегрированием по частям получаем

$$\int_0^\infty x^p d(xf(x)) = x^{p+1} f(x)|_0^\infty - p\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -pM_p(f).$$

Тогда можем написать

$$\int_0^\infty x^p d\psi(x) = \int_0^\infty x^p f(x)\,dx - \int_0^\infty x^p d(xf(x)) =$$

$$= M_p(f) + pM_p(f),$$

что совпадает с соотношением (2.6). Этим и завершается доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теорем. Пусть $-1 < a < b < c < \infty$ и величины $M_a(f)$ и $M_c(f)$ конечны. Согласно неравенству Гельдера

$$\left|\int_0^\infty u\, v\, d\psi(x)\right| \le \left(\int_0^\infty |u|^\alpha d\psi(x)\right)^{1/\alpha} \left(\int_0^\infty |v|^\beta d\psi(x)\right)^{1/\beta}$$

для показателей

$$\alpha = \frac{c-a}{c-b} > 1, \qquad \beta = \frac{c-a}{b-a} > 1 \qquad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right)$$

и функций

$$u = x^{a/\alpha}, \quad v = x^{c/\beta} \qquad \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{c}{\beta} = b\right)$$

будем иметь

$$\int_0^\infty x^b d\psi \le \left(\int_0^\infty x^a d\psi\right)^{\frac{c-b}{c-a}} \left(\int_0^\infty x^c d\psi\right)^{\frac{b-a}{c-a}}. \tag{2.8}$$

С учетом равенства (2.6) легко убедиться, что (2.8) эквивалентно неравенству Фабера (2.4).

Так как $a < c$, то равенство в (2.8) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\psi(x) = \psi_0(x) := \begin{cases} 0, \text{ если} & 0 \le x < 1/C, \\ 1, \text{ если} & 1/C < x < \infty \end{cases}$$

для некоторой постоянной $C > 0$. Для соответствующей экстремальной функции $f_0(x)$ легко находим

$$xy' - y = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ -1, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty, \end{cases} \tag{2.9}$$

где

$$y = \int_0^x f_0(t)\,dt.$$

Решая уравнение (2.9), получаем

$$y = \begin{cases} C_1 x, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ C_2 x + 1, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Таким образом,

$$f_0(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ C_2, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty. \end{cases}$$

Поскольку функция $f_0(x)$ должна быть неотрицательной и невозрастающей, то будем иметь $C_1 \geq C_2 \geq 0$. Условие (2.2) для $f_0(x)$ влечет за собой, что $C_2 = 0$ и $C_1 = C$. Отсюда следует, что функция $f_0(x)$ должна быть функцией вида (2.5), и для таких функций равенство действительно имеет место.

Таким образом, теорема 2.2 доказана.

Согласно свойствам неравенства Гельдера (см. [1]), неравенство (2.8) влечет

$$\left(\int_0^\infty x^r d\psi(x) \right)^{1/r} \leq \left(\int_0^\infty x^s d\psi(x) \right)^{1/s}, \tag{2.10}$$

где $r < s$ (при специальной интерпретации интегральных средних в случае $r = 0$ или $s = 0$). Кроме того, равенство в (2.10) невозможно, если $\psi(x) \neq \psi_0(x)$ и рассматриваемые интегралы конечны.

Таким образом, теорема 2.1 следует из теоремы 2.2.

Этим и завершается доказательство.

2.2 Аналоги неравенства Гельдера-Йенсена

Для нас окажется полезным следующий факт (см., например, [10]):

если $g \in L^q(\mathrm{d}\mu)$ *и* $\int \mathrm{d}\mu(x) < \infty$, *то*

$$\frac{\int |g(x)|^q \mathrm{d}\mu(x)}{\int \mathrm{d}\mu(x)} = \int\limits_0^\infty h(t)\mathrm{d}t^q,$$

где $h(t) = \lambda(t)/\lambda(0)$, $\lambda(t)$ *– функция распределения для* $|g(x)|$.

Отметим, что $\lambda(t)$ является невозрастающей функцией. Таким образом, хорошо известное неравенство Гельдера-Йенсена

$$\left(\frac{\int |g(x)|^{q_1} \mathrm{d}\mu(x)}{\int \mathrm{d}\mu(x)}\right)^{1/q_1} \le \left(\frac{\int |g(x)|^{q_2} \mathrm{d}\mu(x)}{\int \mathrm{d}\mu(x)}\right)^{1/q_2} \quad (q_1 < q_2) \qquad (2.11)$$

эквивалентно следующей теореме.

Теорема 2.3 *Если* $0 \le h(t) \le 1$ *и* $h(t)$ *не возрастает на интервале* $(0, \infty)$, *то*

$$\left(\int_0^\infty h(t)\mathrm{d}t^{q_1}\right)^{1/q_1} \le \left(\int_0^\infty h(t)\mathrm{d}t^{q_2}\right)^{1/q_2}$$

при $0 < q_1 \le q_2 \le \infty$.

Интегралы в теореме 2.3 являются частными случаями мультиномиальных распределений, встречающихся в теории вероятностей, точнее, частными случаями следующих интегралов

$$P_n(q) = \int\limits_0^{x_1} \mathrm{d}\psi_1^q(y_1) \int\limits_0^{x_2} \mathrm{d}\psi_2^q(y_2) \cdots \int\limits_0^{x_n} h(y)\varphi^q(y)\mathrm{d}\psi_n^q(y_n), \qquad (2.12)$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, h, φ и ψ_k – неотрицательные функции, $\psi_k(y_k)$ строго возрастают и абсолютно непрерывны в интервалах $[0, x_k]$, $\psi_k(0) = 0$. В большинстве приложений достаточно брать $\psi_k(t) = t^{r_k}$ для фиксированного $r_k > 0$.

Рассмотрим теперь функционал $P_n(q)$ из (2.12) и функции $\psi_k(y_k)$, для которых выполнены условия, сформулированные выше, предполагая, что $h \geq 0$, $\varphi \geq 0$ и $P_n(q) < \infty$.

Теорема 2.3 является одномерным случаем следующей теоремы, доказанной в [42].

Теорема 2.4 *Предположим, что функция $h(y)$ не убывает по переменным $y_k \in [0, x_k]$ при $k = 2, \ldots, n$, а функция $\varphi(y)$ не убывает по переменным $y_k \in [0, x_k]$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Если $0 < q_1 < q_2 \leq \infty$, $0 \leq h(y) \leq 1$, то выполнено неравенство*

$$P_n^{1/q_1}(q_1) \leq P_n^{1/q_2}(q_2). \qquad (2.13)$$

Доказательство теоремы 2.4. Сначала рассмотрим одномерный случай $n = 1$. Пусть

$$S(x) = \int_0^x h(t)\varphi(t)\mathrm{d}\psi(t), \quad 0 < x < \infty.$$

Предполагаем, что $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ абсолютно непрерывна, $\psi'(t) > 0$ почти всюду на отрезке $[0, x]$ и $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Требуется доказать, что

$$\left(\int_0^x h(t)\varphi^{q_1}(t)\mathrm{d}\psi^{q_1}(t)\right)^{q_2/q_1} \leq \int_0^x h(t)\varphi^{q_2}(t)\mathrm{d}\psi^{q_2}(t), \qquad (2.14)$$

если $0 \le h(t) \le 1$ и $0 \le \varphi(t_1) \le \varphi(t)$ для всех t_1 и t таких, что $0 \le t_1 \le t \le x$. Докажем также, что для $q_1 < q_2$ равенство в (2.14) выполнено тогда и только тогда, когда $S(x) = 0$ или $S(x) > 0$ и существует $\alpha \in (0, x]$ такое, что

$h(t) = 1$ почти всюду на $[0, \alpha]$;

$h(t) = 0$ почти всюду на $[\alpha, x]$;

$\varphi(t) = c = \mathrm{const} > 0$ на $(0, \alpha)$.

Обозначим

$$\Phi(u) = u^{q_2/q_1} \ (u > 0)$$

и рассмотрим функцию

$$F_i(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\varphi^{q_i}(\tau)\mathrm{d}\psi^{q_i}(\tau) \quad (i = 1, 2, \quad 0 \le t \le x). \quad (2.15)$$

Имеем

$$F_1(t) \le \varphi^{q_1}(t) \int\limits_0^t \mathrm{d}\psi^{q_1}(\tau) = [\varphi(t)\psi(t)]^{q_1}, \quad 0 \le t \le x. \quad (2.16)$$

Из выпуклости функции $\Phi(u)$ и неравенства (2.16) следует, что

$$\Phi'(F_1(t)) \le \Phi'(\varphi^{q_1}(t)\psi^{q_1}(t)) = \frac{q_2}{q_1}[\varphi(t)\psi(t)]^{q_2-q_1}, \quad 0 \le t \le x.$$

Следовательно,

$$\Phi'(F_1(t))F_1'(t) \le F_2'(t), \quad 0 \le t \le x. \quad (2.17)$$

Интегрируя неравенство (2.17), получаем

$$\Phi(F_1(x)) \le F_2(x), \quad (2.18)$$

что эквивалентно неравенству (2.14).

Ясно, что равенство в (2.14) достигается тогда и только тогда, когда выполняется равенство в (2.17) для почти всех $t \in [0, x]$. Пусть $S(x) > 0$,

$$0 < \psi(t_1) < \psi(t_2) \text{ при } 0 < t_1 < t_2 \leq x, \tag{2.19}$$

и существует $\alpha \in [0, x]$ такое, что

$$\alpha = \inf\{t \in [0, x] : \int\limits_t^x h(\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\psi(\tau) > 0\}. \tag{2.20}$$

Но тогда

$$[F_1(t) - \varphi(t)^{q_1}\psi^{q_1}(t)]h(t)\varphi(t) = 0 \tag{2.21}$$

почти всюду в $[0, \alpha]$, если в (2.14) имеет место равенство.

Кроме того, отметим, что $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $(0, \alpha)$. Отсюда следует, что существуют $t \in (0, \alpha)$, для которых $\varphi(t) > 0$. Если $0 \leq \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ для некоторых $0 < t_1 < t_2 < \alpha$ и $t \in (t_2, \alpha)$, то

$$\begin{gathered} F_1(t) \leq \varphi^{q_1}\psi^{q_1}(t_1) + \\ + \varphi^{q_1}(t)[\psi^{q_1}(t) - \psi^{q_1}(t_1)] < [\varphi(t)\psi(t)]^{q_1}. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Из соотношений (2.21) и (2.22) следует, что $h(t) = 0$ почти всюду на $[t_2, \alpha]$, а это противоречит (2.20). Следовательно,

$$\varphi(t) = c = \mathrm{const} > 0, \quad t \in (0, \alpha). \tag{2.23}$$

Итак, соотношение (2.21) эквивалентно равенству

$$\left[\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\psi^{q_1}(\tau) - \psi^{q_1}(t)\right] h(t) = 0 \text{ п.в. на } [0, \alpha]. \tag{2.24}$$

Если $h(t) \neq 1$ почти всюду на $[0, \alpha]$, то найдется $t_3 \in (0, \alpha)$ такое, что

$$\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\psi^{q_1}(\tau) < \psi^{q_1}(t), \quad t \in (t_3, \alpha).$$

Таким образом, $h(t) = 0$ почти всюду на (t_3, α) в силу (2.24), что противоречит (2.20). Поэтому

$$h(t) = 1 \qquad \text{почти всюду на } [0, \alpha]. \tag{2.25}$$

Равенства (2.20), (2.23), (2.25) дают желанные свойства экстремальных функций $h(t)$ и $\varphi(t)$. Этим и завершается доказательство случая $n = 1$.

Для доказательства теоремы 2.4 в случае $n \geq 2$ применим индукцию по n. Предположим, что теорема 2.4 верна для размерностей $1, 2, \ldots, n-1$.

Можем написать

$$P_n(q_1) = \int\limits_0^{x_n} P_{n-1}(y_n, q_1) \mathrm{d}\psi_n^{q_1}(y_n), \tag{2.26}$$

где

$$P_{n-1}(y_n, q_1) =$$

$$\int\limits_0^{x_{n-1}} \mathrm{d}\psi_{n-1}^{q_1}(y_{n-1}) \ldots \int\limits_0^{x_1} h(y_1, \cdots, y_n) \varphi^{q_1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mathrm{d}\psi_1^{q_1}(y_1).$$

Для фиксированного $y_n \in [0, x_n]$ по индукционной гипотезе справедливо неравенство

$$P_{n-1}(y_n, q_1) \leq P_{n-1}^{q_1/q_2}(y_n, q_2). \tag{2.27}$$

Функция $\varphi_*(t) := P_{n-1}^{1/q_2}(t, q_2)$ не убывает при $t \in [0, x_n]$. Следовательно, из (2.26) и (2.27) вытекает, что

$$P_n(q_1) \leq \int_0^{x_n} \varphi_*^{q_1}(y_n) \mathrm{d}\psi_n^{q_1}(y_n). \tag{2.28}$$

К функции (2.28) применим неравенство (2.14) при $h(t) = 1$. Тогда

$$P_n(q_1) \leq \left(\int_0^{x_n} \varphi_*^{q_2}(y_n) \mathrm{d}\psi_n^{q_2}(y_n) \right)^{q_1/q_2} =$$

$$= \left(\int_0^{x_n} P_{n-1}(y_n, q_2) \mathrm{d}\psi_n^{q_2}(y_n) \right)^{q_1/q_2} = P_n^{q_1/q_2}(q_2), \qquad (2.29)$$

что эквивалентно неравенству (2.13).

Отметим, что равенство в соотношении (2.13) достигается, если $\varphi(y) = \mathrm{const} > 0$ и $h(y) = 1$ почти всюду на

$$I_\alpha = [0, \alpha_1] \times \cdots \times [0, \alpha_n] \subset I_x = [0, x_1] \times \cdots \times [0, x_n],$$

$h(y) = 0$ почти всюду на $I_x \setminus I_\alpha$.

2.3 Изопериметрическая монотонность

Оказывается, что можно доказать теорему 2.3, не требуя монотонности функции $h(t)$, и получить неравенство Пойа (2.1) как следствие неубывания интегральных средних

$$m(q) = \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \right)^{1/q}$$

по $q \in (0, \infty)$. Здесь

$$\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

– площадь сферы $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^n$. А именно, мы покажем, что $m(q)$ является неубывающей функцией, если $0 \leq f(x) \leq 1$.

В следующей теореме, доказанной в [42], свойство монотонности интегральных средних сочетается с тем, что равенство в интегральном неравенстве реализуется лишь в том случае, когда область интегрирования является шаром, если не обращать внимания на множества меры нуль. Ясно, что такое свойство можно назвать свойством *изопериметрической монотонности.* Этот термин ввел в оборот в 70-е годы двадцатого века Херш (см. [12]) в подобной, но более сложной ситуации.

Теорема 2.5 *Пусть* Ω *– компактное множество из* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $mes(\Omega) > 0$. *Если* $0 < f(x) \leq 1$ *в* Ω *и* $0 < q_1 < q_2 \leq \infty$*, то*

$$\left(\frac{q_1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q_1-n} f \mathrm{d}x\right)^{1/q_1} \leq \left(\frac{q_2}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q_2-n} f \mathrm{d}x\right)^{1/q_2}. \quad (2.30)$$

Равенство в (2.30) *достигается тогда и только тогда, когда* $f(x) = 1$ *почти всюду в* Ω *и, кроме того,* $\Omega = B(0,\rho) \cup E$ *для некоторого числа* ρ*, причем* $\mathrm{mes(E)} = 0$ *и*

$$B(0,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \rho\}, \quad \rho = ||x||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Теорема 2.5 предоставляет ряд интересных неравенств для величины

$$V = \int\limits_{\Omega} f(x) \mathrm{d}x.$$

Действительно, полагая $q_1 = n$ и $q_2 = n+2$ в (2.30), мы получаем следующие обобщения изопериметрических неравенств Пойа и Бэндл.

Следствие 2.5.1 *Если* Ω *компактно в* $\mathbb{R}^n$ *и* $0 \le f(x) \le 1$ *в* Ω, *то*

$$\left(\frac{V}{c_n}\right)^{(n+2)/n} \le \frac{1+2/n}{c_n} \int\limits_{\Omega} |x|^2 f(x) \mathrm{d}x, \tag{2.31}$$

где $c_n = \omega_{n-1}/n$ *– площадь сферы* $|x| \le 1$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Неравенство $m'(n) \ge 0$ оказывается новой точной оценкой для величины V.

Следствие 2.5.2 *Если* Ω *компактно в* $\mathbb{R}^n$ *и* $0 \le f(x) \le 1$ *в* Ω, *то*

$$V \log \frac{V}{c_n} \le V + n \int\limits_{\Omega} f(x) \log |x| \mathrm{d}x, \tag{2.32}$$

где $c_n = \omega_{n-1}/n$.

Равенство в (2.31) и (2.32) достигается, если $f(x) = 1$ в Ω и $\Omega = B(0, \rho)$ для некоторого $\rho \ge 0$.

Предельный случай в (2.30) при $q_1 \to 0$ и $q_2 = n$ описывает следующее утверждение.

Следствие 2.5.3 *Предположим, что* f *– неотрицательная функция, удовлетворяющая условию Гельдера*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha \qquad (x, y \in \Omega)$$

при некотором $\alpha \in (0,1]$. *Тогда для любого* $a \in \Omega \setminus \partial\Omega$ *такого, что* $f(a) = \max_{x \in \Omega} f(x) > 0$, *выполнено неравенство*

$$F.p. \int\limits_{\Omega} |x-a|^{-n} f(x) \mathrm{d}x \le f(a) c_n \log \frac{V}{f(a) c_n}, \tag{2.33}$$

где $c_n = \omega_{n-1}/n$, *а F.p. означает конечную часть сингулярного интеграла.*

Приведем определение конечной части (F.p.– Finite part) сингулярного интеграла:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{\Omega\setminus B(0,r)}|x|^{-n}f(x)\mathrm{d}x-\log\frac{1}{r}=F.p.\int\limits_{\Omega}|x|^{-n}f(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство теоремы 2.5. Положим $x=|x|\omega$, $|x|=t$, $\mathrm{d}x=t^{n-1}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega$. Из теоремы Фубини следует, что

$$m(q)=\left(\frac{q}{\omega_{n-1}}\int_{\Omega}|x|^{q-n}f(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\int_0^{\rho}h(t)\mathrm{d}t^q\right)^{1/q}, \tag{2.34}$$

где $\rho=||x||_{L^\infty(\Omega)}$ и

$$h(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{|x|=t}f(x)\chi_\Omega(x)\mathrm{d}\omega.$$

Ясно, что (2.30) является следствием (2.14). Далее, $h(t)=1$ почти всюду на $[0,\rho]$ тогда и только тогда, когда $\chi_\Omega(t\omega)=1$ для почти всех $t\in[0,\rho]$ и $f(x)=1$ почти всюду в Ω.

Отметим, что существует и другой путь исследования случаев равенства в неравенстве (2.30). А именно, если

$$0<q_1<q_2\le\infty,\ m(q_1)=m(q_2),$$

то $m(q)=m_0=\mathrm{const}$ для $q_1\le q\le q_2$. Так как $m(q)$ аналитична по параметру q в некоторой окрестности луча $\{q:0<q<\infty\}$, то по теореме единственности для аналитических функций $m(q) = m_0$ для любого $q \in (0, \infty)$. Поэтому

$$m(1) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{1-n} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{q \to \infty} m(q) = ||x||_{L^\infty(\Omega)} = \rho.$$

С другой стороны, $\mathrm{mes}[\Omega \setminus B(0, \rho)] = 0$ и

$$m(1) < \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,\rho)} |x|^{1-n} f(x) \mathrm{d}x = \rho,$$

если $f(x) \neq 1$ почти всюду в Ω и $\mathrm{mes}(\Omega) > 0$ или

$$\mathrm{mes}(B(0, \rho) \setminus \Omega) > 0,$$

что и доказывает теорему 2.5.

Доказательство следствия 2.5.1. В этом случае достаточно положить $q_1 = n$ и $q_2 = n + 2$ в неравенстве (2.30).

Доказательство следствия 2.5.2. Прямые вычисления для функции $m(q)$ из (2.34) показывают, что

$$q^2 m'(q) = -[m(q)]^q \log[m(q)]^q + [m(q)]^q +$$

$$+ \frac{q^2}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q-n} f(x) \log |x| \mathrm{d}x.$$

Неравенство (2.30) влечет

$$m'(q) \geq 0,$$

и (2.32) эквивалентно неравенству $m'(q) \geq 0$ в точке $q = n$.

Доказательство следствия 2.5.3. Без ограничения общности, можно считать, что $a = 0$ и $f(a) = 1$. Сначала отметим, что теорема 1 влечет существование предела

$$\lim_{q\to 0+} \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Поскольку Ω является компактом, то существует $\rho > 0$ такое, что $\Omega \subset B(0,\rho)$. Поэтому

$$\frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \le \frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_\Omega |x|^{q-n} \mathrm{d}x \le$$

$$\le \frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,\rho)} |x|^{q-n} \mathrm{d}x = \rho^q.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{q\to 0} \frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \le 1.$$

Аналогично можно показать, что

$$\liminf_{q\to 0} \frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \ge 1.$$

Следовательно, будем иметь

$$\frac{q}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \to 1, \quad q \to 0.$$

Но тогда

$$\lim_{q\to 0} \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x \right)^{1/q} =$$

$$= \exp \lim_{q\to 0} \left[\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{q} \right].$$

Так как $0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$, то существует $r > 0$ такое, что $B(0,r) \subset \Omega$. Далее, имеем

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{q} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega\setminus B(0,r)} |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,r)} |x|^{q-n} (f(x) - 1) \mathrm{d}x + \frac{r^q - 1}{q}.$$

Так как функция f гельдерова, то существует следующий предел

$$\lim_{q\to 0} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,r)} |x|^{q-n} (f(x) - 1) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,r)} |x|^{-n} (f(x) - 1) \mathrm{d}x \to 0 \text{ при } r \to 0.$$

Поэтому можно написать

$$\lim_{q\to 0} \left[\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{q} \right] =$$

$$= \lim_{q\to 0} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega\setminus B(0,r)} |x|^{-n} f(x) \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,r)} |x|^{-n} (f(x) - 1) \mathrm{d}x - \log \frac{1}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega\setminus B(0,r)} |x|^{-n} f(x) \mathrm{d}x - \log \frac{1}{r} = F.P. \int\limits_\Omega |x|^{-n} f(x) \mathrm{d}x,$$

что и требовалось доказать.

Следовательно неравенство (2.33) является следствием теоремы 2.5 при $q_1 = 0^+$ и $q_2 = n$.

2.4 Упражнения

Многомерный случай теоремы 2.4 является более сложным. Если $n \geq 2$, то теорема 2.4 утверждает, что величина

$$z_n(q) = \left(q^n \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_n} y_1^{q-1} \cdots y_n^{q-1} h(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n \right)^{1/q}$$

не убывает по переменной q, при условии, что $0 \leq h \leq 1$, h не убывает по переменным y_k за исключением, быть может, одного значения k.

1.1) Убедитесь, что только одного условия ограниченности $0 \leq h \leq 1$ недостаточно для монотонности функции $z_n(q)$ в многомерном случае $n \geq 2$. Например, функция

$$z_2(q) = \left(q^2 \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{q-1} h(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{1/q}$$

не является монотонной при $q > 0$, если

$$h(x, y) = 1 - xy.$$

1.2) Докажите, что неравенство (2.13) будет верно без ограничения на монотонность функции h, если

$$h(y) = \prod_{k=1}^{n} h_k(y_k).$$

А именно, докажите путем двукратного использования одномерного случая теоремы 2.4 и метода математической индукции по n следующее утверждение.

Предположим, что функция φ *не убывает по переменным* $y_k \in [0, x_k]$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Если* $h(y) = \prod_{k=1}^{n} h_k(y_k)$ *и* $0 \le h_k(y_k) \le 1$ *при* $y_k \in [0, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *то выполнено неравенство* (2.30).

2) Используйте неравенство (2.13) для вывода интересных неравенств для величин типа энтропии, следуя указаниям.

2.1) Неравенство (2.13) влечет за собой

$$(dP_n^{1/q}(q)/dq)|_{q=1} \ge 0.$$

2.2) Непосредственными вычислениями покажите, что это соотношение эквивалентно неравенству

$$P_n(1) \log P_n(1) \le nP_n(1) +$$

$$+ \int_0^{x_1} \mathrm{d}\psi_1 \int_0^{x_2} \mathrm{d}\psi_2 \ldots \int_0^{x_n} h(y)\varphi^q(y) \log(\varphi\psi_1 \ldots \psi_n) \mathrm{d}\psi_n,$$

где

$$P_n(1) = \int_0^{x_1} \mathrm{d}\psi_1(y_1) \int_0^{x_2} \mathrm{d}\psi_2(y_2) \ldots \int_0^{x_n} h(y)\varphi(y) \mathrm{d}\psi_n(y_n).$$

Как это принято в теории энтропии, мы полагаем, что $0 \log 0 = 0$.

3) Установите, что мы имеем дело с монотонностью, но не с выпуклостью. Например, функция

$$m_0(q) = \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_{1 \le |x| \le 2} |x|^{q-n} \mathrm{d}x \right)^{1/q} = (2^q - 1)^{1/q} \qquad (2.35)$$

является возрастающей, но $\log m_0^q(q)$ вогнута при $q \in (0, \infty)$, поскольку из (2.35) следует, что

$$(\log m_0^q(q))'' = -\frac{2^q \log^2 2}{(2^q - 1)^2} < 0.$$

Поведение функции $m_0(q)$ показывает разницу между неравенством (2.11) и неравенствами изопериметрического типа для $m(q)$.

4) Покажите, что одномерный случай теоремы о мультиномиальных распределениях может быть доказан с использованием хорошо известной леммы Неймана-Пирсона из математической статистики.

Глава 3

Метрика Пуанкаре

Многие результаты геометрической теории функций комплексного переменного можно записать в терминах геометрий Евклида и Лобачевского, рассматриваемых для одной и той же плоской области. Так, например, широко известная теорема Кёбе об 1/4 (см. [8]) равносильна следующему утверждению:

для любой односвязной области Ω на плоскости ($\Omega \neq \mathbb{C}$) справедливо неравенство

$$\lambda_\Omega(z)\ \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \geq 1/4 \qquad \forall z \in \Omega,$$

где $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$ – расстояние от точки z до границы области Ω, $\lambda_\Omega(z)$ – коэффициент метрики Пуанкаре кривизны -4. Постоянная $1/4$ является точной, т.е. не может быть заменена в общем случае бо́льшей постоянной.

В этой главе мы кратко опишем определение метрики Пуанкаре и приведем с доказательствами несколько явных оценок для коэффициента этой метрики.

Отметим одно очень важное обстоятельство, с которым мы столкнемся позднее, в главах 4 и 6. При рассмотрении ряда задач, связанных формально лишь с евклидовой геометрией, оказываются необходимыми характеристики метрики Пуанкаре.

3.1 Конформный радиус и метрика Пуанкаре

Пусть Ω – односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$, причем $\Omega \neq \mathbb{C}$. Пусть, далее, z_0 – фиксированная точка области Ω. Через D будем обозначать круг единичного радиуса с центром в точке $\zeta = 0$. Согласно теореме Римана существует конформное отображение φ области Ω на круг D, нормированное условиями $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$. Очевидно, функция $g(z) = \varphi(z)/\varphi'(z_0)$ удовлетворяет условиям $g(z_0) = g'(z_0) - 1 = 0$ и осуществляет конформное отображение области Ω на круг радиуса $R = 1/\varphi'(z_0)$. Эта величина и называется *конформным радиусом области* Ω *в точке* z_0. Мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$R = R(z_0, \Omega) = 1/\varphi'(z_0).$$

Пусть, теперь, $f : D \to \Omega$ – произвольное конформное отображение D на Ω , и φ^{-1}– функция, обратная к функции φ. Пусть $z_0 = f(\zeta_0)$, где $\zeta_0 \in D$. Тогда, в силу единственности римановой отображающей функции, существует конформный автоморфизм T круга D, т.е. функция вида

$$T(\zeta) = e^{i\gamma} \frac{\zeta + \zeta_0}{1 + \overline{\zeta_0}\zeta}$$

такая, что $f(T(\zeta)) = \varphi^{-1}(\zeta)$. Вычисляя производную функции $f(T(\zeta))$ в точке $\zeta = 0$, легко получаем, что

$$e^{i\gamma} f'(\zeta_0)(1 - |\zeta_0|^2) = R(z_0, \Omega).$$

Поэтому для произвольного конформного отображения $f : D \to \Omega$ в любой точке $\zeta \in D$ имеем равенство

$$|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) = R(f(\zeta), \Omega). \tag{3.1}$$

Опишем кратко модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Согласно этой модели множество точек единичного круга D рассматривается в качестве множества точек плоскости Лобачевского. Роли прямых в такой плоскости Лобачевского "исполняют" диаметры круга D и дуги окружностей из D, ортогональные к единичной окружности ∂D и соединяющие две точки этой окружности. Именно эти линии служат геодезическими, т.е. их дуги реализуют минимальное расстояние между двумя точками, если дифференциальный элемент длины взят в следующем виде

$$d\sigma_D = \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2} = \frac{ds}{1-|\zeta|^2},$$

где $|d\zeta| = ds$ – дифференциальный элемент длины в евклидовой метрике. По предложению Клейна (автора иной модели плоскости Лобачевского), возникающую таким образом геометрию называют в настоящее время гиперболической геометрией. Легко показать, что гиперболическое расстояние между точками $\zeta_1, \zeta_2 \in D$ дается формулой

$$\rho_D(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{1-\overline{\zeta_1}\ \zeta_2}\right|}{1 - \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{1-\overline{\zeta_1}\ \zeta_2}\right|}.$$

Функцию λ_D, определенную равенством

$$\lambda_D(\zeta) = \frac{1}{1-|\zeta|^2}, \qquad \zeta \in D,$$

называют коэффициентом метрики Пуанкаре (или гиперболической метрики) в круге D.

Теорема 3.1 *Метрика Пуанкаре единичного круга является конформно инвариантной: для любого конформного автоморфизма T круга D имеет место равенство*

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \qquad \zeta \in D, z = T(\zeta).$$

Доказательство. Так как общий вид автоморфизмов T известен, то доказательство сводится к несложным вычислениям. Действительно, мы должны рассмотреть переменные z и ζ, связанные формулой

$$z = e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, a \in D).$$

Непосредственные вычисления дают, что

$$|dz/d\zeta| = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2}$$

и

$$1-|z|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}\zeta|^2} = (1-|\zeta|^2)|dz/d\zeta|.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ односвязную область Ω, имеющую более одной граничной точки. Пользуясь конформным отображением $f : D \to \Omega$, мы можем перенести геометрию Лобачевского с круга на область Ω. Для этого достаточно определить дифференциальный элемент длины в Ω в следующем виде

$$d\sigma_\Omega(z) = \lambda_\Omega(z)|dz| := \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2},$$

где $z = f(\zeta)$, $\zeta \in D$ и $z \in \Omega$. Таким образом, коэффициент метрики Пуанкаре в области Ω определен равенством

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)}, \qquad \zeta \in D, z = f(\zeta). \tag{3.2}$$

На основании теоремы 3.1 и определения метрики в области Ω легко доказывается, что метрика Пуанкаре области Ω является конформно инвариантной.

В силу формул (3.1), (3.2) любая односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$, для которой определен конформный радиус $R(z, \Omega)$, превращается в плоскость Лобачевского при помощи метрики Пуанкаре с плотностью

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{R(z,\Omega)}, \qquad z \in \Omega.$$

3.2 Оценки для конформного радиуса

Отметим для тех, кто знаком с геометрической теорией функций комплексного переменного, что следующая теорема равносильна результату Бибербаха об оценке коэффициента $a_2 = f''(0)/2$ в классе S.

Теорема 3.2 *Для односвязных областей* $\Omega \subset \mathbb{C}$ $(\Omega \neq \mathbb{C})$ *справедлива точная оценка*

$$|\nabla R(z,\Omega)| \leq 4, \qquad z = x + iy \in \Omega,$$

где

$$\nabla R = 2\frac{\partial R}{\partial \overline{z}} := \frac{\partial R}{\partial x} + i\frac{\partial R}{\partial y}$$

есть градиент конформного радиуса $R(z, \Omega)$.

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная, но фиксированная точка Ω. Рассмотрим конформное отображение $f : D \to \Omega$, нормированное условиями $f(0) = z_0$ и $f'(0) > 0$. Тогда функция g, определенная равенством

$$f(\zeta) = z_0 + R(z_0, \Omega) g(\zeta) \qquad (\forall \zeta \in D),$$

в единичном круге D представима рядом Тейлора вида

$$g(\zeta) = \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots \qquad .$$

Пользуясь формулой (3.1), легко проверить, что $2|a_2| = |\nabla R(z_0, \Omega)|$, поэтому наша задача сводится к доказательству неравенства $|a_2| \leq 2$. Для доказательства этого неравенства, фиксируя ветвь квадратного корня условием $\sqrt{1} = 1$, рассматриваем функции

$$g_1(\zeta) = \zeta \sqrt{\frac{g(\zeta^2)}{\zeta^2}} = \zeta + \frac{a_2}{2} \zeta^3 + \dots, \qquad \zeta \in D$$

и

$$F(\zeta) = \frac{1}{g_1(\zeta)} = \frac{1}{\zeta} - \frac{a_2}{2} \zeta + o(\zeta), \qquad \zeta \in D, \zeta \to 0.$$

Нетрудно убедиться, что функции g_1 и F являются однолистными (т.е. инъективными отображениями) в области D. Поэтому нужная нам оценка вытекает из следующего утверждения, доказанного в 1914 году Гронуоллом (Gronwall) и часто называемого внешней теоремой площадей.

Теорема 3.3 *Для однолистной в круге D функции F, представимой рядом Лорана*

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \qquad \zeta \in D,$$

справедлива точная оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2 \leq 1. \tag{3.3}$$

В частности, $|\alpha_1| \leq 1$, *и равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* F *– функция Жуковского, т.е.*

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + e^{i\alpha}\zeta \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. В силу однолистности функция F отображает окружность $\{\zeta : |\zeta| = \rho\}$ взаимно-однозначно на некоторую замкнутую жорданову кривую γ_ρ, ограничивающую область с площадью S_ρ, причем положительному обходу окружности $\{\zeta : |\zeta| = \rho\}$ соответствует отрицательный обход кривой γ_ρ. С учетом этого для площади S_ρ получаем формулу

$$S_\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left(\overline{F(\rho e^{i\theta})}\frac{\partial F(\rho e^{i\theta})}{\partial\theta}\right) d\theta =$$

$$= \pi(\rho^{-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\rho^{2k}) > 0$$

при любом $\rho \in (0, 1)$. В пределе при $\rho \to 1$ получаем доказываемое неравенство (3.3).

Из (3.3) непосредственно следует, что $|\alpha_1| \leq 1$. Ясно, что равенство $|\alpha_1| = 1$ влечет равенство нулю всех остальных коэффициентов, т.е. функция F должна иметь вид $\frac{1}{\zeta} + e^{i\alpha}\zeta$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Остается заметить, что эта функция однолистна в круге D, т.е. принадлежит рассматриваемому в теореме классу функций.

Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4 (*см.*[*11*]) *Пусть* Ω_1 *и* Ω_2 *— односвязные области на расширенной комплексной плоскости, снабженные метрикой Пуанкаре. Если* $z \in \Omega_1 \subset \Omega_2$, *то справедливо неравенство*

$$\lambda_{\Omega_1}(z) \geq \lambda_{\Omega_2}(z),$$

и равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\Omega_1 = \Omega_2$.

Доказательство. Для фиксированной точки $z \in \Omega_1 \subset \Omega_2$ рассмотрим конформные отображения

$$f_1 : D \to \Omega_1, \qquad f_2 : D \to \Omega_2,$$

нормированные условиями

$$f_1(0) = f_2(0) = z, \qquad f_1'(0) > 0, \quad f_2'(0) > 0.$$

Тогда функция $\varphi(\zeta) := f_2^{-1}(f_1(\zeta))$ является аналитической в круге D, $|\varphi(\zeta)| \leq 1$ и $\varphi'(0) = \lambda_{\Omega_2}(z)/\lambda_{\Omega_1}(z)$. Таким образом, $\varphi'(0) > 0$, а по лемме Шварца имеем: $\varphi'(0) \leq 1$, причем равенство возможно только в том случае, когда φ – тождественное отображение, т.е. $\lambda_{\Omega_1}(z) = \lambda_{\Omega_2}(z)$ тогда и только тогда, когда $\Omega_1 = \Omega_2$. Этим и завершается доказательство.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся две леммы, связанные с функциями Эйлера $\Gamma(x)$ и $\mathrm{B}(x, y)$. Леммы 3.1, 3.2 и теорема 3.5 доказаны в статье автора и Р.Г. Салахудинова [41].

Лемма 3.1 *Для любых* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и любого натурального числа* n *имеет место тождество*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}{k!(n-k)!} = \frac{\mathrm{B}(\alpha, \beta)}{n!}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Мы можем получить ряд Тейлора функции $(1-\zeta)^{-\alpha-\beta}$ двумя способами. А именно, непосредственно по определению ряда или как произведение рядов двух функций $(1-\zeta)^{-\alpha}$ и $(1-\zeta)^{-\beta}$ имеем:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{n!}\zeta^n=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(1-\zeta)^{\alpha+\beta}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!}\zeta^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{n!}\zeta^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}{k!(n-k)!}\zeta^n.$$

Формула (3.4) — следствие единственности ряда Тейлора и классической формулы

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2 *Пусть (a_k) и (b_k) – произвольные последовательности комплексных чисел. Тогда для любых $\alpha>0$, $\beta>0$ и любого натурального числа n имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right|^2\le\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!\;|a_kb_{n-k}|^2}{\mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}. \tag{3.5}$$

Равенства в (3.5) достигаются для всех $n=0,1,2,\ldots$ тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев:

либо все a_k *равны нулю; либо все* b_k *равны нулю;*

либо $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ *и найдется постоянная* q *такая, что*

$$ka_k = \frac{a_0 q^k}{\mathrm{B}(\alpha, k)}, \;\; kb_k = \frac{b_0 q^k}{\mathrm{B}(\beta, k)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Мы применяем неравенство Коши-Буняковского для векторов, определяемых формулами

$$u_k = \frac{a_k b_{n-k}\sqrt{k!\,(n-k)!}}{\sqrt{n!\,\mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}},$$

и

$$v_k = \frac{\sqrt{n!\,\mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}}{\sqrt{k!\,(n-k)!}}$$

для $k = 0, 1, \ldots, n$. Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |v_k|^2, \tag{3.7}$$

что и дает неравенство (3.5) в силу тождества (3.4). В неравенстве Коши-Буняковского равенство имеет место лишь для пропорциональных векторов. Поэтому равенства в (3.7) для всех n имеют место тогда и только тогда, когда $u_k = \lambda_n v_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где λ_n зависит лишь от n. Следовательно, равенства в (3.5) имеют место тогда и только тогда, когда

$$k!(n-k)!\; a_k b_{n-k} = \lambda_n\; n!\; \mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta), \tag{3.8}$$

где $0 \leq k \leq n$.

Первые два случая получаются просто. Действительно, если $a_0 = 0$, но не все a_k равны нулю, то $a_s \neq 0$ для некоторого номера $s \geq 1$. Но тогда из (3.8) следует, что $b_k = 0$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Меняя ролями a_k и b_k, получаем, что если $b_0 = 0$, то все b_k равны нулю.

Предположим теперь $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ и положим $n = 1$, тогда из (3.8) следует, что

$$\frac{a_1}{\alpha a_0} = \frac{b_1}{\beta b_0} = q,$$

где

$$q = \frac{\lambda_1 \mathrm{B}(\alpha, \beta)}{(\alpha + \beta) a_0 b_0}.$$

Для $n \geq 2$ имеем

$$\lambda_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}, \qquad \lambda_n = \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_1}{v_1},$$

что равносильно соотношениям

$$a_n = q \frac{n + \alpha - 1}{n} a_{n-1}, \qquad b_n = q \frac{n + \beta - 1}{n} b_{n-1}.$$

Применение индукции приводит к равенствам (3.6). Этим и завершается доказательство леммы.

Теорема 3.5 *Для любых $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ конформный радиус $R(., \Omega)$ односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\pi(\alpha + \beta - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \iint_\Omega R^{\alpha+\beta-2}(z, \Omega) dxdy \leq$$
$$\leq \iint_\Omega R^{\alpha-2}(z, \Omega) dxdy \iint_\Omega R^{\beta-2}(z, \Omega) dxdy. \tag{3.9}$$

При любых допустимых значениях параметров α и β равенство в (3.9) с конечной правой частью имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Доказательство. Пользуясь заменой переменных при помощи конформного отображения $f : D \to \Omega$, мы можем перейти к интегралам по единичному кругу D. Рассмотрим две аналитические функции, имеющие следующие ряды Тейлора в D

$$F(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots, \qquad G(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \cdots,$$

и определяемые равенствами

$$F(\zeta) = f'(\zeta)^{\alpha/2}, \qquad G(\zeta) = f'(\zeta)^{\beta/2}.$$

Неравенство (3.9) равносильно следующему

$$A_{\alpha+\beta}(FG) \le A_\alpha(F)A_\beta(G),$$

где

$$A_s(g) := \frac{s-1}{\pi}\iint_D |g(re^{i\theta})|^2(1-r^2)^{s-2}rdrd\theta =$$

$$= \Gamma(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+s)}|c_n|^2,$$

а $c_n = g^{(n)}(0)/n!$ – коэффициенты ряда Тейлора функции g. Легко видеть, что (3.9) равносильно неравенству

$$\Gamma(\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right|^2 \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \le$$

$$\le \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}|a_k b_{n-k}|^2.$$

Но это неравенство является следствием оценок (3.5), так как

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}.$$

Поскольку $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, случай равенства в оценках реализуется для коэффициентов вида (3.6). Соответствующие функции имеют вид

$$F(\zeta)=\frac{a_0}{(1-q\zeta)^{\alpha}},\qquad G(\zeta)=\frac{b_0}{(1-q\zeta)^{\beta}}.$$

Условие аналитичности этих функций в единичном круге влечет неравенство $|q| \leq 1$, а условие ограниченности интегралов $A_\alpha(F)$, $A_\beta(G)$ приводит к строгому неравенству $|q| < 1$. Но тогда для конформного отображения f получаем

$$f(\zeta)=\frac{a_0^2/q}{1-q\zeta}+\mathrm{const}.$$

Следовательно, $\Omega = f(D)$ – круг.

Теорема доказана полностью.

3.3 Метрика Пуанкаре в общем случае

Пусть Ω — область на расширенной комплексной плоскости, имеющая не менее трех граничных точек. По теореме Римана-Пуанкаре существует локально конформное, сохраняющее ориентацию отображение $f : D \to \Omega$, причем $\Omega = f(D)$ и в достаточно малой окрестности любой точки $z_0 \in \Omega$ определен элемент обратной функции $F(z) = f^{-1}(z)$, который аналитически продолжим в области Ω по любому пути, лежащему в Ω, при этом все значения, принимаемые всевозможными аналитическими продолжениями в Ω этого элемента, лежат в круге D. Наиболее простое доказательство этой теоремы, основанное на идеях Ф. Рисса и Фейера, содержится в монографии Г.М. Голузина [8] по геометрической теории функций .

Такое отображение $f : D \to \Omega$ называется накрывающим отображением. Если Ω – односвязная область, то накрывающее отображение $f : D \to \Omega$ совпадает с однолистным конформным отображением единичного круга на область Ω. Если же Ω не является односвязной, то накрывающее отображение не будет инъекцией.

Пусть T – конформный автоморфизм круга D. Суперпозициями вида $f \circ T$ исчерпываются все накрывающие отображения D на Ω. Коэффициент метрики Пуанкаре, определяющий гиперболическую геометрию в Ω, задается равенством (см.[11] и [8])

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)}, \qquad \zeta \in D, z = f(\zeta). \tag{3.10}$$

Функцию $1/\lambda_\Omega(z)$ называют гиперболическим радиусом и обозначают $R(z,\Omega)$ или $h(z,\Omega)$. Гиперболический радиус удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4, \qquad R = R(z,\Omega), z \in \Omega. \tag{3.11}$$

Отметим, что в общем случае аналог теоремы 3.2 неверен. Аналог теоремы 3.4 имеет место и доказывается точно так же, как и в односвязном случае.

Теорема 3.6 *Пусть Ω_1 и Ω_2 — произвольные области на расширенной комплексной плоскости, снабженные метрикой Пуанкаре. Если $z \in \Omega_1 \subset \Omega_2$, то справедливо неравенство*

$$\lambda_{\Omega_1}(z) \geq \lambda_{\Omega_2}(z),$$

и равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\Omega_1 = \Omega_2$.

Явные выражения для коэффициента метрики Пуанкаре известны лишь в некоторых частных случаях. Мы приведем формулу для области $\Omega_{0,1,\infty} = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, имеющей ровно три граничных точки ($z=0, z=1, z=\infty$):

$$\frac{1}{\lambda_{\Omega_{0,1,\infty}}(\zeta)} = \frac{|\zeta||\zeta-1|}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{dxdy}{|z||z-1||\zeta-z|},$$

где $z = x+iy$. Эта формула выведена в 1968 году Агардом [23]. Для области $\Omega_{a,b,c} = \overline{\mathbb{C}}\setminus\{a,b,c\}$, где a,b,c – три различных конечных точки, гиперболический радиус $1/\lambda_{\Omega_{a,b,c}(\zeta)}$ выражается формулой

$$\frac{|\zeta-a||\zeta-b||\zeta-c|}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{dxdy}{|z-a||z-b||z-c||\zeta-z|}.$$

3.4 Упражнения

1) Пусть H – полуплоскость. Покажите, что

$$R(z,H) = 2\,\mathrm{dist}(z,\partial H), \qquad \lambda_H(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{dist}(z,\partial H)}.$$

2) Проверьте методами элементарной математики постулат о параллельных на модели Пуанкаре для круга или полуплоскости.

3) Получите уравнение Лиувилля (3.11), пользуясь формулой (3.10) и операторами Виртингера формального дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

4) Найдите явную формулу для коэффициента метрики Пуанкаре в случае, когда область – круговое концентрическое кольцо $\{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$, где $q \in (0, 1)$.

5) Проведя дробно-линейную замену переменных, получите вторую формулу Агарда из первой.

6) Докажите инъективность градиента $\nabla R(\cdot, \Omega)$ конформного радиуса в ограниченной выпуклой области Ω (см. [46]).

Глава 4

Задачи математической физики

Целью этой главы является знакомство с оценками норм операторов вложения в пространствах Соболева на примере решения нескольких классических задач. Первая из задач возникла ещё в первой половине XIX века в работах Коши и Сен-Венана и связана с поиском формулы, выражающей коэффициент жесткости кручения через геометрические величины.

Дадим сначала общую формулировку задач, затем кратко опишем историю вопроса.

Пусть Ω — односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$, $\kappa = \kappa(\Omega)$ — физическая величина (функционал), определяемый решением некоторой краевой задачи или вариационной проблемы. Примерами таких функционалов служат основная частота мембраны, жесткость кручения, емкости конденсаторов и т.п.

Через $\alpha_j = \alpha_j(\Omega)$ обозначим геометрические величины (функционалы), связанные с областью Ω. К геометрическим величинам относятся диаметр области, радиусы вписанного и описанного кругов, площадь области, длина её границы и т.п., геометрическими величинами можно считать любые определенные интегралы по области или ее границе от известных неотрицательных функций.

Задача 1 *Для $\kappa = \kappa(\Omega)$ найти $\alpha_1 = \alpha_1(\Omega), \dots, \alpha_m = \alpha_m(D)$ и функцию F такие, что $\kappa \sim F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ на множестве всех односвязных областей.*

Здесь эквивалентность понимается в обычном смысле: существуют абсолютные постоянные c_1 и $c_2 \in (0, \infty)$ такие, что для любой односвязной области Ω

$$c_1 \leq \frac{\kappa(\Omega)}{F(\alpha_1(\Omega), \dots, \alpha_m(\Omega))} \leq c_2. \tag{4.1}$$

Подразумевается, что $\kappa(\Omega) = \infty$ тогда и только тогда, когда $F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \infty$. Кроме того, имеется *неформальное требование: параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и функция F должны быть более простыми, чем $\kappa(D)$.*

В качестве $\kappa = \kappa(\Omega)$ мы будем рассматривать величины $\kappa_j = \kappa_j(\Omega) \in (0, \infty]$, $j = 0, 1, 2, 3$, определяемые как наименьшие постоянные в вариационных неравенствах

$$\left(\iint_\Omega |u| dx\, dy\right)^2 \leq \kappa_0(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.2}$$

$$\iint_\Omega u^2 dx\, dy \leq \kappa_1(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.3}$$

$$\iint_\Omega u^2 dx\, dy \leq \kappa_2^2(\Omega) \iint_\Omega |\Delta u|^2 dx\, dy \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.4}$$

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy \le \kappa_3(\Omega) \iint_\Omega |\Delta u|^2 dx\,dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.5)$$

Здесь ∇u и Δu — градиент и лапласиан функции $u = u(x, y)$, $C_0^\infty(\Omega)$ — множество финитных в Ω функций, обладающих непрерывными производными всех порядков. Возможен случай $\kappa_j(\Omega) = \infty$, так как на область Ω не накладывается никаких дополнительных ограничений. Наиболее известным из (4.2) – (4.5) является (4.3) — неравенство Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса.

Если область Ω ограничена и её граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой кривой, то величины $\kappa_j(\Omega)$ конечны, определяются решениями соответствующих краевых задач и имеют простой физический смысл. А именно, $C_0 = 4\kappa_0$ — коэффициент жесткости кручения упругой балки с поперечным сечением Ω, $\lambda_1 = 1/\sqrt{\kappa_1}$ — основная частота мембраны, закрепленной вдоль $\partial\Omega$, $\lambda_2 = 1/\sqrt{\kappa_2}$ — основная частота пластины, зажатой вдоль $\partial\Omega$, κ_3 — величина, связанная с изгибом пластины (см., например, книгу Полиа (в современной транскрипции – Пойа) и Сегё по изопериметрическим неравенствам математической физики [6]).

4.1 Описание двух классических проблем

Исследованию величин $\kappa_0(\Omega)$, $\kappa_1(\Omega)$, $\kappa_2(\Omega)$ и $\kappa_3(\Omega)$ посвящена обширная литература. Опишем кратко те результаты, которые непосредственно связаны с задачей 1 для величин $\kappa_0(\Omega)$ и $\kappa_1(\Omega)$. Более подробное изложение фактов, приведенных в этом параграфе, можно найти в книгах [2], [3], [5], [6], [7], [12].

В 1784 году Ш. Кулон изобрел высокоточные крутильные весы и в связи с этим опубликовал работу, в которой момент кручения упругого стержня с *круглым сечением* Ω определялся произведением

$$M = \theta G C_0. \tag{4.6}$$

Здесь θ — угол кручения, деленный на длину стержня, G — модуль сдвига, зависящий лишь от свойств материала стержня, C_0 — коэффициент жесткости кручения, причем

$$C_0 = \frac{\pi}{2}\, r^4 = I_0(\Omega), \tag{4.7}$$

где r — радиус круга Ω, I_0 — момент инерции круга Ω относительно его центра тяжести. Формула (4.6) и формула (4.7) в виде $C_0 = I_0(\Omega)$ использовались несколько десятилетий для расчета кручения стержней с произвольным сечением, хотя и были получены изначально лишь для стержня с *круглым сечением* Ω.

Рядом экспериментаторов было обнаружено, что формула (4.6) верна и в общем случае , но $C_0 < I_0$ для некруговых сечений и поэтому формула (4.7) требует уточнений. В 1829 году Коши для прямоугольных сечений предложил формулу

$$C_0 = 4 I_x I_y / I_0, \tag{4.8}$$

где I_x и I_y — моменты инерций относительно главных осей Ω, $I_x + I_y = I_0$. Очевидно, из (4.8) следует (4.7), если Ω — круг, а в общем случае $4 I_x I_y / I_0 \le I_0$.

В 1847 году в нескольких статьях Сен-Венан дал полное решение задачи кручения стержня с односвязным сечением Ω. Его классический труд, обобщающий все имеющиеся результаты, был издан в 1856 году и переведен на русский язык (см. [5]). Теория Сен-Венана, дополненная его учеником Буссинеском, излагается и в современных учебниках по теории упругости. Согласно этой теории

$$C_0 = C_0(\Omega) = 2\iint_\Omega v(x,y)dx\,dy, \tag{4.9}$$

где $v = v(x,y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta v = -2, \quad x+iy \in \Omega; \qquad v = 0, \quad x+iy \in \partial\Omega. \tag{4.10}$$

Отметим, что из (4.9) и (4.10) на основании формулы Грина получается неравенство (4.2) с $4\kappa_0 = C_0$.

Пользуясь изобретенным им полуобратным методом, Сен-Венан определил точно $C_0 = C_0(\Omega)$ для всех прямоугольников и большого числа областей, ограниченных алгебраическими кривыми. Для круга получается результат Кулона, для прямоугольников формула Коши (4.8) оказывается лишь некоторым приближением точного решения. Но удивительно то, что формула Коши (4.8) оказывается точной для всех эллипсов.

Сен-Венан предложил новую приближенную формулу

$$C_0(\Omega) \approx \frac{1}{4\pi^2}\frac{S^4(\Omega)}{I_0(\Omega)}, \tag{4.11}$$

где $S(\Omega)$ — площадь области Ω, также точную для всех эллипсов. Он показал численно, что $4\pi^2 C_0/(S^4/I_0)$ мало отличается от 1 во всех известных ему случаях, тем самым решил задачу 1 для κ_0 в некотором множестве областей. На основе численного анализа $I_0(\Omega)$ в связи с (4.11) Сен-Венан пришёл к своей знаменитой гипотезе о максимальности $C_0(\Omega)$ для круга при фиксированном $S(\Omega)$, т.е. к неравенству

$$\frac{\kappa_0(\Omega)}{S^2(\Omega)} \le \frac{1}{8\pi}. \tag{4.12}$$

В 1877 году Рэлей обнаружил на примерах несколько аналогичных неравенств: *при фиксированном* $S(\Omega)$ *основная частота мембраны или пластины минимальна для круга.* В терминах κ_1 и κ_2 это означает, что

$$\frac{\kappa_1(\Omega)}{S(\Omega)} \leq \frac{1}{\pi j_1^2}, \qquad j_1 = 2.4048\ldots, \tag{4.13}$$

$$\frac{\kappa_2(\Omega)}{S(\Omega)} \leq \frac{1}{\pi j_2^2}, \qquad j_2 = 3.1962\ldots, \tag{4.14}$$

где j_1 и j_2 — первые положительные корни бесселевых функций $J_0(x)$ и $J_0(x)I_0'(x) - J_0'(x)I_0(x)$ соответственно.

Рэлей доказал (4.13) для областей, близких к кругу, вычислив вариации первого собственного числа задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Фабер в 1923 году и Кран в 1924 году дали доказательства (4.13), основанные на симметризации области относительно точки. Их подход применим и к неравенству (4.12), доказательство которого опубликовано Пойа в 1948 году. Гипотеза Рэлея (4.14) и аналогичная ей гипотеза

$$\frac{\kappa_3(\Omega)}{S(\Omega)} \leq \frac{1}{\pi j_3^2} \quad (j_3 = 3.8317\ldots, \quad I_0'(j_3) = 0) \tag{4.15}$$

подробно обсуждались в научной литературе. Но, насколько известно автору, неравенства (4.14) и (4.15) не доказаны до сих пор.

Николаи в 1924 году "оправдал" результаты экспериментов в отношении формул Кулона и Коши, доказав неравенство: $C_0 \leq 4I_xI_y/I_0$ (см. [7]). Тем самым, для любой односязной области справедливы неравенства

$$\kappa_0(\Omega) \leq \frac{I_xI_y}{I_0} \leq \frac{1}{4}I_0. \tag{4.16}$$

Следуя Коши и Сен-Венану, приближенную формулу, точную для всех эллипсов, предложил в 1951 году М. Эссен

$$\kappa_0(\Omega) \approx \frac{4S^2}{\pi}\frac{R_0\delta_0}{R_0^2+\delta_0^2}, \tag{4.17}$$

где R_0 и δ_0 обозначают радиусы описанного и вписанного кругов для области Ω.

Можно показать, что приближенные формулы Коши (4.8), Сен-Венана (4.11) и Эссена (4.17) решают задачу 1 для $\kappa_0(\Omega)$ в классе выпуклых областей. Это следует из двух фактов.

1) Если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\kappa_j(\Omega_1) \le \kappa_j(\Omega_2)$, что легко получается из вариационных определений $\kappa_0(\Omega)$ – $\kappa_3(\Omega)$.

2) Для ограниченной выпуклой области D существуют два подобных эллипса Ω_1 и Ω_2 таких, что $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$, и коэффициент подобия $q \le 2$ (теорема Ф. Джона).

Точные нижние грани величин κ_0/S^2 и κ_1/S оказываются равными нулю даже в классе выпуклых областей .

В классе односвязных областей получается такая картина: значения $\kappa_0/(S^2/I_0)$ заполняют всю полуось $(0,\infty)$, а значения $\kappa_0/(I_xI_y/I_0)$ — полусегмент $(0,1]$ (см. неравенства (4.16)). Исследовав ряд гипотез для κ_0, κ_1 и опровергнув некоторые из них, Пойа и Сегё предлагают следующий, более широкий вариант задачи 1.

Задача 2 *Отличается от задачи 1 тем, что некоторые из $\alpha_j(\Omega)$ могут быть физическими величинами. Естественно, что эти величины должны быть более простыми, чем $\kappa(\Omega)$.*

Воспроизведем некоторые гипотезы , а также вопросы, поставленные Пойа и Сеге в книге [6]:

$$c_1 = \inf \frac{\kappa_1(\Omega)}{R^2(\Omega)} = \frac{1}{j_1^2}, \qquad c_2 = \sup \frac{\kappa_1(\Omega)}{R^2(\Omega)} =?, \tag{4.18}$$

$$c_1 = \inf \frac{\kappa_1^2(\Omega)}{\kappa_0(\Omega)} = 0, \qquad c_2 = \sup \frac{\kappa_1^2(\Omega)}{\kappa_0(\Omega)} =?, \tag{4.19}$$

$$c_1 = \inf \frac{\kappa_1(\Omega)S(\Omega)}{\kappa_0(\Omega)} \geq 1, \qquad c_3 = \sup \frac{\kappa_1(\Omega)S(\Omega)}{\kappa_0(\Omega)} =?, \tag{4.20}$$

где $R(\Omega)$ – супремум конформного радиуса области Ω.

Приведем некоторые результаты, доказанные для односвязных областей Ω. В 1965 году Е.Макаи [22] доказал неравенство

$$a = \sup(\kappa_1/\delta_0^2) \leq 4,$$

где $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$ — радиус максимального вписанного в Ω круга, тем самым установил, что $F = \delta_0^2(\Omega)$ решает задачу 1 для κ_1. В 1977 году этот результат был переоткрыт В.Хейманом [24], доказавшим иным методом неравенство $\sqrt{a} \leq 30$. В том же году Р.Оссерман [25], пользуясь изопериметрическими неравенствами Чигеры и Боннезена, установил, что $\sqrt{a} \leq 2$. Отметим, что требование односвязности области Ω является существенным.

Величины κ_0 – κ_3 найдены для огромного числа практически важных областей Ω с помощью различных аналитических, численных и экспериментальных методов. Так, например, книга Н.Х.Арутюняна и Б.Л.Абрамяна [7], посвященная исследованиям кручения упругих тел, содержит библиографию из более чем 600 названий. В этой книге имеется также ряд приближенных формул для $\kappa_0(\Omega)$. Они дают явные решения задачи 1 в специальных классах областей, являющихся поперечными сечениями уголков, швеллеров, тавровых балок и т.п.

Величины $1/\kappa_1$, $1/\kappa_2$ и $1/\kappa_3$ также связаны с упругими деформациями и для областей с кусочно-гладкими границами определяются как первые собственные значения следующих краевых задач ($z = x + iy$):

$$\Delta v + \frac{1}{\kappa_1} v = 0, \quad z \in \Omega; \qquad v = 0, \quad z \in \partial\Omega; \tag{4.21}$$

$$\Delta^2 v - \frac{1}{\kappa_2^2} v = 0, \quad z \in \Omega; \qquad v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad z \in \partial\Omega; \tag{4.22}$$

$$\Delta^2 v + \frac{1}{\kappa_3} \Delta v = 0, \quad z \in \Omega; \qquad v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad z \in \partial\Omega. \tag{4.23}$$

Следующие два параграфа написаны по материалам двух статей автора [36], [37] (см. также монографию [15]).

4.2 Двусторонние оценки

Пусть Ω — односвязная область в плоскости $\mathbb{C}$, $R = R(z, \Omega)$ — конформный радиус области $\Omega \neq \mathbb{C}$ в точке $z = x + iy \in \Omega$, $R(z, \mathbb{C}) \equiv \infty$,

$$R(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} R(z, \Omega), \qquad I_h(\Omega) = \iint_\Omega R^2(z, \Omega) dx\, dy.$$

Следующие утверждения дают решение задачи 2 для κ_0 и κ_1.

Теорема 4.1 *Для всех односвязных областей* $\Omega \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{4} \le \frac{\kappa_0(\Omega)}{I_h(\Omega)} \le 1. \tag{4.24}$$

Теорема 4.2 *Для всех односвязных областей* $\Omega \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{j_1^2} \le \frac{\kappa_1(\Omega)}{R^2(\Omega)} \le 1. \tag{4.25}$$

Левое неравенство в (4.25) было указано ранее в (4.18), $j_1 = 2.4048\ldots$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$.

Существенную роль при доказательстве теорем 4.1 и 4.2 играет

Теорема 4.3 *Для любой односвязной области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и любой функции* $u \in C_0^\infty(D)$ *справедливы следующие конформно-инвариантные неравенства*

$$\iint_\Omega \frac{u^2}{R^2} dx\, dy \le \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \le \iint_\Omega R^2 |\Delta u|^2 dx\, dy, \tag{4.26}$$

где $u = u(x, y)$, $R = R(z, \Omega)$, $z = x + iy$.

Если $\Omega = \mathbb{C}$, то $\kappa_0(\Omega) = \kappa_1(\Omega) = R(\Omega) = I_h(\Omega) = \infty$, и этот случай исключается в последующих рассуждениях.

Доказательство теоремы 4.3. Неравенства (4.26) конформно-инвариантны. Это вытекает из известных свойств интеграла Дирихле, лапласиана и того важного факта, что $R^{-2}(z, \Omega) dx\, dy$ — дифференциальный элемент площади в конформно-инвариантной метрике Пуанкаре, превращающей область Ω в плоскость Лобачевского. Следовательно, достаточно доказать (4.26) в какой-либо односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \ne \mathbb{C}$.

Пусть Ω — полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z = x > 0\}$, тогда $R(z, \Omega) = 2x$. Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ при любом фиксированном y справедливо неравенство Харди

$$\int_0^\infty \frac{u^2(x, y)}{4x^2} dx < \int_0^\infty u_x'^2(x, y) dx. \tag{4.27}$$

Добавляем к правой части (4.27) интеграл от $u'^2_y(x,y)$ и интегрируем обе части полученного неравенства по y от $-\infty$ до $+\infty$. Получаем левое неравенство (4.26) для полуплоскости, а значит и для любой односвязной области Ω.

Пусть теперь Ω — односвязная область с гладкой границей. Для $u \in C_0^\infty(D)$ возьмем первую формулу Грина

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy = -\iint_\Omega u\,\Delta u dx\,dy \tag{4.28}$$

и применим к правой части (4.28) последовательно неравенство Коши-Буняковского и левое неравенство из (4.26). Получим

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy \le \sqrt{\iint_\Omega u^2 R^{-2} dx\,dy}\sqrt{\iint_\Omega R^2 |\Delta u|^2 dx\,dy} \le$$

$$\le \sqrt{\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy}\sqrt{\iint_\Omega R^2|\Delta u|^2 dx\,dy},$$

что равносильно правому неравенству в (4.26). Теорема 4.3 доказана.

Доказательство правых неравенств в теоремах 4.1 *и* 4.2. Будем пользоваться вариационными определениями (4.2) и (4.3) величин κ_0 и κ_1. Тогда правое неравенство в (4.25) — простое следствие (4.26). Правое неравенство в (4.24) получается применением неравенств Коши-Буняковского и (4.26):

$$\left(\iint_\Omega |u| dx\,dy\right)^2 \le \iint_\Omega u^2 \frac{dx\,dy}{R^2} \iint_\Omega R^2 dx\,dy \le$$

$$\le I_h(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy.$$

Доказательство левого неравенства в теореме 4.1. Заметим, что фактически речь идет о построении подходящего примера $u_0(x, y)$.

Пусть сначала Ω — область с гладкой границей. Полагаем $u_0 = R^2(z, \Omega)$. Так как $R \in C^\infty(\Omega)$ и $R(z, \Omega) \equiv 0$ при $z \in \partial\Omega$, можем записать

$$\left(\iint_\Omega u_0 dx\, dy\right)^2 \leq \kappa_0(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\, dy. \tag{4.29}$$

Известное уравнение Лиувилля $\Delta v = -4\exp(2v)$ из гиперболической геометрии для $v = \log R$ равносильно следующему (см. также упражнения к главе 3)

$$R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4, \qquad R = R(z, \Omega), \quad z \in \Omega. \tag{4.30}$$

Из формулы Грина

$$\iint_\Omega (R^3 \Delta R + 3R^2 |\nabla R|^2) dx\, dy = 0$$

с учетом (4.30) получаем равенство

$$\iint_\Omega R^2 dx\, dy = \iint_\Omega R^2 |\nabla R|^2 dx\, dy. \tag{4.31}$$

Так как $|\nabla u_0|^2 = 4R^2 |\nabla R|^2$, то из (4.29) и (4.31) следует: $\kappa_0(\Omega) \geq I_h(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Общий случай получается аппроксимацией. Пусть Ω_n — односвязные области с гладкими границами, причем

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega = \cup \Omega_n, \ I_h(\Omega) < \infty.$$

Для любого n имеем: $\kappa_0(\Omega) \geq \kappa_0(\Omega_n)$, следовательно, $\kappa_0(\Omega) \geq I_h(\Omega_n)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, будем иметь $\kappa_0(\Omega) \geq I_h(\Omega)$, так как $\lim I_h(\Omega_n) = I_h(\Omega)$ по теореме Беппо Леви, примененной к неубывающей последовательности функций $R_n(z) = \{R(z,\Omega_n), z \in \Omega_n;\ 0, z \in \Omega \setminus \Omega_n\}$.

Определение первого собственного значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $D = \{\,\zeta\ :\ |\zeta| < 1\,\}$ связано с функцией $v_1(r) = J_0(j_1 r)$, для которой $v_1(1) = 0$ и

$$\int_0^1 v_1^2(r) r\, dr = j_1^{-2} \int_0^1 {v_1'}^2(r) r\, dr. \tag{4.32}$$

Пусть Ω — область с гладкой границей, $z_0 \in \Omega$ и $R(\Omega) = R(z_0, \Omega)$. Рассмотрим конформное отображение $f\ : D \to \Omega$ с нормировкой $f(0) = z_0$, $f'(0) > 0$. Тогда $f'(0) = R(z_0, \Omega) = R(\Omega)$, и по теореме о среднем

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq 2\pi R^2(\Omega), \qquad 0 \leq r < 1. \tag{4.33}$$

Перемножая почленно (4.32) и (4.33), можем записать

$$\iint_\Omega u_1^2 dx\, dy \geq j_1^{-2} R^2(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u_1|^2 dx\, dy, \tag{4.34}$$

где $u_1(z) = v_1(|f^{-1}(z)|)$, $u_1(z) \equiv 0$ при $z \in \partial\Omega$. Из (4.34) следует, что $\kappa_1(\Omega) \geq R^2(\Omega)/j_1^2$ для области Ω с гладкой границей. Общий случай также получается аппроксимацией.

Итак, теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 доказаны. Пользуясь ими, а также известными оценками, получим теперь решение задачи 1 для $\kappa_0(\Omega)$, $\kappa_1(\Omega)$, $\kappa_2(\Omega)$ и $\kappa_3(\Omega)$.

Пусть $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы односвязной области Ω, обозначим

$$\delta_0(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} \operatorname{dist}(z, \partial\Omega), \qquad I_{\partial\Omega}(\Omega) = \iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) dx\, dy.$$

Очевидно, $\delta_0(\Omega)$ — радиус максимального круга, вписанного в $\overline{\Omega}$, величину $I_{\partial\Omega}(\Omega)$ будем называть моментом инерции области Ω относительно своей границы $\partial\Omega$.

Справедливы оценки

$$1 \le R(z,\Omega)/\mathrm{dist}(z,\partial\Omega) \le 4, \qquad \forall z \in \Omega, \tag{4.35}$$

$$1 \le \frac{R(\Omega)}{\delta_0(\Omega)} \le 2, \tag{4.36}$$

где левые неравенства — следствия леммы Шварца, правое неравенство в (4.35) — следствие теоремы Кёбе об 1/4, доказанной с точной константой Бибербахом, правое неравенство в (4.36) — следствие оценки Альфорса константы Ландау (см., например, [8], [11]).

Из теоремы 4.1 и оценок (4.35) непосредственно получаем решение задачи 1 для $\kappa_0(\Omega)$. Этот результат "исправляет" формулу Кулона (4.7), сохраняя все её достоинства: простоту, ясный геометрический и физический смысл. И одновременно дает эквивалентность не только для выпуклых, но и для всех односвязных областей. А именно, справедлива

Теорема 4.4 $\kappa_0(\Omega) \sim I_{\partial\Omega}(\Omega)$ *на множестве односвязных областей, причем* $1/4 < \kappa_0(\Omega)/I_{\partial\Omega}(\Omega) < 16$.

Из теоремы 4.3, оценок (4.36), оценки постоянной Блока B_0 (см. [21]), свойства монотонности: $\kappa_j(\Omega_1) \le \kappa_j(\Omega_2)$ для $\Omega_1 \subset \Omega_2$, с учетом того, что $\kappa_j(\Omega)$ известны для круга (см.(4.13) – (4.15)), получаем решение задачи 1 для $\kappa_1(\Omega)$, $\kappa_2(\Omega)$ и $\kappa_3(\Omega)$.

Теорема 4.5 $\kappa_1(\Omega) \sim \kappa_2(\Omega) \sim \kappa_3(\Omega) \sim \delta_0^2(\Omega)$ *на множестве односвязных областей, причем*

$$B_0 \le \delta_0(\Omega)/\sqrt{\kappa_m(\Omega)} \le j_m,$$

где $j_1 = 2.4048\ldots$, $j_2 = 3.1962\ldots$, $j_3 = 3.8317\ldots$ — *первые положительные корни бесселевых функций* $J_0(x)$, $J_0(x)I_0'(x) - J_0'(x)I_0(x)$, $I_0'(x)$ *соответственно,* B_0 — *постоянная Блока для однолистных функций,*

$$0.5705 < B_0 \leq \pi/4.$$

Справедливо также следующее утверждение о проблемах (4.18) – (4.20).

Теорема 4.6 *В классе односвязных областей* Ω

$$\sup_\Omega \frac{\kappa_1(\Omega)}{R^2(\Omega)} \leq 1, \ \sup_\Omega \frac{\kappa_1^2(\Omega)}{\kappa_0(\Omega)} < \infty, \ \sup_\Omega \frac{\kappa_1(\Omega)S(\Omega)}{\kappa_0(\Omega)} = \infty. \quad (4.37)$$

Действительно, первое из соотношений (4.37) содержится в (4.25). Второе следует из того, что $\kappa_1(\Omega) \leq B_0^{-2}\delta_0^2(\Omega)$ в силу следствия 2, и $\kappa_0(\Omega) \geq (\pi/8)\delta_0^4(\Omega)$ в силу того, что область Ω содержит круг радиуса $\delta_0(\Omega) - \varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, \delta_0)$. Для обоснования третьего соотношения в (4.37) рассмотрим пример. Пусть $\Omega = \{z = x + iy \ : x > 1, \ -1/x < y < 1/x\}$. Тогда $\delta_0(\Omega) \in (0,1)$, $S(\Omega) = \infty$ и $I_{\partial\Omega}(\Omega) \in (0, 2/15)$, так как

$$I_{\partial\Omega}(\Omega) < 2 \iint_\Omega (y - 1/x)^2 dx\, dy = \frac{2}{15}.$$

Следовательно, $\kappa_0(\Omega)$ и $\kappa_1(\Omega)$ — конечные положительные величины, и $\kappa_1 S/\kappa_0 = \infty$.

Таким образом, одно из возможных решений задачи 2 для $\kappa_1(\Omega)$ имеет вид (4.18).

Из (4.26), (4.35) и (4.36) непосредственно получаем

Теорема 4.7 *Для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\lambda\delta_0^2(\Omega)} \iint_\Omega u^2 dx\, dy \le \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \le$$

$$\le \lambda\delta_0^2(\Omega) \iint_\Omega |\Delta u|^2 dx\, dy,$$

$$\frac{1}{\mu} \iint_\Omega \frac{u^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \le$$

$$\le \mu \iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) |\Delta u|^2 dx\, dy,$$

где λ и μ — некоторые абсолютные постоянные, $\lambda \in (0, 4)$, $\mu \in (0, 16)$.

Левое неравенство из (4.26) является, очевидно, частным случаем следующего вариационного конформно-инвариантного неравенства: пусть $p \ge 1$ и Ω — односвязная область гиперболического типа из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, тогда

$$\left\| \frac{u}{R^{2/p}} \right\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{p}{2} \left\| \frac{\nabla u}{R^{1-2/p}} \right\|_{L_p(\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.38}$$

Напомним, что

$$R = R(z, \Omega) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)|,$$

$z = f(\zeta)$, $f : D \to \Omega$ — конформное отображение D на Ω.

Доказательство (4.38) отличается от доказательства левого неравенства из (4.26) только тем, что вместо (4.27) используется обобщенное неравенство Харди [1]:

$$\int_0^\infty \frac{|u|^p}{x^2} dx < p^p \int_0^\infty x^{p-2} |u'_x|^p dx. \tag{4.39}$$

Постоянная $p/2$ в (4.38) не может быть уменьшена, что следует из точности постоянной p^p в неравенстве Харди (4.39).

Привлекая конформное отображение полосы на кольцо, легко показать, что (4.26) и (4.38) верны и для двусвязных областей (по этому поводу см. также главы 6 и 7).

4.3 Свойства гиперболического радиуса

Теорема 4.8 а) *Пусть Ω — область гиперболического типа произвольной связности, $\infty \notin \Omega$. Тогда для $R = R(z, \Omega)$ справедливы неравенства*

$$S(\Omega) \geq \frac{1}{2} \iint_\Omega |\nabla R|^2 dx\, dy, \tag{4.40}$$

$$\iint_\Omega R^2 dx\, dy \geq \iint_\Omega R^2 |\nabla R|^2 dx\, dy \tag{4.41}$$

при условии конечности их левых частей. Если область Ω конечносвязна и ограничена кусочно-гладкими кривыми, то в (4.40) и (4.41) имеют место равенства.

б) *Если Ω — ограниченная конечно-связная область гиперболического типа, $\partial\Omega$ — кусочно-гладкие кривые, то*

$$8\pi \iint_\Omega |\nabla R|^2 dx\, dy \leq \left(\iint_\Omega |\Delta R| dx\, dy \right)^2, \tag{4.42}$$

причем знак равенства в (4.42) имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Доказательство. Утверждение а) теоремы с неравенствами (4.40) и (4.41) следует из теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и следующей леммы.

Лемма 4.1 *Пусть* Ω *— конечносвязная область,* $\infty \notin \overline{\Omega}$*,* $\partial\Omega$ *состоит из конечного числа кривых Ляпунова,* $l(\partial\Omega)$ *— сумма длин граничных кривых,* $S(\Omega)$ *— площадь* Ω*. Если* $\varphi(R)$ *— непрерывно дифференцируемая функция переменной* $R \in [0, \infty)$*, то справедливы формулы (*$R = R(z, \Omega)$*):*

$$2\varphi(0)l(\partial\Omega) + 4\iint_{\Omega} \varphi'(R)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_{\Omega} (R\varphi(R))'\Delta R\,dx\,dy, \tag{4.43}$$

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} |\nabla R|^2 dx\,dy, \tag{4.44}$$

$$l(\partial\Omega) = -\frac{1}{2}\iint_{\Omega} \Delta R\,dx\,dy, \tag{4.45}$$

$$\iint_{\Omega} R^2\,dx\,dy = \iint_{\Omega} R^2|\nabla R|^2 dx\,dy. \tag{4.46}$$

Доказательство леммы. Применим следствие формулы Грина

$$\iint_{\Omega} \Delta a\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial a}{\partial n}|dz|$$

к функции $a(x, y) = \int_0^R \varphi(t)\,dt$, где $R = R(z, \Omega)$, $z = x + iy$, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Получим

$$\iint_{\Omega} \{\varphi(R)\Delta R + \varphi'(R)|\nabla R|^2\} dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \varphi(R)\frac{\partial R}{\partial n}|dz|.$$

Отсюда с учетом формулы (4.30) следует (4.43), если мы покажем, что

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(R)\frac{\partial R}{\partial n}|dz| = -\varphi(0)l(\partial\Omega). \tag{4.47}$$

Выведем (4.47). Дифференцирование формулы для R дает тождество

$$\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial z} = \frac{|f'(\zeta)|}{f'(\zeta)}\left(-\overline{\zeta} + \frac{1-|\zeta|^2}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right), \ \ z = f(\zeta). \quad (4.48)$$

Любая граничная компонента $\partial\Omega$ является локально взаимно однозначным образом некоторой дуги β окружности $|\zeta| = 1$ при отображении $f \ : D \to \Omega$. Так как $\partial\Omega$ — кривые Ляпунова, то

$$(1-|\zeta|^2)f''(\zeta)/f'(\zeta) \to 0 \qquad \text{при} \quad \zeta \to t \in \beta$$

по локальной версии известных теорем Келлога и Харди-Литтлвуда. Следовательно, $|\partial R/\partial z| \equiv 1$ при $\zeta \in \partial\Omega$ в силу (4.48). Но $R(z,\Omega) \equiv 0$ для $z \in \partial\Omega$ и $R(z,\Omega) > 0$ для $z \in \Omega$, поэтому

$$\partial R/\partial n \equiv -2 \qquad \text{при} \quad z \in \partial\Omega,$$

что и доказывает формулу (4.47), следовательно, и равенство (4.43).

Формулы (4.44), (4.45), (4.46) получаются теперь из (4.43) при $\varphi(R) \equiv R$, $\varphi(R) \equiv R^3$ и $\varphi(R) \equiv 1$ соответственно.

Лемма 4.1 доказана.

Утверждение б) теоремы следует из изопериметрического неравенства, неравенства (4.40) и формулы (4.45) леммы 4.1, согласно которой

$$l(\partial\Omega) = (-1/2)\iint \Delta R dx\, dy.$$

Этим и завершается доказательство теоремы.

4.4 Упражнения

Если Ω односвязна и $\infty \notin \Omega$, то $R(z,\Omega)$ — конформный радиус. Тогда

$$R = R(z,\Omega) = (1-|\zeta|^2)|f'(\zeta)|,\ z = f(\zeta),$$

где $f : D \to \Omega$ — конформное отображение D на Ω. Функция f однолистна в D, и многие известные факты об этой функции легко переписываются в терминах конформного радиуса, либо могут быть использованы для оценок $R(z,\Omega)$. В качестве примера можно указать следующую теорему.

Теорема 4.9 *а) Пусть Ω — выпуклая область. Тогда имеют место точные оценки*

$$|\nabla R(z,\Omega)| = 2\left|\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial \overline{z}}\right| \le 2, \qquad z \in \Omega. \tag{4.49}$$

Если Ω — односвязная область, то

$$\left|\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right| \le 36|\Delta \log R|, \tag{4.50}$$

где $R = R(z,\Omega),\ z = x+iy \in \Omega$.

б) Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 — непересекающиеся односвязные области, $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$R(z_k,\Omega) = \max\{R(z,\Omega_k)\ : z \in \Omega_k\},$$

причем $z_k \in \Omega_k$, где $k = 1$ и 2. Тогда

$$\begin{gathered}\iint_{\Omega_1} u^2 dx\,dy \iint_{\Omega_2} u^2 dx\,dy \le \\ \le |z_1 - z_2|^4 \iint_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\,dy \iint_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx\,dy.\end{gathered} \tag{4.51}$$

Указания к доказательству неравенств (4.49) – (4.51).

1) Имеем

$$|\nabla R(z_0, \Omega)| = |f''(0)/f'(0)| = 2|a_2|,$$

где $z_0 = f(0)$. Следовательно, (4.49) — переписанное в других терминах точное неравенство Левнера $|a_2| \leq 1$ (см. [8]).

2) Из оценки Бибербаха $|a_2| \leq 2$, а также более глубокого результата Фекете и Сегё об оценке $|a_3 - \alpha a_2^2| \leq 1$ (см. [8]) непосредственно следует (4.50). Точность оценок (4.49), (4.50) связана с областью вида $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x \geq 0\}$.

3) Неравенство (4.51) есть простое следствие двух фактов: основного неравенства, примененного по отдельности к Ω_1 и Ω_2, и точной оценки произведения конформных радиусов, полученной М.А.Лаврентьевым (см. [8]).

Глава 5

Жесткость кручения в $\mathbb{R}^n$

В этой главе мы излагаем, в основном, обобщения ряда теорем, доказанных ранее для областей на плоскости, на пространственный случай. Такие обобщения возможны лишь в определенных случаях. Кратко опишем те базовые результаты, развитию которых посвящена настоящая глава.

Пусть Ω — односвязная область на плоскости,

$$4\kappa_0(\Omega) = P(\Omega)$$

— коэффициент жесткости кручения упругой балки с поперечным сечением Ω. Известно, что

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \left(2 \int_\Omega u(x)\, dx \right)^2 \Big/ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \ , \qquad (5.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $dx = dx_1 dx_2$, $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство гладких функций с компактным носителем в Ω.

Нам потребуются некоторые факты, подробно изложенные в предыдущей главе. Классические приближенные формулы Кулона, Коши и Сен-Венана выражают $P(\Omega)$ через площадь Ω и моменты инерции Ω относительно центра масс и главных осей. Экспериментально и теоретически было обнаружено, что эти формулы справедливы лишь для узких классов областей. Поэтому математическая теория развивалась по пути создания точных утверждений, выражаемых изопериметрическими неравенствами. В 1924 году Николаи доказал, что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$P(\Omega) \leq I_2(\Omega), \tag{5.2}$$

где $I_2(\Omega)$ — момент инерции области Ω относительно ее центра масс, т. е.

$$I_2(\Omega) = \int_\Omega |x|^2 \, dx,$$

если центр масс области находится в начале координат. Это неравенство придало точный смысл формуле Кулона

$$P(\Omega) \approx I_2(\Omega).$$

Отметим, что равенство в (5.2) имеет место лишь для круга. Как показали Пойа и Сеге, аналогичная обработка (т.е. замена знака приближенного равенства знаком неравенства) приближенной формулы Сен-Венана

$$P(\Omega) \approx \frac{|\Omega|^4}{4\pi^2 I_2(\Omega)}$$

невозможна, т.е. отношение $I_2(\Omega)P(\Omega)/|\Omega|^4$ не отделено ни от нуля, ни от бесконечности на множестве всех односвязных областей. В 1948 году Пойа доказал справедливость классической гипотезы Сен-Венана

$$P(\Omega) \leq \frac{|\Omega|^2}{2\pi}, \tag{5.3}$$

где $|\Omega|$ — площадь односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Как и в (5.2), равенство в (5.3) имеет место лишь для круга.

Неравенства (5.2) и (5.3) являются лишь односторонними, т.е.

$$\inf_{\Omega} P(\Omega)/I_2(\Omega) = \inf_{\Omega} P(\Omega)/|\Omega|^2 = 0.$$

Геометрический функционал, эквивалентный $P(\Omega)$ на всем множестве односвязных областей Ω, был найден автором (см. главу 4) : для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{\Omega} R^2(x,\Omega)dx \le P(\Omega) \le 4\int_{\Omega} R^2(x,\Omega)dx, \tag{5.4}$$

где $R(x,\Omega)$ — конформный радиус области Ω в точке $x = (x_1, x_2)$. В силу классической леммы Шварца и теоремы Кебе об 1/4

$$\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \le R(x,\Omega) \le 4\mathrm{dist}(x,\partial\Omega), \tag{5.5}$$

где $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x = (x_1, x_2)$ до границы $\partial\Omega$ односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Поэтому неравенства (5.4) и (5.5) позволяют записать универсальный аналог формулы Кулона с использованием момента инерции Ω относительно границы, т.е. величины

$$\int_{\Omega} \mathrm{dist}^2(x,\partial\Omega)dx. \tag{5.6}$$

В двух следующих параграфах этой главы изложены результаты автора, опубликованные в работе [44].

5.1 Точные оценки

Пусть Ω — область (т.е. открытое связное множество) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $|x| = (x_1^2 + x_2^2 +$

$\cdots + x_n^2)^{1/2}$, ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

где Γ — гамма функция Эйлера.

Через $P(\Omega)$ будем обозначать функционал, определенный для Ω формулой (5.1), где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ — дифференциальный элемент объема.

Изопериметрические неравенства Николаи (5.2) и Сен-Венана (5.3) для односвязных плоских областей допускают следующее обобщение.

Теорема 5.1 *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) и любого $p \geq 0$ имеет место неравенство*

$$P(\Omega) \leq \frac{4\omega_n}{n(n+2)} \left(\frac{n+p}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^p \, dx \right)^{\frac{n+2}{n+p}}. \tag{5.7}$$

Если Ω — шар с центром в начале координат, то в (5.7) имеет место равенство.

Из теоремы 5.1 при $p = 2$ и $p = 0$ вытекают прямые аналоги (5.2) и (5.3) для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$P(\Omega) \leq \frac{4}{n^2} \int_\Omega |x|^2 dx, \tag{5.8}$$

$$P(\Omega) \leq \frac{4}{n(n+2)\omega_n^{2/n}} |\Omega|^{1+2/n}. \tag{5.9}$$

В дальнейшем нам потребуется гиперболический радиус пространственных областей (см. [33]).

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, в которой существует метрика Пуанкаре с линейным элементом $\lambda_\Omega(x)|dx|$, превращающая Ω в пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Следуя терминологии, принятой в теории функций для областей на плоскости, такую область будем называть гиперболической. Для гиперболической области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определена положительная в Ω функция

$$R(x, \Omega) := \frac{1}{\lambda_\Omega(x)}, \qquad x \in \Omega,$$

называемая гиперболическим радиусом (см. [33]). Известно, что функция $R(x, \Omega)$ является вещественно аналитической в Ω и удовлетворяет следующему уравнению Лиувилля

$$2R\Delta R = n|\nabla R|^2 - 4n, \tag{5.10}$$

где $R = R(x, \Omega)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Напомним, что для плоских односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ гиперболический радиус совпадает с классическим конформным радиусом Ω в точке $x \in \Omega$.

Следующее утверждение распространяет на пространственный случай соответствующие результаты автора, изложенные в предыдущей главе.

Теорема 5.2 *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^1. Тогда для любого $\alpha > -1$ гиперболический радиус $R = R(x, \Omega)$ удовлетворяет равенству*

$$\int_\Omega R^\alpha dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha + 1}{2n}\right) \int_\Omega R^\alpha |\nabla R|^2 dx \tag{5.11}$$

и, кроме того,

$$|\partial\Omega| := \int_{\partial\Omega} dS = -\frac{1}{2} \int_\Omega \Delta R(x, \Omega) dx. \tag{5.12}$$

Отметим, что из (5.11) при $\alpha = 0$ следует любопытная формула для евклидова объема области Ω:

$$|\Omega| := \int_\Omega dx = \frac{n+2}{4n} \int_\Omega |\nabla R(x,\Omega)|^2 dx. \tag{5.13}$$

В теореме 5.1 приведены точные оценки сверху для функционала $P(\Omega)$. С использованием теоремы 5.2 можно получить следующую точную оценку $P(\Omega)$ снизу.

Теорема 5.3 *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^1. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\left(\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \le \frac{n}{n+2}|\Omega|P(\Omega), \tag{5.14}$$

в котором достигается равенство, если область Ω является шаром.

Из соотношений (5.9) и (5.14) непосредственно следует изопериметрическое неравенство

$$\int_\Omega R(x,\Omega)dx \le \frac{2}{(n+2)\omega^{1/n}}|\Omega|^{1+1/n}. \tag{5.15}$$

Другим следствием (5.14) является следующая оценка снизу жесткости кручения через объем $|\Omega|$ и статический момент области Ω относительно ее границы:

$$\frac{n+2}{n|\Omega|}\left(\int_\Omega \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)dx\right)^2 \le P(\Omega), \tag{5.16}$$

где $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы Ω.

5.2 Доказательства основных теорем

Приведем сначала несколько вспомогательных фактов, которые нам понадобятся при доказательстве теорем 5.1 – 5.3.

Если $P(\Omega) < +\infty$, то

$$P(\Omega) = 2\int_{\Omega} v(x)\,dx = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \tag{5.17}$$

где v — обобщенное решение уравнения Пуассона

$$\Delta v = -2 \qquad (x \in \Omega), \tag{5.18}$$

принадлежащее пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В частности, для шара $B_\rho(0)$ с центром в начале координат и радиуса $\rho > 0$ решение задачи (5.18) имеет вид

$$v(x) = \frac{\rho^2 - |x|^2}{n}, \qquad x \in B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь (5.17) и непосредственными вычислениями, получаем

$$P(B_\rho(0)) = \frac{2}{n}\int_{B_\rho(0)} (\rho^2 - |x|^2) dx = \frac{4\omega_n}{n(n+2)}\rho^{n+2}. \tag{5.19}$$

Нам потребуется также следующее утверждение о монотонности $P(\Omega)$ по отношению к Ω и об аппроксимации $P(\Omega)$ значениями этого функционала на подобластях Ω.

Лемма 5.1 а) *Пусть Ω' и Ω'' — области в $\mathbb{R}^n$. Если $\Omega' \subset \Omega''$, то $P(\Omega') \le P(\Omega'')$.*

б) *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и пусть (Ω_j) — неубывающая последовательность подобластей Ω, причем $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty}\Omega_j$. Тогда $P(\Omega) = \lim_{j\to\infty} P(\Omega_j)$.*

Доказательство. Утверждение а) леммы 5.1 является простым следствием вариационного определения $P(\Omega)$ в виде (5.1). Действительно, если $\Omega' \subset \Omega''$, то, очевидно, $C_0^\infty(\Omega') \subset C_0^\infty(\Omega'')$. Поэтому для любого функционала $I(u)$ супремум по $u \in C_0^\infty(\Omega')$ не больше, чем супремум по $u \in C_0^\infty(\Omega'')$. В частности, $P(\Omega') \leq P(\Omega'')$.

Для обоснования утверждения б) леммы заметим сначала, что

$$0 \leq P(\Omega_1) \leq P(\Omega_2) \leq \ldots \leq P(\Omega_j) \leq P(\Omega)$$

согласно пункту а) леммы. Следовательно, существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{j\to\infty} P(\Omega_j),$$

причем $l \leq P(\Omega)$.

Докажем обратное неравенство $l \geq P(\Omega)$. Для любого компакта $K \subset \Omega$ найдется такой номер N, что $K \subset \Omega_j$ для всех $j \geq N$. Поэтому, если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, и компакт K является носителем этой функции, то $u \in C_0^\infty(\Omega_j)$ для всех $j \geq N$. Поэтому для этой функции

$$I(u;\Omega) := \left(2\int_\Omega u(x)\,dx\right)^2 \Bigg/ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx =$$

$$= \left(2\int_{\Omega_j} u(x)\,dx\right)^2 \Bigg/ \int_{\Omega_j} |\nabla u(x)|^2 dx \leq P(\Omega_j)$$

для всех $j \geq N$. Так как $P(\Omega_j) \leq l$ для любого натурального j, то для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ будем иметь неравенство $I(u;\Omega) \leq l$, что влечет требуемое утверждение $P(\Omega) \leq l$.

Лемма 5.1 доказана.

Замечание 5.1 В теории функций имеется ряд способов построения аппроксимирующей последовательности Ω_j из пункта б) леммы, когда $\partial\Omega_j$ обладают некоторыми свойствами гладкости. Очевидно, можно считать, что Ω_j — объединение конечного числа параллелепипедов или шаров, и $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая гиперповерхность размерности $(n-1)$. Тогда в Ω_j существует классическое решение краевой задачи (5.18) $v_j \in C^2(\Omega_j) \cap C(\overline{\Omega_j})$ и применима формула Грина.

Доказательство теоремы 5.1. Согласно лемме 5.1 и замечанию 5.1, неравенство (5.7) достаточно доказать лишь для подобластей с кусочно-гладкими границами. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай, когда Ω — область с кусочно-гладкой границей, и в Ω существует классическое решение краевой задачи (5.18) $v = v(x), \;\; x \in \Omega$. В силу классических результатов, функция v является неотрицательной, принадлежит классу $C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и обращается в нуль на $\partial\Omega$.

Докажем сначала неравенство (5.9) — частный случай (5.7).

Как мы уже отметили во введении, для плоских односвязных областей неравенство (5.9) установлено Пойа. Для обоснования (5.9) в общем случае рассмотрим симметризацию Шварца для Ω и функции v (см. [6], [12]). Хорошо известно, что

$$\int_\Omega v(x)\,dx = \int_{B_\rho(0)} v^*(x)\,dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \geq \int_{B_\rho(0)} |\nabla v^*(x)|^2\,dx,$$

где $\omega_n \rho^n = |\Omega|$, т.е. $B_\rho(0)$ — шар того же объема, что и Ω, v^* — функция, полученная из v симметризацией по Шварцу. Пользуясь этими соотношениями для v и v^*, вариационным определением $P(\Omega)$ и равенствами (5.17), получаем

$$P(\Omega) = I(v;\Omega) \le I(v^*; B_\rho(0)) \le$$

$$\le \sup\{I(u; B_\rho(0)) \,:\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (B_\rho(0))\} = P(B_\rho(0)).$$

С учетом равенств $\omega_n \rho^n = |\Omega|$ и (5.19) имеем

$$P(\Omega) \le \frac{4\omega_n}{n(n+2)} \rho^{n+2} = \frac{4}{n(n+2)\omega_n^{2/n}} |\Omega|^{1+2/n},$$

что совпадает с неравенством (5.9).

Таким образом, неравенство (5.9) обосновано. Напомним, что (5.9) получается из доказываемого неравенства (5.7) при $p = 0$. Покажем, что верно и обратное: (5.7) при любом $p \ge 0$ следует из (5.9). Для доказательства этого факта мы применяем следующий частный случай теоремы,доказанной в главе 2:

если $-n < p_1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\left(\frac{p_1 + n}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^{p_1} dx \right)^{1/(n+p_1)} \le$$

$$\le \left(\frac{p_2 + n}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^{p_2} dx \right)^{1/(n+p_2)}. \tag{5.20}$$

Действительно, полагая $p_1 = 0$ и $p_2 = p > 0$, из (5.20) получаем

$$\frac{|\Omega|}{\omega_n} \le \left(\frac{n+p}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^p dx \right)^{n/(n+p)}. \tag{5.21}$$

Очевидно, неравенство (5.7) следует из (5.9) и (5.21).

Если $\Omega = B_\rho(0)$ для некоторого $p > 0$, то

$$\frac{n+p}{n\omega_n}\int_{B_\rho(0)} |x|^p dx = \rho^{n+p}.$$

Это соотношение и равенство (5.19) показывают, что для любого шара $\Omega = B_\rho(0)$ неравенство (5.7) превращается в равенство.

Замечание 5.2 При $p = 2$ (а значит и при любом $p \geq 2$ в силу (5.20)) неравенство (5.7) можно обосновать и без применения симметризации. Действительно, пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, v — классическое решение задачи (5.18) в Ω. Применяя к функции v и к гармонической функции $\Phi = v + |x|^2/n$ формулу Грина, будем иметь

$$X = \int_\Omega (\nabla v, \nabla\Phi) dx = 0,$$

поэтому

$$P(\Omega) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = 2X + \int_\Omega \left|\nabla \frac{|x|^2}{n}\right|^2 dx - \int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx =$$

$$= \frac{4}{n^2}\int_\Omega |x|^2 dx - \int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx.$$

Отсюда сразу получаем неравенство (5.8), равенство в котором возможно лишь в том случае, когда $|\nabla\Phi| \equiv 0$, т.е. $\Phi(x) \equiv \mathrm{const}$. Поскольку $v(x) \geq 0$ в Ω и $v(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то эта постоянная должна быть положительной, т.е. $v(x)$ имеет вид $(\rho^2 - |x|^2)/n$ для некоторого $\rho > 0$. Таким образом, если Ω имеет кусочно-гладкую границу, то равенство в (5.7) при любом $p \geq 2$ возможно лишь для некоторого шара $\Omega = B_\rho(0)$.

Доказательство теоремы 5.2. Известно [33], что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей является гиперболической, причем гиперболический радиус

$$R(\cdot, \Omega) \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$R(x, \Omega) = 0, \qquad \frac{\partial R(x, \Omega)}{\partial n} = -2, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{5.22}$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Пусть $\alpha > -1$. Пользуясь уравнением Лиувилля (5.10) для функции $R = R(x, \Omega)$, получаем

$$\frac{\Delta R^{2+\alpha}}{2+\alpha} = (1 + \alpha + n/2) R^\alpha |\nabla R|^2 - 2n R^\alpha, \quad x \in \Omega. \tag{5.23}$$

По формуле Грина будем иметь

$$\int_\Omega \Delta R^{2+\alpha} dx = (2+\alpha) \int_{\partial\Omega} R^{1+\alpha} \frac{\partial R}{\partial n} dS. \tag{5.24}$$

Подставляя вместо $\Delta R^{2+\alpha}$ выражение из (5.23) и учитывая (5.22), приходим к равенству

$$(1 + \alpha + n/2) \int_\Omega R^\alpha |\nabla R|^2 dx = 2n \int_\Omega R^\alpha dx,$$

что равносильно доказываемому соотношению (5.11).

Второе утверждение теоремы 5.2 также вытекает из (5.23) и (5.24). Действительно, если $\alpha = -1$, то (5.24) принимает вид

$$\int_\Omega \Delta R \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial R}{\partial n} dS.$$

Правая часть равна $-2\int_{\partial\Omega} dS = -2|\partial\Omega|$ в силу второго граничного условия из (5.22). Тем самым доказано равенство (5.12).

Этим и завершается доказательство теоремы 5.2.

Доказательство теоремы 5.3. По условию теоремы область Ω имеет гладкую границу. Поэтому

$$R(\cdot,\Omega) \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad R(x,\Omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

следовательно, $R(\cdot,\Omega) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Значит

$$P(\Omega) = \sup\left\{ I(u;\Omega) \,:\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right\} \geq I(R;\Omega) =$$

$$= \left(2\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \bigg/ \int_\Omega |\nabla R(x,\Omega)|^2 dx\ .$$

Пользуясь формулой (5.13), получаем неравенство

$$\frac{n+2}{n|\Omega|}\left(\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \leq P(\Omega),$$

эквивалентное доказываемому неравенству (5.14).

Пусть $\Omega = B_\rho(0)$. Тогда

$$\int_{B_\rho(0)} R(x, B_\rho(0))dx = \int_{B_\rho(0)} \frac{\rho^2 - |x|^2}{\rho} dx = \frac{2\omega_n \rho^{n+1}}{n+2}.$$

Это соотношение и формула (5.19) показывают, что в случае $\Omega = B_\rho(0)$ неравенство (5.14) превращается в равенство.

Теорема 5.3 доказана.

5.3 Одно свойство конформного радиуса

Следующая теорема для четных m доказана Р.Г. Салахудиновым, а для нечетных m – автором (см. [41] и [44]).

Теорема 5.4 *Пусть m — натуральное число, Ω — плоская односвязная область с конечной площадью $|\Omega|$, $R(x,\Omega)$ — конформный радиус Ω в точке $x=(x_1,x_2)\in\Omega$. Тогда*

$$\int_\Omega R^m(x,\Omega)dx \le \frac{|\Omega|^{1+m/2}}{(m+1)\pi^{m/2}}. \tag{5.25}$$

Равенство в (5.25) имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Доказательство теоремы 5.4. Докажем сначала утверждение теоремы 5.4 для $m=1$.

Лемма 5.2 *Пусть Ω — односвязная область на плоскости с конечной площадью $|\Omega|$. Тогда конформный радиус $R(x,\Omega)$, $x=(x_1,x_2)\in\Omega$, удовлетворяет неравенству*

$$\int_\Omega R(x,\Omega)dx \le \frac{|\Omega|\sqrt{|\Omega|}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{5.26}$$

Равенство в (5.26) имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Доказательство леммы 5.2. Построим сначала стандартную возрастающую последовательность Ω_j односвязных подобластей области Ω. Пусть $f : D\to\Omega$ — конформное отображение круга $D=\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2 : \xi^2+\eta^2<1\}$ на область Ω. Полагаем

$$\Omega_j = \left\{ f(\xi,\eta) : \sqrt{\xi^2+\eta^2} < \rho_j = \frac{j}{1+j} \right\},$$

где $j = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_j \subset \cdots \subset \Omega$, $\cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega$, для любого натурального j область Ω_j является односвязной областью, ограниченной аналитической кривой. Известно, что с расширением области конформный радиус растет (см. теорему 3.4). Следовательно, если $x \in \Omega_j$, то $R(x, \Omega_j) < R(x, \Omega_{j+1}) < R(x, \Omega)$ для любого натурального j. Из теоремы Каратеодори о сходимости областей (см. [8]) легко следует, что равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$

$$\lim_{j \to \infty} R_0(x, \Omega_j) = R(x, \Omega),$$

где

$$R_0(x, \Omega_j) = \begin{cases} R(x, \Omega_j), x \in \Omega_j; \\ 0 \qquad\quad\;\, , x \in \Omega \setminus \Omega_j. \end{cases}$$

По теореме 5.3 для любого j

$$\left(\int_{\Omega_j} R(x, \Omega_j) dx \right)^2 \leq \frac{|\Omega_j| P(\Omega_j)}{2}.$$

Так как $\Omega_j \subset \Omega$, то $|\Omega_j| \leq |\Omega|$ и $P(\Omega_j) \leq P(\Omega)$ по лемме 5.1. Следовательно, для любого j и любого компакта $K \subset \Omega$

$$\left(\int_K R_0(x, \Omega_j) dx \right)^2 \leq \frac{|\Omega| P(\Omega)}{2}.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ и пользуясь произвольностью компакта $K \subset \Omega$, окончательно имеем

$$\left(\int_{\Omega} R(x, \Omega) dx \right)^2 \leq \frac{|\Omega| P(\Omega)}{2}.$$

Как мы уже показали при доказательстве теоремы 5.3, для круга это соотношение превращается в равенство.

Продолжим последнее неравенство, оценивая $P(\Omega)$ сверху согласно (5.3):

$$P(\Omega) \le |\Omega|^2/(2\pi).$$

Получаем эквивалентное (5.26) неравенство

$$\left(\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \le \frac{|\Omega|^3}{4\pi}.$$

Ясно, что равенство в этом неравенстве возможно лишь тогда, когда Ω — круг, так как этот факт имеет место для изопериметрического неравенства (5.3).

Таким образом, лемма 5.2 доказана полностью.

5.4 Упражнения

Завершите доказательство теоремы 5.4. Для этого можно использовать следующую теорему 3.5:

если $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, то конформный радиус $R(x,\Omega)$ односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет неравенству

$$\int_\Omega R^{\alpha+\beta-2}(x,\Omega)dx \le$$

$$\le \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\pi(\alpha+\beta-1)} \int_\Omega R^{\alpha-2}(x,\Omega)dx \int_\Omega R^{\beta-2}(x,\Omega)dx. \qquad (5.27)$$

При любых допустимых значениях параметров α и β равенство в (5.27) имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Далее можно поступить следующим образом.

1) Для четных показателей m неравенство (5.25) может быть обосновано методом математической индукции с использованием тривиального базового случая $m = 0$ и неравенства (5.27).

2) Рассмотрим случай нечетных m. Лемма 5.2 доказывает теорему 5.4 при $m = 1$. Далее, для любого нечетного числа $m = 2k + 1 \geq 3$ применяем оценку (5.27) при $\alpha = 2k$ и $\beta = 3$. Для $R = R(x, \Omega)$ будем иметь

$$\int_\Omega R^{2k+1} dx \leq \frac{2k-1}{\pi(k+1)} \int_\Omega R^{2k-2} dx \int_\Omega R dx, \tag{5.28}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда область Ω — круг.

3) Оценивая правую часть в (5.28) с применением (5.25) для уже доказанных случаев $m = 1$ и $m = 2k - 2$, получите требуемое неравенство (5.25) для $m = 2k + 1$.

Глава 6

Неравенства Харди и их аналоги

Для решения краевых задач математической физики разработан ряд общих методов. Центральное место среди них занимает вариационный подход. Он основан на интегральных неравенствах, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему пространству Соболева в заданной области Ω из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Известен ряд классов вариационных неравенств, связанных с именами Стеклова, Пуанкаре, Фридрихса, Соболева, Харди и других.

Главная трудность при исследовании вариационных неравенств состоит в оценках констант, точнее, специальных функционалов области Ω, зависящих также от числовых параметров задачи. Существование конечных констант означает ограниченность норм соответствующих операторов вложения, и это требование приводит к "сортировке" областей Ω, т.е. к определению "хороших" областей, для которых соответствующая задача математической физики имеет решение.

6.1 Конечносвязные области

Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{C}$, $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций $f = f(x, y)$, имеющих компактные в Ω носители, т.е. обращающихся в нуль вблизи границы области. Нам также потребуются две следующих величины, зависящие от $z = x + iy \in \Omega$: $\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы области, $R = R(z, \Omega)$ — гиперболический радиус Ω в точке z.

Целью данного параграфа является описание всех "хороших" конечносвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ для двух вариационных неравенств в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$. А именно, мы намереваемся обосновать необходимое и достаточное условие, выполнение которого для конечносвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ равносильно существованию конечных констант в классическом неравенстве Харди

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^2} dx\, dy \le c_2(2, \Omega)^2 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega) \quad (6.1)$$

и его конформно-инвариантном аналоге

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{R^2} dx\, dy \le c(\Omega, R)^2 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \;\; \forall f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (6.2)$$

Важность сформулированной задачи объясняется следующим обстоятельством. Как мы видели в главе 4, $c_2(2, \Omega) \le 4$ и $c(\Omega, R) = 1$, если Ω — односвязная область на плоскости и $\Omega \ne \mathbb{C}$. Эти результаты являются удивительными для специалистов по теоремам вложения в пространствах Соболева, так как лишь топологическое условие односвязности означает отсутствие геометрических требований на границу области. Следовательно, $\partial\Omega$ может быть неограниченной, нигде не гладкой, фрактальной и т. п., и этот факт очень важен в приложениях.

Пусть Ω_m означает m-связную область на плоскости, т.е. ее граница $\partial\Omega_m$ является объединением попарно непересекающихся замкнутых множеств $\Gamma_j \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\Gamma_j \neq \emptyset \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$. Считаем, что $m \geq 2$, и что постоянные в (6.1) и (6.2) являются оптимальными, т.е. наименьшими из всех возможных.

Мы исследуем сначала случай двусвязных областей, когда $\partial\Omega_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Напомним, что область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ называют областью гиперболического типа, если ее граница $\partial\Omega$ содержит не менее 3-х точек. Напомним также, что гиперболический радиус существует именно для таких областей, и метрика Пуанкаре с линейным элементом $|dz|/R\,(z, \Omega)$ превращает Ω в плоскость Лобачевского. Очевидно, для двусвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ требование гиперболичности означает, что из рассмотрения исключаются области вида $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.

Мы будем говорить, что граничная компонента Γ_j вырождена, если Γ_j состоит из одной точки. Например, для области $\Omega_2 = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ имеем: $\Gamma_1 = \{z_0\}$, $\Gamma_2 = \{\infty\}$, т.е. вырождены обе граничные компоненты.

Теорема 6.1 *Для двусвязных плоских областей имеют место следующие утверждения:*

1) $c\,(\Omega_2, R) = 1$ *для любой двусвязной области* Ω_2 *гиперболического типа;*

2) $c_2(2, \Omega_2) < +\infty$ *тогда и только тогда, когда обе граничные компоненты области не вырождены.*

В следующей теореме мы рассматриваем области, порядок связности которых не меньше трех. Ясно, что все такие области являются областями гиперболического типа. Следовательно, для них определен гиперболический радиус.

Теорема 6.2 *Для любой плоской области* Ω_m $(m \geq 3)$ *имеют место следующие утверждения:*

1) $c\,(\Omega_m, R) < +\infty$ *тогда и только тогда, когда хотя бы одна из* m *граничных компонент является невырожденной;*

2) $c_2(2, \Omega_m) < +\infty$ *тогда и только тогда, когда все граничные компоненты* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ *являются невырожденными.*

Таким образом, теоремы 6.1 и 6.2 дают полное решение сформулированной выше задачи. Мы видим также, что допустимые области характеризуются лишь топологическими условиями, и геометрия "хороших" областей может быть как угодно сложной.

Замечание. В теореме 6.2 и в пункте 2 теоремы 6.1 мы утверждаем лишь конечность констант и не даем конкретных оценок. Это связано с существом дела. А именно, можно показать на примерах, что на всем множестве допустимых областей при фиксированном m числовая оценка невозможна, даже если предполагать гладкость граничных кривых.

Доказательства теорем 6.1 и 6.2. Пусть Ω – область гиперболического типа, D – единичный круг $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$, $\zeta = \xi + i\eta$. Согласно теореме Римана-Пуанкаре существует накрывающее отображение

$$f : D \to \Omega,$$

связанное с гиперболическим радиусом по формуле

$$R\,(z,\Omega) = |f'\,(\zeta)\,|\left(1-|\zeta|^2\right), \quad z = f\,(\zeta)\,.$$

Формальное дифференцирование дает

$$\frac{\partial R}{\partial z} = R\frac{\partial \mathrm{log} R}{\partial z} = \frac{|f'\,(\zeta)\,|}{2f'\,(\zeta)}\left\{\left(1-|\zeta|^2\right)\frac{f''\,(\zeta)}{f'\,(\zeta)} - 2\overline{\zeta}\right\}, \quad (6.3)$$

где $z = f\,(\zeta)$ и $\overline{\zeta} = \xi - i\eta$. Отметим также, что

$$|\nabla R\,(z,\Omega)\,| = 2\left|\frac{\partial R\,(z,\Omega)}{\partial z}\right|, \qquad z \in \Omega.$$

Пользуясь (6.3) и утверждениями, изложенными в главе 3, получаем, что справедлива

Лемма 6.1 *Пусть Ω – конечносвязная область гиперболического типа. Тогда два следующих утверждения равносильны:*

1) $M\,(\Omega) := \sup\{|\nabla\ \mathrm{R}\,(\mathrm{z},\Omega)\,| : \mathrm{z} \in \Omega\} < +\infty$*;*

2) *все граничные компоненты Ω являются невырожденными.*

Кроме того, имеет место

Лемма 6.2 *Если Ω_2 – двусвязная область гиперболического типа, то $c\,(\Omega_2, R) = 1$.*

Доказательство леммы 6.2. Рассмотрим полосу

$$\Pi = \{z : \log q < Rez < 0\} \qquad (0 \le q < 1).$$

Отметим, что случаю $q = 0$ соответствует полуплоскость. В силу односвязности имеет место неравенство

$$\iint\limits_{\Pi} \frac{|f|^2 dx\,dy}{R^2\,(z,\Pi)} \le \iint\limits_{\Pi} |\nabla\ f|^2 dx\,dy \qquad \forall f \in C_0^\infty\,(\Pi)\,. \quad (6.4)$$

В качестве f выберем функцию, обладающую свойством 2π-периодичности по переменной y на отрезке $[0, 2\pi N]$, т.е. будем считать, что $f_N(x, y) = f_N(x, y + 2\pi k)$ при $0 \le y \le 2\pi$ и $k = 1, \dots, N-1$. Вставляя, если нужно, лишние звенья длины 2π по переменной y, мы можем считать, что (6.4) имеет вид

$$N \iint_{\Omega_0} \frac{|f|^2 dx\, dy}{R^2(z, \Pi)} \le N \iint_{\Omega_0} |\nabla f|^2 dx\, dy + A, \tag{6.5}$$

где N – любое натуральное число, Ω_0 – прямоугольник $[\log q, 0] \times [0, 2\pi]$, A – величина, не зависящая от N, функция f удовлетворяет граничным условиям: $f(x, 0) = f(x, 2\pi)$, $f(x, y) = 0$ на $\partial\Pi$. Деля обе части (6.5) на N и переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем

$$\iint_{\Omega_0} \frac{|f|^2 dx\, dy}{R^2(z, \Pi)} \le \iint_{\Omega_0} |\nabla f|^2 dx\, dy. \tag{6.6}$$

Функция $w = e^z$ дает универсальное накрытие кольца $K = \{w : q < |w| < 1\}$ полосой Π. При этом образом открытого прямоугольника $\Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$ является кольцо K без отрезка $[q, 1]$. В силу конформной инвариантности метрики Пуанкаре

$$\frac{|dw|}{R(w, K)} = \frac{|dz|}{R(z, \Pi)},$$

неравенство (6.6) принимает вид

$$\iint\limits_K \frac{|F|^2 du\, dv}{R^2(w, K)} \le \iint\limits_K |\nabla F|^2 du\, dv, \quad \forall F \in C_0^\infty(K),$$

где $w = u + iv$, $F(w) = F(e^z) = f(z)$ для любого $w \in K$. Снова пользуясь конформной инвариантностью и учитывая произвольность q, получаем, что вариационное неравенство для K верно и при замене K на произвольную двусвязную область Ω_2 гиперболического типа.

Лемма 6.3 *Если $m \geq 3$ и хотя бы одна из граничных компонент Ω_m не выроджена, то $c(\Omega_m, R) < +\infty$.*

Доказательство леммы 6.3. В силу конформной инвариантности можно считать, что Γ_1 – окружность, остальные Γ_j – либо окружности, либо точки. Рассмотрим двусвязные области $\Omega_2^j \supset \Omega_m$, причем $\partial\Omega_2^j = \Gamma_1 \cup \Gamma_j$, $j = 2, \ldots, m$. Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega_m)$, тогда, очевидно, $f \in C_0^\infty\left(\Omega_2^j\right)$. Применяя к Ω_2^j лемму 2 и суммируя по j, получаем для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega_m)$

$$\iint\limits_{\Omega_m} |f|^2 \sum_{j=2}^{m} \frac{dx\,dy}{R^2\left(z, \Omega_2^j\right)} \leq (m-1) \iint\limits_{\Omega_m} |\nabla f|^2 dx\,dy. \tag{6.7}$$

Так как Γ_j является либо окружностью, либо точкой, то легко показать, что

$$\lim_{z \to z_0 \in \Gamma_j} \frac{R(z, \Omega_m)}{R\left(z, \Omega_2^j\right)} = \lim_{z \to z_0 \in \Gamma_1} \frac{R(z, \Omega_m)}{R\left(z, \Omega_2^j\right)} = 1. \tag{6.8}$$

Поскольку гиперболический радиус является гладкой положительной функцией, то из (6.8) следует существование положительной постоянной $C_1 = C_1(\Omega_m)$, для которой

$$\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{R^2\left(z, \Omega_2^j\right)} \geq \frac{C_1(\Omega_m)}{R^2(z, \Omega_m)} \quad \forall z \in \Omega_m. \tag{6.9}$$

Из (6.2) и (6.9) следует утверждение леммы 6.3.

Теперь легко завершить доказательства теорем 6.1 и 6.2. А именно, из лемм 6.2 и 6.3 следуют утверждения 1 теорем 6.1 и 6.2 об оценках $c\,(\Omega_m, R)$ при указанных требованиях на граничные компоненты $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$.

Если все граничные компоненты не вырождены, то $c\,(\Omega_m, R) < +\infty$ в силу пунктов 1 теорем 6.1 и 6.2. Кроме того, по лемме 6.1 существует конечная величина $C_2\,(\Omega_m)$ такая, что

$$\frac{1}{\operatorname{dist}\,(z, \partial\Omega_m)} \leq \frac{C_2\,(\Omega_m)}{R\,(z, \Omega_m)} \quad \forall z \in \Omega_m$$

и, следовательно, $c\,(\Omega_m, \delta) < +\infty$. Тем самым доказаны утверждения из пунктов 2 обеих теорем о конечности $c_2(2, \Omega_m)$, если все Γ_j не вырождены.

Необходимость указанных в теореме требований на граничные компоненты легко проверяется на примерах.

Пример 1. Пусть одна из граничных компонент области Ω_m вырождена. Без ограничения общности можно считать, что начало координат – граничная компонента Ω_m и $\{z : 0 < |z| < 3\} \subset \Omega_m$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассматриваем функцию, определенную следующим образом :

$f_\varepsilon\,(z) = \{|z|^{1/2+\varepsilon}$ для $0 < |z| \leq 1, \quad 2 - |z|$ для $1 < |z| \leq 2$, 0 для $|z| > 2\}$.

Прямые вычисления дают

$$c_2(2, \Omega_m)^2 \geq \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\displaystyle\iint_{\Omega_m} \frac{|f_\varepsilon|^2}{\delta^2} dx\, dy}{\displaystyle\iint_{\Omega_m} |\nabla f_\varepsilon|^2 dx\, dy} = +\infty.$$

Пример 2. Пусть все граничные компоненты области Ω_m вырождены, $m \geq 3$. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma_j = \{z_j\}$ при $j = 1, 2, \ldots, m-1$ и $\Gamma_m = \{\infty\}$. Пусть ε – достаточно малое положительное число. Полагая $f_\varepsilon(z) = |z - z_j|^\varepsilon$ для $0 < |z - z_j| \le \varepsilon$ при $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $f_\varepsilon(z) = |z|^{-\varepsilon}$ для $|z| \ge 1/\varepsilon$ и $f_\varepsilon(z) = \varepsilon^\varepsilon$ для всех других z, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{\Omega_m} \frac{|f_\varepsilon|^2}{R^2} dx\, dy > 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{\Omega_m} |\nabla f_\varepsilon|^2 dx\, dy = 0,$$

что влечет искомое соотношение $c(\Omega_m, R) = +\infty$.

6.2 Упражнения

1) Привлекая L^p — версию одномерных неравенств Харди (см. (4.39)) и схему доказательства двух предыдущих теорем, докажите следующее конформно-инвариантное неравенство.

Теорема 6.3 *Если* $1 \le p < \infty$ *и область* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *может быть конформно отображена либо на единичный круг, либо на кольцо вида* $\{z : q < |z| < 1\}$, *т.е. область является односвязной или двусвязной областью гиперболического типа, то для любой функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega \frac{|f|^p}{R^2}\, dx\, dy \le (p/2)^p \iint_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{R^{2-p}} dx\, dy,$$

где $R = 1/\lambda_\Omega(z)$ *– гиперболический радиус.*

2) Получите явные оценки $c_2(2, \Omega)$ для кольца $\{z : q < |z| < 1\}$ в зависимости от модуля этого кольца.

6.3 Области с совершенными границами

В 1989 году Фернандес заметил [32], что сравнительный анализ известных результатов Поммеренке [28] и Анконы [31] позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 6.4 *Постоянная Харди плоской области* Ω

$$c_2 = \sup \left\{ \left\| \frac{f}{\operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega)} \right\|_{L^2(\Omega)} : f \in C_0^\infty(\Omega), \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}$$

конечна тогда и только тогда, когда граничное множество $\partial\Omega$ *является равномерно совершенным.*

Напомним, что нетривиальное (т.е. содержащее более одной точки) множество называется совершенным, если оно содержит все свои предельные точки. Равномерная совершенность определяется специальным образом и означает нечто большее, чем простое отсутствие изолированных точек. Читатель найдет одно из определений на следующей странице. Пока же отметим, что более 10 эквивалентных определений понятия равномерной совершенности множества $\partial\Omega$ можно найти на стр.119 и 343-345 изданной в 2005 году монографии Гарнета и Маршалла по гармоническим мерам [17].

Как мы уже видели в главе 4, если Ω – односвязная область гиперболического типа в $\mathbb{C}$, то $c_2 \le 4$. Случай конечносвязных областей рассмотрен в первом параграфе этой главы. Но и в конечносвязном случае вопрос о явных оценках c_2 остался открытым.

В этом параграфе мы рассматриваем области, точнее, открытые плоские множества произвольного вида и доказываем L^p – версию ($1 \le p < \infty$) теоремы 6.4 с двусторонними оценками, зависящими от одной простой геометрической характеристики Ω. Естественно, как следствие будем иметь прямое доказательство теоремы 6.4.

Пусть Ω – открытое множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем $\Omega \neq \mathbb{C}$. Для любого $p \in [1,\infty)$ будем рассматривать следующее неравенство Харди для произвольной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega \frac{|f|^p}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^2} dxdy \leq c_p(2,\Omega)^p \iint_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^{2-p}} dxdy,$$

где $z = x + iy$, и $c_p(2,\Omega)$ – минимальная из возможных в этом неравенстве постоянных, обобщающая c_2.

Открытое плоское множество Ω будем характеризовать модулями кольцевых областей, разделяющих компоненты $\partial\Omega$. А именно, мы определяем следующий *максимальный модуль*

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \log \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем круговым концентрическим кольцам

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\}$$

таким, что

$$A \subset \Omega, \quad z_0 \in \partial\Omega.$$

По определению, будем полагать $M_0(\Omega) = 0$, когда таких колец нет, т.е. Ω не содержит ни одной окружности с центром на $\partial\Omega$. Будем говорить, что множество $\partial\Omega$ является равномерно совершенным, если и только если $M_0(\Omega) < \infty$.

В дальнейшем нам потребуется постоянная

$$a_0 = \frac{\Gamma(1/4)^{1/4}}{4\pi^2} \approx 4.38, \tag{6.10}$$

возникающая в точной форме неравенства Ландау (см. [27]).

Следующая теорема является основным утверждением этой главы.

Теорема 6.5 *Если* $1 \le p < \infty$ *и* Ω *– открытое собственное подмножество* $\mathbb{C}$, *то*

$$\min\{2, p\}\ M_0(\Omega) \le c_p(2, \Omega) \le 2p\ (\pi M_0(\Omega) + a_0)^2. \qquad (6.11)$$

В частности, постоянная Харди $c_p(2, \Omega)$ *конечна тогда и только тогда, когда граничное множество* $\partial\Omega$ *является равномерно совершенным.*

Доказательство. Докажем сначала нижнюю оценку для $c_p(2, \Omega)$. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $0 < M_0(\Omega) \le \infty$ и $0 < c_p(2, \Omega) < \infty$. Далее, мы будем исследовать раздельно случаи $p \ge 2$ и $p < 2$.

Предположим сначала, что

$$2 \le p < \infty, \quad c_p(2, \Omega) < 2M_0(\Omega)$$

для некоторого открытого множества Ω, собственного подмножества $\mathbb{C}$. Из этого предположения и из определения $M_0(\Omega)$ следует, что существует такое кольцо

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega,$$

что $z_0 \in \partial\Omega$ и

$$\pi c_p(2, \Omega) < \log \frac{R(A)}{r(A)} < \infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$z_0 = 0, \quad R(A) = 1, \quad r(A) = \varepsilon \in (0, 1),$$

так как постоянная $c_p(2,\Omega)$ является инвариантной при линейных преобразованиях Ω. Имеем

$$M_0 := \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} > \frac{c_p(2,\Omega)}{2},$$

и для произвольной функции $f \in C_0^\infty(A)$

$$\iint_A \frac{|f|^p}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^2}dx\,dy \le c_p(2,\Omega)^p \iint_A \frac{|\nabla f|^p}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^{2-p}}dx\,dy.$$

Пользуясь полярными координатами, функциями

$$f(r,\theta) = v(r), \quad v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1)$$

и простой оценкой dist $(z,\partial\Omega) \le |z|$, получаем

$$\int_\varepsilon^1 \frac{|v(r)|^p r dr}{r^2} \le c_p(2,\Omega)^p \int_\varepsilon^1 \frac{|v'(r)|^p r dr}{r^{2-p}} \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1).$$

Заменами независимой переменной $r = \varepsilon\exp(2M_0 t)$ и функции $v(r) = g(t)$ получаем следующее эквивалентное неравенство типа Виртингера

$$\int_0^\pi |g(t)|^p\, dt \le \frac{c_p(2,\Omega)^p}{2^p M_0^p}\int_0^\pi |g'(t)|^p dt \quad \forall\, g \in C_0^\infty(0,\pi).$$

Аппроксимируя $g_0(t) = \sin t$ функциями $g \in C_0^\infty(0,\pi)$, будем иметь

$$c_p(2,\Omega)^p \ge 2^p M_0^p \int_0^\pi |\sin t|^p dt \Big/ \int_0^\pi |\cos t|^p dt = 2^p M_0^p,$$

что противоречит допущению $c_p(2,\Omega) < 2M_0$. Следовательно, $2M_0(\Omega) \le 2M_0 \le c_p(2,\Omega)$ в случае $2 \le p < \infty$.

В случае $1 \leq p < 2$ и $c_p(2,\Omega) < \infty$ мы комбинируем неравенства Харди и Гельдера следующим образом

$$\iint_\Omega \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^2} dx\,dy = \iint_\Omega \frac{(|f|^{2/p})^p}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^2} dx\,dy$$

$$\leq \left(\frac{2}{p}\right)^p c_p(2,\Omega)^p \iint_\Omega \frac{|f|^{2-p}|\nabla f|^p}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^{2-p}} dx\,dy$$

$$\leq A \left(\iint_\Omega \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^2} dx\,dy\right)^{1-p/2} \left(\iint_\Omega |\nabla f|^2\ dx\,dy\right)^{p/2},$$

где $A = (2/p)^p c_p(2,\Omega)^p$. Отсюда следует, что $c_2(2,\Omega) \leq (2/p)c_p(2,\Omega)$. Применяя эту оценку, а также ранее доказанное неравенство $c_2(2,\Omega) \geq 2M_0(\Omega)$, получаем окончательно

$$c_p(2,\Omega) \geq pM_0(\Omega) \qquad (p \in [1,2)).$$

Теперь докажем верхнюю оценку. Естественно считать, что $M_0(\Omega) < \infty$. Отметим прежде всего, что из условия $M_0(\Omega) < \infty$ следует, в частности, что множество $\partial\Omega$ не имеет изолированных точек. Кроме того, ясно, что верхнюю оценку в (6.11) достаточно установить для компонент связности открытого множества Ω.

Поскольку $\mathbb{C}\backslash\Omega \neq \emptyset$ и $\partial\Omega$ не имеет изолированных точек, любая компонента связности Ω является гиперболической областью в $\mathbb{C}$, т.е. ее граница имеет более одной точки в $\mathbb{C}$. Без ограничения общности можно считать, что само множество Ω является гиперболической областью в $\mathbb{C}$. Пусть λ_Ω – плотность метрики Пуанкаре в Ω с кривизной -4.

Пусть $p > 1$ и пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку $p > 1$, имеем $|f|^p \in C_0^1(\Omega)$ и $|\nabla|f|^p| = p|f|^{p-1}|\nabla f|$. Пользуясь уравнением Лиувилля

$$\frac{\Delta \log \lambda_\Omega(z)^{-1}}{\lambda_\Omega(z)^2} = -4,\ z = x + iy \in \Omega,$$

и формулой Грина

$$\iint_\Omega [u\Delta v + (\nabla u, \nabla v)] dx\, dy = 0$$

для $v = \log \lambda_\Omega^{-1}$ и $u = |f|^p$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$4 \iint_\Omega |f|^p \lambda_\Omega^2 \, dx\, dy = p \iint_\Omega |f|^{p-1} \lambda_\Omega (\nabla |f|, \nabla \lambda_\Omega^{-1}) \, dx\, dy.$$

Комбинируя это соотношение с неравенством Гельдера

$$\left(\iint_\Omega |f|^{p-1} \lambda_\Omega |(\nabla |f|, \nabla \lambda_\Omega^{-1})| \, dx\, dy \right)^p \leq$$

$$\leq \left(\iint_\Omega |f|^p \lambda_\Omega^2 \, dx\, dy \right)^{p-1} \iint_\Omega \lambda_\Omega^{2-p} |(\nabla f, \nabla \lambda_\Omega^{-1})|^p \, dx\, dy,$$

непосредственно получаем

$$\iint_\Omega |f|^p \lambda_\Omega^2 \, dx\, dy \leq \left(\frac{p}{4} \right)^p \iint_\Omega \lambda_\Omega^{2-p} |(\nabla f, \nabla \lambda_\Omega^{-1})|^p \, dx\, dy \quad (6.12)$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку это неравенство доказано теперь для любого $p \in (1, \infty)$, устремляя $p \to 1$ для фиксированной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$, убеждаемся, что (6.12) будет верно и для $p = 1$.

Пользуясь (6.12) и следующим неравенством Осгуда [29]

$$\lambda_\Omega(z) |\nabla \lambda_\Omega(z)^{-1}| \leq \frac{2}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}, \; z = x + iy \in \Omega,$$

приходим к соотношению

$$\iint_\Omega |f|^p \lambda_\Omega(z)^2 \, dx\, dy \leq \left(\frac{p}{2} \right)^p \iint_\Omega \frac{\lambda_\Omega(z)^{2-2p} |\nabla f|^p}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^p} \, dx\, dy.$$

Следовательно, для любого $p \in [1, \infty)$ и любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\alpha(\Omega)^2 \iint_\Omega \frac{|f|^p}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^2}\, dx\, dy \leq$$

$$\leq \frac{(p/2)^p}{\alpha(\Omega)^{2p-2}} \iint_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^{2-p}}\, dx\, dy, \tag{6.13}$$

где

$$\alpha(\Omega) := \inf\{\lambda_\Omega(z) \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) : z \in \Omega\}.$$

Бирдон и Поммеренке [26] доказали с помощью явных оценок, что условие $M_0(\Omega) < \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha(\Omega) > 0$ и, в частности,

$$\alpha(\Omega)^{-1} \leq 2\pi M_0(\Omega) + 2a_0, \tag{6.14}$$

где a_0 – постоянная из теоремы Ландау. В настоящее время известно (см. [27]), что точное значение этой постоянной дано формулой (6.10).

Из (6.13) следует, что

$$c_p(2, \Omega) \leq \frac{p}{2\ \alpha(\Omega)^2}. \tag{6.15}$$

Очевидно, неравенство (6.14) и (6.15) влекут за собой верхние оценки в (6.11).

Теорема 6.5 доказана полностью.

6.4 Следствия и примеры

Выделим случай $M_0(\Omega) = 0$ в формуле (6.11).

Следствие 6.5.1 *Пусть Ω — открытое и собственное подмножество $\mathbb{C}$. Если не существует окружности, лежащей в Ω и имеющей центр на $\partial\Omega$, то $c_p(2,\Omega) \le 2a_0^2\ p$ $(2a_0^2 < 40)$.*

Отметим, что $M_0(\Omega) = 0$ для любой односвязной области, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Семейство $\{\Omega : M_0(\Omega) = 0\}$ является богатой коллекцией открытых множеств $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей области произвольной связности. Так, например, *равенство $M_0(\Omega_0 \setminus \overline{K}) = 0$ справедливо для всех областей, удовлетворяющих следующим условиям:*

(1) Ω_0 – открытое множество в плоскости $\mathbb{C}$ такое, что $\sup\{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega_0) : z \in \Omega_0\} = 1$, в частности, Ω_0 – некоторая полоса ширины 2;

(2) $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, где C_m являются континуумами (связными компактами) такими, что $\mathrm{diam}\ C_m \ge 2$ для всех $m \ge 1$;

(3) $K \subset \Omega_0$ и множество $\Omega_0 \setminus \overline{K}$ не пусто.

Приведем условие Поммеренке [28] на плотность емкости множества $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Оно имеет вид:

$$C(\Omega) := \inf\{r^{-1}\mathrm{cap}\ (\{|z - z_0| \le r\} \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)) :$$
$$: z_0 \in \partial\Omega,\ 0 < r < \infty\} > 0\ ,$$

где cap E – классическая логарифмическая емкость множества E (см. [8]). В [28] Поммеренке доказал, что имеют место оценки (в наших обозначениях)

$$M_0(\Omega) \le \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{C(\Omega)} \le 2M_0(\Omega) + \frac{4\log 2}{\pi}\ . \tag{6.16}$$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из соотношений (6.16) и теоремы 6.5.

Теорема 6.6 *Если $1 \le p < \infty$ и Ω является открытым и собственным подмножеством $\mathbb{C}$, то*

$$\frac{1}{4\pi}\log\frac{1}{C(\Omega)} - \frac{\log 4}{\pi} \le c_p(2,\Omega) \le \frac{p}{2}\left(\log\frac{1}{C(\Omega)} + 2a_0\right)^2.$$

Завершим этот параграф тремя примерами. Рассмотрим области типа $B(0,3)\backslash E_j$, где $B(0,3)=\{z\in\mathbb{C}: |z|<3\}$.

Пример 1. Предположим, что $E_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \bigcup\{0\}$, где

$$K_m = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y=0,\ m^{-m} \le x \le 2m^{-m}\}.$$

Область $\Omega_1 = B(0,3)\backslash E_1$ содержит в себе кольца

$$A_m = \{z\in\mathbb{C} : 2(m+1)^{-m-1} < |z| < m^{-m}\}$$

и

$$\frac{R(A_m)}{r(A_m)} = \frac{m+1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to \infty \text{ при } m\to\infty.$$

Следовательно, $M_0(\Omega_1) = c_p(2,\Omega_1) = \infty$.

Пример 2. Пусть теперь $E_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_{2m-1}\bigcup\{0\}$, где

$$L_{2m-1} = \{z = x+iy\in\mathbb{C} : y=0,\ 3^{-2m+1} \le x \le 3^{-2m+2}\}.$$

Для любого кольца A в $\Omega_2 = B(0,3)\backslash E_2$ с центром на $\partial\Omega_2$ имеем $R(A)/r(A) \le 3$. Просто показать, что $2\pi M_0(\Omega_2) = \log\ 3$. Таким образом, $c_p(2,\Omega_2) \le (8.76+\log 3)^2 p/2 < 48\ p$.

Пример 3. Пусть E_3 – классическое канторово множество. Рассмотрим

$$\Omega_3 = B(0,3)\backslash E_3.$$

Легко показать, что $M_0(\Omega_3) = M_0(\Omega_2) = (2\pi)^{-1}\log 3$. Итак, $c_p(2,\Omega_3) < 48\ p$.

6.5 Аналоги основной теоремы

В этом параграфе мы рассмотрим аналоги теоремы 6.5 для некоторых других функционалов, а также обсудим возможность обобщения теоремы 6.4 на пространственный случай.

Пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{C}$. Определим величины

$$\kappa_1(\Omega)^2 := \sup\left\{\left\|\frac{f}{\delta}\right\|_{L^2(\Omega)} : f \in C_0^\infty(\Omega),\ \|\delta\Delta f\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}$$

и

$$\kappa_2(\Omega) := \sup\left\{\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} : f \in C_0^\infty(\Omega),\ \|\delta\Delta f\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\},$$

где $\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ и Δ – оператор Лапласа.

В главе 4 доказано, что $\kappa_1(\Omega) \le 4$ и $\kappa_2(\Omega) \le 4$ для любой односвязной области Ω. В следующей теореме мы доказываем двусторонние оценки $\kappa_1(\Omega)$ и $\kappa_2(\Omega)$ для открытых множеств с равномерно совершенными границами. Кроме того, мы показываем, что верхние границы для величин $c_2(2, \Omega)$, $\kappa_1(\Omega)$ и $\kappa_2(\Omega)$ можно уменьшить для двусвязных областей.

Теорема 6.7 *Пусть Ω – открытое и собственное подмножество $\mathbb{C}$. Величина $\kappa_j(\Omega)$ $(j = 1, 2)$ конечна тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ – равномерно совершенное множество. Кроме того,*

$$2M_0(\Omega) \le \kappa_1(\Omega) \le 4(\pi M_0(\Omega) + a_0)^2,$$

$$2M_0(\Omega) \le \kappa_2(\Omega) \le 4(\pi M_0(\Omega) + a_0)^2.$$

Если Ω – двусвязная область в $\mathbb{C}$, то

$$M_0(\Omega) \le c_2(2, \Omega)/2 \le \pi M_0(\Omega) + a_0,$$

$$M_0(\Omega) \le \kappa_1(\Omega)/2 \le \pi M_0(\Omega) + a_0,$$
$$M_0(\Omega) \le \kappa_2(\Omega)/2 \le \pi M_0(\Omega) + a_0.$$

Доказательство. Предположим, что $\partial\Omega$ – равномерно совершенное множество, и функция $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Пользуясь формулой Грина и неравенством Коши-Буняковского-Шварца, будем иметь

$$\iint_\Omega |\nabla f|^2 dxdy = -\iint_\Omega f\Delta f\ dxdy$$

$$\le \left(\iint_\Omega |f|^2\delta^{-2}\ dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega \delta^2|\Delta f|^2\ dxdy\right)^{1/2},$$

где $\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$. Это неравенство и определения величин $c_2(2,\Omega)$ и $\kappa_1(\Omega)$ позволяют написать соотношения

$$\iint_\Omega |\nabla f|^2 dxdy \le \kappa_1(\Omega)^2,$$

$$\iint_\Omega |f|^2 \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^{-2}\ dxdy \le c_2(2,\Omega)^4$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$, нормированной условием

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)^2|\Delta f|^2\ dxdy = 1.$$

Следовательно,

$$\kappa_2(\Omega) \le \kappa_1(\Omega) \le c_2(2,\Omega). \tag{6.17}$$

Неравенства (6.11) и (6.17) непосредственно дают верхние оценки для $\kappa_1(\Omega)$ и $\kappa_2(\Omega)$ в общем случае. Так как неравенство

$$\iint_{\Omega} |f|^2 \lambda_{\Omega}^2 \, dxdy \leq \iint_{\Omega} |\nabla f|^2 \, dxdy \quad \forall f \in C_0^{\infty}(\Omega) \tag{6.18}$$

справедливо для любой односвязной или двусвязной гиперболической области Ω, то, очевидно, неравенства (6.14), (6.17) и (6.18) влекут за собой верхние оценки теоремы 6.7 для двусвязных областей.

Благодаря соотношениям (6.17), нижние оценки теоремы 6.7 нужно обосновать лишь для $\kappa_2(\Omega)$. С этой целью предположим, что $\kappa_2(\Omega) < 2M_0(\Omega)$. Без ограничения общности можем считать, что $0 \in \Omega$, и существует кольцо $A = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\}$ такое, что $A \subset \Omega$ и

$$M_0 := \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} > \kappa_2(\Omega)/2.$$

Для любой функции $f \in C_0^{\infty}(A)$ имеем

$$\iint_{A} |\nabla f|^2 \, dxdy \leq \kappa_2(\Omega)^2 \int\int_{A} \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^2 |\Delta f|^2 \, dxdy,$$

и, кроме того, $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < |z|$ для $z \in A$. Следовательно,

$$\int_{\varepsilon}^{1} v'(r)^2 r \, dr \leq \kappa_2(\Omega)^2 \int_{\varepsilon}^{1} (rv''(r) + v'(r))^2 r \, dr$$

для радиальных функций $v(r) = f(r, \theta), v \in C_0^{\infty}(\varepsilon, 1)$.

После замен $r = \varepsilon \exp(2M_0 t)$ и $v(r) = g(t)$, последнее неравенство может быть записано в виде следующего эквивалентного неравенства типа Виртингера

$$\int_{0}^{\pi} |g'(t)|^2 \, dt \leq \frac{\kappa_2(\Omega)^2}{(2M_0)^2} \int_{0}^{\pi} |g''(t)|^2 dt \quad \forall \, g \in C_0^{\infty}(0, \pi).$$

Следовательно, $\kappa_2(\Omega) \geq 2M_0$.

Это завершает доказательство теоремы 6.7.

Теперь рассмотрим пространственный случай. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Предположим, что $1 \leq p < \infty$, $1 < s < \infty$, и определим следующую постоянную Харди

$$c_p(s,\Omega) = \sup\left\{ \left\| \frac{f}{\delta^{s/p}} \right\|_{L^p(\Omega)} : \left\| \frac{\nabla f}{\delta^{s/p-1}} \right\|_{L^p(\Omega)} = 1, f \in C_0^\infty(\Omega) \right\},$$

где $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^n, n \geq 3)$ рассмотрим его *максимальный модуль* $M_0(\Omega)$, определяемый аналогично плоскому случаю. А именно, пусть

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \log \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум взят по всем кольцевым областям

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : r(A) < |x - x_0| < R(A)\}$$

таким, что

$$A \subset \Omega, \qquad x_0 \in \partial\Omega.$$

Если не существует ни одной такой кольцевой области A, то $M_0(\Omega) = 0$ по определению. *Если $M_0(\Omega) < \infty$, то будем говорить, что множество $\partial\Omega$ является равномерно совершенным.*

Ясно, что условия $M_0(\Omega) < \infty$ и $c_p(s,\Omega) < \infty$ не являются эквивалентными в случае $s \neq n$. Так, например, если $s > n$, то, как будет доказано в следующей главе 7,

$$c_p(s,\Omega) \leq p/(s-n)$$

для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\Omega \neq \mathbb{R}^n$).

Если $1 < s < n$ и B_0 – шар с проколотым центром, то легко показать, что $M_0(B_0) = \infty$, но величина $c_p(s, B_0)$ конечна для любого $p \in [1, \infty)$.

Прямое сравнение $M_0(\Omega)$ и постоянной Харди возможно, по-видимому, в случае $s = n$. По меньшей мере, если $c_p(n, \Omega)$ конечна, то $\partial\Omega$ является равномерно совершенным. Очевидно, последнее утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6.8 *Если $p \in [1, \infty)$, $n \geq 3$ и Ω – некоторое открытое и собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, то*

$$c_p(n, \Omega) \geq 2 \min\{1, p/n\} M_0(\Omega). \tag{6.19}$$

Доказательство. Схема доказательства такая же, что и в предыдущих теоремах. Рассмотрим отдельно случаи $p \geq n$ и $p < n$.

Предположим сначала, что $n \leq p < \infty$, $0 < M_0(\Omega) \leq \infty$ и $c_p(n, \Omega) < 2M_0(\Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что существует положительная постоянная ε такая, что

$$c_p(n, \Omega) < 2M_0 := \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

и

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < 1\} \subset \Omega, \quad (0, \ldots, 0) \in \partial\Omega.$$

Пользуясь радиальными функциями, сферическими координатами и очевидным неравенством $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq |x|$ для $x \in A$, можем написать

$$\int_\varepsilon^1 \frac{|v|^p r^{n-1} dr}{r^n} \leq c_p(n, \Omega)^p \int_\varepsilon^1 \frac{|v'|^p r^{n-1} dr}{r^{n-p}} \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1).$$

Пользуясь заменами $r = \varepsilon \exp(2M_0 t)$, $u(r) = g(t)$ и прямыми вычислениями, получаем

$$\int_0^\pi |g(t)|^p \, dt \leq \frac{c_p(n,\Omega)^p}{2^p M_0^p} \int_0^\pi |g'(t)|^p \, dt \quad \forall \, g \in C_0^\infty(0,\pi).$$

Следовательно, $c_p(n,\Omega)/(2M_0) \geq 1$. Это доказывает (6.19) в случае $n \leq p$.

В случае $1 \leq p < n$ и $c_p(n,\Omega) < \infty$, мы снова комбинируем неравенства Харди и Гельдера следующим образом

$$\int_\Omega \frac{|f|^n}{\delta^n} dx = \int_\Omega \frac{(|f|^{n/p})^p}{\delta^n} dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{n}{p}\right)^p c_p(n,\Omega)^p \int_\Omega \frac{|f|^{n-p} |\nabla f|^p}{\delta^{n-p}} dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{n}{p}\right)^p c_p(n,\Omega)^p \left(\int_\Omega \frac{|f|^n}{\delta^n} dx\right)^{1-p/n} \left(\int_\Omega |\nabla f|^n \, dx\right)^{p/n},$$

где $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Отсюда легко следует, что

$$c_n(n,\Omega) \leq \frac{n}{p} c_p(n,\Omega).$$

Так как $c_n(n,\Omega) \geq 2M_0(\Omega)$, имеем

$$c_p(n,\Omega) \geq (p/n) M_0(\Omega)$$

при $p \in [1,n)$.

Теорема 6.8 доказана полностью.

Замечание. В литературе по равномерно совершенным множествам можно найти различные определения *максимального модуля области* Ω (см. [17], [26], [28], [34]). Чтобы определить $M_0(\Omega)$ мы воспользовались кольцевыми областями в Ω с центрами на $\partial\Omega$. Такое определение непосредственно связано с определением Поммеренке [28], хотя и не является общепринятым. Можно, например, рассмотреть несколько иной максимальный модуль $M(\Omega)$, определяемый как супремум модулей кольцевых областей в Ω, разделяющих компоненты $\partial\Omega \bigcup \{\infty\}$. Легко убедиться в том, что

$$M_0(\Omega) \le M(\Omega) \le M_0(\Omega) + \frac{1}{2\pi}\log 3.$$

В заключение отметим, что при написании этой главы использованы статьи автора [43], [47], а следующая глава написана по материалам статьи [47].

Глава 7

Неравенства типа Харди

Оригинальная теорема Харди (см. [1]) влечет неравенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{|u(t)|^p}{t^s} dt \leq \left(\frac{p}{|s-1|} \right)^p \int_0^{+\infty} \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}} dt$$

для $p \geq 1$, $s \in \mathbb{R}, s \neq 1$ и любой абсолютно непрерывной функции $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$ такой, что $u(0) = 0$ в случае $s > 1$ и $u(+\infty) = 0$ в случае $s < 1$. Если $p = 1$, то равенство в неравенстве Харди имеет место для монотонных функций u; если же $p > 1$ и $u \not\equiv 0$, то равенство не достигается, но постоянная $(p/|s-1|)^p$ является точной.

Это неравенство Харди имеет различные многомерные аналоги. Наибольший интерес представляют его прямые аналоги, предполагающие, что область интегрирования Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, u и u' заменены функцией $f \in C_0^\infty(\Omega)$ и ее градиентом ∇f, а степени t заменены степенями функции расстояния до границы

$$\delta = \delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega).$$

Пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать сначала следующую постоянную Харди

$$c_p(s,\Omega) = \sup\left\{ \left\| \frac{f}{\delta^{s/p}} \right\|_{L^p(\Omega)} : f \in C_0^\infty(\Omega), \left\| \frac{\nabla f}{\delta^{s/p-1}} \right\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Вопрос о наиболее общих условиях на Ω, обеспечивающих конечность постоянной Харди $c_p(s,\Omega)$, интенсивно изучается в научной литературе. Имеется ряд интересных результатов, но есть и много нерешенных проблем (см., например, [14], [31], [38], [39], [40]).

В этой главе мы изучаем возможность получения явных оценок для $c_p(s,\Omega)$ и для некоторых родственных величин.

Прежде всего отметим три простых факта. С использованием процитированного выше одномерного неравенства Харди легко доказать следующие утверждения:

если $p \in [1,\infty)$ и $s \in \mathbb{R}$, то

$$c_p(s, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \frac{p}{|s-n|}, \qquad c_p(s, H) = \frac{p}{|s-1|},$$

где H – полупространство в $\mathbb{R}^n$.

Кроме того, известно следующее утверждение (см., например, [38], [39]): если $p > 1$, то для любого открытого выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, имеем равенство

$$c_p(s,\Omega) = \frac{p}{p-1}.$$

7.1 Прямой аналог одномерного случая

Мы докажем в этом параграфе, что условие $s > n$ является достаточным для конечности $c_p(s,\Omega)$ для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при любом $p \geq 1$. Более того, можно найти точную верхнюю грань этих констант. А именно, имеет место следующий прямой аналог одномерного неравенства Харди.

Теорема 7.1 *Пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $p \geq 1$ и $s > n$, то*

$$\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{s-n} \right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{7.1}$$

где $\delta = \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Постоянная $p^p(s-n)^{-p}$ в (7.1) является точной для ряда открытых множеств Ω. Например, она точна для любого Ω, имеющего вид $\Omega_0 \setminus \{x_0\}$, где Ω_0 – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega_0$.

Из теоремы 7.1 следует, что базовое неравенство Харди

$$\int_0^{+\infty} \frac{|u(t)|^2}{t^2} dt \leq 4 \int_0^{+\infty} |u'(t)|^2 dt \quad (u' \in L^2, \quad u(0) = 0)$$

имеет следующий точный аналог в $\mathbb{R}^n$:

$$\int_\Omega \frac{|f|^{2n}}{\delta^{2n}} dx \leq 4^n \int_\Omega |\nabla f|^{2n} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

который справедлив для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^n)$.

Докажем также, что равенство в (7.1) не достигается в соответствующем пространстве Соболева, если $f \not\equiv 0$ и

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) := \sup\{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \, : x \in \Omega\} < +\infty.$$

Оказывается, что доказанное неравенство можно усилить, а именно, добавить некоторое положительное слагаемое в левой части, не меняя при этом правой части. Более точно, мы доказываем следующую усиленную версию теоремы 7.1.

Теорема 7.2 *Пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $p \geq 1$ и $s > n$, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s} \int_\Omega |f|^p dx \leq \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx, \quad (7.2)$$

где $\delta = \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $\delta_0 = \sup\{\delta(x) : x \in \Omega\}$.

Доказательство теорем 7.1 *и* 7.2. Пусть Ω – открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Для $h \in (0,1)$ рассмотрим стандартное покрытие $\mathbb{R}^n$ кубами

$$Q_{h,z} = [0,h]^n + hz, \qquad z \in \mathbb{Z}^n.$$

Определим конечное множество индексов

$$\mathbb{Z}^n(\Omega, h) = \{z \in \mathbb{Z}^n : Q_{h,z} \subset \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/h\}\}$$

и следующую аппроксимацию Ω:

$$\Omega_h = \operatorname{int} \cup_{z \in \mathbb{Z}^n(\Omega,h)} Q_{h,z}.$$

Ясно, что для фиксированной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ достаточно доказать (7.1) и (7.2) для $\Omega = \Omega_h$ и всех достаточно малых $h \in (0,1)$ таких, что носитель функции f содержится в Ω_h. Замена $y = x/h$, $x \in \Omega_h$ показывает, что (7.1) и (7.2) для $\Omega = \Omega_h$ и $\Omega = \Omega_1$ эквивалентны. Таким образом, нам достаточно доказать (7.1) и (7.2) на множестве вида

$$\Omega_1 = \operatorname{int} \cup_{j=1}^m ([0,1]^n + z_j), \qquad z_j \in \mathbb{Z}^n.$$

Пусть S – некоторая q-мерная грань куба Q_{1,z_j}. Предположим, что $S \subset \partial\Omega_1$. Определим следующее подмножество Ω_1:

$$Q(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, x' \in \operatorname{int} S,\ B(x, |x - x'|) \subset \Omega_1\},$$

где $B(x, |x-x'|)$ – шар $\{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < |x'-x|\}$. Отметим, что внутренность S берется в $\mathbb{R}^q \supset S$ и, по определению, $\operatorname{int} S = S$, если S – 0-мерная грань, т.е. некоторая точка.

Предположим, что $Q(S) \neq \emptyset$. Это всегда имеет место, если S – $(n-1)$-мерная грань и $S \subset \partial\Omega_1$. Множество $Q(S) \neq \emptyset$ является звездной относительно S, т.е. $x' + t(x-x') \in Q(S)$ для любого $x' \in \operatorname{int} S$ и всех $t \in (0,1)$, если $|x-x'| = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_1)$ и $x \in Q(S)$. С точностью до вращения, $Q(S) \subset S \times \mathbb{R}^{n-q}_+$, и

$$\overline{Q}(S) = S \times \{t \in \mathbb{R}^{n-q}_+ : 0 \leq |t| \leq \varphi(t/|t|; S, Q)\},$$

где φ – положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup \varphi \leq \sup\{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_1) : x \in \Omega_1\}.$$

Если S' – некоторая j-мерная грань некоторого куба $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $S' \subset (\partial\Omega_1) \setminus S$, то множество

$$(S, S') := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, S) = \operatorname{dist}(x, S') \leq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_1)\}$$

является ограниченным подмножеством $(n-1)$-мерной гиперплоскости или поверхности второго порядка. Так как $\operatorname{mes}_n(S, S') = 0$ и

$$(\partial Q(S)) \setminus S \subset \cup_{S'}(S, S'),$$

получаем, что $\operatorname{mes}_n \partial Q(S) = 0$. Следовательно, для любой функции $g \in C(\overline{\Omega}_1)$

$$\int_{\Omega_1} g(x)\,dx = \sum_{S \subset \partial\Omega_1} \int_{Q(S)} g(x)\,dx. \tag{7.3}$$

Далее мы будем пользоваться обозначениями:

$$S^{n-q}_+ = \{\omega \in \mathbb{R}^{n-q}_+ : |\omega| = 1\}, \qquad \varphi_q = \varphi(\cdot; S, Q_1).$$

Пусть S – некоторая $(n-k)$-мерная грань куба, такая, что $S \subset \partial\Omega_1$ и $Q(S) \neq \emptyset$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. По теореме Фубини имеют место следующие формулы, зависящие от размерности S:

если $k = 1$, то

$$\int_{Q(S)} g(x)\,dx = \int_S dx' \int_0^{\varphi_{n-1}(x')} g(x' + r\nu(x'))dr; \tag{7.4}$$

если $2 \leq k \leq n-1$, то

$$\int_{Q(S)} g(x)\,dx = \int_S dx' \int_{S_+^k} d\omega \int_0^{\varphi_{n-k}(\omega)} g(x' + \omega r) r^{k-1} dr; \tag{7.5}$$

если $k = n$ и $S = \{x'\}$, то

$$\int_{Q(S)} g(x)\,dx = \int_{S_+^n} d\omega \int_0^{\varphi_0(\omega)} g(x' + \omega r) r^{n-1} dr. \tag{7.6}$$

Предположим, что $f \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $p \geq 1$, $s > n$,

$$\delta = \delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega_1), \quad \delta_0 = \sup\{\delta(x) \,:\, x \in \Omega_1\}.$$

Будем пользоваться формулами (7.4), (7.5) и (7.6) для функции

$$g(x) = |f(x)|^p \left(\frac{1}{\delta^s(x)} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s} \right).$$

Так как $\delta(x) = r$ в формулах (7.4) – (7.6), то получаем

$$\int_0^{\varphi_{n-k}} |f|^p \left(\frac{1}{r^s} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s} \right) r^{k-1} dr$$

$$\leq \int_0^{\varphi_{n-k}} \left(t^{k-s-1} + \frac{t^{k-1}}{(s-1)\delta_0^s} \right) dt \int_0^t |f|^{p-1} |\nabla f| dr$$

$$= p \int_0^{\varphi_{n-k}} |f|^{p-1} |\nabla f| A(r, \varphi_{n-k}) dr,$$

где $1 \leq k \leq n$ и

$$A(r, \varphi_{n-k}) = \frac{1}{s-k} \left(\frac{1}{r^{s-k}} - \frac{1}{\varphi_{n-k}^{s-k}} \right) + \frac{1}{k(s-1)\delta_0^s} (\varphi_{n-k}^k - r^k) \leq$$

$$\leq \frac{1}{s-k} \left(\frac{1}{r^{s-k}} - \frac{r^k}{\delta_0^s} \right) \leq \frac{r^{k-1}}{(s-n) r^{s-1}}.$$

Следовательно, имеем

$$\int_{Q(S)} |f|^p \left(\frac{1}{\delta^s(x)} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s} \right) dx \leq \frac{p}{s-n} \int_{Q(S)} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{s-1}(x)} dx$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Пользуясь этим и формулой (7.3), окончательно получаем

$$\int_{\Omega_1} |f|^p \left[\frac{1}{\delta^s(x)} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s} \right] dx \leq \frac{p}{s-n} \int_{\Omega_1} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{s-1}(x)} dx.$$

В случае $p = 1$ полученное соотношение представляет собой доказываемое неравенство. Если $p > 1$, то, дополнительно применяя неравенство Гельдера, получаем (7.2) для $\Omega = \Omega_1$.

Доказательство завершено.

Покажем теперь точность верхней границы $(p/(s-n))^p$ в доказанных теоремах на некоторых примерах.

Пусть Ω_0 – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что

$$0 \in \partial\Omega_0, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 3\} \subset \Omega_0.$$

Введем следующие обозначения

$$X = \int_{\Omega_0} \frac{|u|^p}{\delta^s} dx, \quad Y = \int_{\Omega_0} \frac{|\nabla u|^p}{\delta^{s-p}} dx, \quad \delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0).$$

Если $p \geq 1$, $s > n$, $\varepsilon > 0$ и

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= |x|^{(s-n+\varepsilon)/p}, \ 0 < |x| \leq 1, \\ u_\varepsilon(x) &= 2 - |x| \qquad, \ 1 < |x| \leq 2, \\ u_\varepsilon(x) &= 0 \qquad\qquad, \ 2 < |x| < \infty, \end{aligned}$$

то прямые вычисления дают

$$X(u_\varepsilon) = \frac{\omega_{n-1}}{\varepsilon} + O(1), \quad Y(u_\varepsilon) = \frac{\omega_{n-1}}{\varepsilon}\left(\frac{s-n+\varepsilon}{p}\right)^p + O(1),$$

где $\omega_{n-1} = |\partial B_1|$. Аппроксимируя u_ε радиальными функциями (т.е. функциями, зависящими лишь от $|x|$), принадлежащими $C_0^\infty(B(0,3) \setminus \{0\})$, при $\varepsilon \to 0$ получаем, что $c_p(s, \Omega_0) \geq p(s-n)^{-1}$. Следовательно, $c_p(s, \Omega_0) = p(s-n)^{-1}$ для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $s \in (n, \infty)$. В частности, константа из теоремы 7.1 точна для шара с проколотым центром $B(0,3)\setminus\{0\}$. Так как постоянная Харди инвариантна при линейных преобразованиях Ω, существует экстремальная область с заранее заданным $\delta_0 \in (0, \infty]$. Например, если $\Omega_0 = B(0, 2\delta_0)\setminus\{0\}$ и $s \in (n, \infty)$, то $c_p(s, \Omega_0) = p(s-n)^{-1}$ и $\delta_0(\Omega_0) = \delta_0$. Следовательно, константа $p^p(s-n)^{-p}$ в теореме 7.2 также является точной.

7.2 Связь с граничными моментами

Граничные α-моменты области Ω относительно ее границы, т.е. величины

$$\int_\Omega \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha dx$$

были использованы в главе 4 для оценки жесткости кручения. В этом параграфе мы опишем аналогичные факты в оценках постоянных для некоторых неравенств типа Харди.

В дальнейшем нам потребуются следующие уточнения формул (7.4), (7.5) и (7.6):

$$\int_{Q(S)} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq p \int_{Q(S)} \frac{|f|^{p-1}}{\delta^{s-1}} |\nabla f| \Phi_s(x,S) dx, \tag{7.7}$$

где $p \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$, S – $(n-k)$-мерная грань куба и

$$\Phi_s(x,S) = \delta^{s-k} \int_{\delta}^{\psi_{n-k}} \frac{dt}{t^{s-k+1}} \quad (1 \leq k \leq n). \tag{7.8}$$

Очевидно, с использованием (7.7), (7.8) и доказательства теоремы 7.1 можно получить обобщения теоремы 7.1 для допустимых значений параметров в неравенстве

$$\left(\int_{\Omega} \frac{|f|^q}{\delta^{\alpha}} dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{\beta}} dx \right)^{1/p} \qquad \forall f \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

С целью проиллюстрировать эту идею рассмотрим лишь некоторые частные случаи последнего неравенства. Сначала рассмотрим простейший случай, когда постоянная Харди оказывается связанной с объемом Ω, т.е. с 0-моментом Ω. Обозначим

$$c(p,\Omega) = \sup \left\{ \|f/\delta\|_{L^n(\Omega)} : \ f \in C_0^{\infty}(\Omega), \ \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\},$$

где $p \in (n, \infty)$.

Теорема 7.3 *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ с конечным объемом $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$. Если $p > n$, то*

$$|\Omega|^{1/n-1/p} \leq c(p,\Omega) \leq \frac{p}{p-n} |\Omega|^{1/n-1/p}, \tag{7.9}$$

т.е. неравенство

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{|f|^n}{\delta^n}dx\right)^{1/n} \le \lambda\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\nabla f|^p dx\right)^{1/p} \qquad (7.10)$$

справедливо для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *с некоторой постоянной* λ *такой, что* $1 \le \lambda \le p/(p-n)$.

Доказательство. Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями p/n и $p/(p-n)$, на основании предыдущей теоремы получим

$$\left(\int_\Omega \frac{|f|^n}{\delta^n}dx\right)^{1/n} \le |\Omega|^{1/n-1/p}\left(\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p}dx\right)^{1/p}$$

$$\le \frac{p}{p-n}|\Omega|^{1/n-1/p}\left(\int_\Omega |\nabla f|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда легко выводим верхние границы для $c(p,\Omega)$ и λ.

Остается доказать нижние оценки для $c(p,\Omega)$. Согласно известной теореме Кальдерона–Зигмунда–Буренкова о регуляризации функции расстояния (см. [16], [20]), *для любого открытого множества* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(\Omega \ne \mathbb{R}^n)$ *и для любого* $\beta \in (0,1)$ *существует некоторая* $C^\infty(\Omega)$*-функция* $\delta_\beta(\cdot,\Omega)$ *такая, что*

$$\beta\delta(x,\Omega) \le \delta_\beta(x,\Omega) \le \delta(x,\Omega), \quad |\nabla\delta_\beta(x,\Omega)| \le 1, \quad x \in \Omega.$$

Рассмотрим функции

$$f_{\alpha\beta\varepsilon}(x) = \begin{cases} (\delta_\beta(x,\Omega)-\varepsilon)^\alpha, & \text{если} \quad x \in \Omega(\beta,\varepsilon), \\ 0, & \text{если} \ x \in \Omega \setminus \Omega(\beta,\varepsilon), \end{cases}$$

где $0 < \beta \le 1$, $1 \le \alpha < \infty$, $0 < \varepsilon < \beta\delta_0(\Omega)$ и

$$\Omega(\beta,\varepsilon) = \{x \in \Omega : \delta_\beta(x,\Omega)| > \varepsilon\},$$

$$\Omega(1,\varepsilon) = \{x \in \Omega : \delta(x,\Omega)| > \varepsilon\}.$$

Множество $\Omega(\beta,\varepsilon)$ ограничено, так как по условию теоремы объем Ω конечен. Ясно, что $f_{\alpha\beta\varepsilon} \in C_0^1(\Omega)$ для $\alpha > 1$ и $\beta < 1$. Поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $C_0^1(\Omega)$, можно написать

$$c(p,\Omega) \geq \left(\int_{\Omega(\beta,\varepsilon)} \frac{|f_{\alpha\beta\varepsilon}|^n}{\delta^n} dx\right)^{1/n} \left(\int_{\Omega(\beta,\varepsilon)} |\nabla f_{\alpha\beta\varepsilon}|^p \, dx\right)^{-1/p},$$

где $\alpha > 1$ и $\beta < 1$. При $\alpha \to 1$ и $\beta \to 1$ с учетом того, что $|\nabla\delta_\beta(x,\Omega)| \leq 1$, получим

$$c(p,\Omega) \geq \left(\int_{\Omega(1,\varepsilon)} \frac{|f_{11\varepsilon}|^n}{\delta^n} dx\right)^{1/n} \left(\int_{\Omega(1,\varepsilon)} dx\right)^{-1/p}$$

$$= \left(\int_{\Omega(1,\varepsilon)} \frac{(\delta-\varepsilon)^n}{\delta^n} dx\right)^{1/n} |\Omega(1,\varepsilon)|^{-1/p},$$

где $\delta = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости, применяемой при $\varepsilon \to 0$, будем иметь окончательно $c(p,\Omega) \geq |\Omega|^{1/n-1/p}$. Это завершает доказательство теоремы 7.3.

В следующей теореме рассматривается неравенство

$$\int_\Omega \frac{|f|}{\delta^s} dx \leq c \left(\int_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^s} dx\right)^{1/p} \qquad \forall f \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (7.11)$$

Теорема 7.4 *Предположим, что Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, причем*

$$M = \int_\Omega \delta^{\frac{p}{p-1}-s} dx < +\infty.$$

Если $p>1$, $s\ge n$ и $1/p+1/s>1$, то наилучшая постоянная в (7.11) удовлетворяет неравенствам

$$1-\frac{1}{p}\le\frac{c}{M^{1-1/p}}\le\Gamma^{1-1/p}\left(\frac{2p}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right), \qquad (7.12)$$

где Γ – гамма функция Эйлера.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 7.2 с необходимыми изменениями, легко получаем верхние оценки в (7.12). А именно, пользуясь (7.7) и (7.8) для $s>n$ и $p=1$, суммируя по всем S с $Q(S)\neq\emptyset$ и применяя неравенство Гельдера с показателями p и $q=p/(p-1)$, получаем

$$\int_{\Omega_1}\frac{|f|}{\delta^s}dx\le\left(\int_{\Omega_1}\frac{|\nabla f|^p}{\delta^s}dx\right)^{1/p}\left(\int_{\Omega_1}\Phi^q dx\right)^{1/q},$$

где

$$\Phi|Q(S)=\frac{\delta^{s/p}}{\delta^{s-1}}\int_\delta^{\psi_{n-k}}\frac{dt}{t^{s-k+1}}\quad(k=1,2,\dots,n)$$

для любой $(n-k)$-мерной грани куба S. Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega_1}\Phi^q dx\le\frac{1}{q^q}\Gamma(q+1)\cdot M,$$

так как

$$\int_0^\varphi\left(\frac{r^{s/p}}{r^{s-1}}\int_r^\varphi\frac{dt}{t^{s-k+1}}\right)^q r^{k-1}dr=$$

$$=\frac{\varphi^{q-s+k}}{(s-k)^q}\int_0^1\tau^{q-s}(1-\tau^{s-k})^q\tau^{k-1}d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{q}{s-k})\Gamma(q+1)}{(s-k)^q\Gamma(\frac{q}{s-k}+q)}\int_0^\varphi r^{q-s}r^{k-1}dr\le$$

$$\leq q^{-q}\Gamma(q+1)\int_0^{\varphi} r^{q-s}r^{k-1}dr.$$

Чтобы получить последнее неравенство, мы воспользовались соотношением

$$\frac{\Gamma(\frac{q}{s-k})}{(s-k)^q\Gamma(\frac{q}{s-k}+q)} \leq q^{-q}.$$

Это неравенство является следствием тождества $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ и некоторых оценок Гочи (W. Gautschi) для гамма функции (см., например, книгу Д.С.Митриновича [9] по аналитическим неравенствам).

Для вывода верхней оценки в (7.12) вначале мы замечаем, что

$$\int_\Omega \frac{|f_0|}{\delta^s}dx\left(\int_\Omega \frac{|\nabla f_0|^p}{\delta^s}dx\right)^{-1/p} = (1-1/p)M^{1-1/p}$$

для функции $f_0 = \delta^{\frac{p}{p-1}}$.

Для завершения доказательства достаточно заменить функцию расстояния регуляризованной по Кальдерону–Зигмунду–Буренкову функцией (см. доказательство теоремы 7.3).

7.3 Оценки для выпуклых областей

Для выпуклых областей оценки сверху получаются уже при $s > 1$ независимо от размерности пространства.

Теорема 7.5 *Пусть Ω – открытое, выпуклое и собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $p \geq 1$ и $s > 1$, то*

$$\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (7.13)$$

где $\delta = \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Кроме того, в этом параграфе мы докажем следующую нижнюю оценку. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим площадь поверхности его границы, определяемую по Минковскому:

$$\sigma(\Omega) = \limsup_{t \to +0} A(t)/t,$$

где $A(t) = \operatorname{mes}\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < t\}$.

Теорема 7.6 *Если $p \geq 1$, $s > 1$ и Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечной площадью поверхности $\sigma(\Omega)$, то*

$$c_p(s, \Omega) \geq \frac{p}{s-1}.$$

Из теорем 7.5 и 7.6 следует, что $c_p(s, \Omega) = p/(s-1)$ для $p \geq 1$, $s > 1$ и любой ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Мы хотим усилить этот результат, точнее, усилить неравенство (7.13), добавляя в левой части положительное слагаемое. С этой целью обсудим некоторые факты, связанные со следующей теоремой Брезиса и Маркуса [35]:

если Ω – открытое, выпуклое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda = 1/\operatorname{diam}(\Omega)^2$, то

$$\int_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2} dx + \lambda \int_\Omega |f|^2 dx \leq 4 \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (7.14)$$

Естественно спросить, выполняется ли неравенство Брезиса-Маркуса (7.14) с некоторой постоянной $\lambda > 0$ для какой-нибудь выпуклой, но неограниченной области. Ясно, что справедливость (7.14) влечет за собой неравенство

$$\lambda \le 4\lambda_1(\Omega),$$

где $\lambda_1(\Omega)$ – первое собственное значение граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Величина $\lambda_1(\Omega)$ монотонно растет с ростом области. Следовательно, сравнение с той же величиной для вписанного шара приводит к соотношению

$$\lambda \le \frac{\mathrm{const.}}{\delta_0^2(\Omega)}.$$

Этот аргумент показывает, что (7.14) неверно с постоянной $\lambda > 0$ для любой области Ω, если $\delta_0 = \delta_0(\Omega) = +\infty$. Ясно также, что если $n \ge 2$, то существуют неограниченные выпуклые области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\delta_0(\Omega) < +\infty$. Мы доказываем, что (7.14) справедливо для любой выпуклой области с постоянной $\lambda = 1/\delta_0^2$, устанавливая усиленную версию (7.13).

Теорема 7.7 *Пусть Ω – открытое, выпуклое и собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $p \ge 1$ и $s > 1$, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s}\int_\Omega |f|^p dx \le$$

$$\le \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}}dx, \qquad (7.15)$$

где $\delta = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, $\delta_0 = \sup\{\delta(x)\ : x \in \Omega\}$.

Доказательство теорем 7.5 *и* 7.7. Пусть Ω – открытое, выпуклое и собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Известно, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует выпуклый n-мерный многогранник Q, такой, что $K \subset \mathrm{int}Q \subset \Omega$ (см.[4]). Следовательно, для фиксированной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ достаточно доказать неравенства (7.13) и (7.15) для любого выпуклого n-мерного многогранника Q, такого, что

$$\mathrm{supp}\, f \subset \mathrm{int}Q \subset \Omega.$$

Пусть Q – такой многогранник, и $S_1, S_2, \ldots, S_m$ – множество всех $(n-1)$-мерных граней Q. Вначале укажем специальное разбиение Q:

$$Q = \cup_{j=1}^m Q_j, \qquad \mathrm{int}Q_j \cap Q_k = \emptyset \quad \text{for} \quad j \neq k, \tag{7.16}$$

где Q_j – выпуклые компакты. Для любого $x' \in \mathrm{int}S_j$ определим

$$\varphi_j(x') = \max\{t \in \mathbb{R}_+ : B(x' + t\nu(x'), t) \subset Q\},$$

где $\nu(x')$ – внутренняя нормаль к грани S_j в точке x', $B(x,t)$ – шар $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq t\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Легко получить, что

$$Q_j := S_j \cup \{x = x' + t\nu(x') : 0 < t \leq \varphi_j(x')\}$$

является замкнутым, n-мерным и выпуклым множеством, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ удовлетворяют (7.16). Благодаря выпуклости Q_j имеем $\mathrm{mes}_n \cup_{j=1}^m \partial Q_j = \emptyset$. Поэтому для любой функции $g \in L^1(Q)$

$$\int_Q g(x)\, dx = \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} g(x)\, dx$$

и, по теореме Фубини,

$$\int_{Q_j} g(x)\,dx = \int_{S_j} dx' \int_0^{\varphi_j(x')} g(x' + t\nu(x'))dt. \qquad (7.17)$$

Для любого $x = x' + t\nu(x') \in Q_j$ имеем

$$\delta(x) = t, \qquad \delta(x) \le \varphi_j(x') \le \delta_0, \qquad (7.18)$$

где $\delta = \delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial Q)$ и δ_0 – ее максимум в Q.

Предположим, что $p \ge 1$, $s > 1$ и $f \in C_0^\infty(Q)$. Применяя (7.17) и (7.18) к функции

$$g(x' + t\nu(x')) = |f(x' + t\nu(x'))|^p \left(\frac{1}{t^s} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s}\right),$$

имеем

$$\int_{Q_j} |f(x)|^p \left[\frac{1}{\delta^s(x)} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s}\right] dx \le$$

$$\le p \int_{S_j} dx' \int_0^{\varphi_j(x')} \left(\frac{1}{t^s} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s}\right) dt \int_0^t |f(y)|^{p-1} \left|\frac{\partial f(y)}{\partial \tau}\right| d\tau$$

$$= \frac{p}{s-1} \int_{S_j} dx' \int_0^{\varphi_j(x')} \frac{|f(y)|^{p-1}}{\tau^{s-1}} \left|\frac{\partial f(y)}{\partial \tau}\right| A(x', \tau) d\tau,$$

где $y = x' + \tau\nu(x')$ и

$$A(x', \tau) = 1 - \frac{\tau^{s-1}}{\varphi_j^{s-1}} + \frac{\tau^{s-1}}{\delta_0^s}[\varphi_j(x') - \tau] \le 1.$$

Пользуясь этим, неравенством $|\partial f/\partial \tau| \le |\nabla f|$ и суммированием по $j = 1, 2, \ldots, m$, получим

$$I_Q := \int_Q |f|^p \left(\frac{1}{\delta^s} + \frac{1}{(s-1)\delta_0^s}\right) dx \le$$

$$\leq \frac{p}{s-1}\int_Q \frac{|f|^{p-1}}{\delta^{s-1}}|\nabla f|dx. \tag{7.19}$$

Если $p = 1$, то (7.19) представляет собой (7.15) для $\Omega = Q$. В случае $p > 1$ применяем неравенство Гельдера в соотношении (7.19). Получаем

$$I_Q \leq \frac{p}{s-1}\left(\int_Q \left(\frac{|f|^{p-1}}{\delta^{s-s/p}}\right)^{p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int_Q \left(\frac{|\nabla f|}{\delta^{s/p-1}}\right)^{p} dx\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{p}{s-1}\left(\int_Q \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)^{1/p'} \left(\int_Q \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}}dx\right)^{1/p},$$

где $1/p' = 1 - 1/p$. Следовательно,

$$I_Q \leq \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int_Q \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}}dx.$$

Этим и завершается доказательство теорем 7.5 и 7.7.

Доказательство теоремы 7.6. Предположим, что $p \geq 1$, $s > 1$ и величина $\sigma(\Omega)$ конечна. Обозначим

$$X = \int_\Omega \frac{|u|^p}{\delta^s}dx, \quad Y = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{\delta^{s-p}}dx, \quad \delta = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega).$$

Для $\varepsilon \in (0,1)$ и $u = u_\varepsilon(x) = \delta^{(s-1+\varepsilon)/p}$ имеем

$$X = M_{\varepsilon-1}(\Omega), \qquad Y = \left(\frac{s-1+\varepsilon}{p}\right)^p M_{\varepsilon-1}(\Omega), \tag{7.20}$$

где $M_{\varepsilon-1}(\Omega)$ – следующий граничный момент Ω относительно своей границы

$$M_{\varepsilon-1}(\Omega) = \int_\Omega \delta^{-1+\varepsilon}dx.$$

Пользуясь (7.20), соотношением

$$\limsup_{\varepsilon\to+0} \varepsilon M_{\varepsilon-1}(\Omega) \le \sigma(\Omega) \tag{7.21}$$

и теоремой Кальдерона–Зигмунда–Буренкова, получаем

$$c_p(s,\Omega) \ge p(s-1)^{-1}.$$

Остается обосновать (7.21). Для этого заметим прежде всего, что

$$\gamma_k := \sup\left\{\frac{A(t)}{t} \,:\, 0 < t < \frac{\delta_0}{k}\right\} - \sigma(\Omega) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно,

$$b := \limsup_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \int_0^{\delta_0} \frac{A(t)}{t^{2-\varepsilon}} dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \int_0^{\delta_0/k} \frac{A(t)}{t^{2-\varepsilon}} dt \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty} [\sigma(\Omega)+\gamma_k] \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{\delta_0}{k}\right)^{\varepsilon} = \sigma(\Omega).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$(1-\varepsilon)\int_0^{\delta_0} \frac{A(t)}{t^{2-\varepsilon}} dt = \frac{A(\delta_0)}{\delta_0^{1-\varepsilon}} + \int_0^{\delta_0} \frac{dA(t)}{t^{1-\varepsilon}} = M_{\varepsilon-1}(\Omega)$$

для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon\to+0} \varepsilon M_{\varepsilon-1}(\Omega) = b \le \sigma(\Omega),$$

что доказывает (7.21).

Теорема 7.6 доказана.

7.4 Упражнения

Предположим, что $p \geq 1$ и $s > 1$. Задача заключается в обосновании некоторой верхней оценки для максимального значения $\lambda > 0$ в неравенстве

$$\int_\Omega \frac{|u|^p}{\delta^s} dx + \frac{\lambda}{\delta_0^s} \int_\Omega |u|^p dx \leq \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{\delta^{s-p}} dx, \qquad (7.22)$$

справедливом для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ в выпуклой области (сравните с формулой (7.15)).

Указания:

1) Рассмотрите следующие области

$$\Omega_\varepsilon = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$$

и функции u_ε, определенные соотношениями

$$u_\varepsilon(x) = \delta^{(s-1+\varepsilon)/p}, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

ограничиваясь лишь случаем $n = 2$. Обратим внимание читателя на то, что $\delta_0 = \sup \delta = \varepsilon$ для Ω_ε.

2) Для $n = 2$ прямыми вычислениями покажите, что

$$X = \frac{2\varepsilon^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{8\varepsilon^\varepsilon}{1+\varepsilon}, \qquad Y = \left(\frac{s-1+\varepsilon}{p}\right)^p X,$$

$$Z := \frac{\lambda}{\delta_0^s} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^p dx = \frac{2\lambda\varepsilon^\varepsilon}{s+\varepsilon}\left(1 + \frac{4\varepsilon}{s+1+\varepsilon}\right)$$

и

$$\frac{X + Z - \left(\frac{p}{s-1}\right)^p Y}{2\varepsilon^\varepsilon} = \frac{\lambda}{s} - \frac{p}{s-1} + O(\varepsilon).$$

3) Теперь можно рассуждать следующим образом: если (7.22) имеет место, то

$$\lambda \leq \frac{ps}{s-1}.$$

Следовательно, наилучшее из возможных значений λ в (7.22) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{s-1} \leq \lambda \leq \frac{ps}{s-1} \quad \forall p \geq 1, \forall s > 1.$$

В заключении отметим, что ниже дан список литературы по теме учебного пособия. Мы указали лишь те источники, на которые есть прямые ссылки в тексте пособия. Список литературы составлен так: в хронологическом порядке вначале указаны 17 цитированных монографий, затем – 30 цитированных в пособии статей.

Литература

[1] *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства, — М.: ИЛ, 1948.

[2] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей)* Теория звука, Т.1. — М.: ГИТТЛ, 1955.

[3] *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов, — М.: ГИТТЛ, 1957.

[4] *Hadwiger H.* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläsche und Isoperimetrie, Springer - Verlag, 1957.

[5] *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм,— М.: ГИФМЛ, 1961.

[6] *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства математической физики, — М.: Физматгиз, 1962.

[7] *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел, — М.: ГИФМЛ, 1963.

[8] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного,— М.: Наука, 1966.

[9] *Mitrinovic D.S.* Analytic Inequalities,— Springer-Verlag, Berlin, Hedelberg, New York, 1970.

[10] *Stein E.M.* Singular integrals and differentiability properties of functions, — Princeton Univ. Press, 1970.

[11] *Ahlfors L.V.* Conformal invariants. Topics in Geometric Function Theory,— McGraw - Hill, 1973.

[12] Bandle C. *Isoperimetric Inequalities and Applications.* Monographs and Studies in Mathematics, 7. Pitman, — London. 1980.

[13] *Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А.* Геометрические неравенства, — Ленинград: Наука, 1980.

[14] *Opic V. and Kufner A.* Hardy type inequalities, Pitman Research Notes in Math. Vol.219, Longman, 1990.

[15] Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* Монография. Изд-во Казанский фонд "Математика", — Казань, 1996.

[16] *Burenkov V.I.* Sobolev Spaces on Domains, Teubner - Texte zur Mathematik, Bd. 137, — Leipzig, 1998.

[17] *Garnett J.B. and Marshall D.E.* Harmonic Measure, Cambridge Univ. Press, — Cambridge, 2005.

[18] *Faber G.* Bermerkungen zu Sätzen der Gausschen theoria combinations observationum // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1 (1922) 7 – 21.

[19] *von Mises R.* Über einige Abschätzungen von Erwartungswerten // J. Reine Angew. Math. 165 (1931) 184 – 193.

[20] *Calderon A.P. and Zigmund A.* Local properties of solutions elliptic partial differential equations // Studia Math. 20 (1961), 171 – 225.

[21] *Jenkins J.* On the Bloch constant // J.Math. and Mech., 10, N5 (1961) 729 – 734.

[22] *Makai E.* A lower estimation of the principal frequencies of simply connected membranes // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965) 319 – 323.

[23] *Agard S.* Distortion theorems for quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. 413 (1968) 1 – 12.

[24] *Hayman W.K.* Some bounds for the principal frequency // Appl. Anal. 7 (1977) 247 – 254.

[25] *Osserman R.* A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum // Comment. Math. Helv. 52(1977) 545 – 555.

[26] *Beardon A.E. and Pommerenke Ch.* The Poincaré metric of plane domains // J. London Math. Soc. (2) 18 (1978) 475 – 483.

[27] *Hempel J.A.* The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky // J. London Math.Soc.(2) 20 (1979) 435 – 445.

[28] *Pommerenke Ch.* Uniformly perfect sets and the Poincaré metric // Arch. Math. 32 (1979) 192 – 199.

[29] *Osgood B.*, Some properties of f''/f' and the Poincaré metric // Indiana University Math. J. 31 (1982) 449 – 461.

[30] *Beesack P.R.* Inequalities for absolute Moments of a Distribution: From Laplace to von Mises // J. Math. Anal. Appl. 98 (1984) 435 – 457.

[31] *Ancona A.* On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$ // J. London Math. Soc. (2) 37 (1986) 274 – 290.

[32] *Fernández J.L.* Domains with Strong Barrier // Revista Matematica Iberoamericana. 5 (1989) 47 – 65.

[33] *Bandle C. and Flucher M.*, Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouville's equations $\Delta U = e^U$ and $\Delta U = U^{(n+2)/(n-2)}$ // SIAM Rev. (2) 38 (1996) 191 – 238.

[34] *Järvi P. and Vuorinen M.* Uniformly perfect sets and quasiregular mappings // J. London Math.Soc.(2) 54 (1996) 515 – 529.

[35] *Brezis H. and Marcus M.* Hardy's inequalities revisited // Dedicated to Ennio De Giorgi, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25 (1997, 1998) 217 – 237.

[36] *Авхадиев Ф.Г.* Вариационные конформно-инвариантные неравенства и их приложения // Доклады АН, 359, № 6 (1998) 727 – 730.

[37] *Авхадиев Ф.Г.* Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сборник. 189, Вып. 12 (1998) 3 – 12.

[38] *Marcus M., Mizel V.J. and Pinchover Y.* On the best constant for Hardy's inequality in $\mathbf{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 3237 – 3250.

[39] *Davies E.B.* A Review of Hardy Inequalities // The Maz'ya anniversary Collection. Vol. 2. Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 110 (1999) 55 – 67.

[40] *Miklyukov V.M., Vuorinen M.K.* Hardy's inequality for $W_0^{1,p}$- functions on Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 127, No.9 (1999) 2145 – 2154.

[41] *Avkhadiev F.G., Salahudinov R.G.* Isoperimetric Inequalities for Conformal Moments of Plane Domains // J. of Inequal. Appl. 7(4) (2002) 593 – 601.

[42] *Avkhadiev F.G., Kayumov I.R.* Comparison theorem of isoperimetric type for moments of compact sets // Collectanea Math. 55 No.1 (2004) 1 – 9.

[43] *Авхадиев Ф.Г.* Конформно-инвариантные неравенства математической физики // Наукоемкие технологии. 5, № 4 (2004) 47 – 51.

[44] *Авхадиев Ф.Г.* Новые изопериметрические неравенства для моментов областей и жесткости кручения // Известия вузов. Математика. № 7(506) (2004) 3 – 11.

[45] *Avkhadiev F.G.* A simple proof of the Gauss-Winckler inequality // Amer. Math. Monthly, 112 No. 5 (2004) 459 – 462.

[46] *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image // Isr. J. Math. 145 (2005) 349 – 374.

[47] *Avkhadiev F.G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math. 21 (2006) 3 – 31.

Авхадиев
Фарит Габидинович

Неравенства для интегральных характеристик областей

Учебное пособие

Подписано в печать 15.05.06. Бумага офсетная. Печать ризографическая. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л. 8, 25. Уч.-изд. л. 8, 88.

Тираж 125 экз. Заказ 5/63.

Издательство
"Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии Издательского центра Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

420008, г. Казань, ул. Университетская, 17

Тел. 292-65-60, 231-53-59