

Н. Б. Ильинский, Д. Ф. Абзалилов

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ КРЫЛОВЫХ
ПРОФИЛЕЙ**

**УСЛОЖНЕННЫЕ СХЕМЫ ТЕЧЕНИЯ;
ПОСТРОЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ
ФОРМЫ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ**

**КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2011**

УДК 533
ББК 22.253
И46

*Печатается по рекомендации
Ученого совета
НИИММ им. Н.Г.Чеботарева*

И46 Ильинский Н.Б. Математические проблемы проектирования крыловых профилей: усложненные схемы течения; построение и оптимизация формы крыловых профилей / Н.Б.Ильинский, Д.Ф.Абзалилов. – Казань: Казан. ун-т, 2011. – 284 с.

ISBN 978-5-98180-898-2

В книге излагаются методы проектирования крыловых профилей и оптимизации их формы при усложненных схемах течения. Методы основаны на теории обратных краевых задач для аналитических функций. Рассмотрены задачи построения безмоментных крыловых профилей; а также обладающих продольной устойчивостью; с устройствами отбора внешнего потока и выдува реактивной струи; двухэлементных; крыловых профилей экранопланов; с устройствами управления пограничным слоем; описаны методы оптимизации формы крыловых профилей с целью улучшения аэродинамических характеристик; рассмотрены модельные задачи нахождения форм контуров с максимальной величиной коэффициента подъемной силы.

Предназначена для научных работников и инженеров, интересующихся методами проектирования и оптимизации форм крыловых профилей летательных аппаратов; может быть также полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующихся в области механики жидкости и газа.

УДК 533
ББК 22.253

ISBN 978-5-98180-898-2

©Н.Б.Ильинский, Д.Ф.Абзалилов, 2011
©Казанский (Приволжский)
федеральный университет, 2011

Оглавление

Предисловие	6
Введение	14
Глава 1 Основная обратная краевая задача аэро- гидродинамики, варианты квазирешений	22
§1. Постановка и квазирешение основной обрат- ной краевой задачи аэрогидродинамики	22
§2. Квазирешение с учетом условия безмоментности	31
§3. Случай учета продольной статической устой- чивости	35
§4. Учет условия безотрывности обтекания	42
Глава 2 Крыловые профили с устройствами отбора внешнего потока и выдува реактивной струи	47
§5. Об аэродинамических силах, действующих на пронизаемые крыловые профили	49
§6. Отбор через кольцевой канал	58
§7. Отбор в диапазоне режимов обтекания	67
§8. Выдув реактивной струи	81
§9. Выдув струи в диапазоне режимов обтекания ...	95
§10. Случай одновременного отбора и выдува	101
Глава 3 Двухэлементные крыловые профили	110
§11. Обратная краевая задача аэрогидродинами- ки для двухэлементного крылового профиля	111

§12. Обобщение на случай учета вязкости и сжимаемости.....	121
§13. Оптимизация формы двухэлементного крылового профиля.....	129
§14. Двухэлементный профиль в диапазоне углов атаки.....	137
Глава 4 Крыловые профили вблизи экрана.....	145
§15. Обратная краевая задача аэрогидродинамики для крылового профиля вблизи экрана.....	146
§16. Случай скользящего крылового профиля.....	150
§17. Крыловой профиль в диапазоне режимов обтекания.....	161
§18. Устойчивые крыловые профили экранопланов... ..	167
Глава 5 Крыловые профили с устройствами отсоса пограничного слоя.....	170
§19. Щелевой отсос пограничного слоя.....	171
§20. Распределенный отсос пограничного слоя.....	183
§21. Оптимизация параметров проницаемого участка крылового профиля.....	191
§22. Проектирование крылового профиля с минимальным коэффициентом аэродинамического сопротивления.....	202
Глава 6 Модельные задачи максимизации коэффициента подъемной силы контуров.....	212
§23. Обтекание контура с источниками и стоками....	212
§24. Обтекание контура и вихря.....	229
§25. Контур с “реактивным” источником.....	237
§26. Двухэлементный контур.....	246
§27. Контур вблизи экрана.....	257

Приложение	270
Литература	273
Используемые аббревиатуры и обозначения	280

Предисловие

Современный этап развития авиации и судостроения характеризуется повышенным интересом к математическим проблемам аэродинамического проектирования и оптимизации формы профилей летательных аппаратов (ЛА), так как удачная профилировка крыла самолета, лопастей винтов, лопаток турбомашин приводит к повышению эффективности аппарата и снижению энергетических затрат. Необходимость выполнения этих положений связана с возросшим уровнем требований к летно-техническим и экономическим характеристикам перспективных гражданских самолетов, которые в нынешних условиях проектируются с учетом конкурентной борьбы на мировом рынке. Так как традиционные классические профили крыльев ЛА дозвуковой авиации почти исчерпали свои возможности, то возникает проблема создания крыльев с устройствами управления потоком при усложненных схемах течения. А это приводит к значительным трудностям как математического моделирования таких задач, так и к сложным дорогостоящим экспериментальным исследованиям в аэродинамических трубах и особенно в полете.

Преодолеть математические трудности ряда задач удается, используя методы обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА). С использованием усложненных схем течения эти трудности резко возрастают, что приводит к необходимости дальнейшего развития теории ОКЗА.

Монография состоит из введения, шести глав, содержащих 27 параграфов, приложения и списка литературы.

Во введении описываются особенности обратных краевых задач (ОКЗ) теории аналитических функций, их принципиальное отличие от обратных некорректных задач математической физики. Разъясняется принципиальное различие с фи-

зической точки зрения между прикладными ОКЗ (задачами конструирования) и краевыми задачами со свободными границами (задачами прогноза). Излагается краткая историческая справка.

В первой главе разобраны задачи проектирования крыловых профилей, обтекаемых в безграничном потоке.

В § 1 изложена основная ОКЗА для изолированного крылового профиля в потоке идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ).

В § 2 рассмотрена задача построения безмоментного крылового профиля. Условие отсутствия момента при нулевом угле атаки рассматривалось как еще одно условие разрешимости.

В § 3 исследована задача построения крылового профиля, обладающего продольной устойчивостью. Решение построено методом ОКЗА; выполнение условий разрешимости задачи и продольной устойчивости профиля достигнуто применением способа квазирешения некорректных задач математической физики. Такой подход, использующий в качестве основных исходных данных распределение скорости по искомому контуру крылового профиля, позволил найти форму устойчивых профилей, обладающих достаточно хорошими аэродинамическими характеристиками.

В § 4 поставлена и решена задача модификации классических крыловых профилей с целью обеспечения их безотрывного обтекания при расчетном угле атаки, что достигнуто путем изменения исходного распределения скорости. Численно-аналитический метод построения таких профилей основан на теории квазирешения ОКЗА и учета вязкости по модели пограничного слоя (ПС).

Во второй главе исследованы задачи построения профилей с устройствами отбора внешнего потока и выдува реактивной струи.

В § 5 дан строгий вывод формул расчета аэродинамических сил, действующих на крыловой профиль с проницаемым участком при отборе через него части внешнего потока ИНЖ и на крыловой профиль с выдувом реактивной струи, т. е. струи, полное давление и плотность которой отличны от этих же ха-

рактистик внешнего потока. Приведены формулы расчета энергетических затрат для профиля с одновременным отбором части внешнего потока и выдувом реактивной струи.

В § 6 предложен метод численно-аналитического построения крылового профиля со щелевым отбором воздуха из внешнего потока в модели ИНЖ. Щель отбора смоделирована каналом с постоянными скоростями на стенках. На основе этих профилей просматривается схема самолета типа летающего крыла с размещением внутри него двигателей и полезной нагрузки.

В § 7 поставлена и решена задача построения крылового профиля со щелевым отбором воздуха из внешнего потока по заданному на контуре профиля распределению скорости, обеспечивающему безотрывное обтекание в заданном диапазоне изменения режимов обтекания. Найдены способы задания исходных распределений скорости, не содержащих участков падения при расчетных режимах. Для выполнения условий разрешимости задачи использован способ введения свободных параметров в исходное распределение скорости.

Задача нахождения формы крылового профиля с выдувом реактивной струи через щель конечных размеров исследована в § 8. Плотности и полные давления выдуваемой струи и внешнего потока различны, вследствие чего на линиях схода потока возникает разрыв касательных составляющих скорости. Эта задача относится к классу задач взаимодействия потоков с разными параметрами.

ОКЗА для крылового профиля с выдувом реактивной струи в диапазоне режимов обтекания решена в § 9. На верхней поверхности распределение скорости задано для большего угла атаки, а на нижней – для меньшего. Показано, что при увеличении энергии выдуваемой струи удается добиться безотрывности обтекания (эффект Коанда). Также показан рост коэффициента подъемной силы в зависимости от энергии выдуваемой струи.

В § 10 предложен метод численно-аналитического проектирования безотрывно обтекаемых крыловых профилей с отбором части внешнего потока и выдувом реактивной струи. Приведены примеры построения таких безотрывно обтекаемых

крыловых профилей. Проведено сравнение полученных результатов с вычислительным экспериментом в программе Fluent.

В третьей главе даны постановки и решения ОКЗА для двухэлементных крыловых профилей.

В § 11 изложено численно-аналитическое решение ОКЗА для двухэлементного крылового профиля в полной постановке, т. е. когда на искомым контурах профилей заданы распределения скорости как функции дуговой абсциссы этих контуров. Исходные распределения скорости брались из класса гидродинамически целесообразных распределений скорости (ГЦРС), что обеспечивало безотрывное обтекание профилей в рамках принятой схемы течения.

В § 12 проведено обобщение результатов предыдущего параграфа на случаи учета вязкости по модели ПС и сжимаемости по модели газа Чаплыгина.

В § 13 решена задача оптимизации характеристик двухэлементного крылового профиля с учетом геометрических ограничений.

В § 14 метод § 11 обобщен на случай задания исходных данных в диапазоне углов атаки. Показано, что при задании безотрывного распределения скорости на верхних поверхностях контуров профилей при большем угле атаки и на нижних поверхностях – при меньшем угле атаки отрыва потока не будет во всем диапазоне.

В четвертой главе исследованы проблемы, связанные с проектированием профилей вблизи прямолинейного экрана.

В § 15 рассмотрена задача построения крылового профиля вблизи прямолинейного экрана по заданному распределению скорости и отстоянию задней кромки профиля от экрана. Разработан итерационный процесс нахождения решения.

В § 16 решена задача построения и аэродинамического расчета крылового профиля, скользящего своей задней кромкой по экрану. Известная нижняя часть контура профиля представляет собой прямолинейный отрезок, образующий заданный угол с экраном, верхняя отыскивается по заданному распределению скорости.

В § 17 рассмотрена ОКЗА для крылового профиля над

экраном в диапазоне режимов обтекания. Режим обтекания такого профиля определяется не только величиной угла атаки, как в случае неограниченного потока, но и величиной отстояния задней кромки профиля от экрана. Разработан метод и приведены примеры проектирования крыловых профилей, обтекаемых безотрывно как при расчетных режимах обтекания, так и в заданном диапазоне изменения угла атаки и отстояния от экрана.

В § 18 исследованы вопросы устойчивости крыловых профилей вблизи экрана, приведены примеры построения устойчивых крыловых профилей вблизи экрана.

В пятой главе изложены задачи проектирования крыловых профилей с устройствами отсоса ПС.

В § 19 предложен способ построения крылового профиля с малым отсасыванием ПС через щель конечных размеров. Влияние отсасывания учитывалось при расчете ПС в зоне резкого изменения задаваемого распределения скорости на границе полутела вытеснения.

В § 20 приведены постановка и решение задачи нахождения формы крылового профиля с распределенным отсосом потока из ПС. Главное внимание уделено способу задания исходного распределения скорости, которое позволило бы при заданном законе скорости отсасывания добиться безотрывности обтекания и отсутствия перехода ПС. Это достигнуто путем решения обратных задач ПС для проницаемых поверхностей.

В § 21 исследована задача усовершенствования аэродинамических характеристик крылового профиля путем введения на нем проницаемого участка, через который осуществляется распределенный отсос ПС. Поставлена и решена задача оптимизации устройства такого отсоса ПС для двух крайних режимов обтекания, именно, задача минимизации суммы коэффициентов аэродинамических сопротивлений крылового профиля для двух крайних углов атаки при условии отсутствия отрыва ПС. Численно показано, что для рассчитанного таким образом профиля отрыв ПС отсутствует во всем диапазоне углов атаки. Приведены примеры улучшения аэродинамических характеристик крыловых профилей, взятых из литературы. Показана

эффективность применения отсоса ПС даже при учете энергетических затрат на него.

В § 22 рассмотрена задача построения крылового профиля по распределению скорости на его поверхности, заданному в многопараметрическом виде. Выполнение условий разрешимости обратных задач достигалось вариацией параметров. На диффузорном участке закон падения скорости определялся из условия минимальности сопротивления при ограничении на безотрывность обтекания. Исследован случай отсоса ПС для улучшения аэродинамических характеристик крыловых профилей. Решение построено с использованием теории оптимального управления и принципа максимума Понтрягина. В качестве управляющих функций выбраны градиент скорости внешнего течения и распределение скорости отсоса.

В шестой главе изучены модельные задачи нахождения форм контуров с максимальной величиной коэффициента подъемной силы.

В § 23 рассмотрена задача нахождения гладкого замкнутого контура фиксированной длины, обладающего максимальной подъемной силой при плавном обтекании потоком ИНЖ при наличии на контуре точечных особенностей (источников и стоков) и при условии расположения на этом контуре критических точек, т. е. точек, в которых скорость обращается в нуль. Дана математическая формулировка соответствующей оптимизационной задачи. Аналитическое решение сведено к двум более простым задачам, исследование которых в общем случае проведено численно. Рассмотрены частные случаи. Показано, что наибольшая циркуляция достигается на круге при слиянии всех стоков в один, а также при объединении всех источников. Сделан вывод, что наличие особенностей при экстремальных режимах обтекания и определенных величинах расхода позволяет увеличить максимальную подъемную силу до значений, недостижимых на непроницаемых контурах.

В § 24 ставится и решается задача нахождения гладкого замкнутого контура, обтекаемого потенциальным потоком ИНЖ и положения в этом потоке вихря, которые обеспечивали бы максимальный коэффициент подъемной силы.

В § 25 исследована задача максимизации коэффициента подъемной силы профиля с выдувом реактивной струи через точечный источник. Задача сведена к изопериметрической вариационной задаче, решение которой получено численно. Сделаны выводы о целесообразности использования устройств управления потоком для увеличения коэффициента подъемной силы.

В § 26 описана модельная задача максимизации коэффициента подъемной силы при обтекании системы двух гладких контуров. Считались заданными периметры контуров и расстояние между ними. Задача сведена к изопериметрической вариационной задаче, решение которой получено численно.

В § 27 исследована задача нахождения максимально возможного коэффициента подъемной силы гладкого контура фиксированной длины при его обтекании на известном отстоянии от экрана. Построены оптимальные контуры, получена зависимость коэффициента подъемной силы от отстояния. Результаты полезны для точной верхней оценки коэффициента подъемной силы реальных крыловых профилей экранопланов.

В приложении приведены сведения о разработанном на основе методов этой монографии пакете программ по проектированию крыловых профилей.

При написании настоящей монографии, помимо собственных, были использованы результаты, полученные в совместных работах с Е. В. Варсеговой, П. А. Волковым, Р. А. Гайфутдиновым, Р. Ф. Мардановым, О. С. Неберовой, А. В. Поташевым, Г. Ю. Степановым. Всем им мы глубоко признательны.

Особая благодарность и светлая память выдающемуся ученому и благородному человеку, профессору Георгию Юрьевичу Степанову за моральную поддержку проводимых исследований.

В процессе работы авторы чувствовали постоянную финансовую поддержку грантов, за что весьма благодарны. В монографии использовались результаты, полученные при выполнении работ по грантовым темам:

- гранты Российского фонда фундаментальных исследований, РФФИ № 96–01–00112 (1996 – 1998), № 99–01–00365

-
- (1999 – 2001), № 02–01–00061 (2002 – 2004), № 05–08–01153 (2005 – 2007), рук. Н. Б. Ильинский;
- гранты Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научно-исследовательского общества, РФФИ–ННИО № 96–01–00070 (1996 – 1998), № 99–01–04029 (1999 – 2001), № 01–01–04029 (2001 – 2003), рук. Н. Б. Ильинский;
 - федеральная целевая программа “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009 – 2013), рук. Н. Б. Ильинский;
 - молодежные гранты РФФИ № 01–01–06058 (2001), № 02–01–06140 (2002), № 03–01–06259 (2003), рук. Д. Ф. Абзалилов;
 - грант Президента РФ “Молодые кандидаты наук” МК-1076.2005.1 (2005 – 2006), рук. Д. Ф. Абзалилов;
 - гранты НИОКР Республики Татарстан (2000 – 2006), рук. Н. Б. Ильинский.

Введение

Излагаются математические проблемы проектирования крыловых профилей летательных аппаратов, которые базируются, главным образом, на теории обратных краевых задач для аналитических функций. Характерной особенностью этих задач, особенно обратных краевых задач аэрогидродинамики, является их некорректность.

Окинув взором историю возникновения и развития обратных краевых задач с нынешних позиций, можно без преувеличения сказать, что теория обратных краевых задач для аналитических функций как чисто математическое направление была создана и разработана в Казанском государственном университете (КГУ). Основателями этой теории, внесшими наибольший вклад в ее развитие, явились Г. Г. Тумашев и М. Т. Нужин. В дальнейшем их многочисленные ученики и последователи в КГУ, а также в других вузах и научных учреждениях страны достигли значительных результатов как в теории, так и в их приложениях.

Следует заметить, что во второй половине прошлого века появилось много различных обратных задач, которые условно можно разделить на два класса – обратные некорректные задачи (ОНЗ) и обратные краевые задачи (ОКЗ).

В ОНЗ по большей части отсутствует непрерывная зависимость от исходных данных, их решения обычно не единственны. Решение этих задач, как правило, проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта и состоит в нахождении либо коэффициентов дифференциальных уравнений, либо области, в которой действует оператор. Переход от некорректной задачи к корректной достигается путем сужения множества возможных решений, и задача называется условно корректной (см. например, [39, 40, 54]).

Первые ОНЗ математической физики, привлечение внимания математиков, были связаны с проблемами геофизики и разведки полезных ископаемых. Возникающие при этом обратные задачи сводятся обычно к интегральным уравнениям Фредгольма I рода, существование решения которых предполагается априори, исходя из физики явления. Характерным признаком ОНЗ, состоящих в нахождении области, отличающим их от других краевых задач, является то, что на известном участке границы области краевых условий задается два (например, “найти гармоническую функцию внутри ограниченной области по значениям ее и ее нормальной производной на куске границы области” [38], при этом на искомом участке границы имеется лишь одно условие – условие сопряжения).

Приведем простейший пример, иллюстрирующий принципиальное отличие ОКЗ от ОНЗ.

Пусть $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области D_z функция, $z = x + iy$. Граница области D_z состоит из двух участков: L_1 – известный по форме участок, L_2 – неизвестный (см. рис. 0.1).

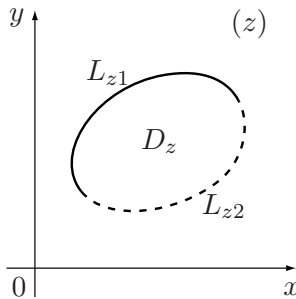


Рис. 0.1. Область D_z в физической плоскости

Постановка ОКЗ: на участке L_1 известна $\operatorname{Re} w(s) = u(s)$ или $\operatorname{Im} w(s) = v(s)$, где s – дуговая абсцисса, а на участке L_2 известна вся функция $w(s) = u(s) + iv(s)$. Требуется достроить L_2 и найти функцию $w(z)$ в области D_z . Здесь ради простоты пояснения сути задачи опущены многие тонкости поведения

граничных значений функции, описание характеристик границ L_1, L_2 .

Постановка ОНЗ: на участке L_1 известна функция $w(s) = u(s) + iv(s)$, а на участке L_2 – лишь $\operatorname{Re} w(s) = u(s)$ или $\operatorname{Im} w(s) = v(s)$. Требуется достроить L_2 и найти функцию $w(z)$ в области D_z . Как и выше, здесь также опущены многие тонкости постановки этой задачи.

Таким образом, в ОКЗ на известном участке границы задана лишь $\operatorname{Re} w(s)$ или $\operatorname{Im} w(s)$, а на неизвестном – вся функция $w(s)$, а в ОНЗ на известном участке задана вся функция $w(s)$, а на неизвестном – лишь $\operatorname{Re} w(s)$ или $\operatorname{Im} w(s)$.

Существенное различие этих задач особенно наглядно видно на частных случаях. Пусть, например, участок $L_2 \rightarrow 0$, тогда ОКЗ становится известной прямой краевой задачей Шварца, а ОНЗ – переопределенной краевой задачей. Если $L_1 \rightarrow 0$, то ОКЗ будет хорошо изученной основной ОКЗ для аналитических функций, а ОНЗ – недоопределенной! Кроме того, в ОКЗ имеют место специфические условия физической реализуемости решения – это условия однолиственности, а также разрешимости задачи. Последние включают условия замкнутости искомого контура и совпадения заданного на бесконечности значения функции с определяемым в процессе решения. Из сказанного видно принципиальное различие ОКЗ и ОНЗ, хотя методы решения в идейном плане в ряде случаев близки, именно методы квазирешения, регуляризации, так как и ОКЗ некорректны по Адамару, но в несколько отличном от ОНЗ смысле.

Остановимся подробнее на задачах 2 класса, именно ОКЗ теории аналитических функций и их приложениях [56]. *Под ОКЗ понимают задачи, в которых требуется найти область и функцию или систему функций, удовлетворяющих в искомой области некоторому дифференциальному уравнению или системе дифференциальных уравнений, а на границе области – заданным условиям, которых на единицу больше, чем в прямых краевых задачах.*

Напомним кратко историю возникновения ОКЗ. Как чисто математическую ОКЗ для гармонической функции двух пере-

менных поставил в 1929 году Д. Рябушинский: определить контур по заданным на нем значениям гармонической функции и ее нормальной производной. Однако решением этой задачи он не занимался. Попытку решить эту задачу сделал Б. Демченко в 1933 году, при этом он предположил, что граничные значения гармонической функции и ее нормальной производной заданы не на искомом контуре, а на некоторой окружности, что значительно упростило решение. Однако такая постановка существенно отличалась от постановки Д. Рябушинского. В дальнейшем ни Д. Рябушинский, ни Б. Демченко не возвращались более к ОКЗ. В те же годы ОКЗ появляются при решении прикладных задач – задач аэрогидродинамики. Пожалуй, первой стала работа Ф. Вейнига (1929 г.), далее – А. Бетца (1934 г.) и в наиболее полной постановке – В. Манглера (1938 г.).

Основы теории ОКЗ были заложены Г. Г. Тумашевым в (1942 – 1945 гг.), предложившим оригинальный метод решения ОКЗ аэрогидродинамики. Существенным моментом в этом методе явилось введение области в плоскости комплексного потенциала течения, что позволило поставить и решить ряд новых задач механики жидкости и газа. Значение этих работ вышло за пределы упомянутых прикладных задач и послужило началом нового направления – теории ОКЗ математической физики.

В 1947 году М. Т. Нужин дал общую постановку ОКЗ, сформулировав ее как задачу теории аналитических функций: определить область и аналитическую в ней функцию по заданным на ее границе значениям этой функции. При этом существенно различаются внутренняя и внешняя задачи. Пусть две функции $u = u(s)$, $v = v(s)$ параметра s ($0 \leq s \leq l$), периодические с периодом l , имеющие первые производные, удовлетворяют условию Гельдера, не обращаются одновременно в нуль и удовлетворяют условию $[u(s_1) - u(s_2)]^2 + [v(s_1) - v(s_2)]^2 \neq 0$ при двух значениях параметра $s_1 \neq s_2$. Тогда уравнения $u = u(s)$, $v = v(s)$ определяют в плоскости комплексного переменного $w = u + iv$ простую замкнутую кривую Ляпунова, делящую плоскость на внутреннюю D_w^+ и внешнюю D_w^- области.

Внутренняя задача: определить в плоскости z кривую L_z , ограничивающую конечную область D_z^+ (вообще говоря,

многолиственную) так, чтобы, считая параметр s длиной дуги кривой L_z , выражение $w(s) = u(s) + iv(s)$ было краевым значением аналитической функции, конформно отображающей область D_z^+ на область D_w^+ или D_w^- .

Внешняя задача: определить в плоскости z кривую L_z , ограничивающую область D_z^- (содержащую бесконечно удаленную точку и, вообще говоря, многосвязную) так, чтобы, считая параметр s длиной дуги кривой L_z , выражение $w(s) = u(s) + iv(s)$ было краевым значением аналитической функции, конформно отображающей область D_z^- на область D_w^- или D_w^+ .

Эти постановки позволили ввести в плоскости искомой аналитической функции контур, являющийся носителем данных ОКЗ, и исследовать ряд внутренних и внешних ОКЗ. Предложенная М. Т. Нужиным классификация ОКЗ для аналитических функций, исследование их разрешимости и нахождение решений явились фундаментом теории ОКЗ для аналитических функций. В 1952 – 1955 гг. существенные результаты в чисто математических проблемах ОКЗ получил Ф. Д. Гахов.

Таким образом, в ОКЗ граница или часть границы искомой области является неизвестной. Среди таких задач широко известны так называемые задачи со свободными границами. Но и они в физическом смысле отличаются от прикладных ОКЗ. Дело в том, что в математической физике имеются большое количество задач, в которых требуется находить форму некоторых линий, являющихся границами области (задачи струйного обтекания, безнапорной фильтрации, взрыва на выброс и др.). По своему математическому содержанию все эти задачи относятся к краевым задачам с неизвестными границами. С этой чисто математической точки зрения перечисленные в скобках задачи относятся к смешанным ОКЗ. Однако по своему механическому (физическому) содержанию эти задачи не относятся к ОКЗ согласно классификации, данной основателями этой теории [56]. Принципиальным отличием прикладных ОКЗ от других прикладных краевых задач с неизвестными границами, которые исторически появились раньше и получили название “краевые задачи со свободными границами”, является следующее.

В прикладных ОКЗ мы можем задавать граничные усло-

вия на искомой границе (или на искомых участках границы) области по своему усмотрению, оказывая тем самым влияние на форму искомой области в рамках принятой модели. При этом мы не только находим неизвестную границу (или ее участок), но затем должны и создать, изготовить эту границу (профиль крыла, подземный контур плотины, откос земляной плотины и т. п.). В задачах же со свободными границами требуется лишь определить неизвестную границу (депресссионную кривую, форму струй, выемку выброса и т. д.), изготовлять ее не требуется; кроме того, исходные условия на свободной границе полностью определяются физикой изучаемого явления и меняться по усмотрению исследователя не могут (постоянство скорости и функции тока на струях, постоянство давления и фиксированный вид функции тока на депрессионных кривых и т. п.). Таким образом, в математическом плане ОКЗ – это краевые задачи с неизвестными границами. А с точки зрения механики, согласно сказанному выше, надо различать прикладные ОКЗ и традиционные краевые задачи со свободными границами. Это различие можно резюмировать так: *прикладные ОКЗ – это задачи конструирования, а краевые задачи со свободными границами – задачи прогноза.*

Достижения в области создания теории ОКЗ и ее приложений в механике жидкости и газа, полученные в основном преподавателями и научными сотрудниками КГУ до 1965 года, изложены в монографии [56]. Библиография этой книги содержит 246 наименований. После появления пионерских работ Г. Г. Тумашева и М. Т. Нужина основные исследования по ОКЗ проводились во взаимодействии работ прикладного и теоретического характера в тесном творческом содружестве работников НИИММ им. Н. Г. Чеботарева с сотрудниками кафедр механики, дифференциальных уравнений и математического анализа КГУ. Достаточно полное описание работ в этой области, опубликованных в нашей стране и за рубежом до 1980 года, сделано в [5]. В этом обзоре приведена библиография работ по ОКЗ, содержащая 431 источник. В статье [4], явившейся дополнением обзора [5], приведены результаты казанских ученых по ОКЗ, полученные в основном за 1980 – 1990 гг.

Один из эффективных способов проектирования и оптимизации крыловых профилей базируется на решении обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА), суть которых состоит в отыскании формы профиля по заданному вдоль его контура распределению скорости или давления. Именно через такие распределения выражаются основные аэродинамические характеристики: подъемная сила, сила сопротивления и аэродинамическое качество. Поэтому инженер-проектировщик, целесообразно задав исходное распределение скорости, имеет возможность, решив обратную задачу, получить профиль с заданными свойствами. В этом проявляется конструктивный характер ОКЗА.

Для целенаправленного выполнения условий физической реализуемости решения ОКЗА, то есть обеспечения замкнутости и простоты искомого контура крылового профиля, было предложено отыскивать решение указанной задачи, опираясь на метод квазирешений из теории некорректных задач математической физики. Такой подход позволил свести исходную задачу к задаче минимизации функционала специального вида на множестве корректности. Последнее задается с учетом условий замкнутости и однолиственности искомого контура профиля. При определенных ограничениях на множество корректности, налагаемых из физики явлений, доказаны существование, единственность и устойчивость квазирешений. Разработан и обоснован способ построения минимизирующих последовательностей, равномерно сходящихся к квазирешению задачи. На этом этапе созданы также методы расчета формы крыловых профилей в областях с усложненной геометрией течения и при наличии различного рода особенностей на профиле или в потоке; исследованы и обоснованы способы задания исходных распределений скорости, обеспечивающих безотрывный характер обтекания; разработан метод построения профилей по распределению скорости, заданному для двух углов атаки; заложены теоретические основы и решены простейшие задачи по аэродинамической оптимизации безотрывно обтекаемых крыловых профилей. Выполнены числовые расчеты, подтверждающие эффективность метода. Эти достижения изложены в монографиях [18, 19, 61].

Настоящая монография посвящена математическим постановкам и решению задач аэродинамического проектирования крыловых профилей, а также оптимизации их формы с целью достижения оптимальных аэродинамических характеристик при относительно сложных схемах течения: исследованию различных способов математического моделирования устройств управления как внешним потоком, так и пограничным слоем; оптимизации параметров этих устройств и геометрии крылового профиля. Основное внимание уделено следующим вопросам: развитию численно-аналитических методов решения ОКЗА для усложненных схем течения при задании исходных данных как для одного режима обтекания, так и в некотором диапазоне; анализу влияния усложненных схем течения на геометрические и аэродинамические характеристики крыловых профилей, оценке эффективности использования устройств управления потоком с учетом энергетических затрат и получаемой выгоды; поиску рационального задания исходных данных задач, обеспечивающих получение максимального эффекта от устройств управления потоком; поиску оптимальных форм дозвуковых крыловых профилей.

Глава 1

Основная обратная краевая задача аэрогидродинамики, варианты квазирешений

При проектировании крыловых профилей важно не только получение относительно больших коэффициентов подъемной силы и малых коэффициентов сопротивлений; одной из важнейших характеристик является статическая **устойчивость** проектируемого **крылового профиля**. Условие устойчивости можно рассматривать как еще одно условие разрешимости задачи. Устойчивость летательного аппарата определяется взаимным расположением центра масс и аэродинамического фокуса (см., например, [36]).

§ 1. Постановка и квазирешение основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики

1.1. Постановка основной ОКЗА. В физический плоскости z искомый непроницаемый крыловой профиль L_z обтекается плавно (т. е. без срыва потока) плоским потенциальным установившимся потоком ИНЖ со скоростью v_∞ (рис. 1.1). Контур профиля является гладким, за исключением задней кромки B , угол в ней равен 2π . Точку B схода потока выберем за начало координат, в рамках гипотезы Жуковского – Чаплыгина она будет являться точкой схода потока. Ось x направим параллельно набегающему потоку.

Пусть точка A есть точка разветвления потока, скорость в ней равна нулю. В задней кромке B скорость конечна, ее значение обозначим $v_b > 0$.

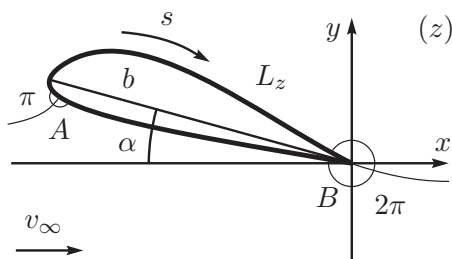


Рис. 1.1. Физическая плоскость

Введем дуговую абсциссу s искомого контура профиля так, чтобы при ее возрастании вдоль поверхности профиля от $s = 0$ в задней кромке B до $s = \ell$ на ней же область течения оставалась слева (ℓ – периметр контура профиля). Пусть s_a – значение дуговой абсциссы в точке A разветвления потока.

Вдоль поверхности профиля задано распределение величины скорости $v(s)$:

$$v = v(s), \quad 0 \leq s \leq \ell, \quad (1.1)$$

где $v(s)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера, обращающаяся в нуль в точке s_a и непрерывно дифференцируемая в этой точке, а также принимающая значения $v(\ell) = -v(0) = v_b$ (рис. 1.2). Знак скорости связан с направлением обхода, поэтому на нижней поверхности $v(s) < 0$, $0 < s < s_a$ (направления скорости противоположно направлению обхода) и $v(s) > 0$, $s_a < s < \ell$ (направления скорости и обхода контура совпадают).

Из приведенных выше параметров считаются заданными v_∞ , ℓ , s_a . Требуется найти контур L_z , хорду b , угол атаки α , аэродинамические силы и момент. Задачу в такой постановке называют основной ОКЗА [18].

1.2. Введение комплексного потенциала течения.

При сделанных предположениях относительно потока существует комплексный потенциал течения, который обозначим

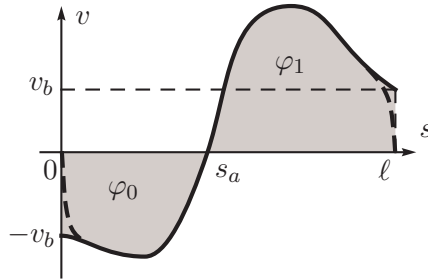


Рис. 1.2. Распределение скорости

$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. В окрестности бесконечно удаленной точки комплексный потенциал потока будет иметь вид

$$w(z)|_{\infty} = v_{\infty}z - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (1.2)$$

где Γ – циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему L_z , a_k – комплексные постоянные. Первое слагаемое в (1.2) представляет собой комплексный потенциал однородного плоскопараллельного потока, а второе – вихря (знак “–” перед этим слагаемым связан с тем, что $\Gamma > 0$ соответствует вихрю, закрученному по часовой стрелке).

Так как крыловой профиль непроницаем, то контур профиля есть линия тока; примем на нем $\psi = 0$. Тогда величина скорости

$$v = v(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Выберем $\varphi = 0$ в точке разветвления потока s_a . Тогда

$$\varphi(s) = \int_{s_a}^s v(s) ds. \quad (1.3)$$

Пусть $\varphi_0 = \varphi(0) = \int_{s_a}^0 v(s) ds$, $\varphi_1 = \varphi(\ell) = \int_{s_a}^{\ell} v(s) ds$ – величины потенциалов на нижней и верхней поверхностях профиля.

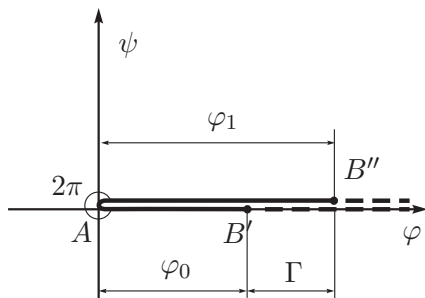


Рис. 1.3. Плоскость комплексного потенциала

Обе эти величины являются положительными, так как $v(s) < 0$ при $0 < s < s_a$ и $v(s) > 0$ при $s_a < s < \ell$. Тогда для циркуляции Γ скорости имеем

$$\Gamma = \oint_{L_z} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \int_0^\ell v(s) ds = \int_0^{s_a} v(s) ds + \int_{s_a}^\ell v(s) ds = \varphi_1 - \varphi_0. \quad (1.4)$$

Таким образом, с чисто математической точки зрения поставленная задача аэрогидродинамики свелась к внешней ОКЗ для аналитической функции $w(z)$, имеющей в бесконечно удаленной точке простой полюс и логарифмическую особенность типа вихря, по известному на искомой границе области значению $w(z)$: $\text{Im } w(z)|_{L_z} = 0$, $\text{Re } w(z)|_{L_z}$ определяется по (1.3).

Заметим, что $w(z)$ является неоднозначной функцией, так как содержит $\ln z$. Для выделений одной ветви в области G_z проведем разрез от точки B до бесконечности по сходящей с контура профиля линии тока (рис. 1.3). Тогда в полученной области с разрезом функция $w(z)$ будет однозначной и терпящей скачок на линии разреза; в плоскости w область G_w представляет собой всю плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси ($\varphi > 0$).

1.3. Способ Тумашева решения основной ОКЗА.

Введем в рассмотрение каноническую область, представляю-

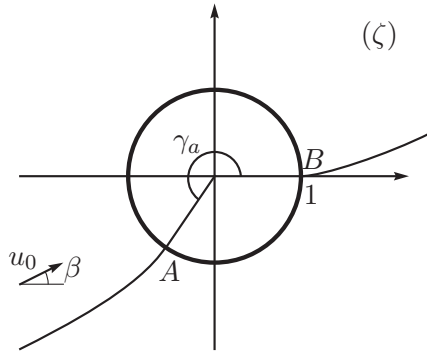


Рис. 1.4. Каноническая плоскость

щую собой внешность круга единичного радиуса в плоскости $\zeta = re^{i\gamma}$, т. е. $|\zeta| > 1$ (рис. 1.4). Для взаимно однозначного отображения области G_z на G_ζ потребуем, чтобы $z = \infty \mapsto \zeta = \infty$ и $z_b = 0 \mapsto \zeta_b = 1$. При этих условиях функция $z(\zeta)$, согласно теореме Римана, определится единственным образом.

Рассмотрим поток, обтекающий эту окружность со скоростью на бесконечности равной $u_0 e^{i\beta}$ и циркуляцией Γ , где u_0 и β – неизвестные пока постоянные, Γ определяется из (1.4). Как известно (см., например, [42]), такой комплексный потенциал имеет вид

$$w(\zeta) = u_0 \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + C, \quad (1.5)$$

где $C = C_1 + iC_2$ – комплексная постоянная.

Найдем значения $w(\zeta)$ (1.5) на границе $\zeta = e^{i\gamma}$:

$$w(e^{i\gamma}) = u_0(e^{i(\gamma-\beta)} + e^{-i(\gamma-\beta)}) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + C_1 + iC_2.$$

Отделив действительную и мнимую части, получим

$$\varphi(\gamma) = \operatorname{Re} w(e^{i\gamma}) = 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + C_1, \quad (1.6)$$

$$\psi(\gamma) = \operatorname{Im} w(e^{i\gamma}) = C_2.$$

Эти выражения содержат 4 неизвестные вещественные постоянные: u_0 , β , C_1 , C_2 . Найдем их из условия, что $w(\zeta)$ (1.5) отображает G_ζ с разрезом от точки B до бесконечности по линии схода потока на известную область G_w с разрезом. Добавив еще одну неизвестную γ_a (угловую координату точки A), запишем систему из пяти уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_a) &= 0, & \varphi(0) &= \varphi_1, & \psi(\gamma_a) &= 0, \\ \varphi'(\gamma_a) &= 0, & \varphi'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения сразу найдем $C_2 = 0$, а для оставшихся параметров получим систему

$$\begin{cases} 2u_0 \cos(\gamma_a - \beta) - \frac{\Gamma\gamma_a}{2\pi} + C_1 = 0, \\ 2u_0 \cos \beta + C_1 = \varphi_1, \\ 2u_0 \sin(\gamma_a - \beta) + \frac{\Gamma}{2\pi} = 0, \\ 2u_0 \sin(-\beta) + \frac{\Gamma}{2\pi} = 0. \end{cases}$$

Выразим u_0 , γ_a и C_1 через β . Из последнего уравнения $u_0 = \Gamma/4\pi \sin \beta$. Из 3-го и 4-го уравнений системы следует $\sin(\gamma_a - \beta) = \sin(-\beta)$, откуда $\gamma_a - \beta = \pi + \beta$ или $\gamma_a = \pi + 2\beta$. Второе уравнение служит для определения постоянной $C_1 = \varphi_1 - 2u_0 \cos \beta = \varphi_1 - (\Gamma/2\pi) \operatorname{ctg} \beta$.

И, наконец, из первого уравнения системы следует трансцендентное уравнение для нахождения β :

$$\operatorname{ctg} \beta + \beta = \frac{\pi}{\Gamma} \varphi_1 - \frac{\pi}{2}. \quad (1.7)$$

Легко показывается, что на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ уравнение (1.7) имеет единственное решение.

Заметим, что величина β характеризует отклонение крылового профиля от направления бесциркуляционного обтекания и называется абсолютным или теоретическим углом атаки.

Зная β , найдем остальные величины: u_0 , γ_a и C_1 . Таким образом, $w(\zeta)$ определена. Производная $dw/d\zeta$ может быть найдена как дифференцированием (1.5), так и с использованием метода особенностей (см., например, [15]).

Напомним, что метод особенностей основан на использовании теоремы Лиувилля, согласно которой аналитическая функция, не имеющая особенностей и не обращающаяся в нуль во всей комплексной плоскости, тождественно равна константе. Например, если аналитическая функция $f(\zeta)$ имеет простой нуль в точке $\zeta = 0$ и полюс второго порядка в точке $\zeta = 1$, то функция

$$F(\zeta) = f(\zeta) \frac{(\zeta - 1)^2}{\zeta}$$

по теореме Лиувилля будет тождественной константой $F(\zeta) \equiv C$. Следовательно,

$$f(\zeta) = C \frac{\zeta}{(\zeta - 1)^2}.$$

Воспользовавшись этой теоремой для функции $dw/d\zeta$, равной на бесконечности $u_\infty e^{-i\beta}$, имеющей простые нули в точках A и B , получим

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right). \quad (1.8)$$

Далее, сопоставив $\varphi(s)$ из (1.3) и $\varphi(\gamma)$ из (1.6), установим зависимость

$$s = s(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \quad (1.9)$$

Эта зависимость является монотонно убывающей от $s(0) = \ell$ до $s(2\pi) = 0$.

Рассмотрим во внешности единичного круга функцию Жуковского – Мичела

$$\chi(\zeta) = \ln \left(\frac{1}{v_\infty} \frac{dw}{dz} \right) = \ln \frac{v}{v_\infty} - i\theta = S - i\theta,$$

где v и θ – модуль и аргумент вектора скорости в физической плоскости.

Комплексно сопряженная скорость $\frac{dw}{dz}$ обращается в нуль в критической точке A . Следовательно, функция $\chi(\zeta)$ имеет в этой точке логарифмическую особенность. Исследуем ее характер.

В точке разветвления потока $w - w_a \sim (\zeta - \zeta_a)^2$, $z - z_a \sim (\zeta - \zeta_a)$. Следовательно, $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} / \frac{dz}{d\zeta} \sim (\zeta - \zeta_a)^{2-1}$. Функция $\chi(\zeta)$ ведет себя $\chi(\zeta) \sim \ln(\zeta - \zeta_a)$.

Введем функцию $\chi_0(\zeta)$, содержащую особенность $\chi(\zeta)$:

$$\chi_0(\zeta) = \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right).$$

Разность

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta) = \ln \left(\frac{1}{v_\infty} \frac{dw}{dz} \right) - \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) \quad (1.10)$$

уже будет аналитической функцией, не содержащей особенностей как внутри области, так и на границе единичного круга. Эту функцию будем называть модифицированной функцией Жуковского – Мичела.

Получим выражения для действительной и мнимой части $\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} + i\tilde{\theta}$ на единичной окружности $|\zeta| = 1$. Учтем, что

$$1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} = 1 - e^{i(\gamma_a - \gamma)} = 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} e^{i(\gamma_a - \gamma + \pi)/2},$$

следовательно,

$$\ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) = \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \right| + i \left(\frac{\gamma_a - \gamma \pm \pi}{2} \right),$$

где знак “+” берется при $\gamma > \gamma_a$, а знак “-” – при $\gamma < \gamma_a$.

В результате получим

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln \left| \frac{v(\gamma)}{2v_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2}} \right|, \quad (1.11)$$

$$\tilde{\theta}(\gamma) = -\theta(\gamma) - \frac{\gamma_a - \gamma \pm \pi}{2}. \quad (1.12)$$

Действительная часть $\tilde{\chi}(\zeta)$ известна, следовательно, по формуле Шварца можно восстановить всю функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + i\beta_0. \quad (1.13)$$

Найдем действительную постоянную β_0 , рассмотрев поведение $\tilde{\chi}(\zeta)$ на бесконечности

$$\tilde{\chi}(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma + i\beta_0 = 0.$$

Отделив действительные и мнимые части, получим $\beta_0 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 0. \quad (1.14)$$

Мнимая часть $\tilde{\chi}(\zeta)$ восстанавливается с использованием сингулярного интеграла Гильберта

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma. \quad (1.15)$$

Найдем теперь $z(\zeta)$. Из (1.10) и (1.8) следует выражение для производной

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-1} \frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-\tilde{\chi}(\zeta) - i\beta} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right). \quad (1.16)$$

Проинтегрировав полученное выражение по единичной окружности ($\zeta = e^{i\gamma}$), найдем контур искомого крылового профиля.

1.4. Условия разрешимости ОКЗА. Условие совпадения заданной скорости v_∞ с определяемой в процессе решения уже было получено (см. (1.14)). Условие замкнутости находится из требования однозначности $z(\zeta)$ и представляет собой равенство нулю вычета у $\frac{dz}{d\zeta}$ в окрестности бесконечно удаленной

точки. Из (1.16) следует

$$\frac{dz}{d\zeta} = u_0 e^{-\tilde{S}(\infty) - i\beta} \left(1 - \frac{a_{-1} + 1}{\zeta} + \dots \right), \quad (1.17)$$

где

$$a_{-1} = \operatorname{res}_{\zeta=\infty} \tilde{\chi}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma. \quad (1.18)$$

Таким образом, условием замкнутости искомого контура будет

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = -1.$$

Отделив действительную и мнимую части, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = -1, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0. \quad (1.19)$$

§ 2. Квазирешение с учетом условия безмоментности

В этом параграфе поставлена и решена задача построения безмоментного крылового профиля по заданному на контуре профиля распределению скорости. Под безмоментным профилем понимается крыловой профиль с нулевым моментом при нулевой подъемной силе.

Аналитическое решение задачи построения безмоментного крылового профиля в рамках модели ИНЖ рассмотрено Г. Г. Тумашевым [55].

2.1. Постановка задачи. В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ искомый непроницаемый крыловой профиль обтекается установившимся безвихревым потоком ИНЖ; контур L_z профиля считается замкнутым и гладким на всем протяжении, за исключением задней кромки B , где внутренний к области течения угол равен 2π (рис. 1.1). Начало выбранной декартовой системы координат совпадает с точкой B , а ось

абсцисс параллельна скорости набегающего потока. Значение скорости $v_\infty = 1$. Дуговая координата s контура профиля отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же так, что при возрастании s вдоль L_z область течения остается слева. На контуре L_z задано ГЦРС

$$v = v(s), \quad s \in [0, L], \quad (2.1)$$

где кусочно-гладкая функция $v(s)$ обращается в нуль в точке A разветвления потока ($s = s_a$) и непрерывно-дифференцируема в этой точке (рис. 1.2).

Требуется построить профиль, который при нулевой подъемной силе является безмоментным.

2.2. Схема решения. Вначале по заданному распределению скорости на искомом контуре L_z крылового профиля решается ОКЗА. Функция, конформно отображающая каноническую область G_ζ (внешность круга единичного радиуса) с границей L_ζ (рис. 1.4) на внешность искомого профиля, имеет вид

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^\zeta e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} (1 - 1/\zeta) d\zeta. \quad (2.2)$$

Условия разрешимости (1.14), (1.19) означают фиксацию трех первых коэффициентов в разложении функции $\tilde{S}(\gamma)$ в ряд Фурье

$$\tilde{S}(\gamma) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\gamma + d_k \sin k\gamma),$$

где $c_k + id_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{ik\gamma} d\gamma$, $k = \overline{0, \infty}$, т. е. должны выполняться равенства $c_0 = 0$, $c_1 = -1$, $d_1 = 0$.

Для выполнения условий разрешимости применяется способ квазирешения ОКЗА, состоящий в переходе от исходной функции $\tilde{S}(\gamma)$ к модифицированной $\tilde{S}_1(\gamma)$ по формуле

$$\tilde{S}_1(\gamma) = \tilde{S}(\gamma) - \frac{c_0}{2} - (1 + c_1) \cos \gamma - d_1 \sin \gamma. \quad (2.3)$$

Распределение скорости по замкнутому контуру крылового профиля, построенного в результате квазирешения ОКЗА,

будет отличным от исходного (2.1). Учтя выражение (2.3), найдем

$$v_1(\gamma) = -2e^{\tilde{S}_1(\gamma)} \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2}. \quad (2.4)$$

Далее из соотношения

$$s'(\gamma) = -2u_0 e^{-\tilde{S}_1(\gamma)} \sin \frac{\gamma}{2} \quad (2.5)$$

устанавливается зависимость $s = s(\gamma)$, $\gamma \in [0, 2\pi]$. Из сопоставления (2.4) и (2.5) находится распределение скорости $v_1(s)$ по замкнутому контуру крылового профиля.

2.3. Учет условия безмоментности. Для построения безмоментного крылового профиля, следуя [55], предварительно необходимо расположить профиль так, чтобы он обтекался с нулевой подъемной силой, то есть повернуть профиль на угол $-\beta$.

В рамках модели ИНЖ распределение скорости $v_1(\gamma)$ по замкнутому контуру профиля, обтекаемого при теоретическом угле атаки β , нетрудно пересчитать на другое значение угла атаки β_2 :

$$v_2(\gamma) = v_1(\gamma) \frac{\cos(\gamma/2 - \beta_2)}{\cos(\gamma/2 - \beta)}.$$

Приняв во внимание, что $\beta_2 = 0$, получим распределение скорости по контуру профиля с нулевой подъемной силой в виде

$$v_2(\gamma) = v_1(\gamma) \frac{\cos(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2 - \beta)}, \quad \gamma \in [0, 2\pi].$$

Согласно формуле Чаплыгина, момент M_z аэродинамических сил относительно задней кромки

$$M_z = -\operatorname{Re} \frac{\rho}{2} \oint \left(z \frac{dw}{dz} \right)^2 dz = -\rho \operatorname{Re} \left\{ \pi i \operatorname{res}_{\zeta=\infty} \left(e^{\chi(\zeta)} z \frac{dw}{d\zeta} \right) \right\}, \quad (2.6)$$

где ρ – плотность жидкости. Из формулы (1.13) получим разложение функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\tilde{\chi}(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots,$$

где $a_0 = c_0/2$, $a_k = c_k + id_k$, $k = \overline{1, \infty}$. Отсюда следует

$$e^{\chi(\zeta)} = e^{\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) = e^{a_0} \left(1 + \frac{1 + a_1}{\zeta} + \frac{a_1 + a_2 + a_1^2/2}{\zeta^2} + \dots\right).$$

При $\beta = 0$ из (1.8) и (2.2) найдем

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right);$$

$$z = \int e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)^{-1} \frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-a_0} \left(\zeta - \frac{a_1 - a_2 + a_1^2/2}{\zeta} \dots\right).$$

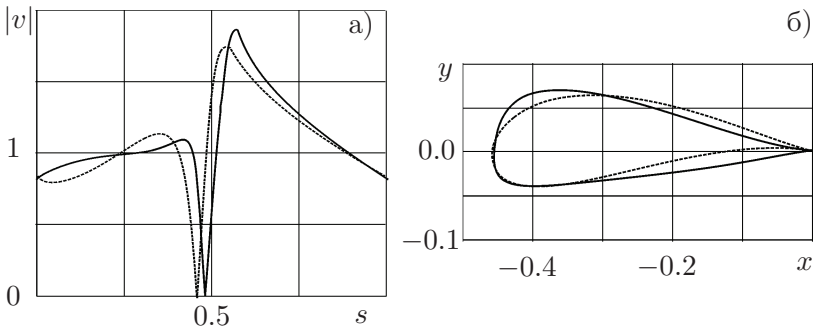


Рис. 2.1. Расчет 1

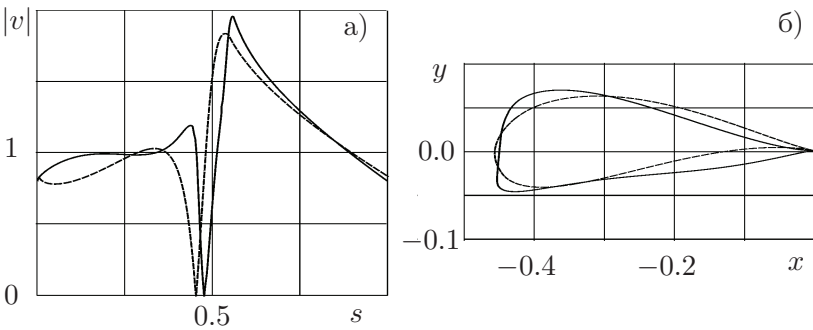


Рис. 2.2. Расчет 2

Подставив полученные выражения в (2.6), после некоторых преобразований получим $M_z = 2\pi r i_0^2 d_2$. Для безмоментного

профиля должно быть $d_2 = 0$. Если это не выполняется, то для безмоментности необходимо “подправить” $\tilde{S}_1(\gamma)$:

$$\tilde{S}_2(\gamma) = \tilde{S}_1(\gamma) - d_2 \sin 2\gamma. \quad (2.7)$$

Представление (2.7) для приращения функции $\tilde{S}(\gamma)$ позволяет построить новое квазирешение ОКЗА, которое не только удовлетворяет условиям разрешимости, но и обеспечивает безмоментность профиля при нулевой подъемной силе. Новое квазирешение с учетом (2.3) и (2.7) можно записать в виде

$$\tilde{S}_2(\gamma) = \tilde{S}(\gamma) - \frac{c_0}{2} - (1 + c_1) \cos \gamma - d_1 \sin \gamma - d_2 \sin 2\gamma. \quad (2.8)$$

2.4. Числовые расчеты. Был разработан алгоритм и составлена программа построения безмоментных профилей по заданным распределениям скорости, изображенным на рис. 2.1, а и 2.2, а. В результате решения ОКЗА с применением квазирешения (2.8) построены безмоментные профили (рис. 2.1, б и 2.2, б).

§ 3. Случай учета продольной статической устойчивости

При проектировании крыловых профилей типа “летающее крыло” на одно из первых мест встает проблема устойчивости такого крыла. В этом случае условие устойчивости можно рассматривать как еще одно условие разрешимости. Ниже изложено построение квазирешения ОКЗА с учетом условия устойчивости крылового профиля.

3.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль L_z с бесконечно тонкой кромкой в точке B схода потока обтекается плоским установившимся потенциальным безвихревым потоком ИНЖ с заданной на бесконечности скоростью v_∞ . Область течения обозначена G_z (рис. 3.1), периметр ℓ контура профиля известен. Точка схода потока B принята за начало координат. Задано распределение скорости v как функция дуговой абсциссы s , отсчитываемой от точки B по часовой стрелке

$$v = v(s), \quad s \in [0, \ell]. \quad (3.1)$$

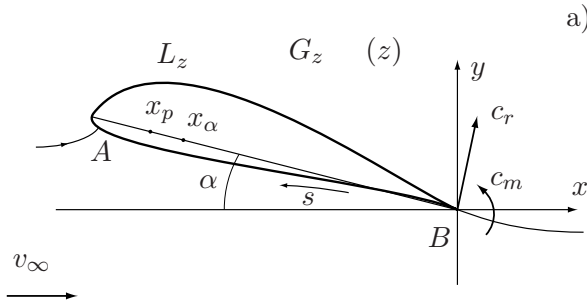


Рис. 3.1. Течение в физической плоскости

В точке A ($s = s_a$) разветвления потока скорость $v(s_a) = 0$. Знак $v(s)$ связан с направлением обхода, поэтому $v(s) < 0$ при $s \in [0, s_a)$ и $v(s) > 0$ при $s \in (s_a, \ell]$.

Известно (см., например, [36]), что устойчивость летательного аппарата определяется взаимным расположением центра масс x_t и аэродинамического фокуса x_α по углу атаки (точки приложения прироста подъемной силы при изменении угла атаки). Критерий устойчивости имеет вид

$$x_\alpha - x_t > 0. \quad (3.2)$$

Для нахождения центра масс необходимо знать компоновку всего летательного аппарата в целом. В частности, для летательных аппаратов типа “бесхвостка” или “летающее крыло” центр масс должен совпадать с центром давления x_p крыла. Поэтому будем считать положение x_t заданным или совпадающим с x_p .

Требуется определить контур L_z крылового профиля, фокус x_α которого находился бы в заданной точке $x_\alpha^* > x_t$, и распределение скорости на его поверхности минимально отличалось от заданного (3.1).

3.2. Схема решения задачи. Введем в рассмотрение каноническую область G_ζ : внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ в плоскости ζ (рис. 1.4). Для взаимно-однозначного конформного отображения областей G_z и G_ζ предполагается соответствие бесконечно удаленных точек, а также условие, что точка B ($z = \infty$) переходит в точку $\zeta = 1$.

Дальнейшее решение строится способом Тумашева решения основной ОКЗА (§ 1).

3.3. Условия разрешимости. Для получения условий замкнутости искомого контура крылового профиля и совпадения скоростей на бесконечности разложим 2π -периодическую функцию $\tilde{S}(\gamma)$ (1.11) в ряд Фурье

$$\tilde{S}(\gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma), \quad (3.3)$$

где коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma, \quad a_1 + ib_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma,$$

$$a_2 + ib_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i2\gamma} d\gamma.$$

Разложение функции $\chi(\zeta)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k) \zeta^{-k}.$$

Условие совпадения заданной скорости v_{∞} с определяемой есть $a_0 = 0$ (1.14). Условие замкнутости полученного контура крылового профиля имеет вид $a_1 + ib_1 = -1$ (1.19).

Простейший способ удовлетворения этих условий состоит в замене коэффициентов a_0, a_1, b_1 нужными. Как показано в [18], такое изменение, вносимое в исходные данные, является оптимальным в смысле наименьшего отличия исходной и модифицированной функции $\tilde{S}(\gamma)$.

Для обеспечения продольной устойчивости крылового профиля надо к приведенным условиям разрешимости задачи добавить условие устойчивости (3.2). Выразим это условие через функцию $\tilde{S}(\gamma)$. Для этого необходимы значения аэродинамической силы и момента, действующих на профиль. Воспользуемся

формулами Чаплыгина:

$$\overline{\mathbf{R}} = -\frac{\rho i}{2} \oint_{L_z} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta, \quad M_z = \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_{L_z} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{d\zeta} z(\zeta) d\zeta, \quad (3.4)$$

где “ $\overline{}$ ” означает комплексное сопряжение. Так как в потоке нет особенностей, то перейдем в (3.4) от интегрирования по контуру L_z профиля к круговому контуру бесконечно большого радиуса L_R и для безразмерных коэффициентов силы и момента запишем

$$\bar{c}_r = c_x - ic_y = \frac{2\overline{\mathbf{R}}}{b\rho v_\infty^2} = \frac{2\pi}{bv_\infty^2} \operatorname{res}_{\zeta=\infty} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{d\zeta}, \quad (3.5)$$

$$c_m = \frac{2M_z}{b^2\rho v_\infty^2} = -\frac{2\pi}{b^2v_\infty^2} \operatorname{Im} \operatorname{res}_{\zeta=\infty} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{d\zeta} z(\zeta).$$

Из (1.10) следует

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty e^{\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right).$$

Подставим это выражение и (1.8) в (3.5). Для коэффициентов c_x сопротивления и c_y подъемной силы получим

$$c_x = 0, \quad c_y = \frac{8\pi u_\infty}{bv_\infty} \sin \beta. \quad (3.6)$$

Для коэффициента c_m момента относительно задней кромки B имеем

$$c_m = \frac{2\pi u_\infty^2}{b^2v_\infty^2} [4 \sin \beta (D_1 \cos \beta + D_2 \sin \beta) - \sin 2\beta - 2(a_2 \sin 2\beta - b_2 \cos 2\beta)]. \quad (3.7)$$

Здесь D_1 и D_2 – действительная и мнимая части комплексной постоянной

$$D = D_1 + iD_2 = \frac{v_\infty e^{i\beta}}{2\pi u_\infty} \int_0^{2\pi} z(\gamma) d\gamma,$$

которая не зависит от β (т. к. не зависит от β выражение $e^{i\beta} z(\gamma)$), а определяется лишь формой полученного профиля.

Центр давления и аэродинамический фокус обычно располагают на хорде крылового профиля и отсчитывается от передней кромки. Они выражаются через коэффициенты c_y и c_m по формулам

$$x_p = 1 + \frac{c_m}{c_y \cos \beta}, \quad x_\alpha = 1 + \frac{c_m^\beta}{c_y^\beta \cos \beta - c_y \sin \beta}. \quad (3.8)$$

Здесь c_y^β и c_m^β – производные коэффициентов c_y и c_m по углу β . Найдем их из соотношений (3.6) и (3.7):

$$c_y^\beta = \frac{8\pi u_\infty}{bv_\infty} \cos \beta,$$

$$c_m^\beta = \frac{4\pi u_\infty^2}{b^2 v_\infty^2} [2(D_1 \cos 2\beta + D_2 \sin \beta) - \cos 2\beta - 2(a_2 \cos 2\beta + b_2 \sin 2\beta)].$$

Как следует из (3.8), условие $x_\alpha = x_\alpha^*$ устойчивости, в отличие от условий разрешимости, зависит от всей функции $\tilde{S}(\gamma)$, а не от конечного числа коэффициентов ее разложения в ряд (3.3). Теперь задачу построения устойчивого крылового профиля можно сформулировать следующим образом.

Пусть \mathbb{K} есть множество

$$\mathbb{K} = \left\{ \tilde{S}(\gamma) \in \mathbb{H}(A, \sigma) : \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 0, \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = -\pi, \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0, x_\alpha(\tilde{S}) = x_\alpha^* \right\},$$

где $\mathbb{H}(A, \sigma)$ – класс гельдеровских функций с фиксированными постоянными $A \in (0, \infty)$, $\sigma \in (0, 1]$. Требуется найти такую функцию $\tilde{S}^*(\gamma) \in \mathbb{K}$, что

$$\|\tilde{S}^*(\gamma) - \tilde{S}(\gamma)\|_{L_2[0, 2\pi]} = \inf_{F(\gamma) \in \mathbb{K}} \|F(\gamma) - \tilde{S}(\gamma)\|_{L_2[0, 2\pi]}.$$

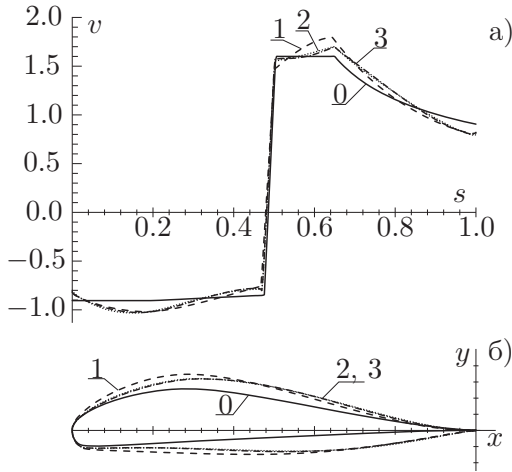


Рис. 3.2. Зависимость решения от числа коэффициентов ряда Фурье

Сложность решения этой задачи заключается в том, что связь $\tilde{S}(\gamma)$ с числом D и соответственно x_α является нелинейной. Поэтому далее задача решалась численно с использованием минимизирующих последовательностей. Для члена $\tilde{S}_n(\gamma)$ этой последовательности решалась задача поиска минимума функции $2n$ переменных – коэффициентов a_k и b_k , $k = \overline{2, n+1}$, разложения (3.3) функции $\tilde{S}(\gamma)$ в ряд Фурье.

3.4. Примеры расчетов. На рис. 3.2 показан пример построения профиля с условием устойчивости. Исходное распределение скорости (кривая 0 на рис. 3.2, а) было взято таким, что для него условия (1.14), (1.19) выполнены. Этому распределению скорости соответствует крыловой профиль (кривая 0 на рис. 3.2, б) с аэродинамическим фокусом, расположенным в точке $x_\alpha = 0.2461$. Требовалось построить профиль, аэродинамический фокус которого расположен в точке $x_\alpha^* = 0.27$. Кривые 1–3 на рис. 3.2 получены решением данной задачи при вариации двух, четырех, шести коэффициентов ряда Фурье соответственно. С ростом числа варьируемых коэффициентов минимизируемая последовательность сходится.

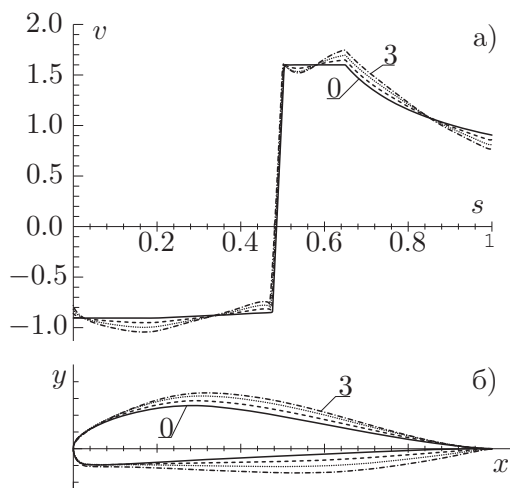


Рис. 3.3. Зависимость решения от положения x_α

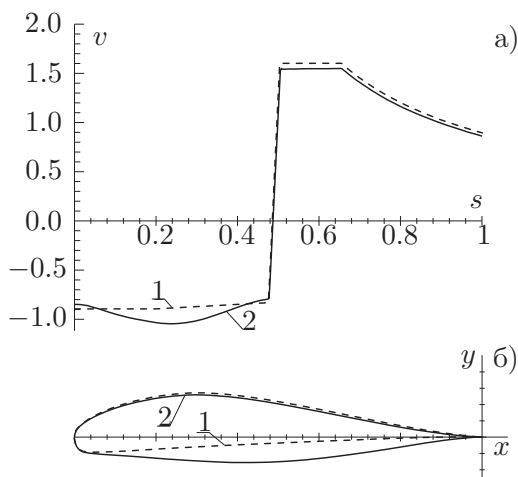


Рис. 3.4. Модификация $v(s)$ по нижней поверхности

На рис. 3.3 показан пример, демонстрирующий характер изменения распределения скорости и формы профиля при смещении x_α^* вправо. При увеличении разности между исходным x_α и желаемым x_α^* разница между исходным и полученным распределениями скоростей увеличивается, а профили все больше приобретают S-образную форму, характерную для устойчивых профилей. Кривая 0 соответствует профилю, построенному без учета ограничения на положение фокуса, кривые 1–3 соответствуют случаям, когда фокус сдвинут вправо на 1 – 3% хорды.

В следующем примере для выполнения условия устойчивости распределение скорости менялось только на нижней поверхности. Исходный крыловой профиль (кривая 1 на рис. 3.4, б) был построен по заданному безотрывному распределению скорости (кривая 1 на рис. 3.4, а). При угле атаки $\alpha = 5.6^\circ$ построенный крыловой профиль имел $c_y = 1.01$, аэродинамический фокус располагался в точке $x_\alpha = 0.2461$, а центр давления – в точке $x_p = 0.3040$. Далее была решена задача минимальной коррекции распределения скорости на нижней поверхности с условием $x_\alpha > x_p$. Задача решалась численно, вариация нижней поверхности была взята в виде отрезка ряда Фурье. Результат представлен на рис. 3.4, кривая 2. Незначительное изменение распределения скорости на верхней поверхности связано с тем, что для выполнения условий (1.14), (1.19) распределение скорости менялось на всем профиле, но безотрывность обтекания сохранилась. Полученный крыловой профиль при $\alpha = 5.4^\circ$ имеет $c_y = 0.74$, аэродинамический фокус в точке $x_\alpha = 0.2625$, а центр давления $x_p = 0.2556$.

§ 4. Учет условия безотрывности обтекания

В этом параграфе поставлена и решена задача построения крыловых профилей с целью обеспечения их безотрывного обтекания путем изменения исходного распределения скорости.

4.1. Постановка задачи. В плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ непроницаемый крыловой профиль обтекается установившимся безвихревым потоком вязкой несжимаемой жидкости (число $Re \gtrsim 10^6$, вязкость учитывается в рамках

модели ПС) под углом атаки α ; контур L_z профиля периметра L замкнутый и гладкий всюду, за исключением задней кромки B , где внутренний к области течения угол равен 2π (рис. 1.1). Начало выбранной декартовой системы координат совпадает с точкой B , ось абсцисс параллельна скорости набегающего потока, значение которой v_∞ . Дуговая координата s контура L_z отсчитывается от $s = 0$ до $s = L$ в точке B так, что при возрастании s вдоль L_z область течения остается слева.

Требуется минимальным образом модифицировать этот профиль так, чтобы он обтекался безотрывно.

4.2. Итерационный метод решения. Решив прямую задачу, определим распределение скорости $v(s)$ по контуру профиля. Рассчитав ПС по этому распределению скорости, определим, будет ли обтекание безотрывным. Если условия безотрывности выполняются, то модификации не требуется. Если же расчет показывает наличие отрыва, то требуется найти минимально отличающееся от $v(s)$ распределение скорости $v_1(s)$, для которого выполняются условия безотрывности. Далее, используя метод § 1, по распределению $v_1(s)$ строится модифицированный крыловой профиль, обтекаемый безотрывно.

Для расчета ПС использовался интегральный метод Кочина – Лойцянского [42]. Формпараметр $f(s)$ в ламинарный ПС от точки s_a разветвления до точки s_t перехода рассчитывался по формуле

$$f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_a}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right|, \quad (4.1)$$

где $a = 0.45$, $b = 5.35$ – полуэмпирические постоянные. Толщина $\delta^{**}(s)$ потери импульса связана с формпараметром соотношением

$$\delta^{**}(s) = \sqrt{\frac{v_\infty b f(s)}{\text{Re } v'(s)}}.$$

Для расчета $f(s)$ турбулентного ПС используется похожая формула

$$f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_t}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau + C_l \right|, \quad (4.2)$$

где $a = 1.17$, $b = 4.75$, а постоянная C_l характеризует вклад в $f(s)$ ламинарного участка

$$C_l = \left(\frac{\text{Re}}{v_\infty b} \right)^{a-1} \frac{|v(s_t)|^{a+b-2} (\delta^{**}(s_t))^a}{aA},$$

постоянная $A = 0.00653$.

Для определения положения точки перехода ламинарного ПС в турбулентный применялся эмпирический критерий, предложенный Р. Эшлером [64]. Для определения точки s_s отрыва турбулентного ПС применялось условие безотрывности турбулентного ПС в виде

$$f(s) \geq f_0, \quad (4.3)$$

где $f_0 = -2$ по критерию Л.Г. Лойцянского.

В работе [18] приведен способ построения безотрывных распределений скорости на диффузорном участке, основанный на задании на этом участке распределения формпараметра $f = f(s)$. Опишем его применительно к нашему случаю. Ясно, что если функция $f(s)$ будет удовлетворять неравенству $f_0 \leq f(s)$, то соответствующая ей функция $v(s)$ будет удовлетворять условию безотрывности (4.3).

На диффузорном участке, начиная с точки отрыва s_0 , распределение $v(s)$ построим так, чтобы формпараметр (4.2) удовлетворял условию $f = f_0$.

С учетом выражения (4.2) интегро-дифференциальное уравнение для нахождения функции $v(s)$ примет вид

$$\frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_0}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau + C_0 \right| = f_0, \quad (4.4)$$

где $C_0 = C_l + \int_{s_t}^{s_0} |v(\tau)|^{b-1} d\tau$.

Решением этого уравнения будет функция

$$v(s) = v(s_0) [1 + D(s - s_0)]^{-1/k}, \quad (4.5)$$

где $D = f_0 C_0 / a$, $k = f_0(b - 1) / (f_0 - a)$.

Таким образом, формула (4.5) задает безотрывное распределение скорости, имеющее на диффузорном участке желаемое распределение формпараметра.

В результате замены распределения скорости на безотрывное у нового профиля в окрестности задней кромки B появляется скачок скорости, т. е. при подходе к ней по верхней и нижней поверхностям $|v(0)| \neq |v(\ell)|$, что приводит к появлению в точке B физически нереализуемой логарифмической спирали. Для устранения этой особенности в методе квазирешения ОКЗА к аналитической функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ добавим функцию $\Delta\chi = i\frac{m}{\pi} \ln(1 - 1/\zeta)$, где $m = \operatorname{Re} \tilde{\chi}(0) - \operatorname{Re} \tilde{\chi}(2\pi)$. В результате нового квазирешения ОКЗА $\tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}(\zeta) - \Delta\chi$ построим контур крылового профиля, для которого не только выполняются условия разрешимости ОКЗА, но и значения скорости в задней кромке B совпадают.

На построенном таким образом профиле, т. е. модифицированном, вновь рассчитывается $v(s)$, и если условие безотрывности будет выполнено, то задача будет решена. Если же отрыв сохранится, то процесс решения повторяется.

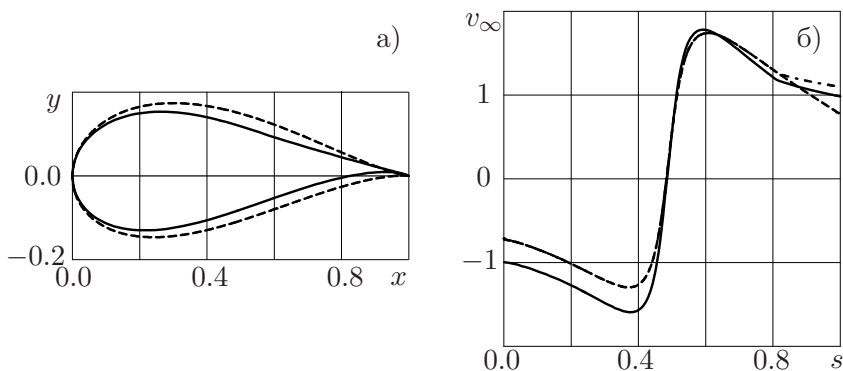


Рис. 4.1. Модификация профиля Жуковского

4.3. Результаты числовых расчетов. В качестве исходного профиля был взят крыловой профиль Жуковского, контур которого изображен на рис. 4.1, а штриховой линией.

Т а б л и ц а 4.1

Характеристики исходного и модифицированного
крыловых профилей

Профиль	α	s_t	s_s	c_{ya}
Исходный	3°	0.65	0.85	0.812
Модифицированный	3°	0.83	—	0.681

Здесь и далее координаты контура профиля отнесены к хорде профиля b , дуговые абсциссы – к периметру L контура L_z , а распределения скорости $v(s)$ – к скорости v_∞ .

Для распределения скорости при угле атаки $\alpha = 3^\circ$ (рис. 4.1, б, штриховая линия) критерий безотрывности (4.3) не выполняется. Модифицированное распределение скорости показано на рис. 4.1, б (штрих-пунктирная линия – распределение скорости на первом шаге итерационного процесса, сплошная – итоговая). Соответствующий этому распределению контур крылового профиля изображен на рис. 4.1 сплошной линией. Характеристики исходного и модифицированного профилей приведены в табл. 4.1.

Таким образом, описанный метод позволяет, опираясь на классические крыловые профили, модифицировать их так, чтобы они обтекались без отрыва потока при расчетном угле атаки. При этом существенно введение нового квазирешения, которое не только удовлетворяет обычным условиям разрешимости ОКЗА, но и позволяет избавиться от скачка скорости в задней кромке профиля.

Глава 2

Крыловые профили с устройствами отбора внешнего потока и выдува реактивной струи

Наиболее существенной проблемой при решении ОКЗА для профилей с устройствами **отбора внешнего потока** является выбор математической модели таких устройств. Самой простой моделью отбора является сток (для выдува – источник). Так А. И. Некрасовым [46] рассмотрена задача обтекания профиля Жуковского при наличии на контуре источника и стока. Задачу построения контура профиля с источниками и стоками по заданному распределению скорости рассмотрел М. А. Копырин [34]. Им исследован случай бесциркуляционного обтекания, когда на контуре располагается конечное число источников и стоков с нулевым суммарным расходом. М. Т. Нужиным [56] решена задача для более общего случая, когда циркуляция скорости отлична от нуля, а суммарный расход через источники и стоки также равен нулю. В работе А. М. Елизарова, Н. Б. Ильинского и А. В. Поташева [16] дано решение ОКЗА с отбором через единичный сток, расположенный на верхней поверхности контура профиля. Е. Ю. Аристовой и А. В. Поташевым [6] рассмотрен случай, когда сток располагается не на самой поверхности, а в конце узкого, слабо наклоненного к контуру профиля канала.

Более сложная модель отбора – щелевой отбор, когда, в отличие от стока, учитываются реальные размеры щели, приведена в статье В. В. Голубева [13]. Им детально исследована задача обтекания потоком ИНЖ кругового цилиндра со щелью, входное сечение которой моделируется эквипотенциалью

в форме дуги окружности. В. П. Шурыгин [59] в линеаризованной теории рассмотрел задачи обтекания крыловых профилей с отбором через щели, моделируемые эквипотенциалами.

Задача построения канала с отбором, где щель отбора представляется каналом с постоянными скоростями на стенках, рассмотрена Г. Ю. Степановым [53].

Решение ОКЗА для профилей с **выдувом** во внешний поток **струи** значительно сложнее задач с отбором потока. Основная сложность состоит в том, что обычно выдуваемая струя имеет другие, чем во внешнем потоке параметры (плотность и полное давление), вследствие чего нарушается аналитичность функции комплексного потенциала потока. Задача о построении профиля с выдувом и образованием реактивного закрылка в линейном приближении решена Л. М. Котляром [35]. Метод решения ОКЗА для профиля с выдувом струи в случае одинаковых плотностей и полных давлений рассмотрен в работе Е. Ю. Аристовой и А. В. Поташева [6].

В монографии Н. Ф. Воробьева [10] содержится решение прямой задачи – задачи обтекания потоком ИНЖ профиля крыла, нижняя сторона которого образована системой направляющих лопаток, обтекаемых потоком, вытекающим из внутренней полости крыла во внешний поток и образующим в нем струю. При этом считалось, что полные давления струи и набегающего потока различны. Задача решена методом непрерывно распределенных гидродинамических особенностей (вихрей). Также в [10] приведена формула для аэродинамических сил, действующих на такой профиль.

В статье Ю. Г. Жулева и С. И. Иншакова [24] представлены экспериментальные результаты испытаний отсека крыла с тангенциальным выдувом щелевой струи. Показана возможность достижения на таких профилях величин подъемной силы, которые значительно превосходят значения подъемной силы для профилей традиционной формы с выдувом на закрылок. Хотя ширина щели была порядка 0.1% хорды, из результатов экспериментов видно влияние выдува не только на ПС, но и на внешний поток; так, в частности, была получена схема обтекания с критической точкой в потоке.

§ 5. Об аэродинамических силах, действующих на проницаемые крыловые профили

Дадим строгий вывод формул расчета аэродинамических сил, действующих на крыловой профиль с проницаемым участком при отборе через него части внешнего потока ИНЖ и на крыловой профиль с выдувом реактивной струи, под которой будем понимать струю, полное давление и плотность которой отличны от этих же характеристик внешнего потока.

5.1. О классическом выводе формул для аэродинамических сил. При постановке и решении краевых задач аэрогидродинамики для крыловых профилей, содержащих проницаемые участки, через которые происходит отбор или выдув, естественно возникает необходимость в вычислении аэродинамических сил, действующих на такие профили. Сразу отметим, что под силами, действующими на такой профиль, понимают силы, действующие на единичный по ширине элемент крыла бесконечного размаха, образованного данным профилем.

В. В. Голубев [12] для нахождения главного вектора сил, действующих на изолированный профиль с проницаемым участком, находящийся в потоке ИНЖ, использовал формулу С. А. Чаплыгина

$$\bar{\mathbf{R}} = R_x - iR_y = \frac{\rho i}{2} \oint_{L_z} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (5.1)$$

Здесь \mathbf{R} – результирующая сила, действующая на профиль (черта сверху означает комплексное сопряжение), R_x – сила сопротивления, R_y – подъемная сила, ρ – плотность, $w(z)$ – комплексный потенциал течения, L_z – контур крылового профиля AB с проницаемым участком MN (рис. 5.1). Интегрирование по замкнутому контуру L_z идет против часовой стрелки.

Для профиля с отбором сопряженную скорость $\bar{v} = dw/dz$ в окрестности бесконечно-удаленной точки в области течения G_z , следуя [12], можно представить в виде следующего ряда Лорана

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty + \frac{Q + i\Gamma}{2\pi z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}. \quad (5.2)$$

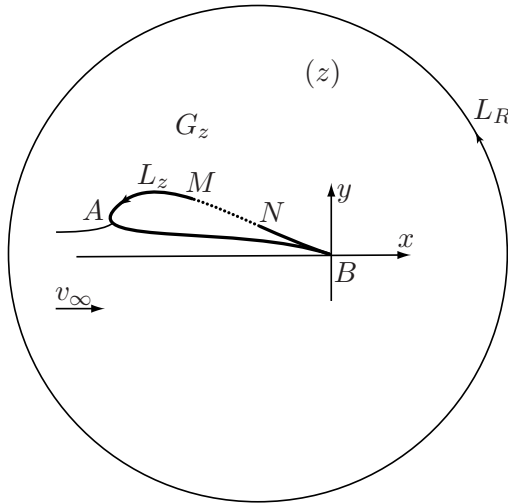


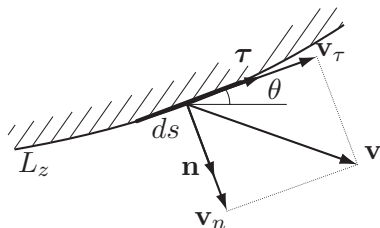
Рис. 5.1. Крыловой профиль с отбором в потоке жидкости

Здесь Q – суммарный расход через пронцаемый участок профиля (здесь и дальше $Q < 0$ для профиля с отбором, $Q > 0$ для профиля с выдувом); Γ – циркуляция ($\Gamma > 0$ соответствует вихрю, закрученному по часовой стрелке), ось абсцисс выбрана по направлению вектора скорости \mathbf{v}_∞ набегающего потока. Так как в области G_z особенностей нет, то можно перейти от интегрирования по контуру L_z профиля к круговому контуру L_R бесконечно большого радиуса и, подставив разложение (5.2) в формулу (5.1), записать

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \frac{\rho i}{2} \oint_{L_z} \left(v_\infty + \frac{Q + i\Gamma}{2\pi z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} \right)^2 dz = \\ &= \frac{\rho i}{2} \oint_{L_R} \left(v_\infty^2 + v_\infty \frac{Q + i\Gamma}{\pi z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^*}{z^k} \right) dz \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$R_x - iR_y = \frac{\rho i}{2} v_\infty \frac{Q + i\Gamma}{\pi} \ln e^{2\pi i} = -\rho v_\infty (Q + i\Gamma),$$

Рис. 5.2. Участок контура L_z

откуда

$$R_y = \rho v_\infty \Gamma, \quad R_x = -\rho v_\infty Q. \quad (5.3)$$

Первая формула (5.3) есть запись известной теоремы Жуковского о подъемной силе, вторая формула также встречается в работах Н. Е. Жуковского (см., например, [23]).

При классическом выводе формулы (5.1) (см., например, [42, с. 192–195]) используются предположения, справедливые лишь для непроницаемых профилей. Так, допускается, что скорость направлена всюду по касательной к контуру L_z профиля.

Учитывая сказанное, дадим строгий вывод формул (5.1), (5.3) для расчета аэродинамических сил, действующих на крыловой профиль с проницаемым участком. Кроме этого приведем и обоснуем формулы расчета аэродинамических сил, действующих на крыловой профиль с выдувом реактивной струи. Наконец, приведем формулы расчета энергетических затрат для профиля с одновременным отбором части потока ИНЖ и выдувом реактивной струи.

5.2. Вывод формулы для профиля с отбором внешнего потока. Рассмотрим участок ds контура L_z . Сила, действующая на этот участок, в соответствии с законом сохранения количества движения равна

$$d\mathbf{R} = -[\rho \mathbf{n} + \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n})\mathbf{v}]ds, \quad (5.4)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к контуру (рис. 5.2).

Проинтегрировав по всему контуру L_z , найдем вектор силы

$$\mathbf{R} = \oint_{L_z} d\mathbf{R} = \oint_{L_z} [-p_0 \mathbf{n} + \rho(\mathbf{v}, \mathbf{v})\mathbf{n}/2 - \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n})\mathbf{v}] ds. \quad (5.5)$$

Здесь

$$p_0 = p + \rho(\mathbf{v}, \mathbf{v})/2 \quad (5.6)$$

– полное давление потока, которое является постоянным во всей области течения.

Перейдем к комплексным переменным. Заметим, что

$$\begin{aligned} \tau &= e^{i\theta}, & \mathbf{n} &= -ie^{i\theta}, & d\mathbf{z} &= e^{i\theta} ds, & ds &= e^{i\theta} \overline{dz} = e^{-i\theta} dz, \\ \mathbf{v}_\tau &= v_\tau e^{i\theta}, & \mathbf{v}_n &= -iv_n e^{i\theta}, & \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_n = (v_\tau - iv_n) e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |v|^2 = v_\tau^2 + v_n^2 = (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{v}_n^2) e^{-2i\theta}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = v_n = \mathbf{v}_n i e^{-i\theta}.$$

Сделав соответствующие замены в (5.5), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \oint_{L_z} (-p_0)(-ie^{i\theta})(e^{-i\theta} dz) + \oint_{L_z} \rho(\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{v}_n^2) e^{-2i\theta} (-ie^{i\theta})/2 e^{i\theta} \overline{dz} - \\ &\quad - \oint_{L_z} \rho(\mathbf{v}_n i e^{-i\theta})(\mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_n) e^{i\theta} \overline{dz} \end{aligned}$$

или после несложных преобразований

$$\mathbf{R} = \oint_{L_z} \left[ip_0 dz - \frac{\rho i}{2} (\mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_n)^2 \overline{dz} \right] = \oint_{L_z} \left[ip_0 dz + \overline{\frac{\rho i}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz} \right]. \quad (5.7)$$

Учтем тот факт, что интеграл по замкнутой кривой L_z от постоянной величины p_0 равен нулю. Взяв комплексное сопряжение, получим для результирующей силы, действующей на профиль с пронизаемым участком, формулу

$$\overline{\mathbf{R}} = \frac{\rho i}{2} \oint_{L_z} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

которая целиком совпадает с формулой (5.1) С. А. Чаплыгина. Следовательно, формулу (5.1) можно применять и для профилей с проницаемым участком, как это и делал В. В. Голубев. Важно подчеркнуть, что *результатирующая сила \mathbf{R} зависит только от циркуляции и расхода.*

Коэффициенты подъемной силы c_y и сопротивления c_x согласно (5.3) запишутся

$$c_y = \frac{2\Gamma}{v_\infty b}, \quad c_x = -2q, \quad (5.8)$$

где q – безразмерный расход, отнесенный к хорде b профиля и скорости v_∞ набегающего потока

$$q = \frac{Q}{v_\infty b}.$$

5.3. Вывод формулы для профиля с выдувом реактивной струи во внешний поток. Как было показано выше, формулы (5.1) и (5.3) применимы и для проницаемых профилей: профилей с отбором потока и профилей с выдувом в поток. Однако в случае выдува должно выполняться условие существования комплексного потенциала во всей области течения. Если выдуваемая жидкость имеет плотность или полное давление, отличные от плотности или полного давления внешнего потока, то на линии раздела внешнего потока и струи будет иметь место разрыв касательной составляющей скорости, а это приведет к тому, что функция комплексно-сопряженной скорости будет кусочно-аналитической. Поэтому формулы (5.1) и (5.3) не будут верны.

В то же время формула (5.7) остается справедливой и при разных плотностях и полных давлениях струи и внешнего потока, т. к. она была получена при общих допущениях, а упомянутые условия учитывались позднее. На основании (5.7) получим формулу для аэродинамических сил, справедливую для тел с выдувом реактивной струи.

Пусть выдуваемая из профиля струя имеет плотность ρ_j и полное давление p_{j0} , отличные от плотности ρ и полного давления p_0 внешнего потока. Здесь и далее индексом j обозначаются

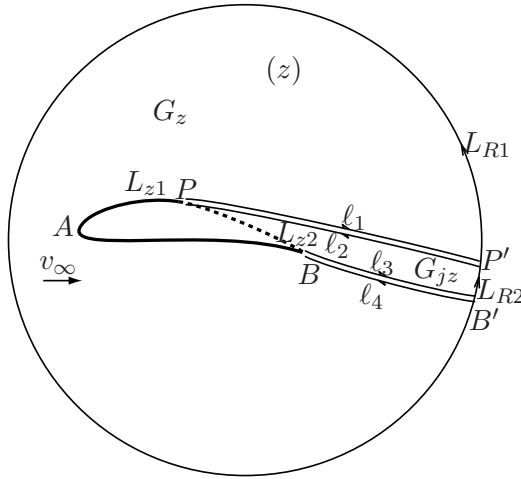


Рис. 5.3. Крыловой профиль с выдувом в потоке жидкости

параметры струи. Поэтому на линиях схода потока PP' (ℓ_1, ℓ_2) и BB' (ℓ_3, ℓ_4) имеет место разрыв касательной составляющей скорости (рис. 5.3). Точки B и P делят контур L_z профиля на две части: соприкасающуюся с внешним потоком L_{z1} и соприкасающуюся с выдуваемой струей L_{z2} . Для простоты рассмотрим случай распределенного выдува, когда пронизаемый участок расположен на L_{z2} (случай щелевого выдува исследуется аналогично). Рассмотрим два объема жидкости, ограниченные замкнутыми контурами $L_{z1} \cup \ell_1 \cup L_{R1} \cup \ell_4$ и $L_{z2} \cup \ell_3 \cup L_{R2} \cup \ell_2$, где L_{R1} и L_{R2} – дуги окружности бесконечно большого радиуса.

Сила, действующая на профиль с выдувом, будет равна

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \oint_{L_{z1} \cup L_{z2}} \left[ip_0 dz + \frac{\rho i}{2} \overline{\left(\frac{dw}{dz} \right)^2} dz \right] = \\ &= \oint_{\ell_1 \cup L_{R1} \cup \ell_4 \cup \ell_3 \cup L_{R2} \cup \ell_2} \left[ip_0 dz + \frac{\rho i}{2} \overline{\left(\frac{dw}{dz} \right)^2} dz \right]. \end{aligned}$$

Интегралы по линиям ℓ_1 и ℓ_2 взаимно уничтожают друг друга.

Действительно, если взять подынтегральное выражение в виде (5.4), то заметим, что давления p в струе и внешнем потоке одинаковы, нормали \mathbf{n} противоположны; скалярное произведение $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$ вследствие того, что скорости направлены по касательной. Аналогично взаимно уничтожают друг друга интегралы по линиям ℓ_3 и ℓ_4 . Таким образом, сила выражается через интегралы по дугам окружности бесконечно большого радиуса

$$\mathbf{R} = \oint_{L_{R1} \cup L_{R2}} \left[ip_0 dz + \frac{\rho i}{2} \overline{\left(\frac{dw}{dz} \right)^2} dz \right]. \quad (5.9)$$

Стоящие в подынтегральных выражениях функции $p_0(z)$ и $\rho(z)$ равны p_0 и ρ во внешнем потоке (G_z) и p_{j0} и ρ_j в струе (G_{jz}). Представим комплексно-сопряженную скорость в окрестности бесконечно удаленной точки в областях G_z и G_{jz} в виде (см. (5.2))

$$\frac{dw}{dz} \Big|_{G_z} = v_\infty + \frac{\tilde{Q} + i\tilde{\Gamma}}{2\pi z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad \frac{dw}{dz} \Big|_{G_{jz}} = v_{j\infty} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{jk}}{z^k}, \quad (5.10)$$

где $\tilde{Q}/2\pi$ и $\tilde{\Gamma}/2\pi$ – действительная и мнимая части коэффициента разложения функции dw/dz при z^{-1} в окрестности бесконечно-удаленной точки, $v_{j\infty}$ – скорость в струе на бесконечности. Заметим, что при отсутствии разрывов во внешнем течении (случай $p_0 = p_{j0}$, $\rho_j = \rho$) величина \tilde{Q} становится равной расходу Q , а $\tilde{\Gamma}$ – циркуляции Γ скорости вокруг контура профиля.

Подставив (5.10) в (5.9), найдем

$$\mathbf{R} = i(p_{j0} - p_0)ih_\infty - \frac{i}{2} \left[-\rho v_\infty^2 ih_\infty + \rho v_\infty (\tilde{Q} + i\tilde{\Gamma}) 2i + \rho_j v_{j\infty}^2 ih_\infty \right],$$

где h_∞ – ширина струи на бесконечности. Используя интеграл Бернулли (5.6), получим

$$\mathbf{R} = -h_\infty(\rho_j v_{j\infty}^2 - \rho v_\infty^2) - \rho v_\infty \tilde{Q} + i\rho v_\infty \tilde{\Gamma}.$$

Учтем, что $h_\infty = Q/v_{j\infty} = \tilde{Q}/v_\infty$. После несложных преобразований определим

$$R_y = \rho v_\infty \tilde{\Gamma}, \quad R_x = -\rho_j v_{j\infty} Q = -\sqrt{\rho \rho_j (1 + \mu)} v_\infty Q, \quad (5.11)$$

где безразмерный параметр

$$\mu \equiv \frac{2(p_{j0} - p_0)}{\rho v_\infty^2} = \frac{\rho_j v_{j\infty}^2}{\rho v_\infty^2} - 1 \quad (5.12)$$

характеризует энергию выдуваемой струи.

Заметим, что попутно мы получили соотношение

$$\tilde{Q} = \frac{v_\infty}{v_{j\infty}} Q. \quad (5.13)$$

К сожалению, аналогичной простой связи между $\tilde{\Gamma}$ и Γ обнаружить не удалось.

Формулы, аналогичные (5.11), были получены Н. Ф. Воробьевым [10] для профиля, нижняя сторона которого образована системой направляющих лопаток, обтекаемых потоком, вытекающим из внутренней полости крыла во внешний поток и образующим в нем струю.

Коэффициент c_x сопротивления и коэффициент c_y подъемной силы, согласно (5.11), запишутся в виде

$$c_y = \frac{2\tilde{\Gamma}}{v_\infty b}, \quad c_x = -2q \sqrt{\frac{\rho_j(1+\mu)}{\rho}}. \quad (5.14)$$

5.4. Профиль с отбором и выдувом. Расчет энергетических затрат. Предположим, что для профилей с отбором жидкость, отобранная из внешнего потока, выбрасывается в поток (не обязательно на крыловом профиле). Аналогично для профилей с выдувом струи необходимо организовать отбор жидкости из внешнего потока. Рассмотрим случай, когда у выдуваемой струи $\rho_j = \rho$. Найдем результирующую силу, действующую на такой профиль. Коэффициент c_x полного сопротивления складывается из коэффициента c_{xs} сопротивления, возникающего при отборе и коэффициента c_{xj} тяги, возникающего при выдуве

$$c_x = c_{xs} + c_{xj} = 2q(1 - \sqrt{1 + \mu}). \quad (5.15)$$

Коэффициент $c_x < 0$ при $\mu > 0$, что соответствует силе тяги. Эта зависимость изображена на рис. 5.4 сплошной линией.

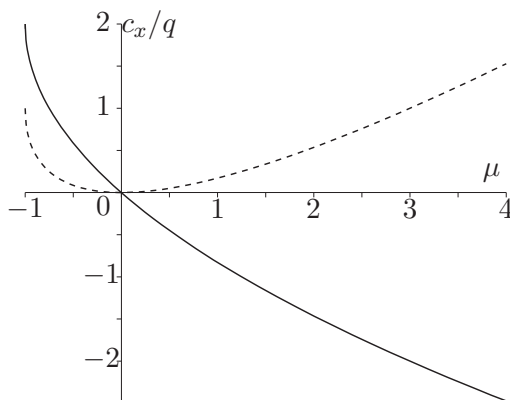


Рис. 5.4. Зависимость c_x/q (сплошная линия) и $(c_x + c_{xp})/q$ (штриховая) для профиля с отбором и выдувом от числа μ

Найдем энергетические затраты на организацию отбора-выдува. Эти затраты удобно представить в виде эквивалентного коэффициента сопротивления c_{xp} . Для его нахождения воспользуемся формулой, приведенной в монографии П. Чжена [57]

$$c_{xp} = \eta_a \frac{2P}{bv_\infty \rho v_\infty^2}, \quad (5.16)$$

где η_a – КПД двигателя, P – мощность энергетической установки.

Будем считать, что в энергетическую установку выдува поступает жидкость из внешнего потока с полным давлением p_0 , а выходящая жидкость имеет полное давление p_{j0} . Поэтому выражение для мощности запишется в виде

$$P = \frac{1}{\eta_p} (p_{j0} - p_0) Q,$$

где η_p – КПД энергетической установки отбора-выдува. Для коэффициента c_{xp} согласно (5.16) и (5.12) будем иметь

$$c_{xp} = \frac{\eta_a}{\eta_p} \frac{2(p_{j0} - p_0)}{\rho v_\infty^2} \frac{Q}{bv_\infty} = \frac{\eta_a}{\eta_p} \mu q.$$

В частном случае, когда КПД двигателя и энергетической установки отбора-выдува одинаковы ($\eta_a = \eta_p$), получим простую формулу

$$c_{xp} = \mu q.$$

Заметим, что $c_x + c_{xp} \geq 0$ при любых μ . Как и следовало ожидать, затраты на организацию отбора-выдува больше, чем получаемый эффект от него, причем сумма $c_x + c_{xp}$ возрастает при увеличении энергии выдуваемой струи (она изображена на рис. 5.4 штриховой линией).

§ 6. Отбор через кольцевой канал

Одним из способов улучшения аэродинамических свойств крыла, в частности, получения больших коэффициентов подъемной силы при безотрывном обтекании, является снабжение крыла устройством отбора внешнего потока. Известны различные математические модели таких устройств. В этом параграфе используется схема отбора потока через круговой канал с постоянными скоростями на стенках, предложенная Г. Ю. Степановым [53].

6.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомым крыловой профилем L_z с заданной длиной хорды b обтекается плоским установившимся потоком ИНЖ (рис. 6.1) с заданной скоростью v_∞ на бесконечности. Внутренний к области течения угол в точке B равен 2π . Щель для отбора воздуха из внешнего потока схематизируется бесконечностным завитком, асимптотически переходящим в кольцевой канал шириной $H = b(r_2 - r_1)$ с постоянными скоростями v_1 и v_2 на его стенках ($v_1 > v_2$). Здесь r_1 и r_2 — соответственно безразмерные внутренний и внешний радиусы закругления. Считается заданным либо безразмерная ширина $h = H/b$, либо безразмерный коэффициент $q = Q/(v_\infty b)$ расхода через щель.

На искомом контуре профиля задано распределение скорости $v(\gamma)$ с несколькими свободными параметрами, где γ — полярная координата в канонической области $|\zeta| > 1$ плоскости ζ (рис. 6.2). Соответствующие точки в плоскостях z и ζ обозначены одинаковыми буквами. Для взаимно однозначного

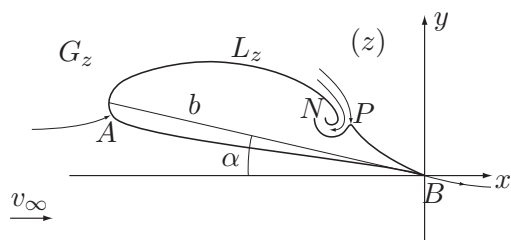


Рис. 6.1. Течение в физической плоскости

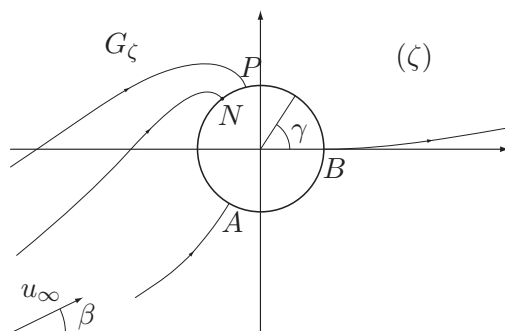


Рис. 6.2. Течение в канонической плоскости

конформного отображения областей G_z и G_ζ предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ , а также переход точки $z = 0$ в точку $\zeta = 1$.

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики.

6.2. Схема решения задачи. Обозначим через u_∞ и β , соответственно, модуль и аргумент скорости на бесконечности в плоскости ζ (рис. 6.2). Комплексно сопряженную скорость $dw/d\zeta$ обтекания единичного круга со стоком в точке N нетрудно выписать, воспользовавшись методом особенностей (см., например, [15]). Получим

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} \frac{(\zeta - \zeta_a)(\zeta - \zeta_p)(\zeta - 1)}{\zeta^2(\zeta - \zeta_n)}$$

или в более удобной форме

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-1}, \quad (6.1)$$

где $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$, $\zeta_p = e^{i\gamma_p}$, $\zeta_n = e^{i\gamma_n}$ – координаты точек A , P , N на окружности $|\zeta| = 1$ (напомним, что координата точки B равна $\zeta = 1$). Перейдем в (6.1) на границу области G_ζ , положив $\zeta = e^{i\gamma}$. Учтем, что единичная окружность является линией тока и скорость направлена по касательной к ней, т. е. $\left.\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=e^{i\gamma}} = u(\gamma)e^{-i(\gamma+\pi/2)}$. Сравнив эти два выражения, определим распределение скорости $u(\gamma)$ по единичной окружности

$$u(\gamma) = 4u_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \quad (6.2)$$

и получим связь углов

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_p - \gamma_n - \pi). \quad (6.3)$$

Циркуляцию Γ и расход Q нетрудно выразить через параметры u_∞ , γ_a , γ_p , γ_n . Действительно, при больших значениях $|\zeta|$ поведение функции (6.1) имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} \left[1 + (\zeta_n - \zeta_a - \zeta_p - 1)\frac{1}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]. \quad (6.4)$$

С другой стороны, т. к. на бесконечности поток имеет источник интенсивности Q и вихрь с циркуляцией Γ , то комплексная скорость имеет вид, аналогичный (5.2):

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} + \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right). \quad (6.5)$$

Сравнив выражения (6.4) и (6.5), найдем

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi u_\infty [\cos(\gamma_n - \beta) - \cos(\gamma_a - \beta) - \cos(\gamma_p - \beta) - \cos \beta], \\ \Gamma &= 2\pi u_\infty [\sin(\gamma_n - \beta) - \sin(\gamma_a - \beta) - \sin(\gamma_p - \beta) + \sin \beta]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Введем в рассмотрение аналитическую функцию Жуковского – Мичела

$$\chi(\zeta) = \ln \left(\frac{1}{v_\infty} \frac{dw}{dz} \right) = \ln \left(\frac{v}{v_\infty} e^{-i\theta} \right) = S - i\theta. \quad (6.7)$$

Она имеет логарифмические особенности на окружности в точках A , N и P . Так, в критических точках A и P действительная часть $\chi(\zeta)$ обращается в бесконечность, а мнимая терпит скачок на величину π . В точке N , наоборот, действительная часть этой функции терпит скачок на $a = \ln(v_1/v_2)$, а мнимая обращается в бесконечность.

В дальнейшем целесообразно использовать вспомогательную аналитическую функцию без особенностей

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} + i\tilde{\theta} = \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta), \quad (6.8)$$

$$\chi_0(\zeta) = \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta} \right) - \frac{ai}{\pi} \ln \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta} \right).$$

На границе $\zeta = e^{i\gamma}$ круга известна действительная часть этой функции

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln \left| \frac{v(\gamma)}{4v_\infty \sin \frac{\gamma-\gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma-\gamma_p}{2}} \right| + \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2\pi} - \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2|\gamma - \gamma_n|}. \quad (6.9)$$

Функция $\tilde{S}(\gamma)$ является ограниченной и непрерывной всюду при $\gamma \in [0, 2\pi]$.

Восстановление аналитической функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ по известной действительной части $\tilde{S}(\gamma)$ на границе есть задача Шварца. Для внешности круга формула, дающая решение этой задачи, имеет вид

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \frac{\zeta + e^{i\gamma}}{\zeta - e^{i\gamma}} d\gamma. \quad (6.10)$$

Заметим, что в общем случае аналитическая функция находится с точностью до мнимой постоянной, поэтому в формуле Шварца обычно присутствует слагаемое $i\beta_0$. Но в нашем случае из условия, что скорость на бесконечности параллельна действительной оси, следует $\text{Im } \tilde{\chi}(\infty) = 0$, поэтому $\beta_0 = 0$.

Мнимая часть функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на границе круга восстанавливается интегралом Гильберта – Шварца по формуле

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\sigma) \text{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma. \quad (6.11)$$

Угол θ наклона касательной к контуру крылового профиля определяется из (6.7) и (6.8):

$$\theta(\gamma) = -\tilde{\theta}(\gamma) - \beta + \gamma + \frac{\pi - \gamma_n}{2} + \frac{a}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \right|. \quad (6.12)$$

Как видно из (6.12), в окрестности точки N функция $\theta(\gamma)$ не ограничена. Для нахождения координат искомого контура профиля используем следующую формулу:

$$dz = dx + idy = \frac{dw/d\zeta}{dw/dz} d\zeta = \frac{u(\gamma)}{v(\gamma)} e^{i\theta} d\gamma. \quad (6.13)$$

Неизвестная в (6.2) скорость u_∞ , влияющая лишь на размеры контура профиля $z(\gamma)$, определяется из условия заданности хорды b профиля. После определения расхода Q по (6.6) радиусы r_1 и r_2 границ канала отбора отыскиваются по формулам [53]:

$$r_1 = -\frac{Q}{av_1}, \quad r_2 = -\frac{Q}{av_2}. \quad (6.14)$$

Так как при приближении γ к γ_n функции $\theta(\gamma)$ и $u(\gamma)$ становятся неограниченными, то интегрирование (6.13) ведется лишь до достижения углом θ некоторого определенного значения θ_{\min} (которое выбирается из условия, что форма канала с заданной точностью совпадает с круговой).

6.3. Условия разрешимости. Из (6.8) следует, что в бесконечно удаленной точке $\tilde{\chi}(\infty) = 0$. С другой стороны, из (6.10) при $\zeta = \infty$ получим

$$\tilde{\chi}(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma.$$

Поэтому необходимо выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 0. \quad (6.15)$$

Это условие выражает тот факт, что заданная величина скорости на бесконечности в физической плоскости z совпадает с v_∞ , определяемой в процессе решения по известному распределению $v(\gamma)$.

Условия замкнутости искомого контура крылового профиля выводятся из комплексного соотношения $\operatorname{res}(dz/d\zeta) = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Выведем эти условия. Заметим, что

$$\frac{dw}{dz}(\zeta) = v_\infty e^{\chi(\zeta)} = v_\infty e^{\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-ai/\pi}.$$

Приняв во внимание (6.1), найдем

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = \frac{dw/d\zeta}{dw/dz} = \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{ai/\pi-1}. \quad (6.16)$$

Из (6.10) следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\tilde{\chi}(\zeta) = c_{-1} \frac{1}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad c_{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma.$$

Следовательно, $e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} = 1 - c_{-1}/\zeta + O(1/\zeta^2)$ и (6.16) перепишем в виде

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{ai}{\pi} - 1 \right) \zeta_n + c_{-1} \right) \frac{1}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \right].$$

Вычет $dz/d\zeta$ будет равен нулю, если

$$c_{-1} = -1 - \left(\frac{ai}{\pi} - 1 \right).$$

Отделив действительную и мнимую части, получим два условия на функцию $\tilde{S}(\gamma)$:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\cos \gamma_n - 1) + a \sin \gamma_n, \quad (6.17)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi \sin \gamma_n - a \cos \gamma_n. \quad (6.18)$$

Условия разрешимости (6.15), (6.17), (6.18) с учетом (6.9) представляют собой систему трех нелинейных интегральных уравнений, налагающих ограничения на класс исходных распределений скорости $v(\gamma)$.

6.4. Задание исходного распределения скорости.

Для выполнения условий разрешимости достаточно задать трехпараметрический класс распределений $v(\gamma, a_1, a_2, a_3)$, при этом свободные параметры a_i ($i = 1, 2, 3$) следует искать из условий разрешимости (6.15), (6.17), (6.18).

Ввиду задания ширины h щели или безразмерного расхода q через щель появляется еще одно условие, выполнение которого достигается за счет введения четвертого свободного параметра в $v(\gamma)$.

Для получения других желаемых аэродинамических или геометрических характеристик профиля (например, заданного отстояния щели от задней кромки) исходное распределение $v(\gamma)$ скорости зададим зависящим от большего чем 4 числа параметров. Так, на рис. 6.3 приведен пример задания $v(\gamma)$ от 8-ми параметров: $v_0, v_1, v_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_n, \gamma_3, \gamma_4$.

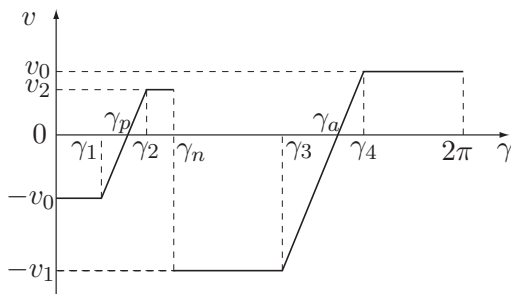


Рис. 6.3. Исходное параметрическое распределение скорости

Знак скорости связан с направлением роста γ и поэтому $v > 0$ при $\gamma \in (\gamma_p, \gamma_n) \cup (\gamma_a, 2\pi)$ и $v < 0$ при $\gamma \in (0, \gamma_p) \cup (\gamma_n, \gamma_a)$. Задание скорости в таком виде обеспечивает в рамках принятой математической модели безотрывное обтекание крылового профиля за счет отсутствия участков падения скорости. В потоке вязкой жидкости отбор должен быть таким, чтобы весь ПС, образовавшийся на профиле, уходил бы в канал отбора.

Т а б л и ц а 6.1

Характеристики крыловых профилей с отбором потока

№	v_1	γ_n	v_2	v_0	c_y	c_x	α°	$h(\%)$
1	2.0	0.8	1.0	0.683	2.71	0.08	9.7	2.89
2	2.2	0.4	1.1	0.389	4.45	0.08	7.2	2.63

Для получения заданного h или q и выполнения условий разрешимости параметры $\gamma_1, v_0, \gamma_3, \gamma_4$ определялись в процессе решения задачи. Угол γ_n , от которого зависит отстояние щели от задней кромки, задавался. Отношение скоростей $k = v_1/v_2 = r_2/r_1$ также задавалось, следовательно, учитывая известность h или q , радиусы r_1 и r_2 закругления канала определялись до решения задачи. Скорость v_1 на большей части верхней поверхности и параметр γ_2 , влияющий на кривизну профиля в окрестности критической точки P , также задавались.

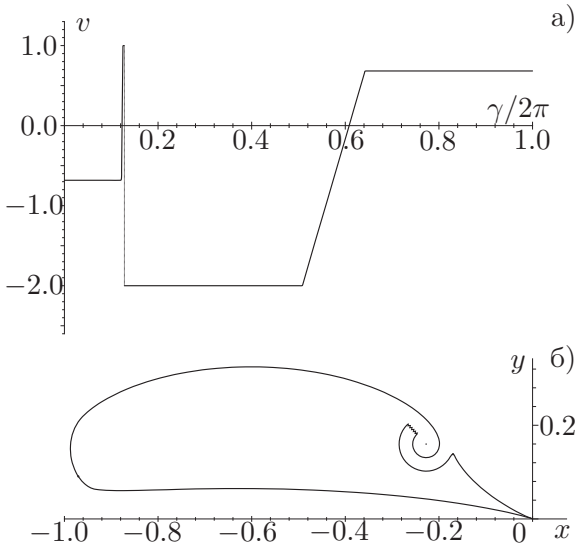


Рис. 6.4. Крыловой профиль с отбором при $v_1/v_\infty = 2$

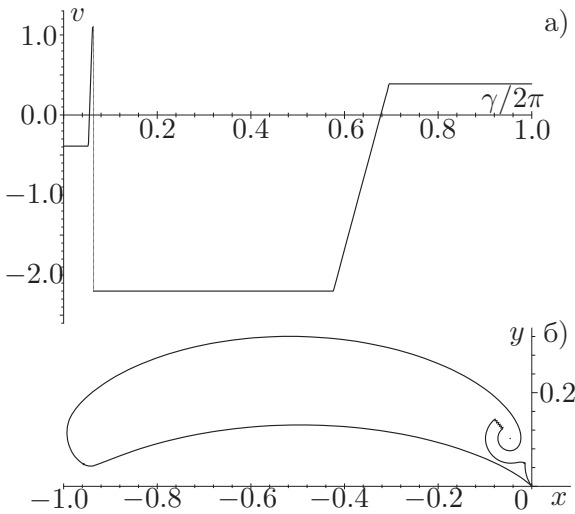


Рис. 6.5. Крыловой профиль с отбором при $v_1/v_\infty = 2.2$

6.5. Примеры построения крыловых профилей. На рис. 6.4 – 6.5 изображены построенные профили с соответствующими распределениями скоростей $|v(\gamma)|$. Задаваемые (v_1, γ_n) , а также определяемые параметры и характеристики этих профилей приведены в табл. 6.1. Расчетный угол атаки α указан в градусах, ширина h щели – в процентах длины хорды b . Расход через щель для всех профилей был взят равным $q = -0.04$, отношение $k = 2$. Коэффициенты c_y подъемной силы и c_x сопротивления вычислены по формулам (5.8).

В первом примере скорость на контуре профиля была ограничена величиной $2v_\infty$, канал отбора располагался на расстоянии приблизительно 75% хорды. Полученный крыловой профиль изображен на рис. 6.4.

Второй (рис. 6.5) крыловой профиль получился в результате модификации первого с целью получения c_y , большего 4. Для этого была немного увеличена скорость $v_1 = 2.2v_\infty$ и канал отбора сдвинут к задней кромке.

Приведенный в этом параграфе метод позволяет проектировать крыловые профили с отбором внешнего потока. Показано, что отбор потока в совокупности со специальным способом задания исходного распределения скорости позволяет исключить диффузорные участки (на которых возможен отрыв потока) и значительно увеличить коэффициент подъемной силы таких крыловых профилей.

§ 7. Отбор в диапазоне режимов обтекания

В § 6 была решена задача построения высоконесущего крылового профиля со целевым отбором воздуха из внешнего потока в рамках модели ИНЖ по распределению скорости, не содержащему диффузорные участки. Задание скорости в таком виде обеспечивает в рамках принятой математической модели безотрывное обтекание крылового профиля.

С практической точки зрения важной является задача проектирования профилей, имеющих желаемые аэродинамические характеристики (в рассматриваемом случае – отсутствие участков падения скорости) в заданном диапазоне изменений угла

атаки. Рассмотрим задачу проектирования крылового профиля с отбором внешнего потока при условии отсутствия участков падения скорости на двух разных углах атаки.

7.1. Постановка задачи. В этой задаче, в отличие от работ [21, 64, 66, 73] кроме угла атаки α крылового профиля или теоретического угла β – аргумента скорости набегающего потока в канонической области – появляется еще один дополнительный параметр – величина расхода Q через щель. Поэтому режим обтекания такого профиля определяется двумя параметрами: углом атаки и величиной расхода.

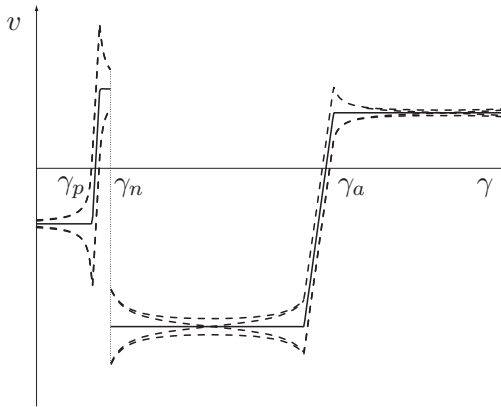


Рис. 7.1. Скорость на расчетном (сплошная линия) и нерасчетных (штриховые линии) режимах

Если пересчитать задаваемое кусочно-линейное распределение скорости, изображенное на рис. 6.3, на другие режимы, т. е. другие углы атаки и (или) другие расходы, то возникают участки падения скорости (рис. 7.1, штриховые линии).

Найдем связь между распределениями $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ скоростей для двух разных режимов обтекания. Пусть $z = z(\zeta)$ – функция, конформно отображающая внешность единичного круга на внешность профиля, а $w_1(z)$ и $w_2(z)$ – комплексные потенциалы течений этих режимов обтекания. Тогда из очевид-

ного соотношения

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw_1/d\zeta}{dw_1/dz} = \frac{dw_2/d\zeta}{dw_2/dz}$$

следует $u_1(\gamma)/v_1(\gamma) = u_2(\gamma)/v_2(\gamma)$, откуда с использованием (6.2) получается формула для пересчета распределения скорости на другой режим:

$$v_2(\gamma) = v_1(\gamma)\Phi(\gamma), \quad (7.1)$$

$$\Phi(\gamma) = \frac{u_2(\gamma)}{u_1(\gamma)} = \frac{\sin \frac{\gamma - \gamma_{p2}}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2}}{\sin \frac{\gamma - \gamma_{p1}}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2}}. \quad (7.2)$$

В эту формулу входят параметры γ_a и γ_p (для двух режимов), которые однозначно связаны с соответствующими им углом β и расходом Q соотношениями (6.3) и (6.6).

Нашей целью является нахождение профиля, который обтекался бы безотрывно при двух расчетных режимах. Этого можно добиться, если задать распределение скорости $v_1(\gamma)$ таким образом, чтобы оно и пересчитанное по (7.1), (7.2) на второй режим распределение $v_2(\gamma)$ не убывали на участках $[0, \gamma_n]$ и $[\gamma_n, 2\pi]$.

Как и в § 6 считаются заданными скорость v_∞ набегающего потока и линейный размер – хорда b профиля. Также считаются заданными диапазон изменения углов атаки $\Delta = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$, а также радиусы r_1 и r_2 канала отбора. Заметим, что ширина канала $h = r_2 - r_1$, а коэффициент k , определяющий отношение скоростей на внутренней и внешней стенках канала отбора, вычисляется по формуле

$$k = \frac{v(\gamma_n + 0)}{v(\gamma_n - 0)} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (7.3)$$

7.2. Схема решения. Разобьем точками γ_k , $k = \overline{1, n}$, задаваемый отрезок $[0, 2\pi]$ на участки, на каждом из которых скорость будем считать постоянной либо для первого, либо для

второго режимов обтекания:

$$v_1(\gamma) = \begin{cases} C_1, \\ C_2/\Phi(\gamma), \\ C_3, \\ C_4/\Phi(\gamma), \\ \dots, \end{cases} \quad v_2(\gamma) = \begin{cases} C_1\Phi(\gamma), & \gamma \in [0, \gamma_1], \\ C_2, & \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \\ C_3\Phi(\gamma), & \gamma \in [\gamma_2, \gamma_3], \\ C_4, & \gamma \in [\gamma_3, \gamma_4], \\ \dots, & \dots \end{cases}$$

Границы γ_j ($j = 1, \dots, n$) участков, как и число n , найдем из условия неубывания скорости при двух расчетных режимах.

Для того, чтобы распределения $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ скорости не имели участков падения, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} v_2'(\gamma) &\geq 0, & \gamma &\in [0, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \gamma_3] \cup \dots, \\ v_1'(\gamma) &\geq 0, & \gamma &\in [\gamma_1, \gamma_2] \cup [\gamma_3, \gamma_4] \cup \dots \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} v_2'(\gamma) &= v_1(\gamma)\Phi(\gamma)\Psi(\gamma), & \gamma &\in [0, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \gamma_3] \cup \dots, \\ v_1'(\gamma) &= -v_2(\gamma)\frac{\Psi(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, & \gamma &\in [\gamma_1, \gamma_2] \cup [\gamma_3, \gamma_4] \cup \dots, \end{aligned}$$

где

$$\Psi(\gamma) = \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{p2}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{p1}}{2}. \quad (7.4)$$

Найдем интервалы знакопостоянства у функций $v_1(\gamma)$, $v_2(\gamma)$, $\Phi(\gamma)$, $\Psi(\gamma)$ в предположении, что известны углы γ_{p1} , γ_{p2} , γ_{a1} , γ_{a2} . Возможны два различных случая взаимного расположения критических точек для каждого из двух режимов обтекания. Пусть для первого режима угловая координата γ_a критической точки A меньше, чем для второго, т. е. $\gamma_{a1} \leq \gamma_{a2}$. Тогда первым будем считать случай, когда $\gamma_{p1} \leq \gamma_{p2}$, а вторым – когда $\gamma_{p1} > \gamma_{p2}$.

Аналитически можно показать, что для первого случая функция (7.4) не имеет нулей, а для второго всегда имеются два корня, лежащие в интервалах $(\gamma_{p1}, \gamma_{a1})$ и $(\gamma_{a2}, 2\pi + \gamma_{p2})$. Эти корни обозначим через γ_{r1} и γ_{r2} . Знаки функций для двух различных случаев выписаны в табл. 7.1 и 7.2, причем в табл. 7.2

Т а б л и ц а 7.1

Знаки функций для первого случая

	$(0, \gamma_{p1})$	$(\gamma_{p1}, \gamma_{p2})$	(γ_{p2}, γ_n)	(γ_n, γ_{a1})	$(\gamma_{a1}, \gamma_{a2})$	$(\gamma_{a2}, 2\pi)$
v_1	-	+	+	-	+	+
v_2	-	-	+	-	-	+
Φ	+	-	+	+	-	+
Ψ	+	-	+	+	-	+
v'_2	-	+	+	-	+	+
v'_1	+	+	-	+	+	-

Т а б л и ц а 7.2

Знаки функций для второго случая

	$(0, \gamma_{p2})$	$(\gamma_{p2}, \gamma_{p1})$	(γ_{p1}, γ_n)	(γ_n, γ_{r1})	$(\gamma_{r1}, \gamma_{a1})$	$(\gamma_{a1}, \gamma_{a2})$	$(\gamma_{a2}, \gamma_{r2})$	$(\gamma_{r2}, 2\pi)$
v_1	-	-	+	-	-	+	+	+
v_2	-	+	+	-	-	-	+	+
Φ	+	-	+	+	+	-	+	+
Ψ	-	+	-	-	+	-	+	-
v'_2	+	+	-	+	-	+	+	-
v'_1	-	+	+	-	+	+	-	+

представлен вариант, когда $\gamma_{r1} > \gamma_n$ и $\gamma_{r2} < 2\pi$. Остальные три варианта ($\gamma_{r1} > \gamma_n, \gamma_{r2} > 2\pi$; $\gamma_{r1} < \gamma_n, \gamma_{r2} < 2\pi$; $\gamma_{r1} < \gamma_n, \gamma_{r2} > 2\pi$) рассматриваются по аналогии.

Проанализируем первый случай по данным табл. 7.1. Так, на первом участке $(0, \gamma_{p1})$ производная $v'_1(\gamma) > 0$, а $v'_2(\gamma) < 0$. Если на этом участке в качестве постоянной задать $v_1(\gamma) = C_1$, то $v_2(\gamma)$ будет убывающей, что не соответствует постановке задачи. Если же задать на этом участке $v_2(\gamma) = C_1$, то после пересчета на первый режим этот участок постоянной скорости перейдет в некоторую монотонно возрастающую кривую $v_1(\gamma)$. На втором участке $(\gamma_{p1}, \gamma_{p2})$ обе производные положительны, поэтому здесь в качестве постоянной можно задавать как $v_1(\gamma)$, так и $v_2(\gamma)$. Участков, на которых обе производные были бы отрицательны, нет. В итоге распределение скорости, удовлетворяющее условию отсутствия участков падения скорости, можно записать в следующем виде:

$$v_1(\gamma) = \begin{cases} C_1/\Phi(\gamma), \\ C_2, \\ C_3/\Phi(\gamma), \\ C_4, \end{cases} \quad v_2(\gamma) = \begin{cases} C_1, & \gamma \in [0, \gamma_1], \\ C_2\Phi(\gamma), & \gamma \in [\gamma_1, \gamma_n], \\ C_3, & \gamma \in [\gamma_n, \gamma_2], \\ C_4\Phi(\gamma), & \gamma \in [\gamma_2, 2\pi], \end{cases} \quad (7.5)$$

где $\gamma_1 \in (\gamma_{p1}, \gamma_{p2})$, а $\gamma_2 \in (\gamma_{a1}, \gamma_{a2})$. Оба распределения $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ изображены на рис. 7.2 сплошной и штриховой линиями соответственно.

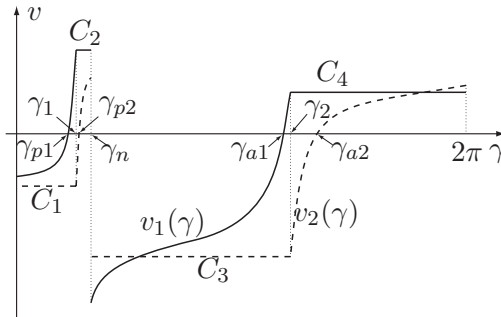


Рис. 7.2. Распределение скорости для первого случая; $v_1(\gamma)$ – сплошная линия, $v_2(\gamma)$ – штриховая

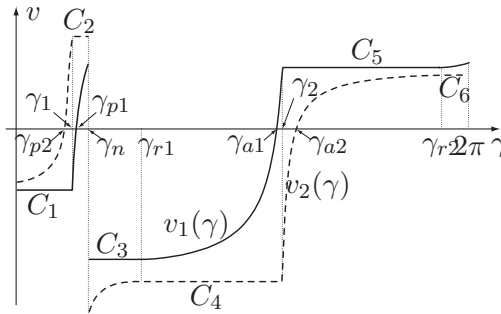


Рис. 7.3. Распределение скорости для второго случая

На рис. 7.3 изображено распределение скорости для второго случая. Заметим, что здесь число участков постоянной скорости равно шести, тогда как в первом случае их четыре.

Распределение скорости (7.5) зависит от 11 параметров: $\gamma_{p1}, \gamma_1, \gamma_{p2}, \gamma_n, \gamma_{a1}, \gamma_2, \gamma_{a2}, C_1, C_2, C_3, C_4$. Но не все они являются свободными, необходимо выполнение нескольких условий. Во-первых, надо выполнить два условия непрерывности распределения скорости в точках $\gamma = \gamma_1, \gamma = \gamma_2$. В задней кромке B ,

являющейся бесконечно тонкой, также необходимо выполнение условия $v(2\pi) = -v(0)$. В месте расположения щели – точке N – должно выполняться соотношение (7.3).

В ходе решения обратной задачи (построения по заданному распределению скорости контура крылового профиля) возникают три условия разрешимости, включающие в себя два условия замкнутости искомого контура профиля и условие совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения (6.15)–(6.18). Они представляют собой ограничения на распределение скорости $v(\gamma)$.

Кроме того, согласно постановке задачи, заданы ширина h канала отбора и диапазон изменения углов атаки $\Delta = \beta_2 - \beta_1$. В итоге имеем 9 условий и только 2 из 11 параметров можно выбирать произвольно, а остальные находить из перечисленных выше условий. В качестве таких “свободных” параметров выберем γ_n , отвечающее за положение щели на поверхности крылового профиля, и C_3 – скорость на большей части верхней поверхности для второго режима обтекания.

Аналогичные рассуждения можно провести и для второго случая с 15 параметрами. Свободных параметров также будет два, в качестве которых выберем γ_n и C_4 – скорость на большей части верхней поверхности.

7.3. Примеры построения крыловых профилей.

Был разработан алгоритм и составлена программа построения крыловых профилей по заданному в параметрическом виде распределению скорости. В ходе проведенных расчетов установлено, что существует некоторое критическое значение Δ^* , такое, что при $\Delta > \Delta^*$ имеется решение для первого случая, а при $\Delta < \Delta^*$ – для второго. При $\Delta = \Delta^*$ получается предельная ситуация со слившимися в одну точками γ_{p1} и γ_{p2} , причем контур профиля в этой точке имеет точку возврата – аналог бесконечно тонкой кромки. На рис. 7.4 – 7.6 изображены построенные крыловые профили для первого, предельного и второго случаев. На рис. 7.7 представлен пример построения профиля для второго случая с $\Delta = 0$, т. е. смена режима обтекания достигается лишь путем изменения расхода (этот пример имеет лишь теоретический интерес, т. к. контур про-

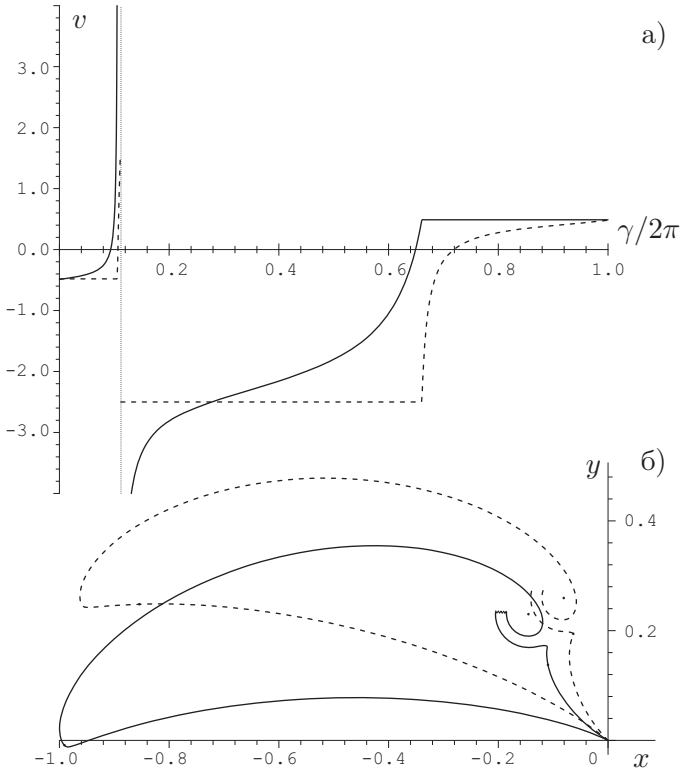


Рис. 7.4. Пример построения профиля для первого случая при $\Delta = 15^\circ$

филя получился самопересекающимся). Для всех профилей радиусы закругления канала отбора равны 4% и 6% хорды (что соответствует $h = 2\%$ и отношению $k = 1.5$ скоростей на стенках канала), скорость на большей части верхней поверхности для большего угла атаки равнялась $2.5v_\infty$, положение канала отбора $\gamma_n = 0.7$. Другие характеристики всех четырех профилей приведены в табл. 7.3.

Согласно аналитическим зависимостям (6.3) и (6.6) можно охарактеризовать первый случай (одновременное увеличение γ_a и γ_p) так: при увеличении угла атаки уменьшается расход через щель; циркуляция при этом остается приблизительно на

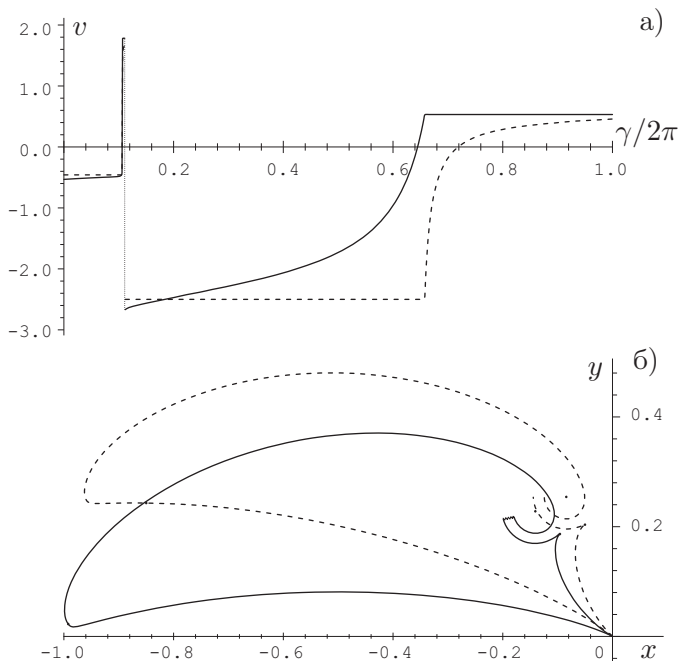


Рис. 7.5. Пример построения профиля для предельного случая при $\Delta = \Delta^* = 13.32^\circ$

одном уровне (может как незначительно уменьшаться, так и увеличиваться). Второй случай (при увеличении γ_a значение γ_p уменьшается) характеризуется значительным увеличением расхода Q и циркуляции Γ при слабом изменении угла атаки (угол атаки может как возрасти, так и убавиться).

Итак, на рис. 7.2 и 7.3 изображены распределения скорости, на которых нет участков падения для двух режимов обтекания. Представляет интерес вопрос, будут ли участки падения на распределениях скоростей, соответствующих некоторым промежуточным режимам? В связи с этим были найдены такие области в переменных (γ_a, γ_p) или (β, q) , в которых не будет участков падения.

Для первого случая можно аналитически показать, что в прямоугольнике $\gamma_{a1} \leq \gamma_a \leq \gamma_{a2}$, $\gamma_{p1} \leq \gamma_p \leq \gamma_{p2}$ эти условия

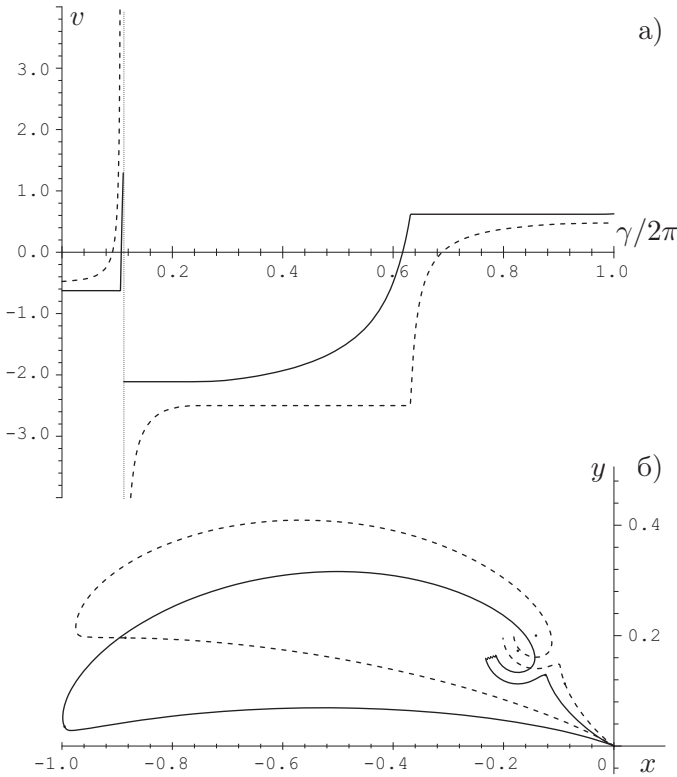


Рис. 7.6. Пример построения профиля для второго случая при $\Delta = 10^\circ$

выполняются. Более точно область найдена численно, она изображена на рис. 7.8, а в плоскости (γ_a, γ_p) и на рис. 7.8, б – в плоскости (β, Q) .

Во втором случае область вырождается в одну-единственную кривую, соединяющую два исходных режима обтекания. Уравнение этой кривой имеет вид

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma_{r1} - \gamma_a}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma_{r1} - \gamma_{a1}}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma_{r1} - \gamma_p}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma_{r1} - \gamma_{p1}}{2} = 0.$$

Эта кривая изображена в плоскостях (γ_a, γ_p) и (β, q) на рис. 7.9, а и б соответственно.

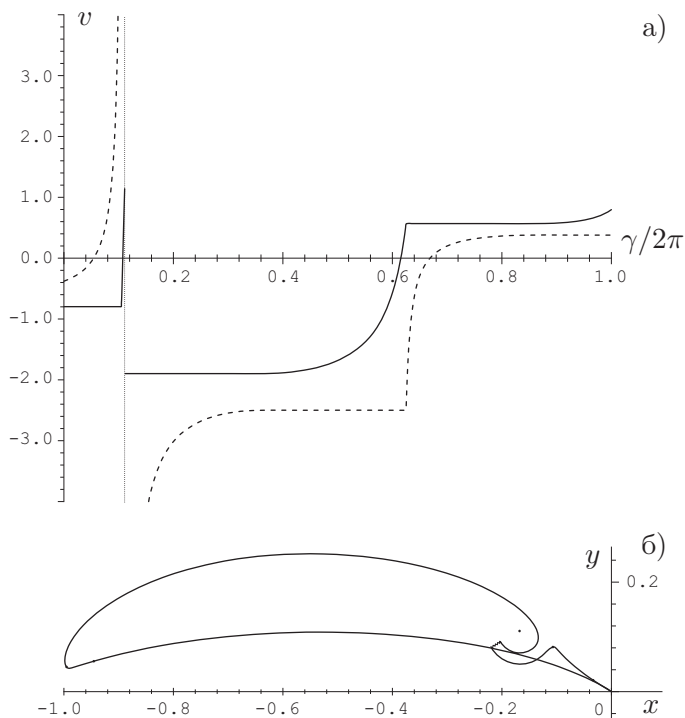


Рис. 7.7. Пример построения профиля для второго случая при $\Delta = 0$

7.4. Расчет полученных профилей в CFD-пакете Fluent. Построенные вышеизложенным методом крыловые профили были рассчитаны в вычислительном пакете Fluent 6.2. Для расчета был взят профиль, изображенный на рис. 7.10, являющийся небольшой модификацией профиля с рис. 7.4. Модификация заключалась в следующем: во-первых, во избежание большого перепада скоростей на стенках канала, радиусы канала отбора были увеличены ($r_1 = 20\%$, $r_2 = 22\%$); во-вторых, скорость на большей части верхней поверхности выбиралась из условия, что максимальная скорость на контуре профиля для обоих режимов не превышает $3v_\infty$. Диапазон $\Delta = 10^\circ$, расчетные углы атаки $\alpha_1 = 1.8^\circ$, $\alpha_2 = 11.8^\circ$.

Расчет в пакете Fluent проводился для трех различных мо-

Т а б л и ц а 7.3

Геометрические и аэродинамические характеристики
крыловых профилей с отбором потока

№	Δ°	α_1°	α_2°	q_1	q_2	c_{y1}	c_{y2}
1	15	1.3	16.3	0.1604	0.0406	4.193	5.388
2	13.32	3.0	16.3	0.0434	0.0406	3.791	5.420
3	10	3.2	13.2	0.0342	0.1652	2.939	4.900
4	0	3.4	3.4	0.0308	0.4400	2.687	4.928

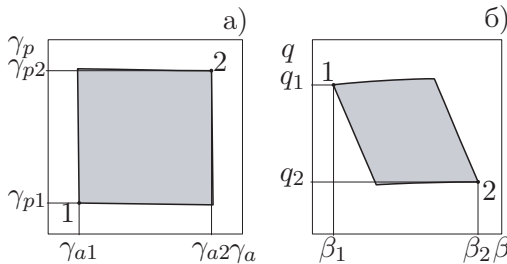


Рис. 7.8. Область отсутствия участков падения скорости
для первого случая

делей течения: ламинарного, турбулентного с использованием модели Спаларта – Аллмараса (SA), турбулентного по модели SST $k - \omega$ (SST). Жидкость считалась несжимаемой, скорость набегающего потока выбрана равной $v_\infty = 100\text{ м/с}$, хорда профиля $b = 1\text{ м}$, что соответствует числу Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^6$.

Расчетная сетка, содержащая около 50 тыс. ячеек, показана на рис. 7.11. Она строилась следующим образом: вокруг крылового профиля была описана окружность, вне этой окружности выбрана регулярная четырехугольная сетка. Внутри окружности (за исключением входного канала для отбора потока, сетка которого была также четырехугольной) использовалась трехугольная сетка. Получение нужного угла атаки достигалось поворотом окружности.

Граничные условия были следующие:

- на входе в расчетную область задавалась скорость потока,
- на выходе – условие выхода,

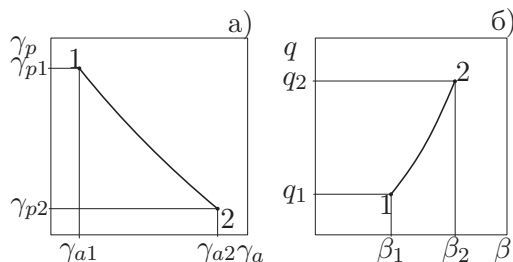


Рис. 7.9. Область отсутствия участков падения скорости для второго случая

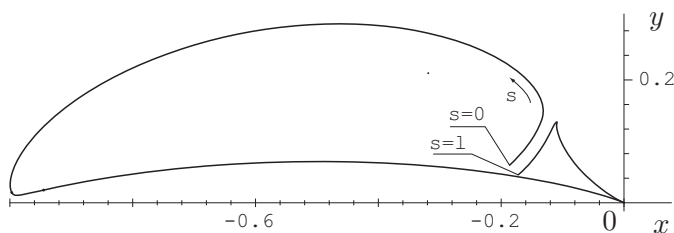


Рис. 7.10. Контур рассчитываемого крылового профиля

- на боковых гранях – условие симметрии или гладкой стенки (вектор скорости параллелен боковой границе расчетной области),
- на крыловом профиле – условие прилипания,
- на границе щели задавалась скорость отбора потока.

На рис. 7.12 приведены распределения коэффициента давления по контуру профиля в зависимости от дуговой абсциссы s (рис. 7.10), а в табл. 7.4 – коэффициенты c_x и c_y для двух расчетных режимов. Результаты расчетов показали хорошее совпадение с результатами численно-аналитического решения, отрыва потока для обоих углов атаки и для всех моделей течений не наблюдалось. Небольшое расхождение между точным решением и всеми моделями турбулентности наблюдалось лишь в районе щели.

В последней строчке табл. 7.4 приведены результаты расчета этого профиля, сделанные В. Судаковым (снс отделения

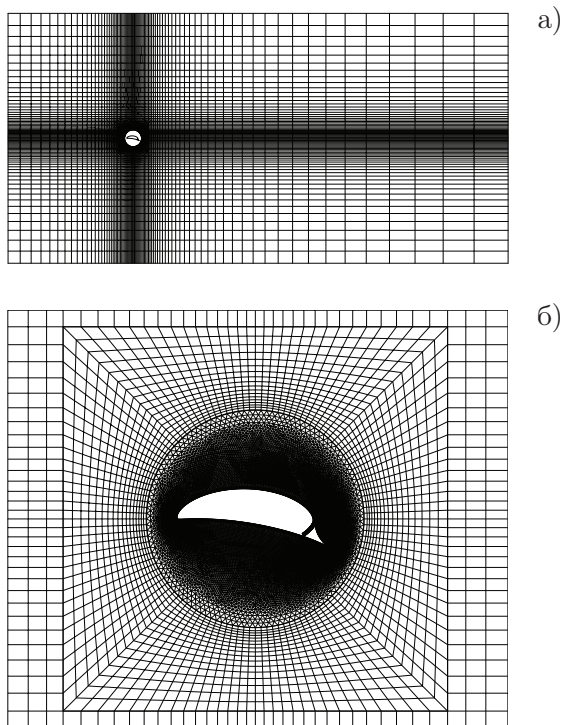


Рис. 7.11. Расчетная сетка: общий вид и вид вблизи контура профиля

аэродинамики ЦАГИ). Расчет проводился в пакете Fluent на структурированных сетках (число ячеек ~ 100 тыс.) со сгущением узлов в ПС, щели и следе; модель турбулентности SA. Как видно из таблицы, рассчитанные коэффициенты подъемной силы и сопротивления с высокой степенью точности совпадают с результатами численно-аналитического решения.

Итак, показано, что щелевой отбор внешнего потока позволяет в рамках принятой математической модели течения и устройства отбора значительно увеличить коэффициент подъемной силы крылового профиля по сравнению с непроницаемыми профилями и сохранить при этом безотрывность обтекания в заданном диапазоне изменения режимов.

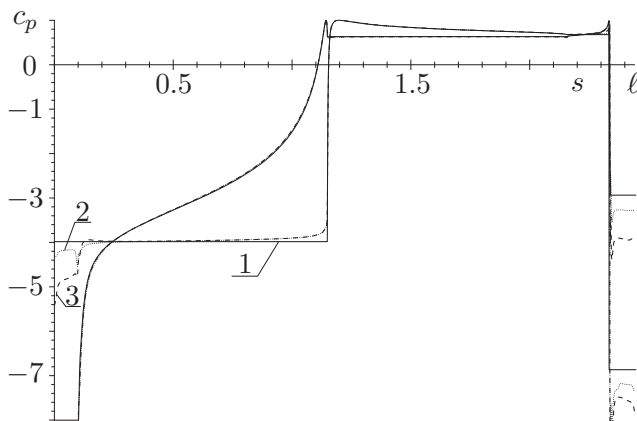


Рис. 7.12. Кривые распределений c_p по контуру профиля:
 1 – численно-аналитическое решение, 2 – ламинарное течение,
 3 – турбулентное (SA)

Т а б л и ц а 7.4

Сравнение характеристик крыловых профилей с отбором

№	Течение	c_{x1}	c_{y1}	c_{x2}	c_{y2}
1.	Численно-аналитическое решение	0.118	2.96	0.085	4.10
2.	Ламинарное	0.129	2.94	0.112	4.08
3.	Турбулентное (SA)	0.127	2.94	0.102	4.08
4.	Турбулентное (SST)	0.128	2.94	0.105	4.07
5.	Турбулентное (SA) (ЦАГИ)	0.120	2.97	0.087	4.10

§ 8. Выдув реактивной струи

Крыловые профили с выдувом обладают преимуществами по сравнению с обычными профилями вследствие ряда интересных эффектов. Первый из них – эффект Коанда или, другими словами, эффект прилипания высокоэнергетической струи к обтекаемой поверхности даже при очень малых радиусах кривизны последней. Второй – эффект суперциркуляции или “жидкого закрылка”, выдуваемая под углом струя отклоняет набегающий поток подобно закрылку, вследствие чего увеличи-

ваются циркуляция и коэффициент подъемной силы. Поэтому представляет интерес рассмотрение задачи проектирования такого крылового профиля.

8.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль L_z с хордой b плавно обтекается плоским установившимся потоком ИНЖ. Плотность потока — ρ , скорость на бесконечности — v_∞ , давление — p_∞ (т. о. полное давление внешнего потока $p_0 = p_\infty + \rho v_\infty^2/2$). На поверхности профиля имеется щель, которая, как и в задаче § 6, моделируется завитком, асимптотически переходящим в бесконечнолистный круговой канал с постоянными скоростями v_1 и v_2 ($v_1 \leq v_2$) на стенках (рис. 8.1). Заметим, что в случае равных скоростей стенки канала асимптотически стремятся к прямым. Из этой щели выдувается струя ИНЖ с другой плотностью ρ_j и скоростью $v_{j\infty}$ при давлении p_∞ ; полное давление в струе $p_{j0} = p_{j\infty} + \rho_j v_{j\infty}^2/2$. Также считается заданной безразмерная ширина щели h или величина безразмерного расхода q через щель. В точке A разветвления потока профиль предполагается гладким, а в точках B и P схода потока внутренние к области течения углы приняты равными 2π (бесконечно тонкие кромки).

Обозначим через l_z^+ и l_z^- линии тока, сходящие с острых кромок P и B профиля и разделяющие среды с плотностями ρ и ρ_j . Предполагается, что при переходе через эти линии давление меняется непрерывно, а скорость в общем случае изменяется скачком, который определяется из интеграла Бернулли соотношением

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} = p_{j0} - \frac{\rho_j v_j^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_j v_j^2 = \rho v^2 + \mu \rho v_\infty^2$$

или в более удобной форме

$$(1 + \mu) \left(\frac{v_j}{v_\infty} \right)^2 = \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 + \mu, \quad (8.1)$$

где безразмерный параметр μ определяется по (5.12).

На искомом контуре профиля задано распределение скорости

$$v = v(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi, \quad (8.2)$$

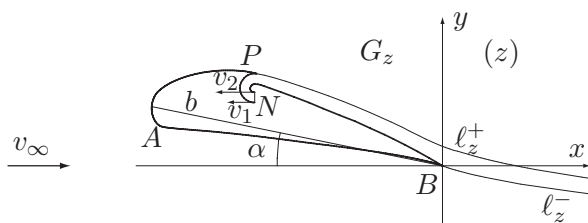


Рис. 8.1. Течение в физической плоскости

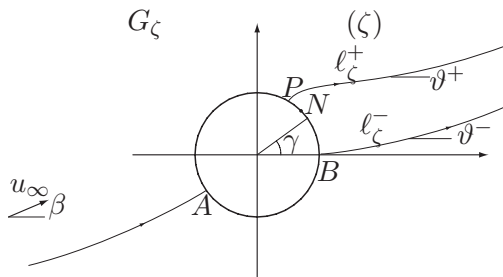


Рис. 8.2. Течение в канонической плоскости

где γ – полярная координата в канонической области $|\zeta| > 1$ плоскости ζ (рис. 8.2). В точках P и B должно соблюдаться условие (8.1). Соответствующие точки в плоскостях $z = x + iy$ и $\zeta = re^{i\gamma}$ обозначены одинаковыми буквами. Для взаимно однозначного конформного отображения областей G_z и G_ζ предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ , а также переход точки B ($z = 0$) в точку $\zeta = 1$.

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики.

8.2. Схема решения. При сделанных предположениях во внешнем потоке и в струе существуют комплексные потенциалы потоков. Мы будем рассматривать их как единую кусочно-аналитическую функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, терпящую разрыв на двух линиях схода потока. Комплексно сопряженная скорость в плоскости ζ может быть представлена в виде [43]

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} f(\zeta) e^{-\Omega(\zeta)}. \quad (8.3)$$

В формуле (8.3) в нашем случае

$$f(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-1},$$

где $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$, $\zeta_p = e^{i\gamma_p}$, $\zeta_n = e^{i\gamma_n}$ – координаты точек A , P , N на окружности $|\zeta| = 1$, u_∞ и β – модуль и аргумент скорости на бесконечности в плоскости ζ , $\Omega(\zeta) = T(r, \gamma) + i\Lambda(r, \gamma)$ – кусочно-аналитическая функция, терпящая скачок на линиях l_ζ^+ и l_ζ^- – образах линий схода потока l_z^+ и l_z^- в физической плоскости. В граничной точке N (рис. 8.2) плоскости ζ находится источник.

Как и в § 6, перейдем в формуле (8.3) на границу $\zeta = e^{i\gamma}$. В результате определим распределение скорости на окружности

$$u(\gamma) = 4u_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_n}{2} e^{-T(\gamma)} \quad (8.4)$$

и установим связь углов

$$\Lambda(\gamma) = \frac{\gamma_a + \gamma_p - \gamma_n}{2} - \beta - \frac{\pi}{2} = \delta. \quad (8.5)$$

Из (8.5) следует, что мнимая часть функции $\Omega(\zeta)$ на границе круга постоянна $\Lambda(\gamma) = \delta$.

Пусть $\vartheta^+(t)$ и $\vartheta^-(t)$ – углы наклона касательной к $l_\zeta^+(t)$ и $l_\zeta^-(t)$ соответственно, где t – дуговая абсцисса линий раздела, отсчитываемая от точек схода потока P и B , т. е. $d\zeta^+(t)/dt = e^{i\vartheta^+(t)}$, $d\zeta^-(t)/dt = e^{i\vartheta^-(t)}$, или в более компактной форме

$$\frac{d\zeta^\pm(t)}{dt} = e^{i\vartheta^\pm(t)}. \quad (8.6)$$

Условия непроницаемости линий $l_\zeta^\pm(t)$ запишем в виде

$$\arg \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{l_\zeta^\pm} = -\vartheta^\pm(t)$$

или, учтя соотношения (8.3),

$$\vartheta^\pm(t) = \Lambda^\pm(t) + \beta - \text{Im} \ln f(\zeta). \quad (8.7)$$

Из этого соотношения следует, что $\text{Im} \Omega(\zeta)$ меняется непрерывно при переходе через линии $l_\zeta^\pm(t)$, а скачок терпит лишь $\text{Re} \Omega(\zeta^\pm(t)) = T^\pm(t)$.

Введем в рассмотрение функцию Жуковского – Мичела

$$\chi(\zeta) = \ln \left(\frac{1}{v_\infty} \frac{dw}{dz} \right) = \ln \frac{v}{v_\infty} - i\theta = S - i\theta. \quad (8.8)$$

Для исключения особенностей этой функции в точках ζ_a и ζ_n , а также на линиях l_ζ^\pm рассмотрим модифицированную функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} + i\tilde{\theta} = \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta) + \Omega(\zeta), \quad (8.9)$$

где

$$\chi_0(\zeta) = \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) - \frac{ai}{\pi} \ln \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta} \right),$$

постоянная $a = \ln(v_1/v_2) \leq 0$. Покажем, что функция $\tilde{\chi}(\zeta)$ является аналитической в области $|\zeta| > 1$ и, следовательно, непрерывна при переходе через линии раздела сред l_ζ^\pm .

Комплексно сопряженную скорость в физической плоскости можно представить в виде

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty e^{\chi(\zeta)} = v_\infty e^{\tilde{\chi}(\zeta) - \Omega(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-ai/\pi}. \quad (8.10)$$

Из соотношения $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta} / \frac{dw}{dz}$ с учетом (8.3) и (8.10) следует

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{ai/\pi-1}. \quad (8.11)$$

Так как левая часть (8.11) – аналитическая функция в канонической области, то и правая часть должна быть аналитической, откуда следует, что $\tilde{\chi}(\zeta)$ – функция аналитическая в области $|\zeta| > 1$ и непрерывна на линиях l_ζ^\pm . Поэтому из (8.9) вытекает, что скачки функций $\chi(\zeta)$ и $\Omega(\zeta)$ компенсируют друг друга и

$$\Omega - \Omega_j|_{l_\zeta^\pm} = T - T_j|_{l_\zeta^\pm} = \lambda^\pm(t), \quad (8.12)$$

где

$$\lambda^\pm(t) = \ln \left. \frac{v_j^\pm(t)}{v^\pm(t)} \right|_{l_\zeta^\pm}. \quad (8.13)$$

В этом соотношении скорости $v_j^\pm(t)$ и $v^\pm(t)$ связаны формулой (8.1).

Разделив действительные и мнимые части (8.9) на границе $\zeta = e^{i\gamma}$, с учетом (8.5) найдем

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln \left| \frac{v(\gamma)}{2v_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2}} \right| + \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2\pi} - \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2|\gamma - \gamma_n|} + T(\gamma), \quad (8.14)$$

$$\tilde{\theta}(\gamma) = -\theta(\gamma) - \beta + \frac{\gamma + \gamma_p - \gamma_n}{2} + \frac{a}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \right|. \quad (8.15)$$

Для решения ОКЗА необходимо знать функцию $\tilde{S}(\gamma)$. Но в правую часть формулы (8.14) входит неизвестная функция $T(\gamma)$. Поэтому предположим вначале, что линии раздела сред l_ζ^\pm (т. е. углы наклона $\vartheta^\pm(t)$) и функции скачка $\lambda^\pm(t)$ известны.

Следуя [43], функцию $\Omega(\zeta)$, удовлетворяющую условиям (8.5), (8.12), определим по формуле

$$\Omega(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(1/\bar{\zeta})} - \overline{\Phi(0)}, \quad (8.16)$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{l_{\zeta}^+} \frac{\lambda^+(t) dt}{t - \zeta} - \int_{l_{\zeta}^-} \frac{\lambda^-(t) dt}{t - \zeta} \right\}, \quad (8.17)$$

причем (8.5) будет выполняться при

$$\delta = \text{Im } \Phi(0). \quad (8.18)$$

Определив из (8.16) $\text{Re } \Omega(e^{i\gamma}) = T(\gamma)$, по (8.14) найдем $\tilde{S}(\gamma)$. На границе окружности $|\zeta| = 1$ восстановим $\text{Im } \tilde{\chi}(e^{i\gamma}) = \tilde{\theta}(\gamma)$ сингулярным интегралом Гильберта – Шварца (6.11). Из соотношения (8.15) определим угол наклона $\theta(\gamma)$ касательной к контуру крылового профиля, после чего координаты искомого контура найдем по формуле (6.13), где $u(\gamma)$ имеет вид (8.4).

8.3. Схема итерационного процесса. Как было сказано ранее, для решения задачи необходимо определить функции $\vartheta^{\pm}(t)$, $\lambda^{\pm}(t)$. Для этого организуем следующий итерационный процесс.

Начальный этап.

Зададим каким-либо образом нулевое приближение функций $\lambda^{\pm}(t)$, $\vartheta^{\pm}(t)$ с учетом того, что в точках P и B справедливы соотношения:

$$\lambda^+(0) = \ln \frac{v(\gamma_p - 0)}{v(\gamma_p + 0)}, \quad \lambda^-(0) = \ln \frac{v(0)}{v(2\pi)},$$

$$\vartheta^+(0) = \gamma_p, \quad \vartheta^-(0) = 0.$$

Первые два соотношения следуют из условия задания распределения скорости на контуре профиля, а два других показывают тот факт, что в канонической плоскости линии схода потока подходят к единичной окружности под прямым углом.

Основной этап.

Проинтегрировав (8.6), определим линии раздела $l_{\zeta}^{\pm}(t)$.

По (8.17) найдем $\Phi(\zeta)$, по (8.18) – δ и по (8.5) – угол β .

Из соотношения (8.16) на линиях раздела $l_{\zeta}^{\pm}(t)$ определим функции $T^{\pm}(t) = \operatorname{Re} \Omega(\zeta^{\pm}(t))$, $\Lambda^{\pm}(t) = \operatorname{Im} \Omega(\zeta^{\pm}(t))$ и на границе круга $|\zeta| = 1$ – функцию $T(\gamma) = \operatorname{Re} \Omega(e^{i\gamma})$.

Действительную часть функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на границе круга, т. е. $\tilde{S}(\gamma)$, определим по (8.14).

По известной $\tilde{S}(\gamma)$ найдем $\tilde{S}^{\pm}(t) = \operatorname{Re} \tilde{\chi}(\zeta^{\pm}(t))$ на линиях $l_{\zeta}^{\pm}(t)$, используя формулу Пуассона,

$$\tilde{S}(re^{i\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) \frac{(r^2 - 1) d\tau}{r^2 - 2r \cos(\tau - \gamma) + 1}. \quad (8.19)$$

Распределение скоростей внешнего течения $v^{\pm}(t)$ на линиях $l_{\zeta}^{\pm}(t)$ определим по формуле

$$v^{\pm}(t) = v_{\infty} e^{\tilde{S}^{\pm}(t) - T^{\pm}(t)} \left| \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-ai/\pi} \right|,$$

вытекающей из (8.10).

Распределение скоростей струи $v_j^{\pm}(t)$ на линиях $l_{\zeta}^{\pm}(t)$ найдем по формуле (8.1).

Новые функции $\vartheta^{\pm}(t)$, $\lambda^{\pm}(t)$ определим из уравнений (8.7), (8.13).

Итерационный процесс завершаем при выполнении условий

$$\max_t |\vartheta^{\pm}_{(k)}(t) - \vartheta^{\pm}_{(k-1)}(t)| < \varepsilon, \quad \max_t |\lambda^{\pm}_{(k)}(t) - \lambda^{\pm}_{(k-1)}(t)| < \varepsilon,$$

где ε – заданное малое изменение искомых функций, индексом k обозначено их значение на k -й итерации. В случае невыполнения какого-либо условия повторяем основной этап.

Завершающий этап.

По (6.11) находим $\tilde{\theta}(\gamma)$, по (8.15) – угол наклона касательной $\theta(\gamma)$ и по (6.13) восстанавливаем координаты крылового профиля.

8.4. Условия разрешимости. Как и в ОКЗА для непроцеваемого профиля, необходимо выполнить условия разрешимости (см., например, [18]).

Условие совпадения заданной величины скорости на бесконечности в физической плоскости z с определяемой в процессе решения имеет вид (6.15), хотя выражение для $\tilde{S}(\gamma)$ в § 6 отличается от (8.14).

Условия замкнутости искомого контура крылового профиля, выводимые из соотношения $\text{res}(dz/d\zeta) = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, также выражаются через $\tilde{S}(\gamma)$ (они выводятся аналогично (6.17), (6.18)):

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\cos \gamma_n - \cos \gamma_p - 1) + a \sin \gamma_n, \quad (8.20)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi(\sin \gamma_n - \sin \gamma_p) - a \cos \gamma_n. \quad (8.21)$$

Условия (6.15), (8.20), (8.21) с учетом выражения (8.14) представляют собой систему трех нелинейных интегральных соотношений, налагающих ограничения на класс исходных распределений скорости (8.2). Вместе с условием получения заданной величины расхода q или ширины щели h они представляют собой четыре условия разрешимости поставленной задачи. Поэтому для корректной постановки задачи следует задавать не фиксированное распределение скорости $v(\gamma)$, а некоторый четырехпараметрический класс $v(\gamma; a_\nu)$, $\nu = \overline{1, 4}$, где значения a_ν определяются из четырех условий разрешимости.

8.5. Определение аэродинамических сил. Для определения коэффициента c_x сопротивления и коэффициента c_y подъемной силы используем формулы (5.14). Необходимые для вычисления этих коэффициентов величины Q и $\tilde{\Gamma}$ найдем, разложив комплексно сопряженную скорость $dw/d\zeta$ в окрестностях точек ζ_n и $\zeta = \infty$:

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \zeta_n} = \frac{Q}{\pi(\zeta - \zeta_n)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\zeta - \zeta_n)^k,$$

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \infty} = u_\infty e^{-i\beta} + \frac{\tilde{Q} + i\tilde{\Gamma}}{2\pi\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \zeta^{-k}.$$

Подставив в эти соотношения представление $dw/d\zeta$ в виде (8.3), получим

$$Q = 8\pi u_\infty \sin \frac{\gamma_n - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_p}{2} e^{-T(\gamma_n)}, \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & 2\pi u_\infty [\cos(\gamma_n - \beta) - \cos(\gamma_a - \beta) - \\ & - \cos(\gamma_p - \beta) - \cos \beta - \operatorname{Re}(\omega e^{-i\beta})], \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & 2\pi u_\infty [\sin(\gamma_n - \beta) - \sin(\gamma_a - \beta) - \\ & - \sin(\gamma_p - \beta) + \sin \beta - \operatorname{Im}(\omega e^{-i\beta})], \end{aligned} \quad (8.24)$$

где ω – коэффициент при члене $1/\zeta$ в разложении функции $\Omega(\zeta)$ на бесконечности во внешнем потоке

$$\Omega|_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{\omega}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} d_k \zeta^{-k}.$$

Заметим, что найденные таким образом величины Q и \tilde{Q} с учетом (5.13) могут быть использованы для проверки точности вычислений.

Первые четыре слагаемых в выражении для $\tilde{\Gamma}$ присутствуют и в (6.6). Последнее слагаемое – добавочный член, появляющийся только при разных характеристиках выдуваемой струи и внешнего потока, и его физический смысл – это появление эффекта суперциркуляции.

Для нахождения ω воспользуемся формулой

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{R1}} \Omega(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_4 \cup L_{\zeta 1} \cup l_1} \Omega(\zeta) d\zeta.$$

Здесь линии L_{R1} , l_1 , l_2 такие же, как и на рис. 5.3, линия $L_{\zeta 1}$ представляет собой дугу единичной окружности PAB (рис. 8.2).

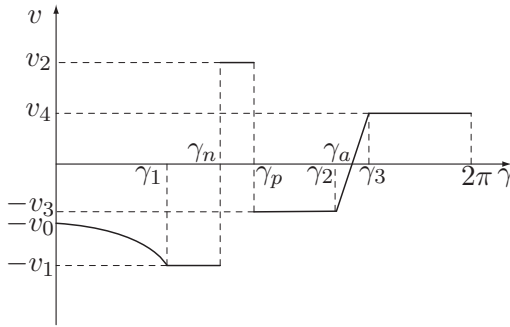


Рис. 8.3. Задаваемое распределение скоростей

Добавив к левой части этого соотношения равный нулю интеграл по замкнутому контуру

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_{\zeta_2} \cup l_3 \cup L_{R_2} \cup l_2} (\Omega + \lambda_\infty) d\zeta = 0,$$

окончательно получим

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \left\{ i \int_0^{2\pi} T(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma + \lambda_\infty (e^{i\gamma_p} - 1) - \right. \\ \left. - \int_{l_\zeta^+} [\lambda^+(t) - \lambda_\infty] e^{i\vartheta^+(t)} dt + \int_{l_\zeta^-} [\lambda^-(t) - \lambda_\infty] e^{i\vartheta^-(t)} dt \right\}. \quad (8.25)$$

8.6. Примеры построения крыловых профилей.

Рассмотрим наиболее интересный случай – выдув вблизи носика профиля и исследуем влияние безразмерного параметра μ на форму крылового профиля и его характеристики.

Распределение скорости возьмем в виде, схематически изображенном на рис. 8.3 и зависящем от 9 параметров. На диффузорном участке $(0, \gamma_1)$ закон убывания скорости выбран

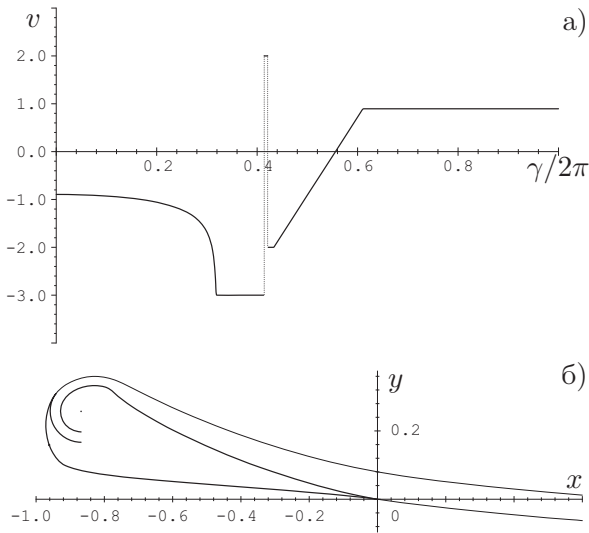


Рис. 8.4. Профиль с выдувом при $\mu = 0$ ($v_{j\infty}/v_\infty = 1$)

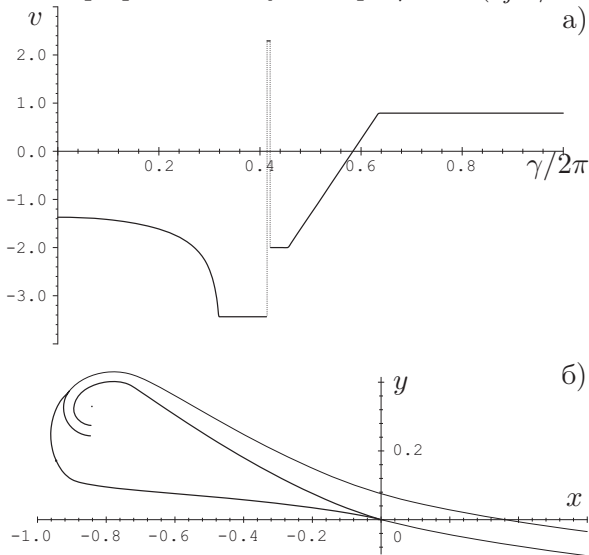


Рис. 8.5. Профиль с выдувом при $\mu = 1.25$ ($v_{j\infty}/v_\infty = 1.5$)

Т а б л и ц а 8.1

Характеристики крыловых профилей с выдувом струи

μ	v_0	v_1	v_4	D	α°	c_y	c_{xj}	$c_x + c_{xp}$
0	0.89	3.00	0.89	20.5	15.0	1.42	-0.146	0.000
1.25	0.79	3.44	1.37	7.3	17.7	2.20	-0.255	0.021
3	0.67	3.97	1.86	4.1	19.9	3.11	-0.397	0.099

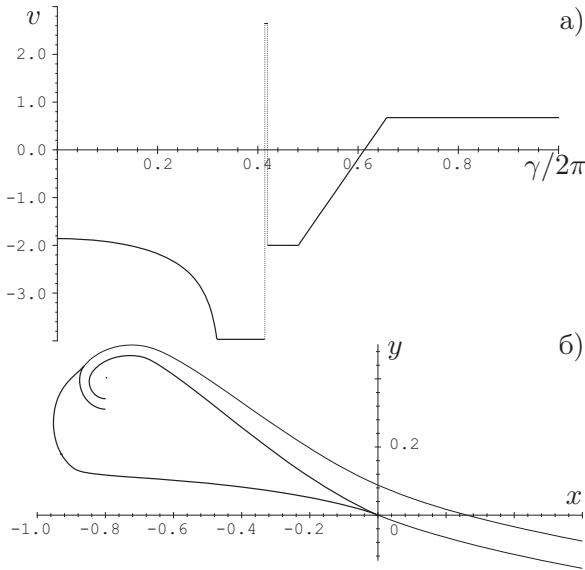
в виде

$$v(\gamma) = -v_1 \left[1 + D \frac{\cos \gamma - \cos \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \cos \gamma_n} \right]^{-1/4}. \quad (8.26)$$

Так как в окрестности задней кромки $\cos \gamma$ ведет себя как дуговая абсцисса, то задание распределения скорости в таком виде при значениях D , меньших некоторого $D_* = 6.6$, обеспечивает безотрывность обтекания (см., например, [18, 52]). Для выполнения условий разрешимости и получения заданной h или q параметры $\gamma_2, \gamma_3, v_4, \gamma_p$ не задавались, а определялись в процессе итерационного решения задачи. Поэтому, кроме описанного выше внутреннего итерационного процесса, пришлось организовать дополнительный внешний цикл, чтобы удовлетворить упомянутым условиям разрешимости. Скорости v_2 и v_0 находились по v_3, v_4 из условия справедливости в точках P и B соотношения (8.1), скорость $v_1 = v_2/k$, где отношение $k = r_1/r_2$. Таким образом, задавались лишь параметры γ_1 – начало участка падения скорости, γ_n – положение канала выдува, v_3 – скорость на верхней поверхности вблизи точки P ; остальные находились из приведенных выше условий.

На рис. 8.4–8.6 приведены построенные контуры профилей вместе с задаваемым распределением $v(\gamma)$ для параметра $\mu = 0, 1.25, 3$ соответственно. Радиусы закругления канала выбраны равными 6% и 9% хорды (т. е. ширина щели равна 3%, отношение скоростей $k = 2/3$). Задаваемые параметры были следующие: $\gamma_1 = 2.0, \gamma_n = 2.6, v_3/v_\infty = 2.0$. Остальные геометрические и аэродинамические характеристики профилей приведены в табл. 8.1.

Как показали расчеты, число μ очень сильно влияет на сходимость итерационного процесса, так, при $\mu = 0$ итерационный

Рис. 8.6. Профиль с выдувом при $\mu = 3$ ($v_{j\infty}/v_\infty = 2$)

процесс не требовался, при $\mu = 0.21$ сходимость достигалась при 26 итерациях (этот случай не показан), при $\mu = 1.25$ – при 54 итерациях, при $\mu = 3$ – при 336 итерациях при выбранном значении $\varepsilon = 10^{-6}$. Заметим, что в первом и втором расчетах $D > D_*$, следовательно, распределение скорости не является безотрывным, в последнем примере критерий безотрывности выполняется.

Таким образом, изложенный метод позволяет проектировать крыловые профили с выдувом реактивной струи. Показано, что выдув струи приводит к увеличению коэффициента c_y подъемной силы крыловых профилей. Чем ближе к передней кромке располагается щель, тем большим получается c_y .

Коэффициент c_y растет также с ростом μ – энергии выдуваемой струи. Кроме того, благодаря эффекту Коанда выдув высокоэнергетической струи позволяет добиться выполнения условия безотрывности.

§ 9. Выдув струи в диапазоне режимов обтекания

Выше в § 8 поставлена и решена задача проектирования крылового профиля с выдувом реактивной струи. Представляет интерес решение этой задачи, когда исходные данные задаются для двух расчетных режимов обтекания.

9.1. Постановка задачи. Как и в задаче проектирования профиля с отбором внешнего потока (§ 7), в случае наличия выдува струи, кроме угла атаки α крылового профиля, появляется еще один дополнительный параметр – величина расхода q через щель. Но в связи с тем, что положение точки P схода потока в задаче с выдувом фиксировано, угол атаки связан с q некоторым соотношением. Поэтому можно считать, что режим обтекания профиля с выдувом определяется лишь углом атаки, а величина расхода, необходимая для того, чтобы сход потока происходил с острой кромки, является функцией этого угла.

Целью является нахождение профиля, который обтекался бы безотрывно при двух расчетных режимах за счет специального задания распределений скорости $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ для двух разных углов атаки α_1 и α_2 ($\alpha_2 > \alpha_1$); γ – полярная координата в канонической плоскости (рис. 8.2).

Вблизи передней кромки на контуре профиля выберем точку C , на единичной окружности ей соответствует точка $e^{i\gamma_c}$. На участке $\gamma \in [0, \gamma_c]$ (т. е. на верхней поверхности) зададим распределение $v_2(\gamma)$ скорости для большего угла атаки. На оставшейся части $\gamma \in [\gamma_c, 2\pi]$ (нижней поверхности) – $v_1(\gamma)$.

Считаются заданными: скорость v_∞ набегающего потока, хорда b профиля, диапазон изменения углов атаки $\Delta = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$, а также радиусы r_1 и r_2 канала отбора. Ширина канала $h = r_2 - r_1$ и коэффициент k , определяющий отношение скоростей на внутренней и внешней стенках канала отбора (7.3), находятся до решения задачи.

9.2. Схема решения задачи. Найдем связь между распределениями $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ скоростей. Пусть $z = z(\zeta)$ – функция, конформно отображающая внешность единичного круга на внешность профиля, а $w_1(z)$ и $w_2(z)$ – комплексные потен-

циалы течений этих режимов обтекания. Тогда из соотношения

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw_1/d\zeta}{dw_1/dz} = \frac{dw_2/d\zeta}{dw_2/dz}$$

следует $u_1(\gamma)/v_1(\gamma) = u_2(\gamma)/v_2(\gamma)$, откуда с учетом (8.4)

$$v_2(\gamma) = v_1(\gamma) \frac{\sin \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2}}{\sin \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2}} e^{T_1(\gamma) - T_2(\gamma)}. \quad (9.1)$$

В формулу (9.1) входят неизвестные функции $T_k(\gamma)$, $k = 1, 2$, где индекс k обозначает режим обтекания. Функция $T_k(\gamma)$ представляет собой действительную часть вспомогательной кусочно-аналитической функции, терпящей скачок на линиях раздела сред. Для ее нахождения надо знать соответствующее этому режиму распределение скорости $v_k(\gamma)$ на всей окружности, поэтому непосредственно воспользоваться формулой (9.1) можно лишь для простейшего случая неактивной струи (в этом случае $T_1(\gamma) = T_2(\gamma) \equiv 0$).

Поэтому для нахождения функций $T_k(\gamma)$ для случая реактивной струи организуем следующий итерационный процесс.

Начальный этап.

– Зададим каким-либо образом начальные $T_1(\gamma)$, $T_2(\gamma)$, например, $T_1 = T_2 \equiv 0$.

Основной этап.

– По формуле (9.1) достроим $v_1(\gamma)$ на участке $\gamma \in [0, \gamma_c]$ и $v_2(\gamma)$ на участке $\gamma \in [\gamma_c, 2\pi]$.

– Для каждого из режимов решим обратную задачу построения контура крылового профиля с выдувом струи, используя метод § 8.

– Определим новые $T_1(\gamma)$, $T_2(\gamma)$.

– Итерационный процесс завершаем при выполнении условий

$$\|T_{1(n)}(\gamma) - T_{1(n-1)}(\gamma)\| < \varepsilon, \quad \|T_{2(n)}(\gamma) - T_{2(n-1)}(\gamma)\| < \varepsilon,$$

где ε – заданная погрешность вычислений, индексом n обозначено значение функций на n -й итерации. В противном случае повторяем основной этап.

9.3. О задаваемом распределении скорости. Начальное распределение скорости изображено на рис. 9.1. Оно зависит от 11 параметров: $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \gamma_1, \gamma_n, \gamma_p, \gamma_c, \gamma_{a1}, \gamma_{a2}$. На участке $\gamma \in [0, \gamma_1]$ закон падения скорости выбран в виде (8.26).

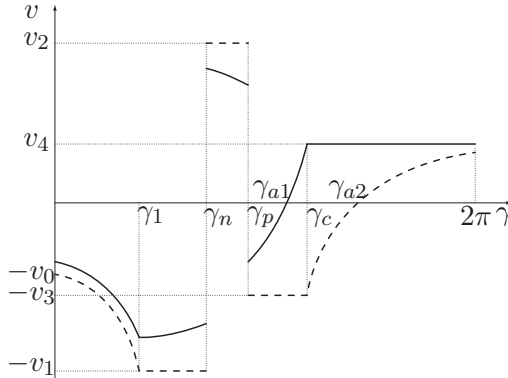


Рис. 9.1. Исходное распределение скорости для крылового профиля с выдувом струи в диапазоне углов

Как и ранее, вышеперечисленные параметры нельзя задавать произвольно, необходимо выполнение ограничений, которых в данной задаче будет 9. Это три условия разрешимости (6.15), (8.20), (8.21); два условия, определяющие радиусы r_1, r_2 закругления канала выдува; одно условие непрерывности распределения скорости в точке γ_c ; два условия справедливости соотношения (8.1) в точках P и B ; условие заданности диапазона расчетных углов $\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$.

Поэтому свободных параметров при таком задании скорости будет 2. В качестве таких параметров выберем угол γ_n , определяющий положение канала отбора на профиле, и γ_1 – начало участка падения скорости.

9.4. Результаты числовых расчетов. На рис. 9.2–9.4 представлены примеры построения крыловых профилей с выдувом в диапазоне режимов обтекания (каждый из которых характеризуется углом атаки, расходом через щель и параметрами выдуваемой струи).

Исходные данные для построения этих профилей были следующие: $r_1 = 12\%$, $r_2 = 9\%$ (т. е. $h = 3\%$, $k = 3/4$), $\gamma_n = 2.5$, $\gamma_1 = 1.7$, $\Delta = 10^\circ$, $\mu_1 = 0$. Отличие примеров лишь в энергии выдуваемой струи при большем угле атаки: $\mu_2 = 0, 1.25, 3$. Остальные параметры, найденные в процессе решения задачи, представлены в табл. 9.1. Заметим, что в первом и втором примерах получилось $D > D_* = 6.6$. Это означает, что распределение скорости на диффузорном участке отрывное. При увеличении μ градиенты скорости на диффузорном участке падают (эффект Коанда) и уже в третьем примере условие безотрывности выполняется. Также отметим рост c_y в зависимости от энергии выдуваемой струи.

Т а б л и ц а 9.1

Характеристики крыловых профилей с выдувом струи

μ_2	v_0	v_1	D	α_1°	c_{xj1}	c_{y1}	α_2°	c_{xj2}	c_{y2}
0	0.89	2.44	20.5	3.9	-0.093	0.9	13.9	-0.127	2.1
1.25	1.36	2.86	7.5	4.1	-0.099	1.3	14.1	-0.222	2.6
3	1.85	3.37	4.3	4.3	-0.106	1.8	14.3	-0.352	3.3

9.5. Расчет полученных профилей в CFD-пакете Fluent. Полученный крыловой профиль с рис. 9.4 был рассчитан в вычислительном пакете Fluent 6.2. Так как на диффузорном участке закон падения скорости был выбран из условия безотрывности ТПС, расчет проводился для двух моделей турбулентного течения: Спаларта – Аллмараса (SA) и модели SST (для ламинарного течения в начале диффузорного участка на верхней поверхности возникает отрыв). Жидкость считалась несжимаемой, скорость набегающего потока $v_\infty = 100\text{м/с}$, хорда $b = 1\text{м}$ (что соответствует числу Рейнольдса $\text{Re} = 5 \cdot 10^6$).

Расчетная сетка строилась по такому же принципу, что и для профиля из § 7, исследовалось течение вокруг профиля для двух расчетных углов атаки: $\alpha_1 = 4.3^\circ$ и $\alpha_2 = 14.3^\circ$.

Граничные условия имели такой же вид, что и в § 7 (отличие заключалось лишь в том, что на границе щели скорость выдува задавалась из условия получения заданного числа μ : для первого режима $\mu_1 = 0$ и для второго – $\mu_2 = 3$).

На рис. 9.5 приведено сравнение распределения коэффици-

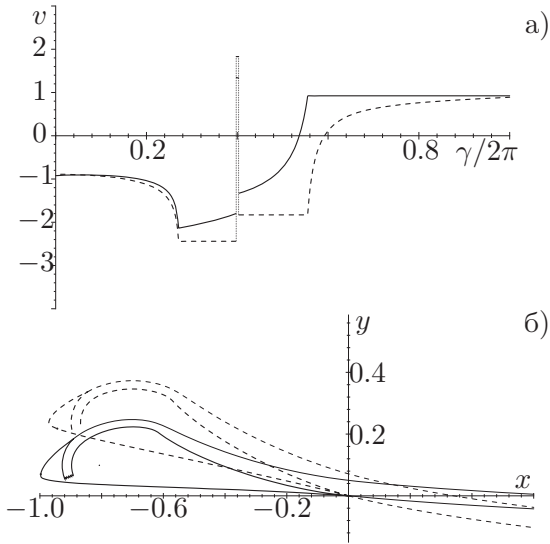


Рис. 9.2. Профиль с выдувом струи при $\mu = 0$

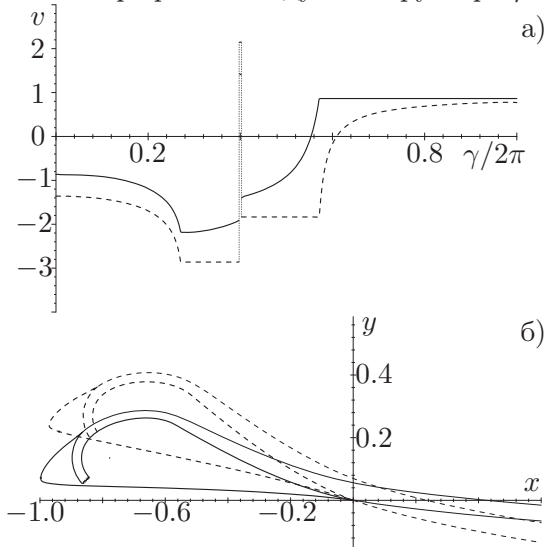


Рис. 9.3. Профиль с выдувом струи при $\mu = 1.25$

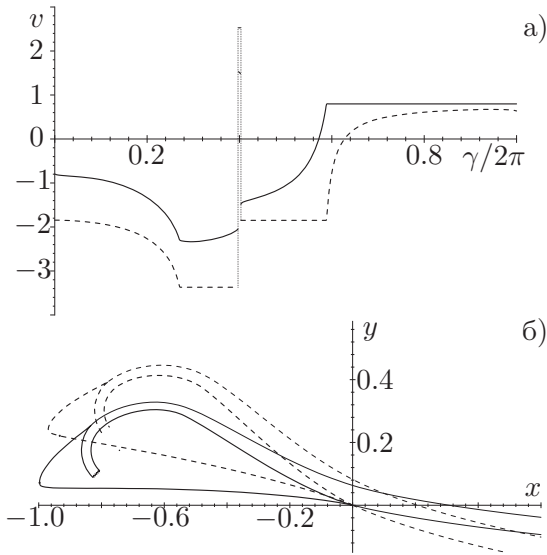


Рис. 9.4. Профиль с выдувом струи при $\mu = 3$

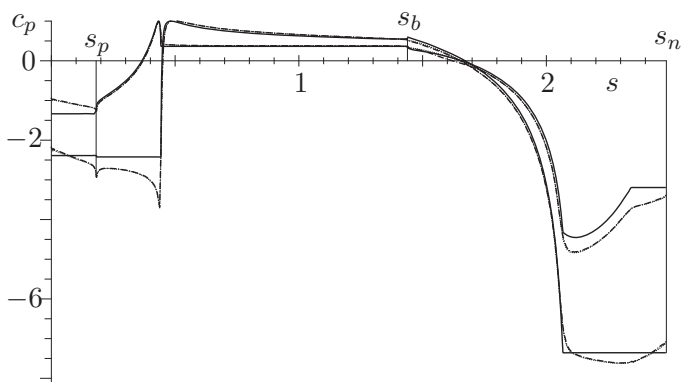
ента давления по контуру профиля численно-аналитическим методом, изложенным в этом параграфе (сплошная линия), с распределениями давлений, полученных в пакете Fluent (SA – пунктирная линия, SST – штриховая линия). В табл. 9.2 приведено сравнение коэффициентов c_x и c_y для двух расчетных режимов.

Т а б л и ц а 9.2

Сравнение характеристик крыловых профилей с выдувом

№	Течение	c_{x1}	c_{y1}	c_{x2}	c_{y2}
1.	Численно аналитическое решение	-0.106	1.75	-0.352	3.25
2.	Турбулентное (SA)	-0.179	1.88	-0.346	3.53
3.	Турбулентное (SST)	-0.176	1.88	-0.344	3.52

Заметим, что результаты численно-аналитического метода и пакета Fluent для профиля с выдувом получились не такими близкими, как это было для контура с отбором. По-видимо-

Рис. 9.5. Распределение c_p по контуру профиля

му, это связано с тем, что высокоэнергетическая струя в турбулентном потоке размывается. Кроме того, на контуре имеется диффузорный участок с положительным градиентом давления, что также вносит некоторые погрешности в расчет. Но в то же время заметим, что течение остается безотрывным для обоих расчетных режимов.

§ 10. Случай одновременного отбора и выдува

В настоящем параграфе поставлена и исследована обратная краевая задача аэрогидродинамики для крылового профиля со щелевым отбором воздуха с его верхней поверхности из внешнего потока и выдувом реактивной струи в его кормовой части.

10.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый контур L_z крылового профиля (рис. 10.1) обтекается плоскопараллельным потоком ИЖ с заданной плотностью ρ , скоростью v_∞ и давлением p_∞ на бесконечности. Точка схода потока B принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно направлению скорости v_∞ , внутренний к области течения угол в точках B и E равен 2π . Хорда b профиля известна. Щель отбора воздуха моделируется бесконечно-

листным завитком, асимптотически переходящим в кольцевой канал N с постоянными скоростями v_1 и v_2 на его стенках. В задней кромке B из прямолинейного канала F с постоянной скоростью v_j выдувается жидкость с другой плотностью ρ_j и скоростью на бесконечности $v_{j\infty}$. Индексом j обозначаются все параметры, относящиеся к струе. Заданы безразмерные расходы $q_n = Q_n/(v_\infty b)$ отбора и $q_f = Q_f/(v_\infty b)$ выдува.

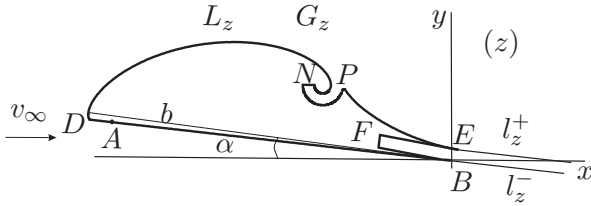


Рис. 10.1. Физическая плоскость z

Обозначим через l_z^+ и l_z^- линии тока, отделяющие реактивную струю от внешнего потока, то есть границы струи. При переходе через эти границы давление меняется непрерывно, а скорость – скачком согласно соотношению (8.1)

Контур L_z профиля образован прямолинейным участком BAD , содержащим точку разветвления потока A , участками постоянной скорости DN , NP , PE , EF и FB . На неизвестных участках искомого контура L_z крылового профиля задается кусочно-постоянное распределение скорости как функция от полярной координаты γ в канонической области $|\zeta| > 1$ (рис. 10.2): на участке DN имеем $v(\gamma) = v_1$, на NP : $v(\gamma) = -v_2$, на PE : $v(\gamma) = v_2$, на EF : $v(\gamma) = -v_j$ и FB : $v(\gamma) = v_j$. Соответствующие точки в плоскостях z и ζ обозначены одинаковыми буквами. Образы линий l_z^+ и l_z^- во вспомогательной плоскости обозначим l_ζ^+ и l_ζ^- . Для взаимно однозначного конформного отображения областей G_z и G_ζ предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ и переход точки B ($z = 0$) в точку $\zeta = 1$.

Требуется определить форму контура L_z крылового профиля, границы струи, то есть линии l_z^+ и l_z^- , отделяющие струю от внешнего потока, и аэродинамические характеристики про-

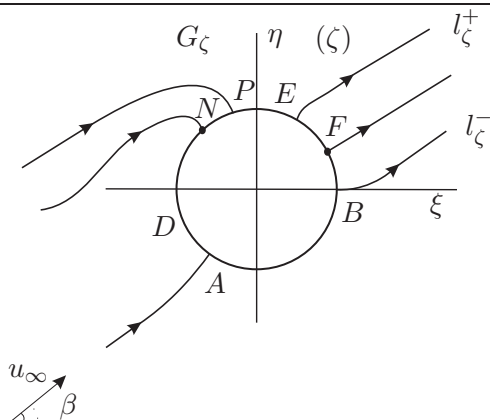


Рис. 10.2. Каноническая плоскость ζ

филя.

10.2. Схема решения задачи. Обтеканию искомого профиля в физической плоскости z соответствует обтекание в канонической плоскости единичного круга со стоком в точке N и источником в точке F с интенсивностями q_n и q_f соответственно плоскопараллельным потоком ИНЖ с модулем u_∞ и аргументом β скорости набегающего потока на бесконечности. При сделанных предположениях относительно математической модели в области G_z существуют комплексные потенциалы течений во внешнем потоке и в струе. Будем рассматривать эти потенциалы как единую кусочно-аналитическую функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, теряющую разрыв на линиях раздела сред, то есть на границах струи l_z^+ и l_z^- . Комплексно-сопряженную скорость $dw/d\zeta$ нетрудно записать, воспользовавшись методом особенностей

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} f(\zeta) e^{-\Omega(\zeta)}, \tag{10.1}$$

$$f(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_e}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\zeta_f}{\zeta}\right)^{-1}.$$

Здесь $\Omega(\zeta) = T(r, \gamma) + i\Lambda(r, \gamma)$ – кусочно-аналитическая функция, теряющая скачок на линиях l_z^+ и l_z^- .

Положив в формуле (10.1) на границе $\zeta = e^{i\gamma}$, определим распределение скорости на окружности

$$u(\gamma) = 4u_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_e}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \times \\ \times \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_f}{2} e^{-T(\gamma)}.$$

Разложив комплексно сопряженную скорость $dw/d\zeta$ в окрестности точек N и F , получим выражения для расходов

$$q_n = 8\pi u_\infty \sin \frac{\gamma_n - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_e}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2} \times \\ \times \sin^{-1} \frac{\gamma_n - \gamma_f}{2} e^{-T(\gamma_n)}, \quad (10.2)$$

$$q_f = 8\pi u_\infty \sin \frac{\gamma_f - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma_f - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma_f - \gamma_e}{2} \sin \frac{\gamma_f}{2} \times \\ \times \sin^{-1} \frac{\gamma_f - \gamma_n}{2} e^{-T(\gamma_f)}. \quad (10.3)$$

Из условия того, что окружность является линией тока, установим связь

$$\Lambda(\gamma) \equiv \delta = (\gamma_a + \gamma_p + \gamma_e - \gamma_n - \gamma_f - \pi)/2 - \beta. \quad (10.4)$$

Пусть $\zeta^+(t)$ точка на линии l_ζ^+ , $\zeta^-(t)$ точка на линии l_ζ^- , а $\vartheta^+(t)$ и $\vartheta^-(t)$ – углы наклона касательной к кривым l_ζ^+ и l_ζ^- соответственно, где t – дуговая абсцисса линии раздела сред, отсчитываемая от точки E для l_ζ^+ и от точки B для l_ζ^- , то есть $d\zeta^\pm(t)/dt = e^{i\vartheta^\pm(t)}$. Условие непроницаемости линий l_ζ^+ и l_ζ^- с учетом (10.1) запишется в виде

$$\vartheta^\pm(t) = \Lambda^\pm(t) + \beta - \text{Im}[\ln(f(\zeta^\pm(t)))], \quad (10.5)$$

откуда следует, что $\text{Im} \Omega(\zeta^\pm)$ меняется непрерывно при переходе через линии l_ζ^+ и l_ζ^- , а скачок терпит лишь $\text{Re} \Omega(\zeta^\pm(t)) = T^\pm(t)$.

Введем в рассмотрение аналитическую функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} + i\tilde{\theta} = \chi(\zeta) + \Omega(\zeta) - \\ - \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{\frac{i\alpha}{\pi}}, \quad (10.6)$$

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = \ln v - i\theta, \quad a = \ln \frac{v_1}{v_2},$$

$\chi(\zeta)$ – функция Жуковского – Мичела.

Так как функция $\tilde{\chi}(\zeta)$ аналитическая, то скачки функций $\chi(\zeta)$ и $\Omega(\zeta)$ компенсируют друг друга. Обозначим функции скачков

$$\lambda^\pm(t) = \Omega - \Omega_j|_{l^\pm_\zeta} = T - T_j|_{l^\pm_\zeta}, \quad \lambda^\pm(t) = \ln \left. \frac{v^\pm_j(t)}{v^\pm(t)} \right|_{l^\pm_\zeta},$$

где $v^\pm_j(t)$ и $v^\pm(t)$ – распределения скоростей на линиях l^\pm_ζ и l^\pm_ζ в струе и в потоке соответственно. Если функция $\lambda^\pm(t)$ известна, то с учетом (10.5), следуя [43], запишем функцию $\Omega(\zeta)$ в виде

$$\Omega(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(1/\bar{\zeta})} - \overline{\Phi(0)},$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{l^+_\zeta} \frac{\lambda^+(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} - \int_{l^-_\zeta} \frac{\lambda^-(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} \right\},$$

причем (10.4) будет выполняться при $\delta = \text{Im } \Phi(0)$.

Выделив действительные и мнимые части в (10.6) на границе $\zeta = e^{i\gamma}$, с учетом (10.4) найдем

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\gamma) = & \ln \left| \frac{v(\gamma)}{4 \sin \frac{\gamma-\gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma-\gamma_p}{2}} \right| + \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2\pi} - \\ & - \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2|\gamma - \gamma_n|} + T(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_d, \end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\tilde{\theta}(\gamma) = -\theta(\gamma) + \Psi(\gamma), \quad \gamma_d \leq \gamma \leq 2\pi, \tag{10.8}$$

$$\Psi(\gamma) = \gamma - \beta + \frac{\gamma_e - \gamma_n - \gamma_f}{2} - \frac{\pi(\gamma - \gamma_a)}{2|\gamma - \gamma_a|} + \frac{a}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \right|.$$

Выражения (10.7) и (10.8) представляют собой граничные условия смешанной краевой задачи для аналитической в G_ζ функции $\tilde{\chi}(\zeta)$. Интегральное представление решения такой задачи дает формула Вольтерра [79]

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \frac{\sqrt{(\zeta - e^{i\gamma_d})(\zeta - 1)}}{2\pi} \int_0^{\gamma_d} \tilde{S}(\gamma) \frac{e^{i(\tau/2 - \gamma_d/4)}}{(\zeta - e^{i\tau}) \sqrt{\sin((\gamma_d - \tau)/2) \sin(\tau/2)}} d\tau +$$

$$+ \frac{\sqrt{(\zeta - e^{i\gamma_d})(\zeta - 1)}}{2\pi} \int_{\gamma_d}^{2\pi} \tilde{\theta}(\gamma) \frac{e^{i(\tau/2 - \gamma_d/4)}}{(\zeta - e^{i\tau}) \sqrt{\sin((\tau - \gamma_d)/2) \sin(\tau/2)}} d\tau.$$

Распределение скорости $v(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, и угол наклона касательной к контуру крылового профиля определяются по (10.7) и (10.8):

$$\begin{aligned} \theta(\gamma) &= -\tilde{\theta}(\gamma) + \Psi(\gamma), \\ v(\gamma) &= \ln \left| 4 \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \right| \times \\ &\quad \times \exp \left[\tilde{S}(\gamma) - \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2\pi} + \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2|\gamma - \gamma_n|} - T(\gamma) \right]. \end{aligned}$$

Координаты искомого контура профиля дает квадратура

$$dz = dx + idy = e^{i\theta} ds = e^{i\theta} \frac{u(\gamma)}{v(\gamma)} d\gamma.$$

Здесь s – дуговая абсцисса искомого контура L_z крылового профиля, отсчитываемая от задней кромки B так, чтобы область течения оставалась слева.

Для решения необходимо определить функции $\vartheta^\pm(t)$, $\lambda^\pm(t)$. Для этого был организован итерационный процесс, аналогичный описанному в п. 8.3.

10.3. Условия разрешимости. Задание исходного распределения скорости. В исследуемой задаче имеют место пять условий разрешимости. Условие совпадения заданной скорости на бесконечности в физической плоскости с определенной в процессе решения имеет вид (6.15).

Два действительных условия замкнутости искомого контура крылового профиля, вытекающие из соотношения $\text{res}(dz/d\zeta) = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, имеют вид

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\cos \gamma_n + \cos \gamma_f - \cos \gamma_e - 1) - a \sin \gamma_n,$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi(\sin \gamma_n + \sin \gamma_f - \sin \gamma_e) + a \cos \gamma_n.$$

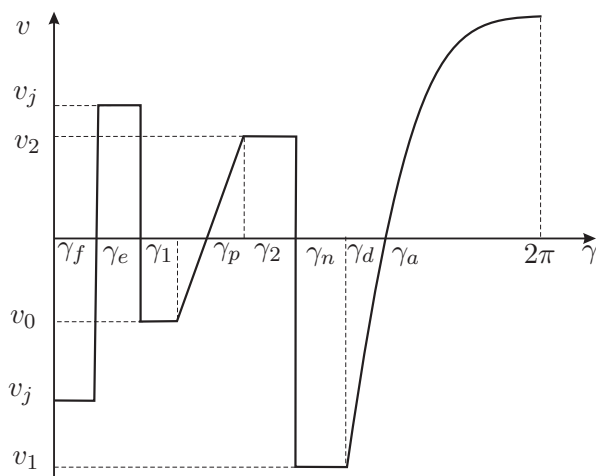


Рис. 10.3. Схематическое распределение скорости $v(\gamma)$ по контуру крылового профиля

Четвертым и пятым условиями разрешимости будут условия (10.2) и (10.3) получения заданных величин расходов q_c и q_f . Эти условия разрешимости представляют собой нелинейную систему из пяти уравнений, налагающих ограничения на класс исходных распределений скорости $v(\gamma)$.

Для выполнения перечисленных условий разрешимости достаточно задать пятипараметрический класс распределений скорости $v(\gamma, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, а свободные параметры a_i ($i = \overline{1, 5}$) искать из условий разрешимости. Для получения желаемых геометрических характеристик профиля исходное распределение скорости целесообразно задавать зависящим от девяти параметров: $v_0, v_1, v_2, \gamma_a, \gamma_d, \gamma_c, \gamma_e, \gamma_1, \gamma_f$. Такое распределение схематично изображено на рис. 10.3.

10.4. Примеры построения профилей. Характеристики профилей, построенных на рис. 10.4, приведены в табл. 10.1. Расчетный угол атаки α указан в градусах, коэффициенты c_{ya} подъемной силы, c_{xa} сопротивления и c_x полного сопротивления (с учетом энергетических затрат на установку отбора-выдува) вычислены по формулам (5.14), (5.15).

Что касается влияния μ на аэродинамические характери-

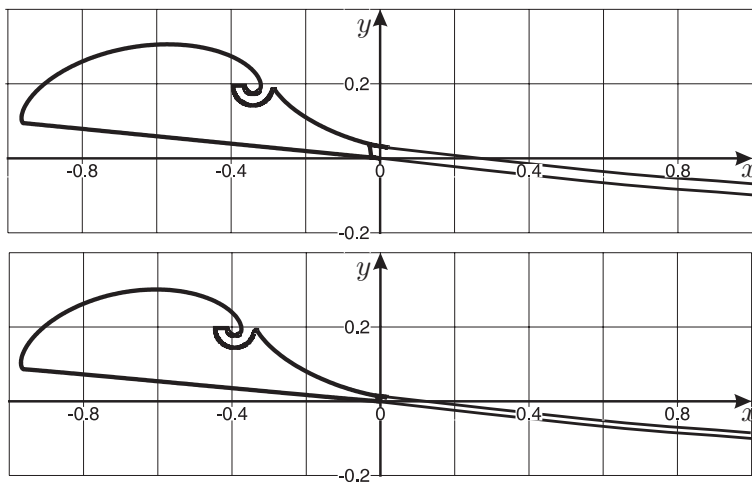


Рис. 10.4. Результаты расчетов для $\mu = 3$ (а)
и для $\mu = 20$ (б)

стики крылового профиля, то из двух первых строк табл. 10.1, рис. 10.4, а и б можно сделать следующие выводы. С ростом скорости выдува реактивной струи, то есть при увеличении μ , коэффициент c_{ya} подъемной силы увеличивается. С увеличением μ коэффициент c_x полного сопротивления растет. Чем больше μ , тем меньше кривизна струи.

Для подтверждения достоверности числовых результатов решения обратной краевой задачи был построен еще один крыловой профиль и вычислены его аэродинамические характеристики (строка 3, табл. 10.1). Затем этот профиль был рассчитан по программе Fluent, причем расчет проводился для двух разных моделей жидкости: модель ИНЖ использовалась для проверки результатов решения обратной краевой задачи, а модель Спаларта – Аллмараса – для определения применимости использованной модели идеальной несжимаемой жидкости для моделирования вязких течений ($Re = 6 \cdot 10^6$).

Как и закладывалось при проектировании этого профиля, он обтекается безотрывно. В табл. 10.2 приведены значения c_{ya} и c_{xa} для рассмотренных выше случаев. Видно, что во всех

Т а б л и ц а 10.1

Характеристики профилей с отбором и выдувом

	μ	v_1	q_c	q_f	α°	c_{ya}	c_{xa}	c_x
а	3	2.408	-0.20	0.20	6.81	3.301	-0.40	0.20
б	20	2.588	-0.20	0.20	7.08	3.647	-1.43	2.56
в	3	2.494	-0.15	0.06	15.49	3.342	0.236	0.419

Т а б л и ц а 10.2

Сравнение характеристик крылового профиля

Метод/модель	c_{ya}	c_{xa}
Численно-аналитический метод	3.3420	0.2360
Fluent, модель ИНЖ	3.3420	0.2345
Fluent, модель вязкой жидкости	3.3418	0.3440

трех случаях значения коэффициента подъемной силы c_{ya} почти совпадают. Расхождения по коэффициенту сопротивления c_{xa} объясняются наличием вязких сил, которые при решении обратной задачи не учитывались.

Подводя итог, отметим, что наличие устройства отбора-выдува позволяет значительно увеличить подъемную силу по сравнению с тем же профилем без отбора и выдува. Сравнения результатов обратной и прямой задач по модели ИНЖ дают полное совпадение по коэффициенту c_{ya} подъемной силы и почти полное по коэффициенту c_{xa} сопротивления, что подтверждает достоверность численно-аналитического решения. Сравнения результатов обратной задачи по модели идеальной несжимаемой жидкости и прямой задачи по вязкой несжимаемой жидкости дали совпадение лишь по коэффициенту c_{ya} подъемной силы, но разошлись по коэффициенту c_{xa} сопротивления, что вполне естественно, так как в решении обратной краевой задачи вязкость не учитывалась.

Глава 3

Двухэлементные крыловые профили

Вопрос об аэродинамическом расчете **двухэлементных крыловых профилей** всегда привлекал внимание исследователей. С использованием математической модели ИНЖ эта задача сводится к решению краевой задачи для двухсвязной области. Одно из первых исследований ОКЗА для крылового профиля биплана провел Р. М. Насыров [45], где на искомым профилях задавалось распределение скорости, области течения ставилась в соответствие внешность двух дуг единичной окружности во вспомогательной плоскости. Задача Дирихле решалась путем сведения к двум задачам Римана. В монографии Г. Г. Тумашева и М. Т. Нужиной [56] предложен несколько иной путь решения, а именно, в качестве вспомогательной области выбирался прямоугольник. Функция Жуковского – Мичела восстанавливалась по формуле Вилля. Однако вопрос о способах выполнения условий разрешимости задачи в этих работах остался открытым.

Г. Ю. Степановым [52] решена задача построения решеток бипланов методом годографа скорости. Комплексный потенциал искомого течения в физической плоскости находился как аналитическая функция комплексной скорости в заданной области годографа скорости. Замкнутость контуров профилей обеспечивалась вариацией исходного годографа скорости и свободных параметров.

В работе Н. Б. Ильинского и А. В. Поташева [30] решена ОКЗА для двухэлементного профиля в случае, когда размеры закрылка (предкрылка) малы по сравнению с размерами основного профиля. Для решения задачи закрылок заменял-

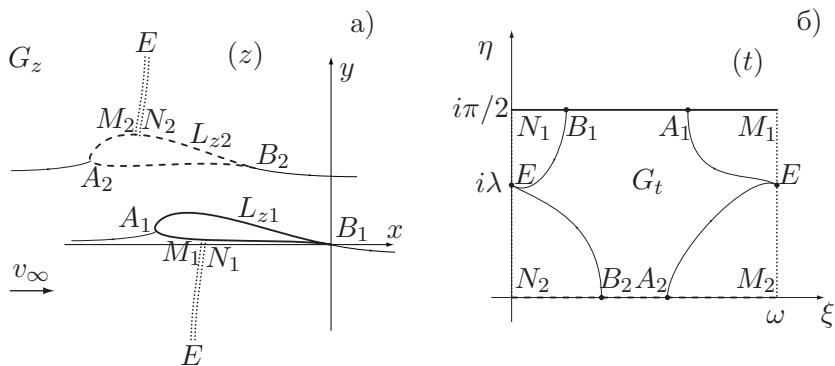


Рис. 11.1. Области течения в физической и канонической плоскостях

ся точечным вихрем. Для выполнения условий разрешимости ОКЗА применен способ квазирешения некорректных задач математической физики. А. В. Поташевым [48] решена задача в случае закрылка конечных размеров при задании на его скелетной линии распределений толщины и перепада давлений.

В работе [70] Р. М. Джеймсом предложен метод решения, основанный на интегральных соотношениях для функции Жуковского – Мичела в кольце. Решение задачи сведено к быстрому преобразованию Фурье. Выполнение условий разрешимости достигалось вариацией коэффициентов ряда Фурье. Метод построения изолированного крылового профиля, описанный в [77], обобщен на двухэлементный случай в работе [68]. Для решения задачи использовалась комбинация решения обратной задачи для одноэлементного профиля и прямой задачи для двухэлементного профиля.

§ 11. Обратная краевая задача аэродинамики для двухэлементного крылового профиля

11.1. Постановка задачи. В физической плоскости z (рис. 11.1, а) искомые непроницаемые крыловые профили $A_k B_k$ ($k = 1, 2$) обтекаются установившимся безвихревым потоком

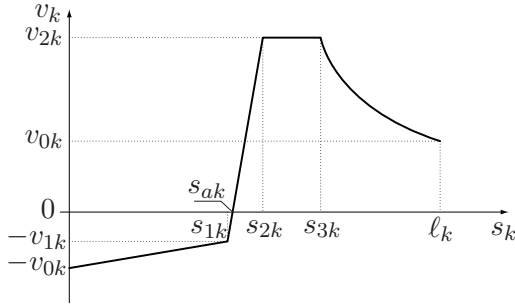


Рис. 11.2. Вид задаваемого распределения скорости $v_k(s_k)$

ИНЖ; контуры L_{zk} профилей считаются гладкими, за исключением задних кромок B_k , где внутренние к области течения углы равны 2π .

Начало декартовой системы координат выбрано в задней кромке B_1 профиля L_{z1} , а ось абсцисс параллельна направлению заданного вектора скорости v_∞ набегающего потока. Периметры профилей известны и равны ℓ_k . Дуговые абсциссы s_k контуров профилей отсчитываются от 0 в точках B_k до ℓ_k в них же так, что при возрастании s_k область течения остается слева. Распределение скорости по контуру L_{zk} описывается зависимостью

$$v_k = v_k(s_k, d_j), \quad s_k \in [0, \ell_k], \quad k = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad (11.1)$$

где d_j – свободные параметры. Некоторые из этих параметров будут находиться из условий разрешимости, остальные могут быть выбраны произвольно. В дальнейшем в записи функции v_k параметры d_j будем опускать. Пример задания кусочно-линейного (за исключением диффузорного участка) распределения скорости $v_k(s_k)$ приведен на рис. 11.2. Функции $v_k(s_k)$ – кусочно-гладкие, обращающиеся в нуль в точках A_k разветвления потока s_{ak} и непрерывно дифференцируемые в них. Знак v_k связан с направлением обхода, поэтому $v_k(s_k) < 0$ при $s_k \in [0, s_{ak})$, $v_k(s_k) > 0$ при $s_k \in (s_{ak}, \ell_k]$.

Введем в рассмотрение комплексный потенциал $w(z) =$

$= \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, который определяется с точностью до комплексной постоянной. Будем считать, что в точке разветвления потока на первом контуре $w(z_{a1}) = \varphi_{a1} + i\psi_{a1} = 0$. Для фиксирования взаимного расположения контуров относительно друг друга зададим комплексный потенциал в точке A_2 : $w(z_{a2}) = \varphi_{a2} + i\psi_{a2}$.

Требуется найти форму профилей и их геометрические и аэродинамические характеристики.

11.2. Схема решения. Значения $\varphi_k = \varphi(s_k)$ вдоль профилей определяются формулами

$$\varphi_k(s_k) = \varphi_{ak} + \int_{s_{ak}}^{s_k} v_k(s) ds, \quad s_k \in [0, \ell_k].$$

Циркуляции скорости по каждому контуру L_{zk} равны $\Gamma_k = \varphi_k(\ell_k) - \varphi_k(0)$. Пусть также $\varphi_{bk} = \varphi_k(0)$.

Двухсвязную область G_z в плоскости z конформно отобразим на прямоугольник G_t со сторонами $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = i\pi/2$ в плоскости $t = \xi + i\eta$. При этом контуру L_{z1} в плоскости t соответствует сторона N_1M_1 прямоугольника G_t , а контуру L_{z2} – сторона N_2M_2 (рис. 11.1, б), бесконечно удаленная точка в плоскости z переходит в точку E ($t = i\lambda$) на мнимой оси, а на боковых гранях прямоугольника выполняется условие периодичности.

Согласно решению прямой задачи о биплане [49] можно записать

$$w(t) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) = u_\infty [e^{i\beta} \zeta(t - i\lambda) + e^{-i\beta} \zeta(t + i\lambda)] + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(t - i\lambda)}{\sigma(t + i\lambda)} + Kt + C, \quad (11.2)$$

$$u(t) \equiv \frac{dw}{dt}(t) = -u_\infty [e^{i\beta} \wp(t - i\lambda) + e^{-i\beta} \wp(t + i\lambda)] + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} [\zeta(t - i\lambda) - \zeta(t + i\lambda)] + K, \quad (11.3)$$

$$K = \frac{1}{\omega} \left[-\Gamma_1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{\lambda \eta_1}{\pi} - 2u_\infty \eta_1 \cos \beta \right] = \text{const},$$

где $u_\infty, \beta, \lambda, C = C_1 + iC_2$ – неизвестные постоянные; $\wp(t), \zeta(t), \sigma(t)$ – функции Вейерштрасса с полупериодами $\omega/2$ и $i\pi/2$; $\eta_1 = \zeta(t + \omega) - \zeta(t)$ – постоянная. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \varphi(\xi, \pi/2), & \psi_1(\xi) &= \psi(\xi, \pi/2), & \xi &\in [0, \omega]. \\ \varphi_2(\xi) &= \varphi(\xi, 0), & \psi_2(\xi) &= \psi(\xi, 0), \end{aligned}$$

Перейдя на границы N_1M_1 и N_2M_2 прямоугольника G_t , получим систему из десяти нелинейных алгебраических уравнений для определения десяти параметров $t_{a1} = \xi_{a1} + i\pi/2$, $t_{a2} = \xi_{a2}$, $t_{b1} = \xi_{b1} + i\pi/2$, $t_{b2} = \xi_{b2}$, $u_\infty, \beta, \lambda, C_1, C_2$ и ω :

$$\begin{aligned} u(t_{a1}) &= 0, & u(t_{a2}) &= 0, & u(t_{b1}) &= 0, & u(t_{b2}) &= 0, \\ \varphi_1(\xi_{a1}) &= 0, & \psi_1(\xi_{a1}) &= 0, & \varphi_2(\xi_{a2}) &= \varphi_{a2}, & & (11.4) \\ \psi_2(\xi_{a2}) &= \psi_{a2}, & \varphi_2(\xi_{b2}) &= \varphi_{b2}, & \varphi_1(\xi_{b1}) &= \varphi_{b1} + \Gamma_1. \end{aligned}$$

Первые четыре уравнения этой системы служат для определения параметров $\xi_{a1}, \xi_{a2}, \xi_{b1}$ и ξ_{b2} ; два последующих – для нахождения C_1 и C_2 . Оставшаяся система из четырех уравнений служит для определения u_∞, β, λ и ω . Для ее решения выбран метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений.

Определив параметры, найдем функции $\varphi_k(\xi)$ на отрезках N_kM_k . Сопоставив значения потенциалов скорости в первоначальном и преобразованном потоках, взятых в соответствующих друг другу точках, установим связь $s_k = s_k(\xi)$ между точками контуров L_{zk} и отрезков N_kM_k прямоугольника G_t . Функция Жуковского – Мичела

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{1}{v_\infty} \frac{dw}{dz} \right) = \ln \left| \frac{v}{v_\infty} \right| - i\theta,$$

где θ – аргумент вектора скорости, имеет логарифмические особенности в точках A_k обращения скорости v в нуль. Поэтому введем в рассмотрение модифицированную функцию

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(t) &= \chi(t) - \chi_0(t), & & (11.5) \\ \chi_0(t) &= \ln \left[\sin \frac{\pi(t - t_{a1})}{\omega} \sin \frac{\pi(t - t_{a2})}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\chi_0(t)$ – периодическая в плоскости t и имеет такой же характер поведения в точках A_k , что и функция $\chi(t)$. Следовательно, $\tilde{\chi}(t) = \tilde{S}(\xi, \eta) + i\tilde{\theta}(\xi, \eta)$ периодическая и не имеет особенностей во всем прямоугольнике G_t .

Действительная часть этой функции на верхней и нижней сторонах прямоугольника G_t известна:

$$\tilde{S}_1(\xi) = \ln \left| \frac{v_1(s_1(\xi))}{v_\infty} \right| - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a1})}{\omega} \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a2} + i\pi/2)}{\omega} \right|,$$

$$\tilde{S}_2(\xi) = \ln \left| \frac{v_2(s_2(\xi))}{v_\infty} \right| - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a2})}{\omega} \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a1} - i\pi/2)}{\omega} \right|,$$

где $\tilde{S}_1(\xi) = \tilde{S}(\xi, \pi/2)$, $\tilde{S}_2(\xi) = \tilde{S}(\xi, 0)$.

Функцию $\tilde{\chi}$ восстановим по формуле Вилля (см., например, [7])

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(t) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\omega [\tilde{S}_1(\xi)\zeta(t - \xi - i\pi/2) - \tilde{S}_2(\xi)\zeta(t - \xi)] d\xi + \\ + \frac{\eta_1 - 2}{2\omega} P_1 + iP_2, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где P_2 – вещественная постоянная, которая будет определена позднее, а для P_1 имеем

$$P_1 = \int_0^\omega \tilde{S}_1(\xi) d\xi = \int_0^\omega \tilde{S}_2(\xi) d\xi. \quad (11.7)$$

Последнее равенство в (11.7) является условием однозначности функции $\tilde{\chi}(t)$.

По известной $\tilde{\chi}(t)$ определим ее мнимую часть на верхней и нижней сторонах прямоугольника G_t :

$$\tilde{\theta}_1(\xi) = \text{Im } \tilde{\chi}(\xi + i\pi/2), \quad \tilde{\theta}_2(\xi) = \text{Im } \tilde{\chi}(\xi).$$

Производную dz/dt найдем по формуле

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dw/dt}{dw/dz} = \frac{u(t)}{v_\infty e^{\tilde{\chi}(t)}} = \frac{u(t)}{v_\infty e^{\tilde{\chi}(t)} \sin \frac{\pi(t - t_{a1})}{\omega} \sin \frac{\pi(t - t_{a2})}{\omega}}.$$

Проинтегрировав это соотношение по верхней и нижней сторонам прямоугольника G_t , получим параметрическое выражение контуров искомых профилей

$$z_k(\xi) = z_{0k} + \int_{\xi_{bk}}^{\xi} \frac{u_k(\xi)}{v_k(\xi)} e^{i\theta_k(\xi)} d\xi, \quad k = 1, 2, \quad \xi \in [0, \omega], \quad (11.8)$$

где вещественные функции $u_k(\xi)$, $\theta_k(\xi)$ имеют вид

$$u_1(\xi) = u(\xi + i\pi/2), \quad u_2(\xi) = u(\xi),$$

$$\theta_1(\xi) = -\tilde{\theta}_1(\xi) - \text{Im } \chi_0(\xi + i\pi/2), \quad \theta_2(\xi) = -\tilde{\theta}_2(\xi) - \text{Im } \chi_0(\xi).$$

Так как начало координат в физической плоскости выбрано в точке B_1 , то $z_{01} = x_{01} + iy_{01} = 0$. Для определения постоянной z_{02} используем формулу

$$z_{02} = x_{02} + iy_{02} = \int_{t_{b1}}^{t_{b2}} \frac{dz}{dt} dt.$$

11.3. Условия разрешимости. В ОКЗА для двухэлементного крылового профиля, как и для изолированного, присутствуют условия разрешимости, выводимые аналогичным способом. Условия замкнутости следуют из (11.8)

$$\int_0^{\omega} \frac{u_k(\xi)}{v_k(\xi)} e^{i\theta_k(\xi)} d\xi = 0, \quad k = 1, 2. \quad (11.9)$$

Так как эти равенства комплексные, они представляют собой четыре вещественных условия разрешимости.

С учетом равенства $dw/dz|_{z \rightarrow \infty} = v_{\infty}$ получим

$$\text{Im } \tilde{\chi}(i\lambda) = 0, \quad (11.10)$$

$$\text{Re } \tilde{\chi}(i\lambda) = 0. \quad (11.11)$$

Условие (11.10) служит для определения неизвестной P_2 , а (11.11) – это пятое условие разрешимости. Последним, шестым

условием разрешимости, является полученное ранее условие (11.7) однозначности $\tilde{\chi}(\zeta)$.

Для удовлетворения этих условий были использованы введенные в распределения скорости (11.1) свободные параметры (по 3 параметра из каждого $v_k(s_k)$).

11.4. Расчет аэродинамических характеристик.

Аэродинамические силы находятся по формуле Чаплыгина (5.1). Перейдя в плоскость t , получим

$$\bar{R}_k = R_{xk} - iR_{yk} = (-1)^k \frac{\rho i}{2} \int_0^\omega v_k(\xi) u_k(\xi) e^{-\theta_k(\xi)} d\xi.$$

При вычислении сил удобно пользоваться безразмерными коэффициентами

$$c_{xk} = \frac{2R_{xk}}{\rho v_\infty^2 (b_1 + b_2)}, \quad c_{yk} = \frac{2R_{yk}}{\rho v_\infty^2 (b_1 + b_2)},$$

где b_1, b_2 – хорды профилей.

Для результирующей силы, действующей на систему профилей, справедливы формулы Жуковского

$$c_x = c_{x1} + c_{x2} = 0, \quad c_y = c_{y1} + c_{y2} = \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{v_\infty (b_1 + b_2)}.$$

11.5. Примеры построения крыловых профилей.

Построение крыловых профилей выполнялось по следующей схеме. По заданным распределениям скоростей $v_k(s_k)$ “полочного” типа из класса гидродинамически целесообразных распределений скорости и значениям φ_{a2} и ψ_{a2} определялись функции $\tilde{S}_k(\xi)$ на верхней и нижней сторонах прямоугольника. Затем восстанавливалась функция $\tilde{\chi}(t)$. Для выполнения условий разрешимости часть свободных параметров в исходных распределениях скоростей находилась из решения системы нелинейных уравнений (11.7), (11.9) и (11.11) методом Ньютона. В качестве таких свободных параметров были выбраны s_{1k}, s_{2k}, v_{0k} . Одним из основных требований гидродинамической целесообразности является требование безотрывности обтекания.

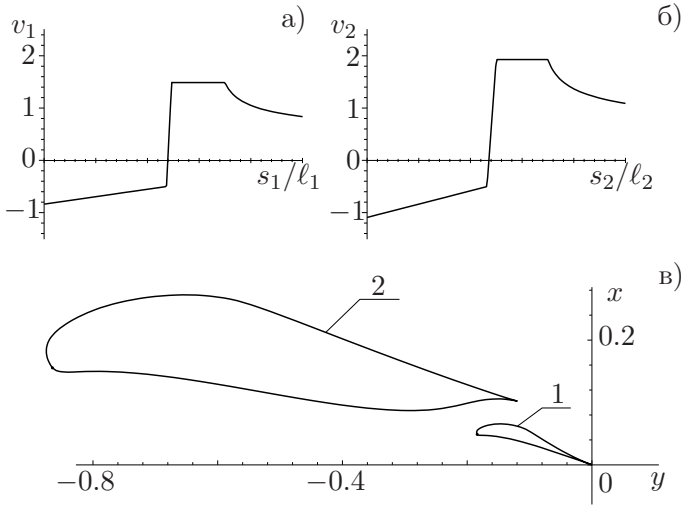


Рис. 11.3. Пример построения профиля с закрылком

Т а б л и ц а 11.1

Параметры и характеристики двухэлементных профилей

l_1	l_2	φ_{a2}	ψ_{a2}	v_{21}	v_{01}	v_{22}	v_{02}	C_y
0.2	0.8	-0.5	0.05	1.488	0.838	1.925	1.092	1.73
0.8	0.2	0	0.05	1.613	0.912	2.678	1.553	1.72
1.0	0.0	-	-	1.692	0.943	-	-	1.42
0.5	0.5	-0.2	0.05	1.527	0.864	2.306	1.328	1.91

На диффузорном участке распределение скорости задавалось в виде

$$v_k(s_k) = v_{2k} \left[1 + D_k \frac{s_k - s_{3k}}{s_{3k} - s_{ak}} \right]^{-1/4},$$

где D_k определяется из условия $v_k(l_k) = v_{0k}$. Из критерия безотрывности ТПС по методу Кочина – Лойцянского следует задавать $D_k < D^* = 6.6$ (см., например, [18, 52]). Для удовлетворения этого условия использовался свободный параметр v_{2k} .

Пример построения крылового профиля с закрылком приведен на рис. 11.3. Рассчитанные в ходе решения распределения

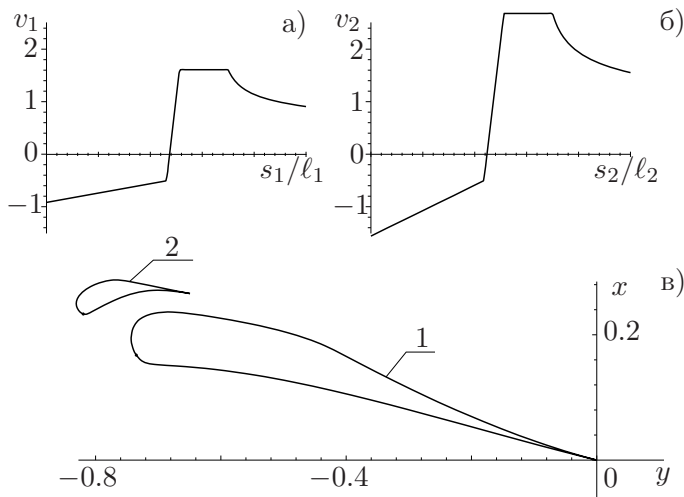


Рис. 11.4. Пример построения профиля с предкрылком

скорости изображены на рис. 11.3, а, б, соответствующие им профили – на рис. 11.3, в. Начало диффузорных участков во всех примерах взято равным $s_{3k} = 0.7\ell_k$. Задаваемые и определяемые параметры и характеристики этого профиля приведены в первой строке табл. 11.1.

Случай построения профиля с предкрылком изображен на рис. 11.4. Характеристики этого профиля приведены во второй строке табл. 11.1. Заметим, что коэффициенты подъемной силы для профилей с закрылком и предкрылком получились довольно близкими. Но в то же время проектирование профилей с закрылком является более предпочтительным с точки зрения сохранения дозвукового обтекания, т. к. максимальная скорость потока при обтекании профиля с закрылком получилась равной 1.925, а для профиля с предкрылком – 2.678.

Для сравнения коэффициентов подъемной силы двухэлементного и одиночного профилей в качестве распределений скорости по контурам профилей (как для одиночного, так и для обоих распределений двухэлементного) были взяты одинаковые распределения скорости полочного типа (рис. 11.2).

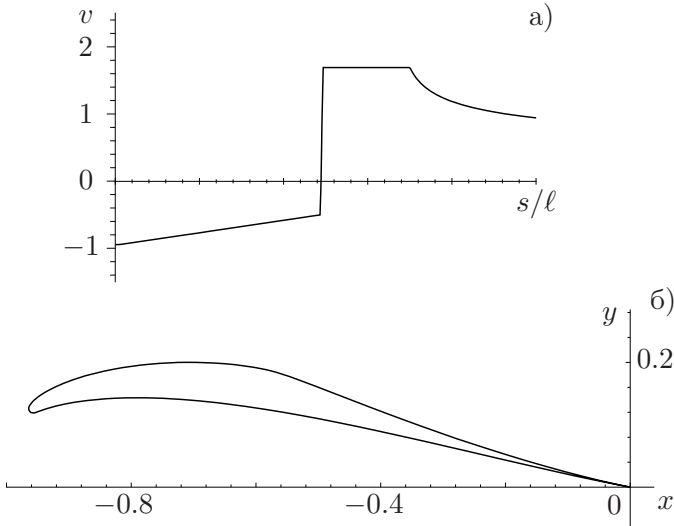


Рис. 11.5. Изолированный профиль

Начало диффузорного участка задано $s_{3k} = 0.7\ell_k$, $v_{1k} = 0.5v_\infty$, скорость v_{2k} на полке находилась из условия безотрывности $D_k = 6.6$. Сначала по схеме решения ОКЗА для профиля в безграничном потоке найдено распределение скорости по его контуру (рис. 11.5, а) и построен соответствующий ему одиночный профиль (рис. 11.5, б). Его характеристики приведены в 3 строке табл. 11.1. Затем решена задача для двухэлементного профиля при $\varphi_{a2} = -0.2$, $\psi_{a2} = 0.05$. Периметры профилей выбраны одинаковыми $\ell_1 = \ell_2$. Распределения скоростей на обоих контурах двухэлементного профиля изображены на рис. 11.6, а, б; а сам профиль – на рис. 11.6, в. Характеристики этого двухэлементного профиля приведены в 4 строке табл. 11.1. Как видно из расчетов, за счет использования двухэлементного крылового профиля удалось увеличить коэффициент подъемной силы более чем на 30%. Заметим также, что в случае равных периметров коэффициент c_y получился больше, чем в случаях обтекания профиля с закрылком или предкрылком.

Таким образом, приведено численно-аналитическое реше-

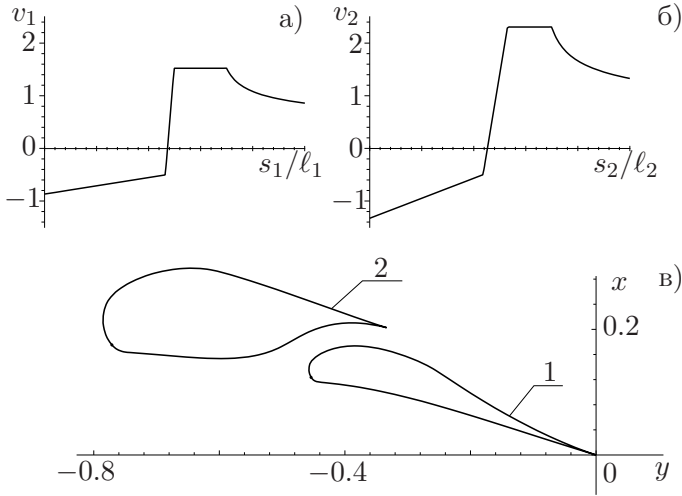


Рис. 11.6. Пример построения двухэлементного профиля

ние задачи построения двухэлементного крылового профиля по заданному на искомым контурах профилей распределению скорости или давления как функции дуговой абсциссы этих контуров. Получены формулы для вычисления аэродинамических сил, действующих на каждый профиль. Результаты числовых расчетов показали, что коэффициент подъемной силы двухэлементного крылового профиля при учете ограничения на безотрывность обтекания больше по сравнению с одиночным профилем.

§ 12. Обобщение на случай учета вязкости и сжимаемости

В этом параграфе изложено численно-аналитическое решение задачи построения двухэлементного крылового профиля при обтекании дозвуковым потоком вязкого газа. Учет вязкости выполнен по теории ПС, сжимаемости – по модели газа Чаплыгина.

12.1. Постановка задачи. В физической плоскости z (рис.12.1, а) искомые непроницаемые крыловые профили $A_k B_k$ ($k = 1, 2$) обтекаются плоским установившимся дозвуковым потоком вязкого газа с заданными числами Рейнольдса Re_∞ и Маха M_∞ на бесконечности; контуры L_{zk} профилей считаются гладкими за исключением задних кромок B_k , где внутренний к области течения угол равен 2π .

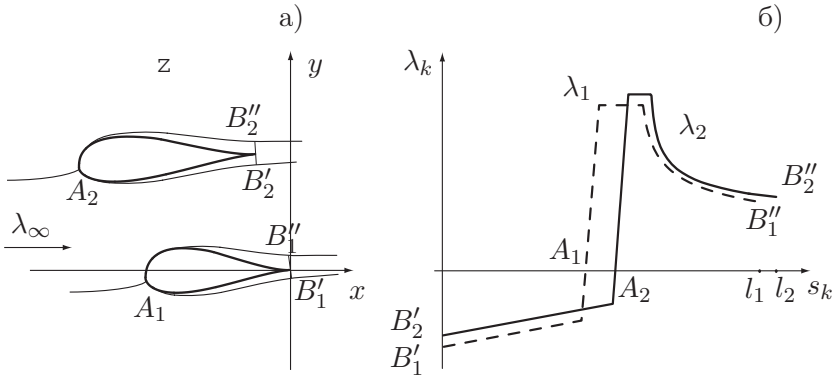


Рис. 12.1. Физическая плоскость а) и задаваемое распределение $\lambda(s)$ приведенной скорости

Начало декартовой системы координат выбрано в задней кромке B_1 профиля L_{z1} , а ось абсцисс параллельна направлению скорости набегающего потока. Периметры профилей известны и равны l_k .

Предполагая безотрывный характер обтекания и малость толщины ПС, дуговые абсциссы s_k контуров профилей и полутел вытеснения на участках $B'_k A_k B''_k$ будем считать совпадающими и отсчитывать их от нуля в точках B'_k до l_k в B''_k так, что при возрастании s_k область течения остается слева. Распределения приведенных скоростей λ_k вдоль границ полутел вытеснения $B'_k A_k B''_k$ в параметрическом виде равны

$$\lambda_k(s_k, d_j) = v_k(s_k, d_j)/a_* =, \quad s_k \in [0, l_k], \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m,$$

где d_j , ($j = 1, \dots, m$) – свободные параметры, a_* – критическая скорость. В дальнейшем в записи функции λ_k свободные пара-

метры d_j будем опускать. Распределения $\lambda_k(s_k)$ изображены на рис.12.1, б. Функции $\lambda_k(s_k)$ – кусочно-гладкие, обращающиеся в нуль в точках A_k разветвления потока s_{ak} и в них непрерывно дифференцируемы. Знак λ_k связан с направлением обхода, поэтому $\lambda_k(s_k) < 0$ при $s_k \in [0, s_{ak})$, $\lambda_k(s_k) > 0$ при $s_k \in (s_{ak}, l_k]$.

Кроме вышеперечисленных условий, необходимо выполнение ряда требований, ограничивающих выбор распределения скорости. К таким относятся ограничения по конструктивной реализуемости решения (требование замкнутости и простоты искомых контуров, ограничения на толщину и кривизну профилей) и по физической реализуемости решения (соответствие решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики математической модели, принятой в постановке задачи). Названные ограничения определяют множество гидродинамически целесообразных распределений скорости (см., например, [52]), из которого и берутся исходные распределения скорости.

Введем в рассмотрение комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$. Считаем, что известен расход q_* между контурами полутел вытеснения и разность потенциалов φ_* между точками A_2 и A_1 . Положив $w(z)$ равным нулю в точке A_1 , имеем

$$\varphi(s_{a1}) = 0, \quad \psi(s_{a1}) = 0, \quad \varphi(s_{a2}) = \varphi_*, \quad \psi(s_{a2}) = q_*$$

Требуется найти форму двухэлементного крылового профиля и его геометрические и аэродинамические характеристики.

12.2. Решение обратной задачи. В качестве характерного линейного размера выберем полусумму $l = 0.5(l_1 + l_2)$ периметров искомых профилей.

Для решения обратной задачи воспользуемся предположениями, что для больших (порядка $10^5 - 10^6$) значений числа Re_∞ вязкость будет сказываться лишь в достаточно тонком ПС около профиля, а для дозвуковых скоростей внешнего потока сжимаемостью внутри слоя можно пренебречь. При этом решение сведется к нахождению контуров полутел вытеснения, обтекаемых потоком газа Чаплыгина, зная которые, найдем форму искомых профилей, отступив на участках $B_k A_k B_k''$ внутрь полутел на толщину вытеснения $\delta_k^*(s)$. Функция $\delta_k^*(s)$ определя-

ется расчетом любым из известных методов, например, однопараметрическим методом Кочина – Лойцянского [42].

В качестве канонической области в плоскости t выберем прямоугольник со сторонами ω и $\pi i/2$. Область изменения комплексного потенциала в плоскости w для газа Чаплыгина сохраняет тот же вид, что и для ИНЖ [49]. Комплексный потенциал имеет вид (11.2). Но в отличие от случая ИНЖ, модели газа Чаплыгина соответствует вспомогательная функция

$$\chi(t) = \ln \left\{ 2 |\lambda(t)| \left[1 + \{1 + 4c^2 \lambda^2(t)\}^{1/2} \right]^{-1} \right\} - i\theta, \quad c^2 = 0.296,$$

имеющая логарифмические особенности в точках A_k обращения приведенной скорости λ_k в нуль.

Как и в § 11, вводим в рассмотрение аналитическую функцию $\tilde{\chi}(t)$ по формуле (11.5). Действительная часть этой функции на границе прямоугольника известна:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(\xi) = \ln \left\{ 2 |\lambda_1(s_1(\xi))| \left[1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_1^2(s_1(\xi))} \right]^{-1} \right\} - \\ - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a1})}{\omega} \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a2} + \pi i/2)}{\omega} \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(\xi) = \ln \left\{ 2 |\lambda_2(s_2(\xi))| \left[1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_2^2(s_2(\xi))} \right]^{-1} \right\} - \\ - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a1} - \pi i/2)}{\omega} \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a2})}{\omega} \right|. \end{aligned}$$

Функцию $\tilde{\chi}$ восстановим по формуле (11.6).

Для dz имеем

$$dz = e^{-\chi(t)} w'(t) dt - \overline{c^2 e^{\chi(t)} w'(t) dt}, \quad (12.1)$$

где черта – комплексное сопряжение. Интегрируя это выражение, найдем координаты контуров полутел вытеснения.

Контуры искомого двухэлементного профиля, определяемые из (12.1), будут замкнуты, если контуры полутел вытеснения разомкнуты на величину

$$\Delta z_k = -i\delta_{0k}^* \exp(i\theta_{0k}), \quad (12.2)$$

где θ_{0k} – аргумент вектора скорости в точках B_k' и B_k'' , $\delta_{0k}^* = \delta_k^*(0) + \delta_k^*(l_k)$, $\delta_k^*(0)$, $\delta_k^*(l_k)$ – значения толщин вытеснения в точках B_k' и B_k'' соответственно. Кроме того, должны выполняться условия однозначности функции $\tilde{\chi}$ (11.7) и совпадения величины скорости набегающего потока, найденной в ходе решения задачи, с заданным значением $\lambda_\infty = v_\infty/a_*$:

$$\operatorname{Re} \chi(i\alpha) = \ln \left\{ 2\lambda_\infty \left[1 + \{1 + 4c^2\lambda_\infty^2\}^{1/2} \right]^{-1} \right\}. \quad (12.3)$$

Одним из основных требований гидродинамически целесообразных распределений скорости является требование безотрывности обтекания профиля. Из теории ПС известно, что отрыв потока может происходить лишь на диффузорных участках, характеризующихся отрицательными градиентами скорости. Поэтому распределение приведенной скорости на возможно большей части контура следует задавать неубывающим, а на оставшейся части дотраивать его так (см., например, [18]), чтобы выполнялось условие безотрывности

$$f_k(s) \geq f_0, \quad f_k(s) = \frac{a\lambda_k'(s)}{|\lambda_k(s)|^b} \left[\int_{s_*}^s |\lambda_k(\tau)|^{b-1} d\tau + f_{tk} \right],$$

где $f_k(s)$ – формпараметр, f_0 , a , b – эмпирические постоянные, f_{tk} характеризует вклад в f_k ламинарных участков. Если ПС на профиле полностью турбулентный, то $f_{tk} = 0$, $a = 1.17$, $b = 4.75$, $f_0 = -2$.

Коэффициент сопротивления каждого из профилей находится по формуле Сквайра-Юнга

$$c_{xk} = 2 (\lambda_{0k} / \lambda_\infty)^{\frac{5+H_{12}}{2}} \delta_{0k}^{**} (b_1 + b_2)^{-1},$$

где $\lambda_{0k} = \lambda_k(l_k)$, δ_{0k}^{**} – скорость и суммарная толщина потери импульса ПС в задней кромке соответствующего профиля,

Т а б л и ц а 12.1

Характеристики двухэлементных профилей

№	c_{x1}	c_{y1}	c_{x2}	c_{y2}	c_{xa}	c_{ya}	K
1.	0.0014	0.13	0.0078	0.59	0.0092	0.72	78
2.	0.0019	0.21	0.0086	0.99	0.0105	1.20	113

b_1, b_2 - хорды профилей, $H_{12} = \delta_k^*(l_k) / \delta_k^{**}(l_k)$. Величина коэффициента подъемной силы вычисляется по формуле

$$C_{y_k} = \oint_{L_k} (c_{f_k} dy - c_{p_k} dx),$$

где c_{f_k} - местный коэффициент трения, а под c_{p_k} понимают коэффициент давления для адиабатического течения

$$c_{p_k} = \frac{2}{\nu M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 - \lambda_k^2 [(\nu + 1)(\nu - 1)]^{-1}}{1 - \lambda_\infty^2 [(\nu + 1)(\nu - 1)]^{-1}} \right)^{\nu(\nu+1)} - 1 \right],$$

где $\nu = 1.41$ для воздуха.

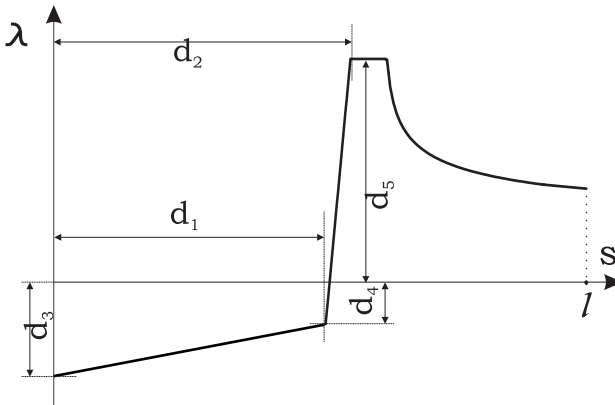


Рис. 12.2. Схема задания параметрического распределения скорости

12.3. Результаты расчетов. В качестве свободных параметров d_j ($j = 1, \dots, 5$) приведенной скорости λ_k ($k = 1, 2$) выбраны величины, указанные на рис.12.2.

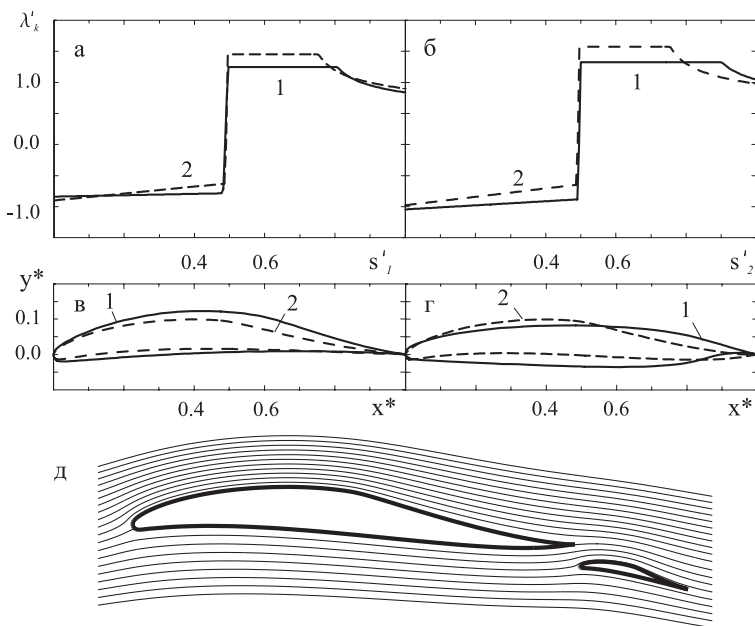


Рис. 12.3. Оптимальное решение

Пример численного решения обратной задачи при $M_\infty = 0.3$ и $Re_\infty = 1.45 \times 10^7$ приведен на рис.12.3.

Характеристики двухэлементного профиля приведены в табл. 12.1.

Для обоснования достоверности полученных результатов был проведен тестовый расчет полученного оптимального двухэлементного профиля прямым методом. Задавалась геометрия области течения. Решались стационарные уравнения Навье – Стокса совместно с моделью турбулентности Спаларта – Аллмараса [26]. Эта модель менее чувствительна к несовершенству расчетной сетки и, как следствие, – к вычислительным погрешностям.

Область течения системы крыловых профилей двусвязная. След за основным профилем может сливаться с ПС закрылка. Несоответствие графиков коэффициентов давления c_{p1} на полном участке закрылка (рис.12.4, точками отмечены значе-

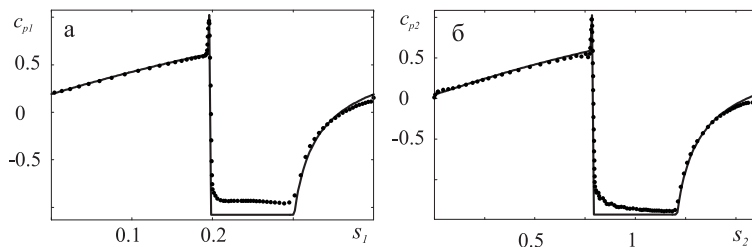


Рис. 12.4. Распределение коэффициента давления

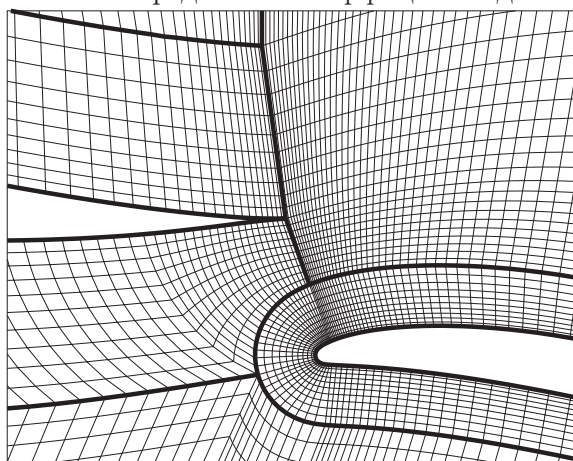


Рис. 12.5. Участок расчетной сетки в окрестности задней кромки основного профиля и передней кромки закрылка

ния c_{pk} , найденные прямым методом) объясняется взаимодействием ПС.

На рис.12.5 изображен участок расчетной сетки в окрестности задней кромки основного профиля. Области, прилегающие к контурам, дискретизированы двумя С-сетками. Дискретизация области на бесконечности осуществлена С-сеткой, вложенной в О-сетку, граница которой достигает от 10 до 25 характерных размеров l . В целом расчетная сетка содержит 36100 элементов.

Итак, изложено численно-аналитическое решение задачи построения двухэлементного крылового профиля, обтекаемо-

го дозвуковым потоком вязкого газа и обладающего максимальным аэродинамическим качеством. Результаты расчетов демонстрируют удовлетворительное согласование с данными, полученными путем решения прямой задачи.

§ 13. Оптимизация формы двухэлементного крылового профиля

В этом параграфе предложено численно-аналитическое решение задачи нахождения формы двухэлементного крылового профиля с максимальным коэффициентом подъемной силы при условии безотрывного обтекания дозвуковым потоком вязкого газа.

13.1. Постановка задачи. В физической плоскости z (рис. 12.1, а) искомые непроницаемые крыловые профили $A_k B_k$ ($k = 1, 2$) обтекаются безотрывно плоским установившимся потенциальным дозвуковым потоком с заданными числами Рейнольдса Re_∞ и Маха M_∞ на бесконечности. Контуры L_k профилей считаются гладкими, за исключением задних кромок B_k , где внутренний к области течения угол равен 2π .

Направление оси абсцисс в физической плоскости z выбрано по направлению скорости v_∞ набегающего потока. Периметры профилей известны и равны l_k ($k = 1, 2$).

При условии безотрывного обтекания и малости толщины ПС дуговые абсциссы s_k контуров профилей и полутел вытеснения на участках $B'_k A_k B''_k$ будем считать совпадающими и отсчитывать их от нуля в точках B'_k до l_k в B''_k так, чтобы при возрастании s_k область течения оставалась слева.

Распределения приведенной скорости λ_k вдоль участков $B'_k A_k B''_k$ полутел вытеснения в параметрическом виде есть

$$\lambda_k = v_k(s_k, d_j)/a_* = \lambda_k(s_k, d_j), \quad s_k \in [0, l_k], \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, 5,$$

где d_j – свободные параметры, a_* – критическая скорость. Функции λ_k кусочно-гладкие, обращающиеся в нули в точках A_k разветвления потока s_{ak} , и в них они непрерывно дифференцируемы. Распределения приведенной скорости выбираются из класса гидродинамически целесообразных (ГЦРС) [52],

что обеспечивает безотрывное обтекание в рамках принятой математической модели. Эти распределения берутся с так называемой “полкой” (рис.12.1 б), т. е. с участком постоянной скорости, так как именно “полочные” распределения являются экстремальными в задаче максимизации площади эпюры распределений скорости.

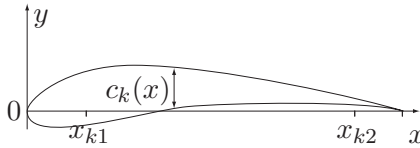


Рис. 13.1. Толщина профиля

Задание распределений скорости вдоль искомого контура не достаточно для получения физически реализуемого решения – профиля заданной толщины, ограниченного замкнутым контуром без точек самопересечения. Дополнительные геометрические ограничения, налагаемые на L_k и позволяющие зафиксировать класс искомых решений, имеют вид:

$$\min_{x \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(x) \geq c', \quad (13.1)$$

$$c''' \geq \max_{x \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(x) \geq c'', \quad (13.2)$$

где $c_k(x)$ – значение функции относительной толщины k -го профиля в процентах от хорды этого профиля в точке x (рис. 13.1); участок хорды $[x_{k1}, x_{k2}]$ и величины c' , c'' , c''' задаются. Первое из ограничений выражает условие отсутствия точек самопересечения контура, второе эквивалентно определению границ изменения максимальной толщины профиля.

В соответствии с принятой математической моделью течения существует комплексный потенциал потока $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$. Считаем, что известны расход q_* между контурами L_k полутел вытеснения и разность потенциалов φ_* между точками A_2 и A_1 . Положив $w(z)$ равным

нулю в точке A_1 , будем иметь:

$$\varphi(s_{a1}) = 0, \quad \psi(s_{a1}) = 0, \quad \varphi(s_{a2}) = \varphi_*, \quad \psi(s_{a2}) = q_*.$$

Требуется найти форму двухэлементного крылового профиля, обладающего максимальной подъемной силой.

13.2. Решение обратной задачи. Решение обратной задачи проводится по схеме, описанной в § 12.

13.3. Решение задачи оптимизации. Это решение состоит в оптимальном выборе исходных распределений приведенной скорости $\lambda_k = \lambda_k(s_k, d_j)$, при которых функционал $F(d_j) = c_{ya}(\lambda_k(s_k, d_j))$ принимает максимальное значение с учетом условий разрешимости обратной задачи (11.7), (12.2), (12.3), геометрических ограничений (13.1), (13.2) и дополнительных линейных ограничений на свободные параметры:

$$A_1 d = g_1, \quad (13.3)$$

$$A_2 d \leq g_2, \quad (13.4)$$

$$d_l \leq d \leq d_m, \quad (13.5)$$

где матрицы A_1, A_2 и векторы $g_1, g_2, d_l, d_m \in R^n$ заданы.

Для решения оптимизационной задачи применен комбинированный подход, сочетающий в себе методы штрафных функций и последовательного квадратичного программирования. В качестве вспомогательного функционала выбран

$$\Phi(d_j) = \varepsilon_1 \Delta z + \varepsilon_2 \Delta c^* + \varepsilon_3 \Delta c^{**} - c_{ya}, \quad (13.6)$$

где Δz – сумма квадратов невязок условий разрешимости обратной задачи, а величины Δc^* , Δc^{**} отыскиваются из выражений:

$$\begin{aligned} \Delta c^* &= \Delta_1 c^* + \Delta_2 c^*, \quad \Delta c^{**} = \Delta_1 c^{**} + \Delta_2 c^{**}, \\ \Delta_k c^* &= \begin{cases} (c_k^* - c')^2, & c_k^* < c', \\ 0, & c_k^* \geq c', \end{cases} \\ \Delta_k c^{**} &= \begin{cases} (c_k^{**} - c'')^2, & c_k^{**} < c'', \\ 0, & c'' \leq c_k^{**} \leq c''', \\ (c_k^{**} - c''')^2, & c_k^{**} > c''', \end{cases} \end{aligned}$$

$$c_k^* = \min_{x \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(x), \quad c_k^{**} = \max_{x \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(x).$$

Для заданных величин штрафа $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_3 > 0$ решается задача минимизации функционала (13.6) с линейными ограничениями (13.3)–(13.5).

Решение задачи минимизации (13.6) выполняется многократно для различных значений штрафа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Эти величины подбираются так, чтобы уменьшение значений функционала достигалось (в соответствии с поставленной задачей) за счет увеличения коэффициента подъемной силы c_{ya} . Затем построенные контуры с максимальным c_{ya} , которые, как правило, получаются разомкнутыми, замыкаются путем постепенного увеличения ε_1 . Одновременно увеличивая $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, добиваемся выполнения геометрических ограничений (13.1), (13.2). При этом следует избегать резких скачков штрафов и, как следствие, больших падений c_y . Сходимость описанного процесса подтверждена численными экспериментами.

13.4. Результаты расчетов. Для численной реализации предложенного метода решения оптимизационной задачи разработан комплекс программ. Рассматривалось обтекание двухэлементного профиля полностью турбулентным сжимаемым потоком при $M_\infty = 0.3$ и $Re_\infty = 1.45 \times 10^7$.

В качестве исходных задавались параметрические распределения $\lambda_k = \lambda_k(s_k, d_j)$, $k = 1, 2$, приведенной скорости “полочного” типа из класса ГЦРС. Из соображений безотрывности обтекания осуществлялся выбор длины полки (участок $\lambda = \lambda_{\max}$) и достраивалось распределение λ_k на участке торможения. Оптимальный выбор λ_k осуществлен подбором свободных параметров d_j ($j = 1, \dots, 5$) (рис. 12.2 а).

Пример численного решения оптимизационной задачи, когда геометрические ограничения (13.1, 13.2) не учитывались, приведен на рис. 13.2 (штриховая кривая на рис. 13.2, а соответствует распределению приведенной скорости $\lambda'_2 = \lambda_2/\lambda_\infty$ основного профиля, сплошная кривая – распределению $\lambda'_1 = \lambda_1/\lambda_\infty$ закрылка). Ясно, что физическая реализация таких тонких профилей на практике затруднительна. Действительно, в результате оптимизации максимальная толщина каждого из

Т а б л и ц а 13.1

Характеристики двухэлементных профилей

№ профиля	c_1^*	c_1^{**}	c_2^*	c_2^{**}	c_{xa}	c_{ya}	K
1.	0.2	7.4	0.7	5.9	0.0086	1.54	179
2.	1.0	15.8	6.8	20.2	0.0130	1.47	113

элементов профиля не превысила 8% хорды элемента, а с приближением к задней кромке их толщина снизилась и составила в точке 0.85 хорды 0.2% и 0.7% соответственно (см. табл. 13.1, профиль 1).

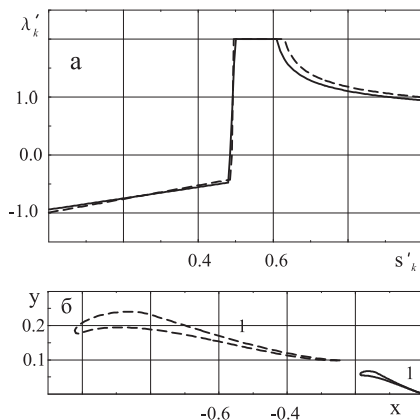


Рис. 13.2. Распределения приведенной скорости (а) и контур (б) оптимального двухэлементного профиля без учета геометрических ограничений

На рис. 13.3 приведен результат решения оптимизационной задачи в полной постановке для $c' = 1\%$, $c'' = 10\%$, $c''' = 25\%$, $x_{k1} = 0.1$, $x_{k2} = 0.85$, $k = 1, 2$. Здесь основной профиль и соответствующее ему распределение $\lambda'_2 = \lambda_2/\lambda_\infty$ изображены штриховой кривой, а закрылок и распределение $\lambda'_1 = \lambda_1/\lambda_\infty$ – сплошной.

Полученный двухэлементный профиль удовлетворяет требованиям класса искомых решений. Увеличение толщины профиля до приемлемых значений привело к снижению коэффициента c_{ya} подъемной силы на 4.5% по сравнению с профилем

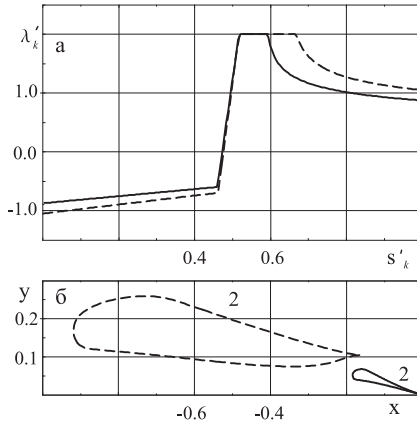


Рис. 13.3. Распределения приведенной скорости (а) и контур (б) оптимального двухэлементного профиля с учетом геометрических ограничений

1 (рис. 13.2) и значительному (более 50%) увеличению коэффициента c_{xa} сопротивления, что негативно сказалось на величине K аэродинамического качества (табл. 13.1, профиль 2).

13.5. Тестовый расчет. Для обоснования достоверности полученных результатов был проведен прямой расчет обтекания оптимального профиля 2 (рис. 13.3) установившимся дозвуковым потоком вязкого газа. Дискретизация области течения осуществлена структурированной мультиблочной сеткой с прямоугольными ячейками (рис. 13.4, 13.5; размеры указаны в хордах: $b = b_1 + b_2$).

Характеристики набегающего потока следующие: $M_\infty = 0.3$, $Re_\infty = 1.45 \times 10^7$, плотность $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3$, давление $p_\infty = 101325 \text{ Па}$, температура $T_\infty = 273^\circ \text{К}$, скорость $v_\infty = 100 \text{ м/с}$, динамический коэффициент вязкости $\mu_\infty = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ кг/мс}$, характерный линейный размер $l = 2 \text{ м}$.

Расчет проводился с использованием однопараметрической модели турбулентности Спаларта – Аллмараса программой FLUENT. Результаты расчета представлены на рис. 13.6, 13.7.

На рис. 13.6 изображены линии тока.

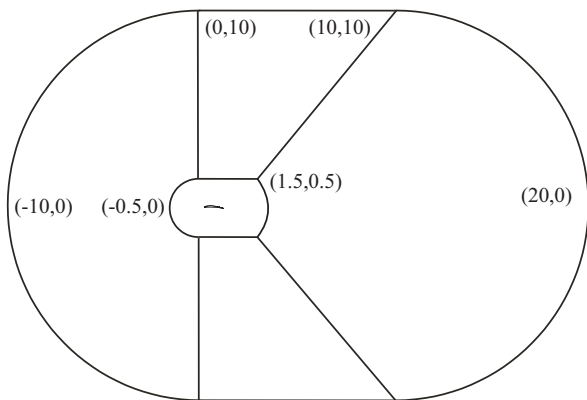


Рис. 13.4. Расчетная сетка: область на бесконечности

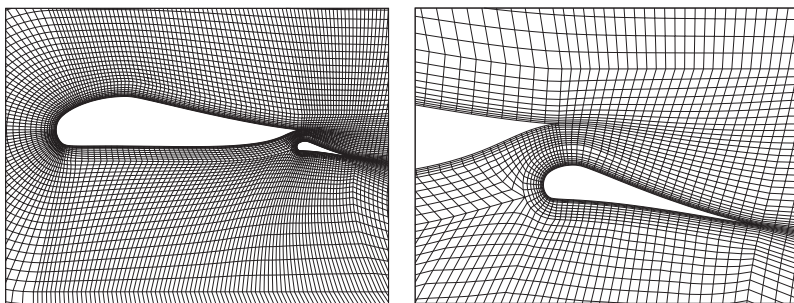


Рис. 13.5. Расчетная сетка: области, прилегающие к контурам

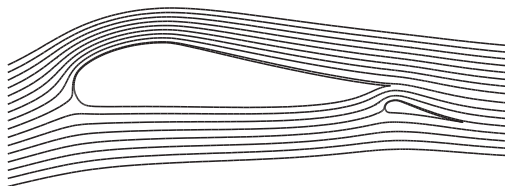


Рис. 13.6. Линии тока

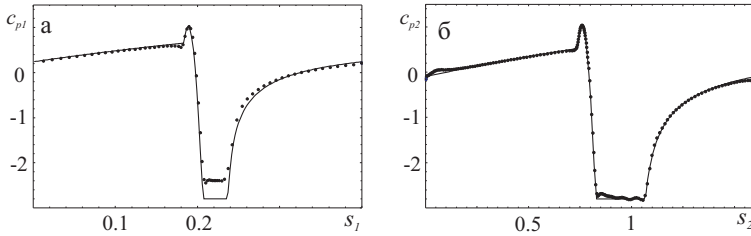


Рис. 13.7. Сравнение результатов расчета c_{pk} с данными программы FLUENT

Расчет поля чисел Маха показал, что в областях разрежения давления, примыкающих к верхней поверхности основного профиля и закрылка и соответствующих “полочным” участкам распределений приведенной скорости λ_k , течение дозвуковое, а величина M варьируется в пределах $0.55 \div 0.58$.

На рис. 13.7 приведено сравнение графиков коэффициентов давления c_{pk} , $k = 1, 2$, полученных из решения обратной задачи, с данными, вычисленными с использованием программы FLUENT (значения c_{pk} , найденные по программе FLUENT, отмечены точками). В целом графики удовлетворительно согласуются. Некоторое рассогласование коэффициентов давления c_{p1} на “полочном” участке закрылка объясняется влиянием “следа” за основным профилем на характеристики закрылка, которое в обратной задаче не учитывалось. Последнее обстоятельство, хотя и является одной из причин несовпадения величины коэффициента сопротивления $c_{xa} = 0.0253$ с величиной $c_{xa} = 0.0130$, полученной ранее в ходе решения задачи, не оказало значительного влияния на расчет коэффициента подъемной силы $c_{ya} = 1.44$ (разница в 2% по сравнению с $c_{ya} = 1.47$, см. табл. 13.1).

Подчеркнем, что вычислительный эксперимент подтвердил сходимость описанного процесса. Приведены примеры расчетов оптимального профиля с закрылком. Показано, что учет геометрических ограничений приводит к незначительному снижению коэффициента подъемной силы искомого профиля.

§ 14. Двухэлементный крыловой профиль в диапазоне углов атаки

14.1. Постановка задачи. В физической плоскости z (рис. 11.1, а) искомый двухэлементный крыловой профиль $A_k B_k$ ($k = 1, 2$) обтекается установившимся безвихревым потоком ИНЖ при двух углах атаки α и α^* ; заданной считается разность $\delta = \alpha^* - \alpha > 0$. Контуры L_{zk} профилей считаются гладкими за исключением задних кромок B_k , где внутренние к области течения углы равны 2π .

Начало декартовой системы координат выбрано в задней кромке B_1 контура L_{z1} , а ось абсцисс параллельна направлению заданного вектора скорости v_∞ набегающего потока. Периметры контуров известны и равны ℓ_k . Дуговые абсциссы s_k контуров профилей отсчитываются от 0 в точках B_k до ℓ_k в них же так, что при возрастании s_k область течения остается слева. Каждый контур разделен на две части (верхнюю и нижнюю поверхности) точкой C_k ($s = s_{ck}$). На нижних поверхностях задано распределение скорости по профилям L_{zk} при угле атаки α , а на верхних – при угле α^* :

$$\begin{aligned} v &= v_k(s_k), & s_k &\in [0, s_{ck}], & k &= 1, 2. \\ v &= v_k^*(s_k), & s_k &\in [s_{ck}, \ell_k] \end{aligned} \quad (14.1)$$

Пример такого параметрического распределения скоростей $v_k(s_k)$ и $v_k^*(s_k)$ приведен на рис. 14.1.

Для задания взаимного положения контуров, как и в § 11, зафиксируем разность комплексных потенциалов между точками A_2 и A_1 при угле α :

$$w(z_{a2}) - w(z_{a1}) = \varphi_{a2} + i\psi_{a2}.$$

14.2. Схема решения. Сведем эту задачу к задаче § 11. Для этого необходимо пересчитать распределения $v_k^*(s_k)$ на угол α . Заметим, что при смене угла атаки выполняется условие

$$z^*(t) = z(t)e^{-i\delta}. \quad (14.2)$$

Из этого соотношения следует связь скоростей

$$v_k^*(\xi) = v_k(\xi) \frac{u_k^*(\xi)}{u_k(\xi)}, \quad (14.3)$$

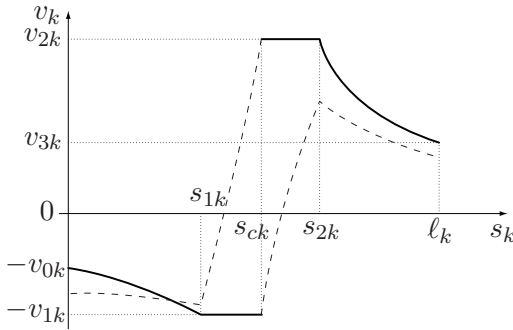


Рис. 14.1. Параметрическое распределение скорости при решении задачи в диапазоне углов, сплошные линии – заданные распределения, штриховые – находимые в процессе решения

где $u_1(\xi) \equiv u(\xi + i\pi/2)$, $u_2(\xi) \equiv u(\xi)$, $u_1^*(\xi) \equiv u^*(\xi + i\pi/2)$, $u_2^*(\xi) \equiv u^*(\xi)$, а функции $u(t)$, $u^*(t)$ имеют вид (11.3) (здесь и далее все величины, относящиеся к режиму обтекания при угле α^* , будем отмечать индексом “*”). Так как заданы распределения $v_k(s_k)$, а не $v_k(\xi)$, то без определения зависимостей $s_k(\xi)$ мы не можем воспользоваться формулой (14.3) для пересчета скорости с одного режима на другой.

Функция $u(t)$ определяется следующими шестью неизвестными параметрами: ω , λ , u_∞ , β , Γ_1 , Γ_2 . Вместо Γ_1 , Γ_2 будем задавать ξ_{b1} и ξ_{b2} – положения точек схода потока в канонической области, т. к. они не меняются при смене угла атаки. Для угла атаки α^* функция $u^*(t)$ зависит от параметров ω^* , λ^* , u_∞^* , β^* , ξ_{b1} , ξ_{b2} . Из (14.2) следует

$$\omega^* = \omega, \quad \lambda^* = \lambda, \quad u_\infty^* = u_\infty, \quad \beta^* = \beta - \delta.$$

Таким образом, определены все параметры, по которым восстанавливается функция $u^*(t)$. Прологарифмировав (14.3) и взяв от полученного выражения производную, получим

$$\frac{v_k^*(\xi)}{v_k^*(\xi)} - \frac{v_k'(\xi)}{v_k(\xi)} = U_k(\xi), \quad U_k(\xi) \equiv \frac{u_k^*(\xi)}{u_k^*(\xi)} - \frac{u_k'(\xi)}{u_k(\xi)}. \quad (14.4)$$

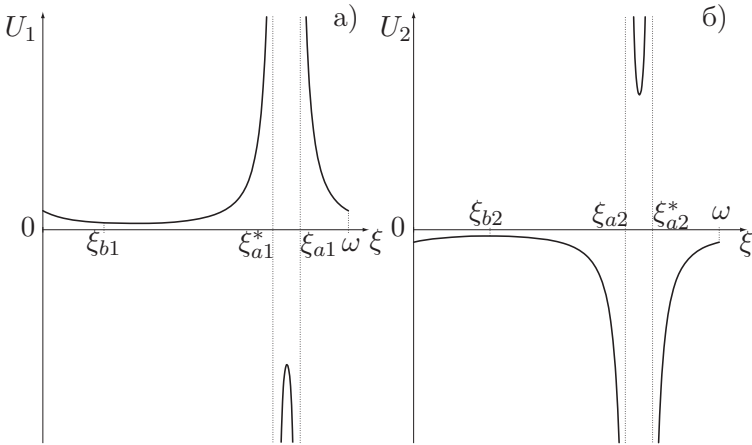


Рис. 14.2. Зависимости $U_1(\xi)$ и $U_2(\xi)$

На рис. 14.2 приведены графики функций $U_k(\xi)$ (14.4). По виду этих функций можно выяснить, возрастает или убывает отношение $v'(s)/v(s)$ при изменении угла атаки.

Рассмотрим, например, верхнюю поверхность первого контура. Этой поверхности соответствует интервал $\xi \in [\xi_{b1}, \xi_{a1}^*]$, на котором $U_1(\xi) > 0$. Следовательно, $v_1^{*'}(\xi)/v_1^*(\xi) > v_1'(\xi)/v_1(\xi)$. На этом участке $ds/d\xi < 0$, $v_1^*(\xi) > 0$, $v_1(\xi) > 0$, поэтому

$$\frac{v_1^{*'}(s)}{v_1^*(s)} < \frac{v_1'(s)}{v_1(s)}. \quad (14.5)$$

На верхней поверхности задается $v_1^*(s)$. Как показано в [21], если это распределение является безотрывным, то любое распределение $v_1(s)$, удовлетворяющее (14.5), также будет безотрывным.

После исследования аналогичным образом других участков сделан вывод: если заданные распределения скорости на нижних поверхностях являются безотрывными при угле атаки α и на верхних – при α^* , то отрыва не будет на всем двухэлементном крыловом профиле в диапазоне углов $[\alpha, \alpha^*]$.

Для решения задачи по известным распределениям $v_k(s_k)$

(14.1) определим функции

$$\begin{aligned}\varphi_k(s_k) &= \int_0^{s_k} v_k(\tilde{s}_k) d\tilde{s}_k, & s_k \in [0, s_{ck}], \\ \varphi_k^*(s_k) &= \int_{s_k}^{\ell_k} v_k^*(\tilde{s}_k) d\tilde{s}_k, & s_k \in [s_{ck}, \ell_k].\end{aligned}\tag{14.6}$$

Пусть также $\Phi_k \equiv \varphi_k(s_{ck})$, $\Phi_k^* \equiv \varphi_k^*(s_{ck})$.

Функции $w(t)$ и $w^*(t)$ определим по (11.2). Пусть ξ_{ck} – вещественная часть числа t_{ck} , соответствующего точке C_k . Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= w\left(\xi + \frac{i\pi}{2}\right) - w\left(\xi_{b1} + \omega + \frac{i\pi}{2}\right), & \xi \in [\xi_{c1}, \xi_{b1} + \omega], \\ \varphi_2(\xi) &= w(\xi) - w(\xi_{b2}), & \xi \in [\xi_{b2}, \xi_{c2}], \\ \varphi_1^*(\xi) &= w^*\left(\xi_{b1} + \frac{i\pi}{2}\right) - w^*\left(\xi + \frac{i\pi}{2}\right), & \xi \in [\xi_{b1}, \xi_{c1}], \\ \varphi_2^*(\xi) &= w^*(\xi_{b2} + \omega) - w^*(\xi), & \xi \in [\xi_{c2}, \xi_{b2} + \omega].\end{aligned}\tag{14.7}$$

Из сопоставления комплексных потенциалов в физической и канонической плоскостях следуют соотношения:

$$\varphi_1(\xi_{c1}) = \Phi_1, \varphi_2(\xi_{c2}) = \Phi_2, \varphi_1^*(\xi_{c1}) = \Phi_1^*, \varphi_2^*(\xi_{c2}) = \Phi_2^*.\tag{14.8}$$

Сравнив функции (14.6) и (14.7), определим зависимости $s_k(\xi)$. Эти связи между дуговыми абсциссами в физической и канонической плоскостях не зависят от угла атаки.

Далее найдем зависимости $v_k(\xi) = v_k[s_k(\xi)]$ и $v_k^*(\xi) = v_k^*[s_k(\xi)]$. Пересчитав по формуле (14.3) распределения $v_k^*(\xi)$ по образу верхней стороны на угол α , получим распределения $v_k(\xi)$ на всем интервале $\xi \in [0, \omega]$.

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся методом § 11.

14.3. Условия разрешимости и параметры задачи.

Как уже было сказано, для решения задачи необходимо выполнение четырех условий (14.8).

Из условий непрерывности распределений скорости в точках B_k и C_k по формуле (14.3) получаются еще 4 равенства:

$$\frac{v_k^*(s_{ck})}{v_k(s_{ck})} = \frac{u_k^*(\xi_{ck})}{u_k(\xi_{ck})}, \quad \frac{v_k^*(\ell_k)}{v_k(0)} = \frac{[u_k^*(\xi_{bk})]'}{[u_k(\xi_{bk})]'}, \quad k = 1, 2, \quad (14.9)$$

которые необходимо выполнить для получения гладких контуров. Добавив к этим условиям еще 2 условия задания φ_{a2} , ψ_{a2} и 6 условий разрешимости (11.7), (11.9), (11.11), получим сложную для решения задачу с 16 ограничениями. В задаче 8 неизвестных параметров: ω , λ , u_∞ , β , ξ_{b1} , ξ_{b2} , ξ_{c1} , ξ_{c2} . Так как их число меньше условий разрешимости, для решения задачи необходимо либо использовать метод квазирешений, либо ввести свободные параметры в задаваемые распределения $v_k(s_k)$ и $v_k^*(s_k)$. На рис. 14.1 изображены распределения $v_k(s_k)$ и $v_k^*(s_k)$ скорости в параметрическом виде, каждое из которых зависит от 7 параметров: v_{0k} , v_{1k} , v_{2k} , v_{3k} , s_{1k} , s_{ck} , s_{2k} . Таким образом, в задаче присутствует 22 свободных параметра.

Ввиду сложности решения такой задачи была рассмотрена задача в полуобратной постановке. Параметры ω , λ , u_∞ , β в канонической плоскости задавались, а периметры ℓ_k профилей и положения s_{ck} точек C_k в физической плоскости являлись искомыми. Кроме того, для фиксирования взаимного расположения профилей задавались не φ_{a2} и ψ_{a2} , а параметры ξ_{bk} .

В итоге схема решения задачи приобрела следующий вид.

1. Задаются параметры: δ , ω , λ , u_∞ , β , а также ξ_{bk} , s_{1k} , s_{2k} ($k = 1, 2$).
2. Из условий (14.8) находятся s_{ck} , ℓ_k .
3. Из (14.9) находятся v_{0k} , v_{1k} .
4. Для выполнения условий разрешимости (11.7), (11.9), (11.11) используются параметры ξ_{ck} , v_{2k} , v_{3k} .

Т а б л и ц а 14.1

Характеристики двухэлементных профилей в диапазоне

ℓ_1	ℓ_2	s_{c1}	s_{c2}	v_{11}	v_{12}	v_{21}	v_{22}	c_y	c_y^*
0.49	0.51	0.24	0.25	1.50	0.95	2.42	1.22	0.32	1.69

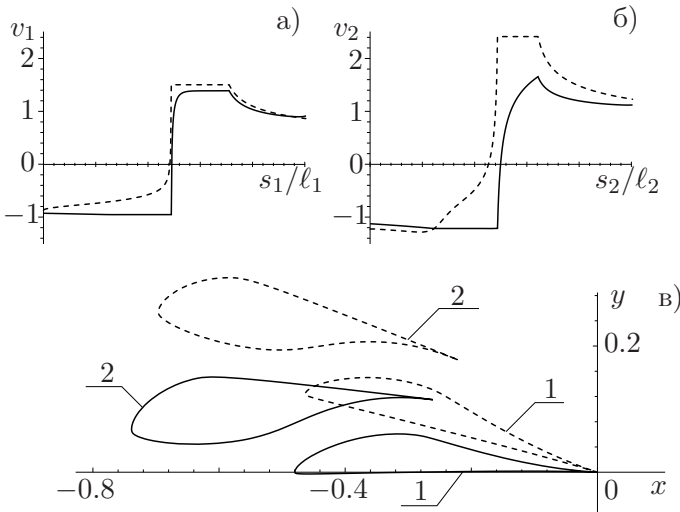


Рис. 14.3. Пример построения двухэлементного профиля в диапазоне

14.4. Числовые расчеты. По приведенной методике была составлена программа построения двухэлементного крылового профиля.

На рис. 14.3 приведен пример построения крылового профиля. Параметры ω , λ , β и ξ_{bk} взяты такими же, как и у профиля с рис. 11.6; величина u_∞ находилась из условия $l_1 + l_2 = 1$; диапазон $\delta = 15^\circ$. Углы атаки получились равными $\alpha = 5.3^\circ$, $\alpha^* = 20.3^\circ$. Аэродинамические характеристики этого профиля приведены в табл. 14.1.

Построенный крыловой профиль был также рассчитан в вычислительном пакете FLUENT. Расчетная сетка имела такой же вид, как и для профиля на рис. 7.11. Расчет проводился для двух разных моделей: модели невязкого течения, которая использовалась для сравнения с результатами численно-аналитического решения, и модели турбулентного течения Спаларта – Аллмараса.

Сравнение значений аэродинамических сил приведено в табл. 14.2. Распределение c_p коэффициента давления для двух расчетных углов $\alpha = 5.3^\circ$ и $\alpha^* = 20.3^\circ$ показано на рис. 14.4.

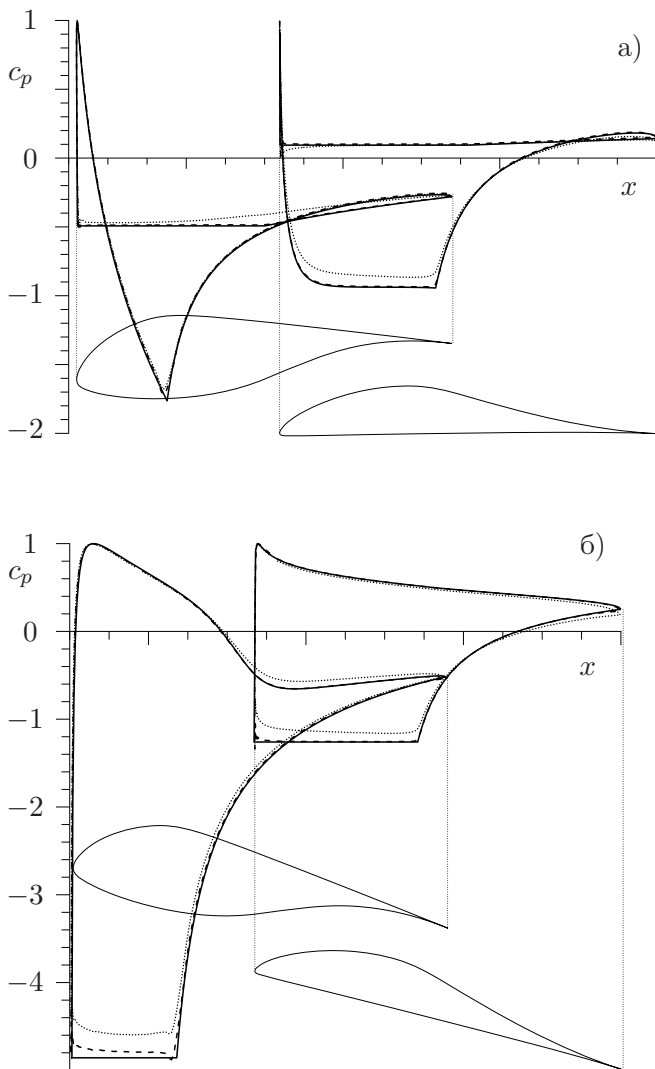


Рис. 14.4. Распределение $c_p(x)$: а) для угла $\alpha = 5.3^\circ$, б) для угла $\alpha^* = 20.3^\circ$. Сплошная линия – аналитический расчет, штриховая – модель невязкой жидкости, пунктирная – модель Спарроу – Аллмараса

Т а б л и ц а 14.2

Характеристики двухэлементных крыловых профилей

№	Течение	c_{x1}	c_{y1}	c_{x2}	c_{y2}
1.	Численно-аналитическое решение	0	0.32	0	1.69
2.	Невязкое	0.0011	0.31	0.0086	1.61
3.	Турбулентное (SA)	0.0109	0.31	0.0277	1.55

Заметим, что совпадение результатов численно-аналитического решения ИНЖ и невязкого течения почти полное, а отличие точного решения от решения для турбулентного течения наблюдается в основном в области между двумя контурами.

Таким образом, предложен метод проектирования двухэлементного крылового профиля по заданному в диапазоне режимов обтекания распределению скорости на искомым контурах профилей. Показано, что при задании безотрывного распределения скорости на верхних поверхностях контуров профилей при большем угле атаки и на нижних поверхностях – при меньшем угле атаки отрыва потока не будет во всем диапазоне.

Глава 4

Крыловые профили вблизи экрана

Процесс проектирования аппарата, движущегося вблизи поверхности земли (экрана) и получившего название “экраноплан”, требует решения большого числа специфических проблем (см., например, [44]). К ним, в частности, относится проблема выбора сечения крыла экраноплана, позволяющего наиболее полно использовать преимущества экранного эффекта. Решение подобных задач сводится, как правило, к решению сложнейших систем интегро-дифференциальных уравнений. При этом вопросы разрешимости и сходимости итерационных процессов остаются открытыми.

Двусвязность области течения имеет место и в задачах проектирования крыловых профилей **экранопланов**. В данном случае эта область ограничена контуром профиля и прямолинейным экраном. Для исследования таких крыловых профилей подходят методы проектирования двухэлементных профилей при симметричном задании исходных данных.

Есть методы, которые позволяют избавиться от двусвязности течения и значительно упрощающее решения. Один из таких методов проектирования описан в [27]. В этой работе проектирование крыла экраноплана является частным случаем более общей задачи проектирования профиля в двухслойном потоке жидкости [29]. Суть такого подхода заключается во введении однородного фиктивного потока под экраном, вследствие чего он является не границей области течения, а линией, на которой комплексный потенциал течения терпит скачок. Заметим, что этот метод использовался и при решении задачи о проектировании профиля с выдувом реактивной струи (§ 8).

Особую важность проблемы продольной статической устойчивости приобретают при проектировании крыловых профилей экранопланов. Проблема заключается в том, что летательный аппарат находится вблизи поверхности земли и при малейшей потере устойчивости возможен несчастный случай. Критерии устойчивости экранопланов определяются взаимным расположением центра масс и аэродинамических фокусов по углу атаки и высоте (см., например, [22]).

Приведем постановку и метод решения основной ОКЗА для крылового профиля вблизи экрана [27].

§ 15. Обратная краевая задача аэрогидродинамики для крылового профиля вблизи экрана

15.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль обтекается плоским установившимся потенциальным потоком ИНЖ с заданной скоростью v_∞ на бесконечности (рис. 15.1, а). Точка схода потока B принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно скорости набегающего потока. Контур профиля предполагается гладким за исключением задней кромки B , внутренний к области течения угол в которой равен 2π . Вдоль контура профиля задано распределение скорости $v(s)$, $0 \leq s \leq \ell$, где периметр ℓ задан. Также считается известным отстояние h задней кромки профиля от прямолинейного экрана. Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики.

15.2. Схема решения. В поставленной задаче область течения двухсвязна. Чтобы использовать возможности ОКЗА для односвязных областей, сведем нашу задачу к задаче в односвязной области. Для этого предположим, что под экраном также имеется поток ИНЖ, движущийся равномерно со скоростью v_∞ . В области G_z – внешности крылового профиля – комплексные потенциалы реального и фиктивного потоков будем рассматривать как единую кусочно-аналитическую функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. Тогда экран ℓ_z будет линией тангенциального разрыва скорости.

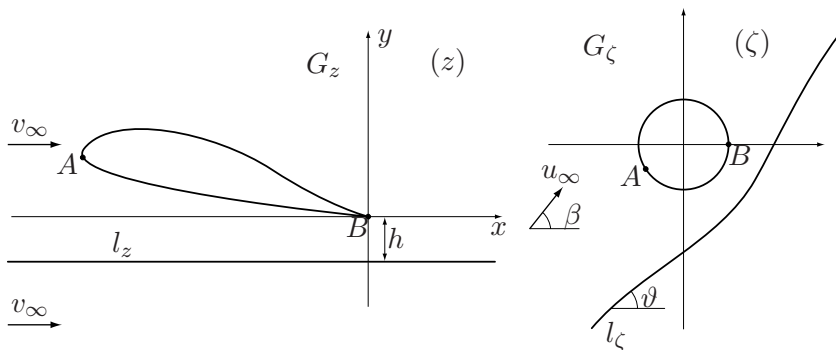


Рис. 15.1. Области течения в физической и канонической плоскостях

В качестве канонической области G_ζ в плоскости ζ выберем внешность круга единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 15.1, б). Для взаимно однозначного соответствия областей G_z и G_ζ примем $z(\infty) = \infty$ и $z(1) = 0$. Комплексно-сопряженную скорость в области G_ζ представим в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) e^{-\Omega(\zeta)}, \quad (15.1)$$

где u_∞, β – модуль и аргумент скорости набегающего потока на бесконечности, $\zeta_a = e^{\gamma a}$ – координата передней критической точки на окружности, $\Omega(\zeta) = T + i\Lambda$ – кусочно-аналитическая функция, терпящая скачок на линии l_ζ – образе экрана в плоскости ζ .

Кусочно-аналитическая функция Жуковского – Мичела (6.7) терпит скачок на l_ζ и имеет логарифмическую особенность в точке ζ_a . В дальнейшем целесообразно использовать вспомогательную функцию без особенностей

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} + i\tilde{\theta} = \chi(\zeta) - \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) + \Omega(\zeta). \quad (15.2)$$

Комплексно-сопряженная скорость в физической области

согласно (15.2) запишется

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty e^{\tilde{\chi} - \Omega} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right), \quad (15.3)$$

тогда из (15.1) следует

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} e^{-\tilde{\chi}} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right). \quad (15.4)$$

Так как левая часть (15.4) – аналитическая функция в G_ζ , то и правая часть будет аналитической, откуда следует, что $\tilde{\chi}$ – функция, аналитическая в области $|\zeta| > 1$ и непрерывная на линии ℓ_ζ .

Из (15.2) видно, что скачки функций χ и Ω компенсируют друг друга

$$\Omega - \Omega_0|_{\ell_\zeta} = T(t) - T_0(t) = \lambda(t), \quad \lambda(t) = \ln \frac{v_0(t)}{v(t)} = \ln \frac{v_\infty}{v(t)},$$

где t – дуговая абсцисса линии ℓ_ζ , $T(t)$ – действительная часть $\Omega(\zeta)$ на ℓ_ζ при подходе сверху, $T_0(t)$ – снизу. Здесь и далее индексом “0” обозначены параметры фиктивного потока под экраном.

Выделив действительную часть $\tilde{\chi}(\zeta)$ (15.2) на границе, найдем

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln \frac{v(\gamma)}{2v_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2}} + T(\gamma). \quad (15.5)$$

Для решения ОКЗА необходимо знать функцию $\tilde{S}(\gamma)$. Но в правую часть формулы (15.5) входят неизвестные функции $v(\gamma)$ и $T(\gamma)$. Для их нахождения необходимо знать функцию угла наклона $\vartheta(t)$ (т. е. линию ℓ_ζ) и функцию скачка $\lambda(t)$. Чтобы найти $\vartheta(t)$ и $\lambda(t)$, используем итерационный процесс, описанный в [29] (см. также п.8.3).

15.3. Схема итерационного процесса.

Начальный этап.

– Зададим нулевое приближение функций $\lambda(t)$, $\vartheta(t)$ и ζ_0 – точку пересечения образа ℓ_ζ экрана с мнимой осью.

Основной этап.

– Проинтегрировав

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = e^{i\vartheta(t)},$$

определим линии раздела $l_\zeta(t)$.

– Находим $\Omega(\zeta)$ по формуле

$$\Omega(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(1/\bar{\zeta})} - \overline{\Phi(0)}, \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_\zeta} \frac{\lambda(t) dt}{t - \zeta}.$$

– На линии раздела $l_\zeta(t)$ определим функции $T(t) = \text{Re } \Omega(\zeta(t))$, $\Lambda(t) = \text{Im } \Omega(\zeta(t))$ и на границе круга $|\zeta| = 1$ – функцию $T(\gamma) = \text{Re } \Omega(e^{i\gamma})$.

– Интегрированием $v(s)$ найдем $\varphi(s)$ – действительную часть комплексного потенциала на контуре профиля.

– Интегрированием

$$u(\gamma) \tilde{=} 4u_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma}{2} e^{-T(\gamma)}$$

найдем распределение $\varphi(\gamma)$. Неизвестные u_∞ и γ_a находятся из условия совпадения значений потенциалов $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(s)$ в точках разветвления и схода потока.

– Сравнив $\varphi(s)$ и $\varphi(\gamma)$, определим $s(\gamma)$.

– Действительную часть функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на границе круга, т. е. $\tilde{S}(\gamma)$, определим по (15.5).

– По известной $\tilde{S}(\gamma)$, используя формулу Пуассона (8.19), найдем $\tilde{S}(t) = \text{Re } \tilde{\chi}(\zeta(t))$ на линии $l_\zeta(t)$.

– Распределение скорости на экране $v(t)$ определим по формуле

$$v(t) = v_\infty e^{\tilde{S}(t) - T(t)} \left| \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) \right|,$$

вытекающей из (15.3).

– Новые функции $\vartheta^\pm(t)$, $\lambda^\pm(t)$ получим из уравнений

$$\lambda(t) = \ln \frac{v_0}{v(t)}, \quad \vartheta(t) = \Lambda(t) + \beta - \text{Im } \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right),$$

следующих из (15.1).

– Новое положение точки ζ_0 определим, исходя из условия заданности отстояния h экрана от задней кромки

$$h = \operatorname{Im} \left[\int_1^{-id} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right] = \frac{u_\infty}{v_\infty} \operatorname{Im} \left[e^{-i\beta} \int_1^{-id} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \right].$$

– Итерационный процесс завершим при выполнении условий

$$\max_t |\vartheta_{(k)}(t) - \vartheta_{(k-1)}(t)| < \varepsilon, \quad \max_t |\lambda_{(k)}(t) - \lambda_{(k-1)}(t)| < \varepsilon,$$

где ε – заданное малое изменение искомым функций, индексом k обозначено их значение на k -й итерации. В случае невыполнения какого-либо условия повторим основной этап.

Завершающий этап.

– По (1.15) найдем $\tilde{\theta}(\gamma)$, по (1.12) – угол наклона касательной $\theta(\gamma)$ и по (6.13) восстановим координаты крылового профиля.

15.4. Условия разрешимости. Как и в ОКЗА для непроницаемого профиля необходимо выполнить следующие условия разрешимости. Условие совпадения заданной величины скорости на бесконечности в физической плоскости z с определяемой в процессе решения имеет вид (1.14). Условия замкнутости искомого контура крылового профиля, выводимые из соотношения $\operatorname{res}(dz/d\zeta) = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, также выражающиеся через $\tilde{S}(\gamma)$, имеют вид (1.19).

Условия (1.14), (1.19) с учетом выражения (15.5) представляют собой систему трех нелинейных интегральных соотношений, налагающих ограничения на класс исходных распределений скорости. Поэтому для корректной постановки задачи следует использовать либо метод квазирешений, либо задавать не фиксированное распределение скорости $v(s)$, а некоторый трехпараметрический класс $v(s, d_j)$, $j = \overline{1, 3}$.

§ 16. Случай скользящего крылового профиля

Рассмотрим задачу построения и аэродинамического расчета крылового профиля экраноплана при нулевом отстоянии, то

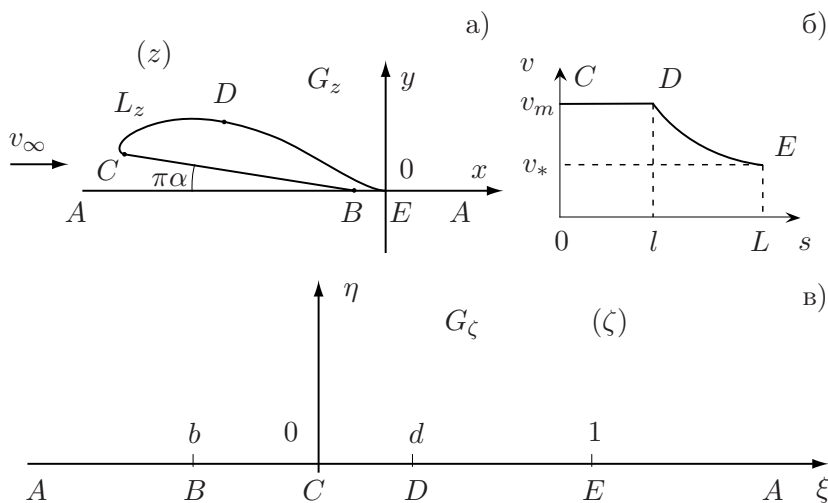


Рис. 16.1. К постановке задачи и методу решения

есть в случае, когда крыловой профиль своей задней кромкой скользит по плоскому горизонтальному экрану [31].

16.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ крыловой профиль $BCDE$ (обозначим его контур через L_z) плавно обтекается плоским установившимся потоком ИНЖ со скоростью v_∞ на бесконечности (рис. 16.1, а). Нижняя часть контура L_z представляет собой прямолинейный отрезок BC , наклоненный под углом $\pi\alpha$ к горизонтальному экрану $ABEA$, вектор скорости v_∞ параллелен экрану. На искомом участке CDE контура L_z задано распределение скорости

$$v = v(s), \quad s \in [0, L], \quad (16.1)$$

где s – дуговая абсцисса L_z , отсчитываемая от точки C по часовой стрелке, причем на участке CD скорость постоянна: $v(s) = v_m$ при $s \in [0, l]$, а на участке DE скорость $v = v(s)$, $s \in [l, L]$, L – длина искомого участка CDE контура L_z . Начало координат в плоскости z выбрано в точке E схода потока, в которой $v(L) = v_*$ (рис. 16.1, б). В целях обеспечения безотрывного обтекания профиля распределение скорости $v(s)$ на диффузорном

участке DE может быть выбрано из класса гидродинамически целесообразных распределений скорости. Требуется построить контур L_z профиля $BCDE$ и найти его аэродинамические характеристики. Поставленная задача достраивания профиля по заданному распределению скорости относится к так называемым смешанным ОКЗА (см., например, [18, 56]).

16.2. Решение. При сделанных предположениях существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – потенциал скорости, $\psi(x, y)$ – функция тока. Для определенности будем считать $\varphi = 0$ в точке C и $\psi = 0$ на экране и контуре L_z . Далее введем в рассмотрение вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ соотношением $\zeta = w/\varphi_0$, где φ_0 – величина потенциала скорости в задней кромке E контура L_z . Тогда области течения G_z будет соответствовать верхняя полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ (обозначим ее G_ζ) с соответствием точек, показанным на рис. 16.1, в, где $b = \varphi_B/\varphi_0$, $d = \varphi_D/\varphi_0$. Здесь $\varphi_D = v_m l$, φ_B и

$$\varphi_0 = \varphi_D + \int_l^L v(s) ds \quad -$$

значения φ в точках D , B и E соответственно.

Легко видеть, что на участке DE известны зависимости

$$\varphi(s) = \varphi_D + \int_l^s v(s) ds, \quad v = v(s), \quad s \in [l, L],$$

откуда исключением s находится функция $v(\varphi)$ и, следовательно, $v = v(\xi)$, $\xi \in [d, 1]$.

Введем в рассмотрение аналитические в G_ζ функции

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = S - i\theta, \quad \chi_0(\zeta), \quad \tilde{\chi}(\zeta) = \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta), \quad (16.2)$$

граничные значения которых приведены ниже, где $S_m = \ln v_m$.

	<i>AB</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>	<i>DE</i>	<i>EA</i>
ξ	$(-\infty, b)$	$(b, 0)$	$(0, d)$	$(d, 1)$	$(1, \infty)$
χ	$\theta = 0$	$\theta = \pi(1 - \alpha)$	$S = S_m$	$S = \ln v(\xi)$	$\theta = 0$
χ_0	$\theta_0 = 0$	$\theta_0 = \pi(1 - \alpha)$		$S_0 = S_m$	$\theta_0 = 0$
$\tilde{\chi}$		$\tilde{\theta} = 0$	$\tilde{S} = 0$	$\tilde{S} = \ln v(\xi) - S_m$	$\tilde{\theta} = 0$

Функции $\chi_0(\zeta)$ и $\tilde{\chi}(\zeta)$ легко определяются по формуле Сильборни [78] решения смешанной краевой задачи для аналитической функции, ограниченной в точках смены известных значений действительной и мнимой частей искомой аналитической в верхней полуплоскости функции

$$\begin{aligned} \chi_0(\zeta) &= (\alpha - 1) \left[\arcsin \frac{\zeta(1-b) - b(\zeta-1)}{\zeta-b} - \frac{\pi}{2} \right] + S_m = \\ &= (1 - \alpha) \ln \frac{\zeta-b}{[\sqrt{\zeta(b-1)} + \sqrt{b(\zeta-1)}]^2} + S_m, \end{aligned} \quad (16.3)$$

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}{\pi i} \int_d^1 \frac{\tilde{S}(\tau)}{\sqrt{\tau(\tau-1)} \tau - \zeta} d\tau. \quad (16.4)$$

Учитывая формулы (16.3), (16.4) и принимая во внимание соотношения (16.2), найдем

$$z(\zeta) = \frac{\varphi_0}{v_m} \int_1^\zeta \left\{ \frac{[\sqrt{\zeta(1-b)} + \sqrt{b(\zeta-1)}]^2}{\zeta-b} \right\}^{1-\alpha} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} d\zeta. \quad (16.5)$$

Положив $\zeta = \xi$ и разделив действительную и мнимую части в формуле (16.5), получим параметрические уравнения дотраиваемой части контура L_z :

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad \xi \in [0, 1].$$

Скорость v_∞ набегающего потока определяется в процессе решения задачи из следующих соображений. Устремляя $\zeta \rightarrow \infty$ в соотношениях (16.3), (16.4), найдем

$$\chi_0(\infty) = S_m - 2(1 - \alpha) \ln \left(\sqrt{1-b} + \sqrt{-b} \right) \equiv S_{0\infty},$$

$$\tilde{\chi}(\infty) = \frac{1}{\pi} \int_d^1 \frac{\tilde{S}(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \equiv \tilde{S}_\infty.$$

Тогда $\ln v_\infty = S_\infty = S_{0\infty} + \tilde{S}_\infty$, откуда

$$v_\infty = e^{S_{0\infty} + \tilde{S}_\infty}. \quad (16.6)$$

Заметим, что если скорость v_∞ задать заранее, то соотношение (16.6) будет условием разрешимости задачи, удовлетворить которому можно, например, методом квазирешений (см, например, [18]) путем модификации функции $S(\xi) = \ln v(\xi)$, то есть функции $v(s)$ из (16.1).

Существенным моментом решения ОКЗА является построение замкнутого контура профиля L_z крылового профиля. Для этого надо, чтобы функция $z(\zeta)$ была однозначной, то есть чтобы в бесконечно удаленной точке плоскости ζ вычет подынтегральной функции в формуле (16.5) был равен нулю. Для этого найдем разложения в окрестности точки $\zeta = \infty$ следующих функций:

$$\begin{aligned} e^{-\chi_0(\zeta)} &= \frac{1}{v_m} \left\{ \frac{[\sqrt{\zeta(b-1)} + \sqrt{b(\zeta-1)}]^2}{\zeta - b} \right\}^{(1-\alpha)} \sim \\ &\sim \frac{(\sqrt{1-b} + \sqrt{-b})^{2(1-\alpha)}}{v_m} \left[1 + \frac{(1-\alpha)\sqrt{-b(1-b)}}{\zeta} + \dots \right], \\ e^{-\chi(\zeta)} &\sim e^{-\tilde{S}_\infty} \left(1 - \frac{A}{\zeta} + \dots \right), \quad A = \frac{1}{\pi} \int_d^1 \frac{\tilde{S}(\tau)\tau d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} - \frac{\tilde{S}_\infty}{2}, \end{aligned}$$

после чего получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &\sim \frac{\varphi_0}{v_m} (\sqrt{1-b} + \sqrt{-b})^{2(1-\alpha)} e^{-\tilde{S}_\infty} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{[(1-\alpha)\sqrt{-b(1-b)} - A]}{\zeta} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Условие равенства нулю вычета функции $dz/d\zeta$ в окрестности точки $\zeta = \infty$ будет

$$(1 - \alpha)\sqrt{-b(1 - b)} - A = 0, \quad (16.7)$$

откуда найдем

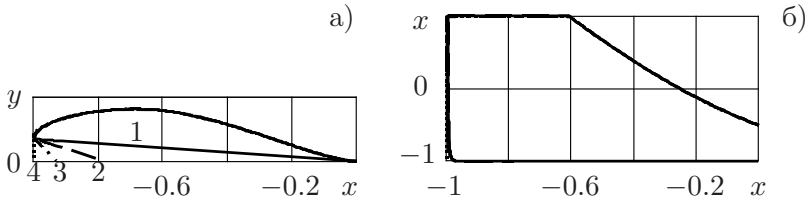
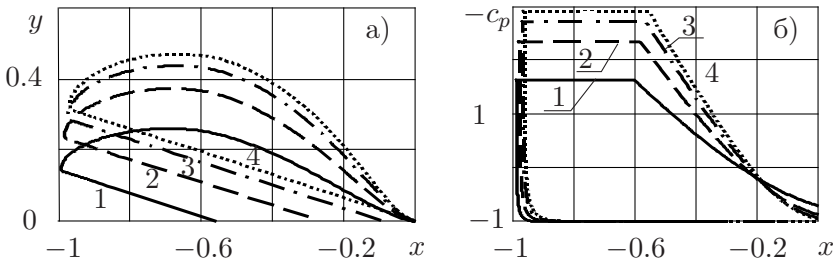
$$b = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4A^2}{(1 - \alpha)^2}} \right]. \quad (16.8)$$

Второй корень квадратного относительно b уравнения (16.7) не попадает в допустимый интервал изменения b , так как получается $b > 1$ (рис. 16.1, в). При выполнении условия (16.8) точки B и E контура L_z будут лежать на оси x . Как показано ниже, добиться полной замкнутости контура L_z , то есть совпадения точек B и E не только по вертикали, но и по горизонтали, можно за счет подбора величины α или v_m/v_* . Однако контур L_z при этом не будет простым в окрестности точки схода потока, т. е. профиль будет неоднолиственным.

16.3. Примеры расчетов с линейным участком падения скорости. В табл. 16.1 и 16.2, а также на рис. 16.2 и 16.3 приведены результаты расчетов, сделанных в предположении, что на участке DE скорость убывает по линейному закону.

В первой серии проведенных расчетов полагалось $v_m/v_* = 2$ и $l/L = 0.4$, а величина α менялась. Найденные при этом значения v_∞/v_* и длины горизонтального участка l_0/L приведены в табл. 16.1, контуры профилей показаны на рис. 16.2, а, соответствующие распределения коэффициента давления $c_p(x/b)$, где $c_p = 1 - (v/v_\infty)^2$, – на рис. 16.2, б. Здесь b – хорда профиля, найденная как расстояние от точки E до максимально удаленной от нее точки контура L_z . Относительно величин c_{y_k} и s_s/L , также приведенных в табл. 16.1, будет сказано ниже.

Интересно отметить, что с увеличением α величина v_∞/v_* , форма участка CDE и распределение $c_p(x/b)$ на нем практически не меняются. Изменения сказываются лишь на размерах прямолинейного участка BC контура L_z и горизонтального отрезка BE . С уменьшением α длина участка BC растет, а длина

Рис. 16.2. Результаты расчетов при значении $v_m/v_* = 2$ Рис. 16.3. Результаты расчетов при значении $\alpha = 0.1$

участка BE уменьшается, причем при $\alpha = 0.022$ точки B и E совпадают и контур профиля получается замкнутым. Следует, однако, отметить, что в этом случае профиль в окрестности точки E будет неоднолиственным, так как касательная к участку DE в точке E горизонтальна, а к участку BC наклонена под углом $\pi(1 - \alpha)$.

Во второй серии фиксировались значения $\alpha = 0.1$ и $l/L = 0.4$, а величина v_m/v_* менялась. Найденные величины v_∞/v_* приведены в табл. 16.2, контуры профилей и распределения $c_p(x/b)$ показаны на рис. 16.3. Анализ результатов показывает, что изменение v_m/v_* существенно влияет как на форму профилей, так и на величину скорости набегающего потока. Из приведенных результатов также видно, что подбором величины v_m/v_* можно добиться замкнутости контура профиля, но при этом надо иметь в виду, что в окрестности точки схода потока профиль получается неоднолиственным.

Т а б л и ц а 16.1

α	v_∞/v_*	l_0/L	c_{y1}	c_{y2}	c_{y3}	s_s/L
0.022	1.412	0.000	1.487	1.487	1.487	0.684
0.100	1.412	0.783	1.489	0.706	1.292	0.684
0.250	1.413	0.927	1.491	0.564	1.259	0.684
0.500	1.414	1.000	1.497	0.497	1.247	0.684

Т а б л и ц а 16.2

v_m/v_*	v_∞/v_*	l_0/L	c_{y1}	c_{y2}	c_{y3}	s_s/L
3.0	1.846	0.560	1.793	1.233	1.711	0.584
5.0	2.730	0.270	2.154	1.884	2.136	0.542
7.0	3.622	0.097	2.365	2.268	2.361	0.526
8.608	4.792	0.000	2.482	2.482	2.482	0.518

16.4. Вычисление коэффициента подъемной силы.

Коэффициент подъемной силы построенного профиля может быть найден по формуле

$$c_y = \int_{L_z \cup BE} c_p(x/b) d(x/b). \quad (16.9)$$

Однако для использования формулы (16.9) распределений $c_p(x/b)$, приведенных на рис. 16.2, б и 16.3, б недостаточно. Необходимо также знать аналогичные распределения на горизонтальном участке BE контура профиля. Для этого следует ввести некоторые дополнительные предположения.

При реальном движении исследуемого профиля между ним и экраном будет существовать “зазор”, заполненный обтекающей профиль средой. Если предположить, что этот зазор заполнен заторможенной жидкостью, то на участке BE следует положить $c_p = 1$. Этому предположению соответствуют значения c_{y1} , приведенные в табл. 16.1 и 16.2. Другой случай вытекает из предположения о том, что скорость под профилем совпадает со скоростью движения экрана, то есть $v = v_\infty$, и тогда $c_p = 0$ на участке BE . Соответствующие значения коэффициента подъемной силы обозначены через c_{y2} .

Очевидно, однако, что эти предположения характеризуют некоторые предельные случаи. В реальности же давление внутри зазора должно меняться каким-то образом от давления торможения с коэффициентом давления $c_p = 1$ в точке B до давления в точке E с коэффициентом давления $c_p = 1 - (v_*/v_\infty)^2$. Если предположить, что зазор имеет стремящуюся к нулю толщину, то течение в нем будет определяться вязкими силами. Тогда можно считать, что давление меняется по линейному закону. В этом случае получим величины c_{y3} .

Последний случай занимает промежуточное положение между двумя первыми и, по-видимому, наиболее близок к реальности. Для того чтобы уточнить его, необходимо привлечь методы расчета течения вязкой жидкости между двумя движущимися относительно друг друга пластинами. Естественно, решение такой задачи будет существенно зависеть не только от вязкости жидкости, но и от толщины зазора между пластинами.

16.5. Случай задания безотрывного распределения скорости. В приведенных выше примерах линейное распределение скорости на диффузорном участке может не обеспечить такого важно свойства, как отсутствие отрыва потока. Подтверждением этому служат значения s_s/L дуговых абсцисс точек отрыва ТПС, приведенные в табл. 16.2 и 16.3. Поэтому важно уметь задавать функцию $v(s)$ так, чтобы обтекание получаемого профиля в рамках принятой модели течения было безотрывным.

При проведении дальнейших расчетов распределение скорости на неизвестном участке контура профиля выбиралось из класса гидродинамически целесообразных распределений скорости (см, например, [18]) в виде

$$v(s) = \begin{cases} v_m, & s \in [0, l], \\ v_m [1 + C(s - l)]^n, & s \in [l, L]. \end{cases} \quad (16.10)$$

Постоянные C и n получены на основе метода Кочина – Лойцянского [42] расчета ТПС в предположении, что полочному участку предшествует участок линейного возрастания ско-

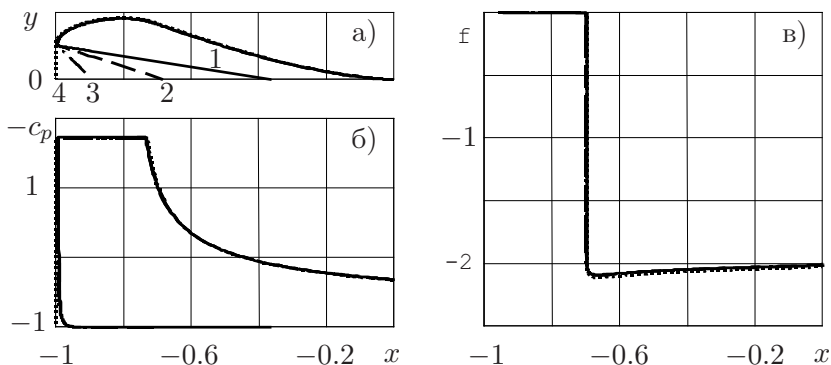


Рис. 16.4. Результаты построения профиля с безотрывным обтеканием

рости от 0 до v_m протяженностью s_0 , а на диффузорном участке величина формпараметра f постоянна и равна f_* . Здесь $f_* = \lambda f_0$, причем значение $f_0 \approx -2$ соответствует началу формирования отрыва, а коэффициент запаса λ принадлежит интервалу $\lambda \in (0, 1]$. Следует отметить, что при таком задании распределения скорости на диффузорном участке длина l определяется, исходя из условия заданности величины скорости v_* в точке E .

Особенностью использования распределения (16.10) в данной задаче является отсутствие информации о распределении скорости на прямолинейном участке BC разгона скорости. Поэтому первоначально предполагалось, что участок разгона отсутствует, то есть ПС начинается непосредственно с точки C . Естественно, такое задание приводит к тому, что формпараметр f на участке DE , рассчитанный с учетом участка BC , будет меньше, чем заданное значение f_* .

Для исследования этого вопроса были проведены расчеты, результаты которых приведены в табл. 16.3 и на рис. 16.4. Расчеты проводились при фиксированных значениях $v_m/v_* = 2$ и $\lambda = 1$, то есть при $f_* = f_0 = -2$, а величина α менялась. Полученные при этом значения скорости набегающего потока v_∞/v_* , длин l/L участка CD и l_0/L горизонтального участка BE , коэффициентов подъемной силы c_{yk} и максимального от-

Т а б л и ц а 16.3

α	v_∞/v_*	l/L	l_0/L	c_{y1}	c_{y2}	c_{y3}	$\delta, \%$
0.05	1.209	0.279	0.362	1.486	1.124	1.362	4.29
0.1	1.209	0.279	0.685	1.487	0.802	1.253	4.43
0.25	1.210	0.279	0.894	1.492	0.598	1.186	4.60
0.5	1.213	0.279	1.000	1.505	0.505	1.166	5.58

личия рассчитанного значения формпараметра от заданного, то есть $\delta = |(f_{\min} - f_*)/f_*| \cdot 100\%$, приведены в табл. 16.3. На рис. 16.4 показаны формы профилей (а), распределение коэффициента давления $-c_p$ (б) и зависимости $f(s/L)$ на искомом участке контура L_z (в).

Из приведенных результатов видно, что с ростом α величина δ возрастает, однако даже при $\alpha = 0.5$ не превышает 6%. Поэтому для задания распределения скорости на искомом участке можно пользоваться формулами (16.10), вводя коэффициент запаса $\lambda \approx 0.94$, что обеспечит отсутствие отрыва на искомом профиле. Коэффициент подъемной силы при этом уменьшается лишь на величину, не превышающую 1 %.

Сравнение с результатами расчетов для профиля с линейным падением скорости на диффузорном участке (см. табл. 16.2 и рис. 16.2) с тем же значением $v_{\max}/v_* = 2$ позволяет сделать следующий вывод. Хотя коэффициент подъемной силы у профилей, построенных при задании безотрывных распределений скорости, получается несколько меньшим (на 3–7 %), чем в случае линейного падения скорости, но их обтекание осуществляется без отрыва потока.

В отличие от метода построения контура крылового профиля экраноплана, изложенного в § 15, рассмотренную в § 16 задачу можно считать модельной ввиду исключительной простоты ее решения. Выполненные по аналитическим формулам расчеты могут рассматриваться как тестовые при сравнении с приближенными методами решения более сложных задач.

§ 17. Крыловой профиль в диапазоне режимов обтекания

17.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль при двух различных режимах обтекает плоским установившимся потоком ИНЖ (рис. 17.1, а). Заданы скорость на бесконечности v_∞ , хорда профиля b . Точка схода потока B принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно скорости набегающего потока. Контур профиля предполагается гладким, за исключением задней кромки B , внутренний к области течения угол в которой равен 2π . На контуре профиля вблизи передней кромки выбрана точка C , разбивающая его на два участка – верхнюю и нижнюю поверхности. Задаются отстояния h_1 и h_2 задней кромки от экрана для двух заданных режимов и угол $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ – разность углов атаки между двумя режимами, положение профиля и экрана при первом режиме на рис. 17.1, а показано сплошной линией, а при втором – штриховой.

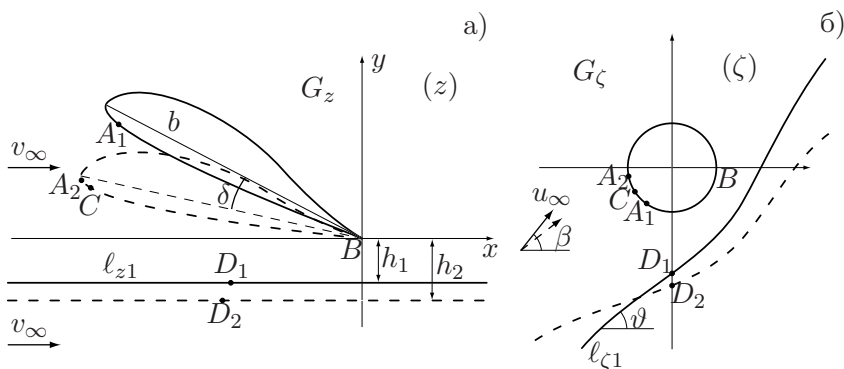


Рис. 17.1. Течение в физической и канонической плоскости

Рассмотрим в плоскости ζ каноническую область G_ζ – внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ (рис. 17.1, б). Для взаимоднозначного конформного отображения областей G_z (внешности контура профиля) и G_ζ предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ и переход точки B

($z = 0$) в точку $\zeta = 1$. Каждой точке контура профиля соответствует точка на окружности $\zeta = e^{i\gamma}$, $0 < \gamma < 2\pi$. Координату точки C обозначим через γ_0 .

Вдоль контура профиля на интервалах $[0, \gamma_0]$ и $[\gamma_0, 2\pi]$, соответствующих верхней и нижней поверхности профиля экраноплана, задаются распределения скорости $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ соответственно для заданных режимов (рис. 17.2, сплошная линия соответствует первому режиму, штриховая – второму). Предположим также, что $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$ не обращаются в нуль на задаваемых участках. Это соответствует тому, что при первом режиме передняя критическая точка A_1 расположена на участке $[\gamma_0, 2\pi]$, а критическая точка A_2 второго режима – на участке $[0, \gamma_0]$.

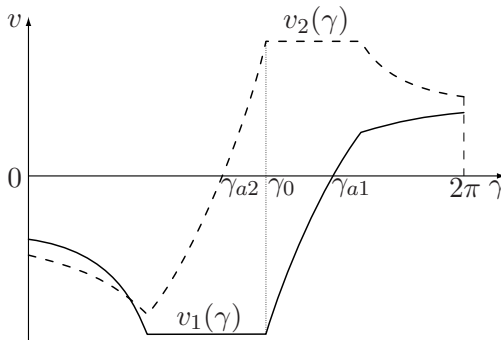


Рис. 17.2. Распределение скоростей

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики.

17.2. Схема решения при задании $v(\gamma)$ для двух режимов. Предположим, что у крылового профиля, построенного по заданной $v_1(s)$, на величину δ уменьшился угол атаки и изменилось отстояние от экрана. Тогда из условия неизменности области G_ζ следует, что изменение функции $z(\zeta)$ описывается обычным поворотом $z_2(\zeta) = z_1(\zeta)e^{i\delta}$. Здесь и далее индекс “1” будет соответствовать первому режиму и индекс “2” – второму.

Из (15.4) следует $\beta_2 = \beta_1 - \delta$ и

$$\tilde{\chi}_2(\zeta) = \tilde{\chi}_1(\zeta). \quad (17.1)$$

Из (17.1) и (15.5) следует соотношение между распределениями скорости $v_1(\gamma)$ и $v_2(\gamma)$:

$$v_1(\gamma)e^{T_1(\gamma)} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2} = v_2(\gamma)e^{T_2(\gamma)} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2}. \quad (17.2)$$

Как и для задачи § 9, сложность решения этой задачи для диапазона состоит в том, что в (17.2) входят неизвестные функции $T_k(\gamma)$, $k = 1, 2$, для нахождения которых по вышеизложенному методу необходимо знать $v_k(\gamma)$ на всей окружности $\gamma \in [0, 2\pi]$. Для нахождения $T_k(\gamma)$ построим следующий итерационный процесс.

Начальный этап. Зададим в начальном приближении функции $T_1(\gamma)$, $T_2(\gamma)$ и параметры $d_1 > 1$, $d_2 > 1$, например, $T_1(\gamma) = T_2(\gamma) = 0$, $d_1 = d_2 = 2$.

Углы γ_{a1}, γ_{a2} также выберем произвольно, но с условием $\gamma_{a2} < \gamma_0 < \gamma_{a1}$.

Основной этап.

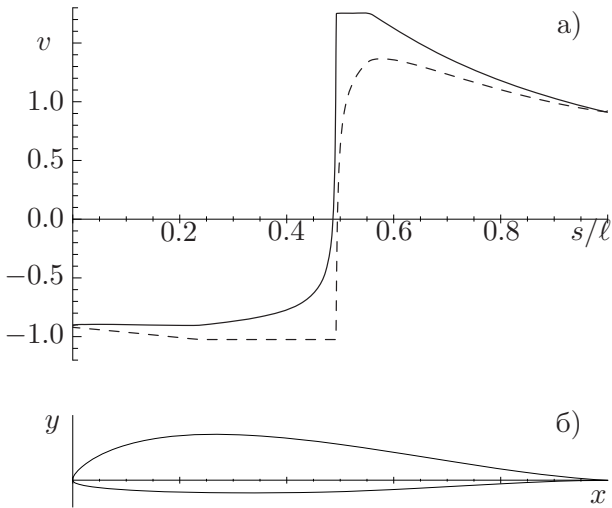
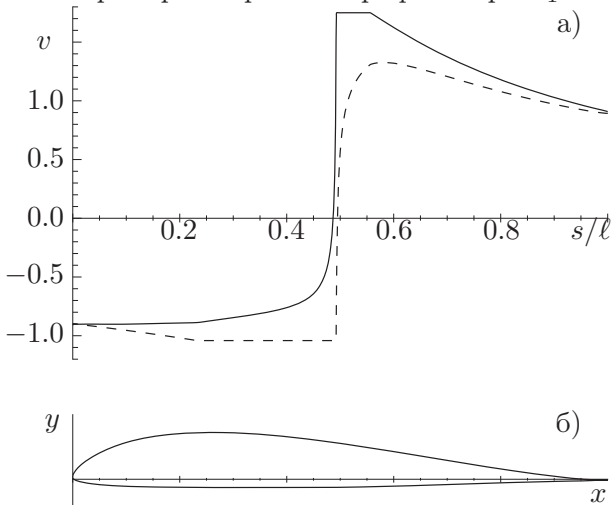
- По формуле (17.2) определяем значения $v_1(\gamma)$ на интервале $[\gamma_0, 2\pi]$ и значения $v_2(\gamma)$ на $\gamma \in [0, \gamma_0]$. В этой задаче появляются также условия согласованности начальных данных: непрерывности модуля скорости в точках $\gamma = \gamma_0$ и $\gamma = 0$, имеющие вид

$$v_1(\gamma_0)e^{T_1(\gamma_0)} = v_2(\gamma_0)e^{T_2(\gamma_0)}, \quad v_1(0)e^{T_1(0)} = -v_2(2\pi)e^{T_2(2\pi)}.$$

Их выполнения можно добиться путем введения в задаваемые распределения скорости новых свободных параметров или путем модификации углов γ_{a1}, γ_{a2} .

- По известному $v_1(\gamma)$ найдем новые $T_1(\gamma)$ и d_1 , а по $v_2(\gamma)$ – новые $T_2(\gamma)$ и d_2 .
- Итерационный процесс завершим при выполнении условия

$$\max_t |T_{(k)}(\gamma) - T_{(k-1)}(\gamma)| < \varepsilon.$$

Рис. 17.3. Пример построения профиля при $h_1 = h_2 = 25$ Рис. 17.4. Пример построения профиля при $h_1 = 25, h_2 = 0.1$

17.3. Числовые расчеты. Вначале разработанный выше метод был опробован для построения крылового профиля в безграничном потоке. Исходные данные были следующие: $h_1 = h_2 = 25.0$ (численный аналог бесконечности), $\delta = 7^\circ$. Заданные распределения скорости показаны на рис. 17.3, а; сплошная линия соответствует первому режиму, штриховая – второму. Эти распределения выбраны из условия гидродинамической целесообразности в виде полочных распределений, причем на диффузорных участках закон падения скорости гарантировал в рамках принятой модели безотрывность обтекания (расчет ПС проводился при числе $Re = 10^6$). На рис. 17.3, б сплошной линией изображен построенный по этому распределению скорости крыловой профиль. Характеристики этого крылового профиля приведены в первой строчке табл. 17.1.

Т а б л и ц а 17.1

Характеристики крыловых профилей над экраном

№	$\alpha_1, ^\circ$	h_1	c_{y1}	$\alpha_2, ^\circ$	h_2	c_{y2}
1.	7.5	25.00	1.059	0.5	25.0	0.320
2.	7.6	25.00	1.069	0.6	0.1	0.242
3.	7.9	25.00	1.048	0.9	0.1	0.116

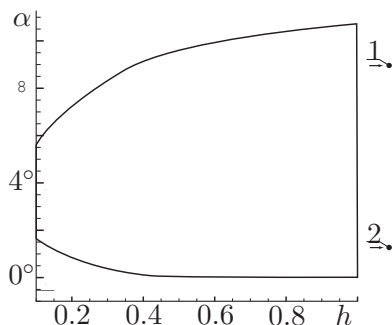


Рис. 17.5. Область безотрывности для первого профиля

Для второго расчета исходные данные были немного изменены: $h_1 = 25.0$, $h_2 = 0.1$, $\delta = 7^\circ$. Заданные распределения

скорости показаны на рис. 17.4, а; построенный по этим распределениям скорости крыловой профиль изображен на рис. 17.4, б. Характеристики крылового профиля приведены во второй строчке табл. 17.1.

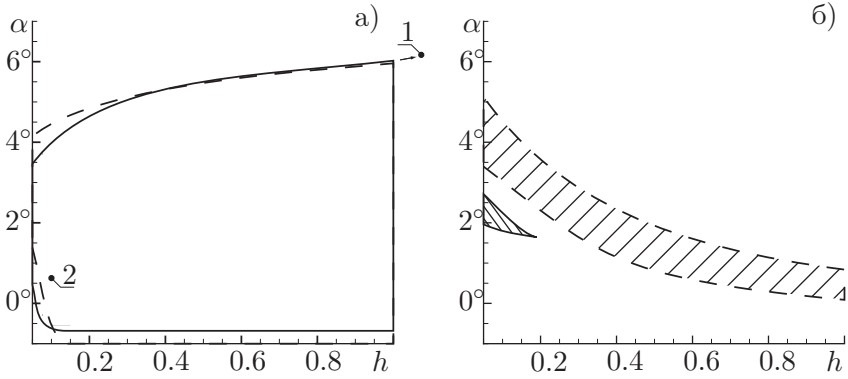


Рис. 17.6. Области безотрывности и устойчивости для второго (сплошная линия) и третьего (штриховая линия) профилей

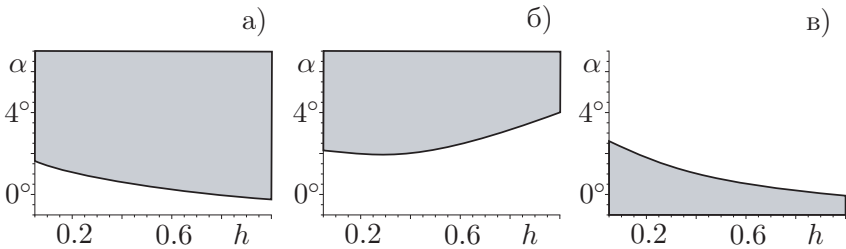


Рис. 17.7. Области выполнения условий устойчивости:

а) условие $\frac{\partial c_y}{\partial h} < 0$; б) условие $x_\alpha > x_t$; в) условие $x_\alpha > x_h$

Исследовался вопрос о безотрывности обтекания этих профилей при нерасчетных режимах обтекания, т. е. при режимах, отличных от (h_1, α_1) и (h_2, α_2) . На рис. 17.5 и 17.6, а показан результат этого исследования в параметрической плоскости для первого и второго профилей соответственно. По оси абсцисс

отложено h , а по оси ординат – α . Точками 1 и 2 показаны расчетные режимы 1 и 2 соответственно, сплошной линией ограничена область, соответствующая режимам с безотрывным обтеканием. Заметим, что при уменьшении отстояния уменьшается диапазон углов, при которых обтекание является безотрывным. Особенно это видно для первого профиля, спроектированного для безграничного потока.

§ 18. Устойчивые крыловые профили экранопланов

18.1. Условия устойчивости. Построение устойчивых крыловых профилей. При построении крыловых профилей летательных аппаратов, и особенно экранопланов, большую роль играет расчет их устойчивости. Пусть x_t – положение центра тяжести экраноплана, x_α – фокус по углу атаки, x_h – фокус по высоте (точка приложения прироста подъемной силы при изменении высоты над экраном). Для оценки статической устойчивости вблизи экрана используем следующие критерии [22, 32]:

$$\frac{\partial c_y}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial c_y}{\partial h} < 0, \quad x_\alpha > x_t, \quad x_\alpha > x_h.$$

Заметим, что из этих формул следует, что в отличие от летательного аппарата в безграничном потоке, невозможно добиться статической устойчивости экраноплана только выбором положения центра тяжести аппарата. Одним из условий устойчивости экраноплана является положительный знак разности фокусов по углу атаки и высоте.

Таким образом, необходимо выполнение четырех неравенств. Первое неравенство, означающее рост коэффициента подъемной силы при увеличении угла атаки, выполняется почти всегда. На рис. 17.7 в параметрической плоскости h – α приведены области выполнения трех оставшихся критериев. Область, в которой выполняются все 4 неравенства (т. е. область, в которой профиль экраноплана является статически устойчивым), показана на рис. 17.6, б сплошной линией. Эта область получилась небольшой, поэтому целесообразно

модифицировать полученный крыловой профиль с целью увеличения зоны его устойчивости.

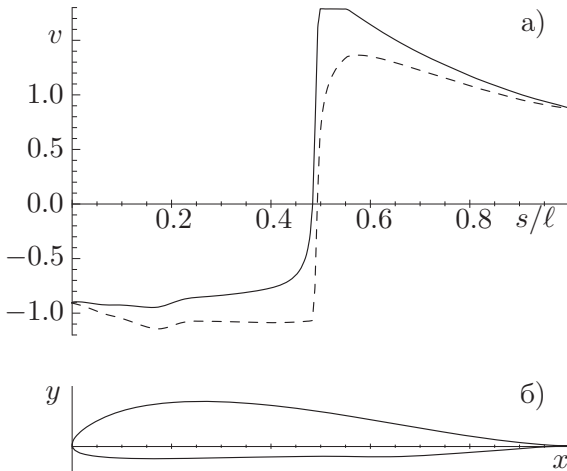


Рис. 18.1. Модификация профиля с целью устойчивости

Для этого был использован метод § 3, основанный на минимальной модификации распределения скорости при условии перемещения фокуса x_α в заданную точку. Модифицированные распределения скорости показаны на рис. 18.1, а; соответствующий им крыловой профиль – на рис. 18.1, б. С целью сохранения безотрывного режима обтекания модификация скорости в основном затронула нижнюю поверхность крылового профиля. Характеристики модифицированного крылового профиля приведены в третьей строчке табл. 17.1, из которой видно, что коэффициент подъемной силы немного уменьшился.

На рис. 17.6, а в параметрической плоскости $h-\alpha$ штриховой линией показана область безотрывного обтекания. По сравнению с областью безотрывности для исходного профиля она претерпела лишь незначительные изменения. На рис. 18.2 показаны области выполнения критериев устойчивости в параметрической плоскости $h-\alpha$. Область, в которой выполнены все условия устойчивости, показана на рис. 17.6, б. Она является значительно большей по сравнению с исходной, на основании

чего можно сделать вывод, что путем проведенной модификации крылового профиля при сохранении области безотрывности обтекания удалось значительно улучшить характеристики устойчивости.

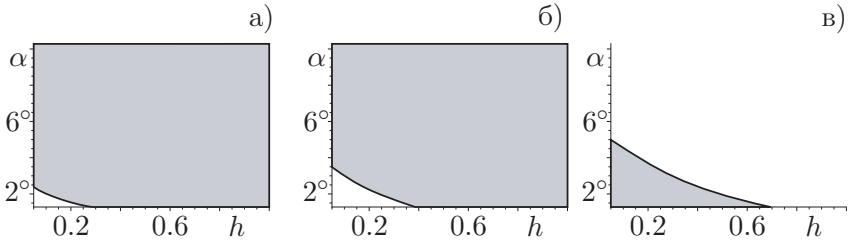


Рис. 18.2. Области выполнения условий устойчивости:

- а) условие $\frac{\partial c_y}{\partial h} < 0$; б) условие $x_\alpha > x_t$; в) условие $x_\alpha > x_h$

Видно, что приведенный в этом параграфе метод позволяет проектировать крыловые профили над экраном по заданным на различных режимах распределениям скорости, модифицировать крыловые профили с целью повышения устойчивости.

Глава 5

Крыловые профили с устройствами отсоса пограничного слоя

При **отсосе ПС** удаляется его часть, заторможенная вблизи стенок, прежде чем произойдет отрыв ПС или переход ламинарного пограничного слоя (ЛПС) в турбулентный (ТПС). Отсасывание осуществляется либо через одну или несколько узких щелей, либо через пористую поверхность (так называемый распределенный отсос). Многочисленные исследования, проведенные О. Шренком [76], В. Пфеннингером [75], Г. Лахманном [71] и др., показали большую эффективность применения отсоса ПС на крыловых профилях (см. также [14, 33, 57, 58]).

Отсасывание является способом управления ПС, требующим подвода энергии. Очень важно уметь ее рассчитывать. Если энергия, требуемая для отсасывания, больше полной сэкономленной при этом, то отсасывание оказывается энергетически невыгодным. Р. Пенкхерст и Н. Грегори [74] исследовали расходимую энергию при распределенном отсосе и возможности ее экономии для улучшения характеристик профиля крыла и самолета. Формулы для нахождения энергии, затраченной на отсос ПС, приведены также в работах С. Голдстейна [67], В. Пфеннингера [75], И. Гошека [14] и П. Чжена [57].

При проектировании устройства распределенного отсоса ПС через перфорированную поверхность крылового профиля возникает целый ряд аэродинамических проблем. Необходимо определить размер и положение проницаемого участка, а также подобрать такое распределение скорости отсоса ПС через него, чтобы работа этого устройства была эффективной. Расчет течения в капиллярах проницаемого участка профиля исследован

Р. Эплером в работе [65], в которой приведены также уточнения критериев отрыва и перехода ПС и формулы для учета потерь в устройстве отсоса ПС.

§ 19. Щелевой отсос пограничного слоя

19.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль обтекается плоским установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости (рис. 19.1). На контуре этого профиля предполагается наличие щели для отсасывания части ПС. Внутренний к области течения угол в точке схода потока B при отсутствии ПС считается равным 2π .

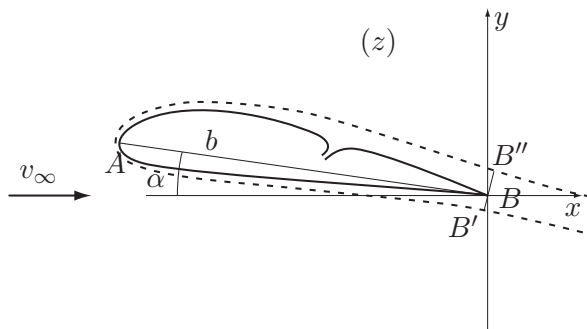


Рис. 19.1. Течение в физической плоскости

Для учета вязкости используется модель ПС. При больших числах Рейнольдса поток, обтекающий крыловой профиль, делится на внешний потенциальный поток ИНЖ и внутренний поток вязкой жидкости. Полутело вытеснения получается в результате аналитического продолжения потенциального потока до линии тока, разветвляющейся в невязкой жидкости. При отсасывании воздуха только из ПС контур полутела вытеснения в окрестности щели не имеет разрывов и гладкий. За профилем контур полутела вытеснения приближенно моделируется двумя конгруэнтными линиями тока с одинаковым распределением скорости на них [28]. Толщина полутела вытеснения за

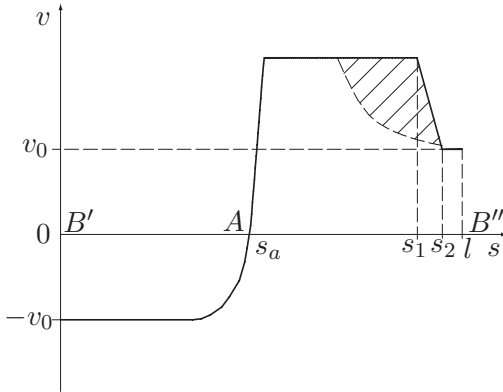


Рис. 19.2. Распределение скорости для профиля со щелевым отсосом

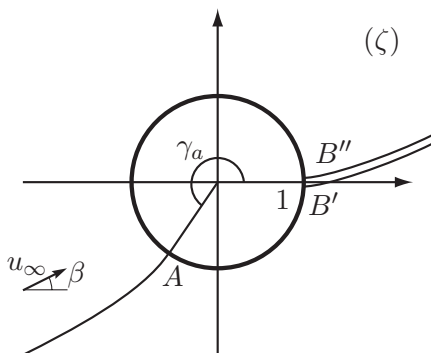
профилем с отсосом будет несколько меньше, чем без отсасывания (при том же распределении скорости на контуре полутела вытеснения).

На части $B'AB''$ полутела вытеснения (рис. 19.1) задается распределение скорости $v(s)$ внешнего потока (рис. 19.2). Здесь s – безразмерная (отнесенная к периметру контура $B'AB''$) дуговая абсцисса, отсчитываемая от $s = 0$ в точке B' до $s = 1$ в точке B'' так, что при возрастании s область потенциального течения остается слева. Задание скорости на поверхности полутела вытеснения эквивалентно заданию распределения давления на контуре профиля, так как согласно модели ПС давление вязкой жидкости на нем совпадает с давлением идеальной жидкости на границе $B'AB''$ полутела вытеснения.

Распределение скорости может быть задано и в виде функции полярного угла γ единичной окружности $\zeta = e^{i\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ в канонической области $|\zeta| > 1$ плоскости ζ (рис. 19.3).

Требуется определить форму крылового профиля и его характеристики.

В ОКЗА получение необходимых характеристик крылового профиля (в том числе и больших коэффициентов подъемной силы c_{ya}) достигается путем соответствующего задания исходного распределения скорости при условии, что это распре-

Рис. 19.3. Каноническая плоскость ζ

деление удовлетворяет нескольким ограничениям, в их числе условию безотрывности обтекания [53]. Еще в работе [67] экспериментально была показана эффективность применения отсоса ПС, приводящая, в частности, к предотвращению отрыва потока вблизи щели, расположенной в месте резкого изменения скорости внешнего потока. Поэтому далее при численно-аналитическом построении крыловых профилей со щелевым отсосом ПС в качестве исходных распределений скорости выбирались распределения с участками резкого изменения скорости (рис. 19.2). Заметим, что при отсутствии щелевого отсоса ПС для обеспечения безотрывного обтекания на диффузорном участке не должно быть больших отрицательных градиентов. Характерный вид такого распределения скорости изображен на рис. 19.2 штриховой линией (см., например, [18, 72]). Заштрихованная площадь на этом рисунке показывает увеличение циркуляции, а следовательно, и подъемной силы при отсосе ПС.

19.2. Расчет пограничного слоя. На рис. 19.4 схематически показано течение в окрестности щели; здесь CD – линия тока, являющаяся верхней границей ПС, FK – граница полутела вытеснения; HM и NR – контур крылового профиля в окрестности щели. Положение сечений 1–1 и 2–2 соответствует началу s_1 и концу s_2 участка резкого падения скорости внешнего течения; δ_1^* и δ_2^* – толщины вытеснения в первом и втором

сечениях соответственно; n_0 – ордината точки T , лежащей на разветвляющейся линии тока TP . Будем считать, что слева от сечения 1–1 и справа от сечения 2–2 справедлива теория ПС. Для расчета ПС в этих областях использовался интегральный метод Р.Эпплера [63], основанный на совместном интегрировании уравнения импульсов и уравнения энергии (описание этого метода приведено далее (п. 19.3)). Этим методом находились толщина δ^{**} потери импульса и толщина δ^{***} потери энергии на участке от точки s_a разветвления потока до s_1 , а также от s_2 до задней кромки, где $s = 1$ (см. рис. 19.2).

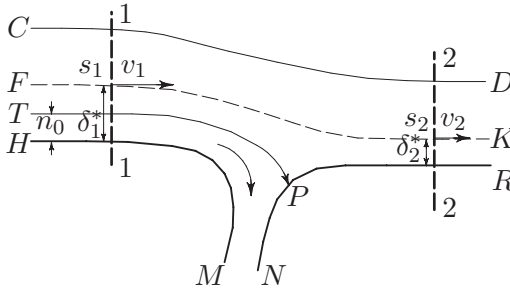


Рис. 19.4. Течение вблизи щели

В окрестности щели теория ПС неприменима, так как здесь нормальные к границе ПС составляющие скорости не малы. Для расчета течения между сечениями 1–1 и 2–2 использована приближенная схема, предложенная Г.Тейлором (см., например, [67]). Эта схема основана на предположении о малом влиянии вязкости в окрестности щели на линиях тока, проходящих через сечения 1–1 и 2–2. Правомерность использования этой схемы была показана еще С.Голдстейном [67] путем сравнения с экспериментом.

Исходя из постоянства давления поперек ПС в сечениях 1–1 и 2–2 и из предположения о выполнении интеграла Бернулли между сечениями (то есть в вихревом потоке ИНЖ), можно определить

$$u_2(n) = [u_1^2(n) - (v_1^2 - v_2^2)]^{1/2},$$

где n – координата, направленная по нормали к поверхности профиля; $u_i(n)$ – распределения скоростей в сечении i - i ($i=1, 2$); v_i – скорости внешнего потока на полутеле вытеснения FK в этих же сечениях (рис. 19.4). Весь ПС, лежащий ниже линии тока, скорость в первом сечении на которой равна $u_1(n_0) = (v_1^2 - v_2^2)^{1/2}$, для сохранения безотрывного обтекания должен отсасываться. Из этого уравнения находится координата n_0 . Следовательно, расход через щель

$$Q = - \int_0^{n_0} u_1(n) dn.$$

Форму щели отсоса в схеме Г.Тейлора определить, конечно, нельзя, но для построения остальной части профиля (за исключением его части между сечениями 1–1 и 2–2 ПС) это существенного значения не имеет ввиду малости $\Delta s = s_2 - s_1$.

19.3. Метод Р. Эшплера расчета ПС. Для расчета ПС и его характеристик применим метод Р. Эшплера (см., например, [64]). Об этом методе в широкоизвестной монографии Г.Шлихтинга [58, с. 366] сказано: “Приближенный способ расчета ламинарных и турбулентных ПС с отсосом, хорошо применимый для использования на счетных машинах, предложил Р. Эшплер”. Остановимся на этом методе несколько подробнее.

В основе метода Р. Эшплера лежит совместное интегрирование уравнений импульса и энергии [58]:

$$\begin{aligned} \delta_2' + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{v'}{v} &= c_f - \frac{v_0}{v}, \\ \delta_3' + 3\delta_3 \frac{v'}{v} &= c_d - \frac{v_0}{v}. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Здесь $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – толщины вытеснения, потери импульса и потери энергии соответственно, c_f – коэффициент трения, c_d – коэффициент диссипации энергии. Вместо толщин δ_1, δ_3 бывает удобно пользоваться безразмерными формпараметрами

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}. \quad (19.2)$$

Исключив из (19.1) толщины, запишем:

$$\begin{aligned} \delta_2' &= c_f - \frac{v_0}{v} - (H_{12} + 2)\delta_2 \frac{v'}{v}, \\ H_{32}' &= \left[c_d - \frac{v_0}{v} - H_{32}(c_f - \frac{v_0}{v}) \right] \frac{1}{\delta_2} + H_{32}(H_{12} - 1) \frac{v'}{v}. \end{aligned} \quad (19.3)$$

В эту систему из двух уравнений входят пять неизвестных параметров: $\delta_2, H_{12}, H_{32}, c_f, c_d$. Недостающие для расчета ПС три уравнения связи Р. Эшплер предложил записать в виде

$$H_{12} = H_{12}(H_{32}), \quad c_f = \varepsilon(H_{32})/\text{Re}^*, \quad c_d = D(H_{32})/\text{Re}^*. \quad (19.4)$$

Здесь Re^* – местное число Рейнольдса, построенное на местной скорости v и толщине потери импульса δ_2 :

$$\text{Re}^* = \frac{v\delta_2}{\nu} = \frac{v}{v_\infty} \frac{\delta_2}{b} \text{Re},$$

где $\text{Re} = v_\infty b/\nu$.

Для нахождения зависимостей $H_{12}(H_{32}), \varepsilon(H_{32}), D(H_{32})$ Р. Эшплер использовал два класса точных автомодельных решений уравнений ПС – при степенном распределении скоростей на непроницаемой внешней границе и при равномерном отсосе на пластинке. Эти зависимости для ламинарного ПС имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{12} &= \begin{cases} 4.03 - (583.6 - 724.6H_{32} + 227.2H_{32}^2)\sqrt{H_{32} - H_{32}^\circ}, & H_{32}^\circ < H_{32} < 1.57, \\ 79.87 - 89.58H_{32} + 25.72H_{32}^2, & H_{32} > 1.57, \end{cases} \\ \varepsilon &= \begin{cases} 2.51 - 1.69H_{12} + 0.39H_{12}^2 - 0.032H_{12}^3, & H_{32}^\circ < H_{32} < 1.57, \\ 1.37 - 4.23H_{32} + 2.22H_{32}^2, & H_{32} > 1.57, \end{cases} \\ D &= 2(7.85 - 10.26H_{32} + 3.42H_{32}^2), \end{aligned} \quad (19.5)$$

где $H_{32}^\circ = 1.515$.

Подставив зависимости (19.5) в преобразованные уравнения импульсов и энергии (19.3), получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая интегрируется численно. В результате определяются функции $\delta_2(s)$ и $H_{32}(s)$. Функция $H_{12}(s)$, коэффициенты трения c_f и диссипации энергии c_d находятся из уравнений (19.4) с использованием (19.5).

Толщины вытеснения δ_1 и потери энергии δ_3 выписываются из соотношений (19.2). Расчет начинают с передней критической точки. Так как предпосылки теории ПС в этой области не работают, то от критической точки необходимо отступить на некоторое расстояние Δs (обычно Δs находят из условия $v(\Delta s) = 0.1 \div 0.3v_\infty$). Начальные значения δ_2 и H_{32} при малых Δs определяются из точного решения уравнений Навье – Стокса вблизи критической точки

$$\delta_2(\Delta s) = 0.29 \sqrt{\frac{\Delta s}{\operatorname{Re} v(\Delta s)}}, \quad H_{32}(\Delta s) = 1.62.$$

Расчет ламинарного ПС ведется либо до точки $s = s_s$ отрыва, который наступает при $H_{32} < H_{32}^o$, либо до точки $s = s_t$ перехода, о нахождении которой будет сказано ниже. Если отрыва нет, то считается $s_s = \ell$.

При расчете турбулентного ПС также могут быть использованы уравнения (19.3). Для функций H_{12} , c_f , c_d Р. Эпплер получил несколько выражений, основываясь на эмпирических и полуэмпирических формулах Людвиг – Тиллмана, Вегарда и Ротта [64]:

$$\begin{aligned} H_{12} &= \frac{11H_{32} + 15}{48H_{32} - 59}, \\ c_f &= 0.0457 [(H_{12} - 1) \operatorname{Re}^*]^{-0.232} e^{-1.26H_{12}}, \\ c_d &= 0.01 [(H_{12} - 1) \operatorname{Re}^*]^{-1/6}. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Для нахождения характеристик ТПС интегрируют уравнения (19.3), используя при этом соотношения (19.6). Критерий отрыва ТПС имеет вид $H_{32} < H_{32}^*$. Согласно [64] из многочисленных экспериментальных данных следует, что отрыв ТПС гарантированно не наступает при $H_{32}^* > 1.58$, а при $H_{32}^* < 1.46$ отрыв происходит всегда. Расчеты, проведенные Р. Эпплером, показали, что наиболее точные результаты получаются, если принять $H_{32}^* = 1.46$.

Положение точки s_t перехода (рис. 19.1, б) на крыловом профиле зависит от многих факторов, в том числе от числа Re , положения точки максимальной скорости потенциального течения, кривизны и шероховатости поверхности, начальной

турбулентности потока [58]. Для нахождения положения s_t будем пользоваться улучшенным критерием, который учитывает предысторию неустойчивости ПС. Согласно интегральному критерию Р. Эшплера [65] переход наступает при

$$\int_{s_p}^s E(H_{32}, \text{Re}^*) ds \geq 15. \quad (19.7)$$

Точка $s = s_p$ находится из соотношения $H_{32}(s_p) = H_{32}^p$; в этой точке на поверхности профиля достигается предел стабильности ПС. Функция $E(H_{32}, \text{Re}^*)$ и величина H_{32}^p имеют вид

$$\begin{aligned} E(H_{32}, \text{Re}^*) &= 0.9225(H_{32}^p - H_{32})^2 \text{Re}^{*1.7} e^{0.612r}, \\ H_{32}^p(\text{Re}^*) &= 1.526512 + 0.097039V + 0.30054V^2 + 0.3747V^3, \\ V &= 0.1 \log_{10} \text{Re}^*. \end{aligned}$$

Здесь r – коэффициент шероховатости поверхности, $r = 0$ соответствует идеально гладкой поверхности, $r = 4$ – шероховатости, вызванной прилипшими к поверхности крыла насекомыми или турбулентностью набегающего потока в аэродинамических трубах.

19.4. Решение обратной задачи. Для решения обратной задачи, то есть для определения формы контура крылового профиля, применялся метод, разработанный в [28] для непроницаемых крыловых профилей. Для этого вначале с использованием схемы построения крыловых профилей в рамках модели ИНЖ определяется форма полутела вытеснения. Затем, в соответствии с изложенным, производится расчет ПС с учетом его отсасывания и, отступив от границ полутела внутрь по нормали на толщину вытеснения δ^* , отыскивается (за исключением малого участка $\Delta s = s_2 - s_1$ вблизи щели) форма крылового профиля. Так как размеры щели малы, то с практической точки зрения вряд ли имеет смысл заниматься проблемой нахождения формы профиля на участке (s_1, s_2) . Сложность этой проблемы заключается в том, что не ясно, как из решения ОКЗА находить форму контура профиля на этом участке, а не определив форму щели, нельзя и рассчитать точно течение вязкой жидкости вблизи щели.

Так как для нахождения полутела вытеснения используется теория ОКЗА для непроницаемых профилей, не представляет никаких трудностей рассмотреть и решить задачу в диапазоне углов атаки. Для этого использовались методы, описанные в работах М.Лайтхилла [73] при задании $v(\gamma)$, А.М.Елизарова и Д.А.Фокина [21] при задании $v(s)$.

Коэффициент подъемной силы c_{ya} крылового профиля находится по формуле (5.8), а для определения профильного коэффициента сопротивления c_{xa} использовалась формула Сквайра – Юнга

$$c_{xa} = \frac{2\delta_b^{**}}{b} \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12b}}{2}}, \quad (19.8)$$

где δ_b^{**} – толщина потери импульса в задней кромке; v_b – скорость внешнего течения в точке схода потока, H_{12b} – значение формпараметра $H_{12} = \delta^*/\delta^{**}$ в задней кромке.

Отсасывание – энергетический способ управления ПС. Энергию, затраченную на отсасывание, разумно учитывать, включая ее в коэффициент сопротивления [67, 75]. Поэтому будем считать, что

$$c_x = c_{xa} + c_{xp}, \quad (19.9)$$

где c_{xp} – коэффициент эквивалентного сопротивления от отсасывания. Этот коэффициент определяется условно, его вид зависит от предположений и допущений, сделанных при расчете. Так обычно предполагают, что система отсасывания восстанавливает полное давление удаленного из ПС воздуха до величины $p_\infty + \rho v_\infty^2/2$. Воздух выбрасывается в атмосферу со скоростью, равной и противоположно направленной скорости набегающего потока так, что при этом не нужно учитывать ни сопротивление струи, ни реактивную тягу [57].

Формула для c_{xp} , максимально оценивающая потери полного давления как при входе в щель, так и при прохождении каналов, приведена в [75]:

$$c_{xp} = \frac{1}{b} \left(\frac{v_1}{v_\infty} \right)^3 \delta_1^{**} c_q \left[1 + \frac{2(p_1 - p_k)}{\rho v_1^2} \right]. \quad (19.10)$$

Здесь $c_q = -Q/(v_1 \delta_1^{**})$ – коэффициент расхода отсасываемой жидкости; $p_1 - p_k$ – разность давления при входе в щель и давления при поступлении в насос. При $p_1 = p_k$ зависимость (19.10) упрощается:

$$c_{xp} = \frac{\delta_1^{**}}{b} \left(\frac{v_1}{v_\infty} \right)^3 c_q. \quad (19.11)$$

19.5. Примеры построения крыловых профилей. В первом примере в качестве исходного распределения скорости было взято распределение $v(s)$, изображенное на рис. 19.5, а штриховой линией. На участке $s \in [0.87, 0.88]$ происходит резкое снижение скорости от $v_1 = 1.6$ до $v_2 = 0.72$.

Соответствующий заданному распределению скорости контур крылового профиля (штриховая линия на рис. 19.5, б) получился незамкнутым и самопересекающимся. Для получения физически реализуемого решения исходное распределение скорости было модифицировано (рис. 19.5, а, сплошная линия) с использованием метода квазирешений [18]. Построенный в результате контур крылового профиля изображен сплошной линией на рис. 19.5, б. Стрелкой показано положение щели. Коэффициент подъемной силы этого 15-процентного профиля $c_{ya} = 1.63$ при расчетном угле атаки $\alpha = 6^\circ$. Рассчитанный по формуле (19.9) коэффициент сопротивления при $Re = 10^6$ равен $c_x = 0.0069$, причем основную долю его составил коэффициент эквивалентного сопротивления $c_{xp} = 0.0055$, вычисленный по (19.11). Видно, что при расчете сопротивления профилей со щелевым отсосом ПС пренебрегать коэффициентом c_{xp} не следует. Так как распределение скорости (рис. 19.5, а, сплошная линия) не имеет других участков падения скорости, кроме участка вблизи щели, то можно утверждать, что в рамках принятой модели построенный крыловой профиль обтекает безотрывно. Коэффициент расхода $q = -0.0018$.

Так как с физической точки зрения изменение $\Delta\theta$ угла наклона касательной к границе полутела вытеснения вблизи щели не должно превышать $\pi/2$, то этот факт можно использовать для нахождения длины $\Delta s = s_2 - s_1$ участка падения скорости. Например, ограничение $\Delta\theta \leq \pi/3$ дает $\Delta s \geq 0.00004$. С другой

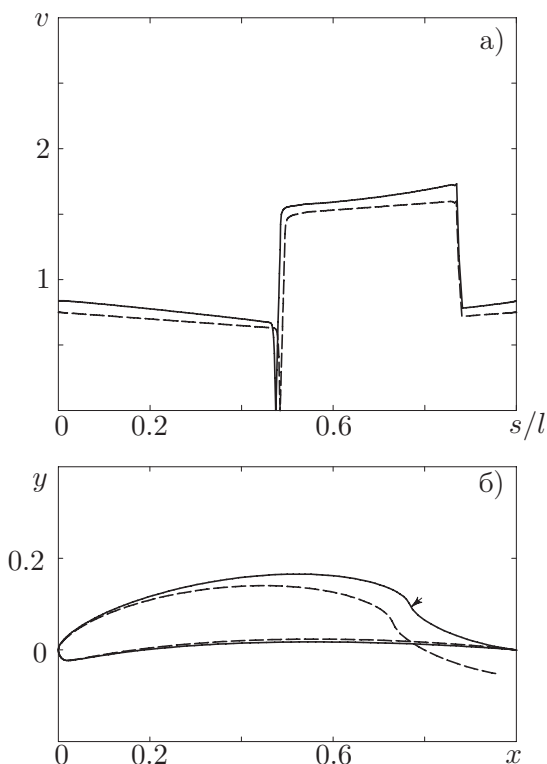


Рис. 19.5. Пример построения крылового профиля со щелевым отсосом по $v(s)$

стороны, расчет показал, что величина n_0 в рассматриваемом примере равна $n_0 \approx 0.001$. Поэтому, предположив ширину щели приблизительно равной n_0 , длину участка падения скорости Δs уместно выбрать на порядок больше, а именно, $\Delta s = 0.01$.

В следующем примере построен крылового профиля с участком резкого падения скорости на верхней поверхности по заданному распределению скорости в функции дуги окружности $\zeta = e^{i\gamma}$. Задача была решена в диапазоне углов атаки. На верхней поверхности распределение скорости было задано при угле атаки $\beta > 0$ (β – угол атаки в плоскости ζ (см. рис. 19.3)) в

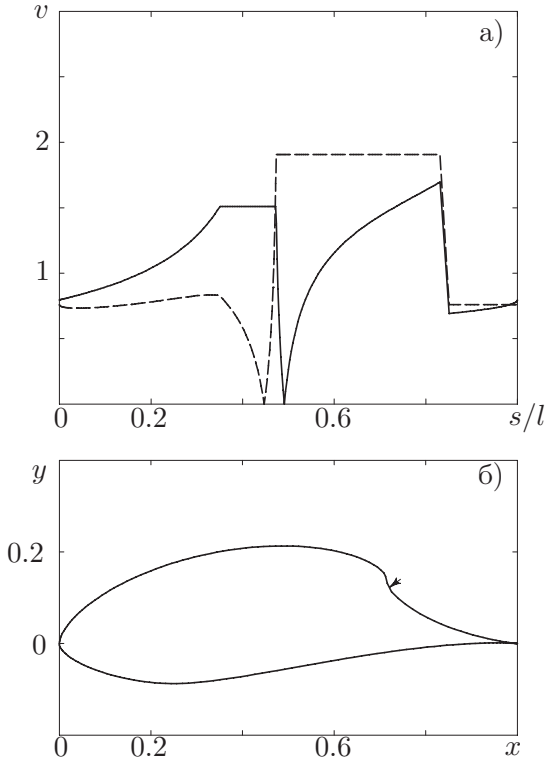


Рис. 19.6. Пример построения профиля со щелевым отсосом по $v(\gamma)$ в диапазоне

виде

$$v_{\beta}(\gamma) = \begin{cases} v_1, & 0 \leq \gamma \leq \gamma_0; \\ v_1 + (v_2 - v_1)(\gamma - \gamma_0)/\Delta\gamma, & \gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_0 + \Delta\gamma; \\ v_2, & \gamma_0 + \Delta\gamma \leq \gamma \leq \gamma_1, \end{cases} \quad (19.12)$$

где v_{β} означает распределение v при угле атаки β ; v_1 и v_2 – постоянные значения скорости, причем $v_2 > v_1$ (рис. 19.6, а). На участке $\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_0 + \Delta\gamma$ происходит резкое уменьшение скорости и предполагается наличие щели для отсоса ПС.

На нижней стороне скорость была задана при угле атаки

с нулевой подъемной силой ($\beta = 0$):

$$v_0(\gamma) = \begin{cases} v_3, & \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2; \\ v_3 [1 + K(\gamma - \gamma_2)]^{-1/4}, & \gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi, \end{cases}$$

где v_3, K – константы.

По формуле

$$v_0(\gamma) = v_\beta(\gamma) \frac{\cos(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2 - \beta)}$$

распределение скорости $v_\beta(\gamma)$ по верхней поверхности (19.12) было пересчитано на распределение $v_0(\gamma)$ при угле атаки с нулевой подъемной силой.

Для удовлетворения трех условий разрешимости и двух условий совместимости начальных данных – непрерывности $v_0(\gamma)$ в точках $\gamma = 0$ и $\gamma = \gamma_1$ – величины $v_1, v_2, v_3, K, \gamma_1$ не фиксировались, а определялись в процессе решения. В результате решения обратной задачи был построен крыловой профиль 28-процентной толщины (рис. 19.6, б). Распределения скорости при расчетных углах атаки $\alpha = -6^\circ$ и $\alpha = 11^\circ$ изображены на рис. 19.6, а сплошной и штриховой линиями соответственно. В окрестности щели ($s = 0.845 - -0.850$) скорость уменьшается в 2.5 раза. Коэффициент подъемной силы изменяется в пределах от $c_{ya} = 0$ ($\alpha = -6^\circ$) до $c_{ya} = 2.26$ ($\alpha = 11^\circ$).

§ 20. Распределенный отсос пограничного слоя

20.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль AB обтекается плоским установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости с заданной скоростью v_∞ набегающего потока (рис. 20.1). Внутренний к области течения угол в точке B равен 2π . Вязкость учитывается по модели ПС. Участок MN верхней поверхности считается проницаемым, скорость отсасывания на нем прямо

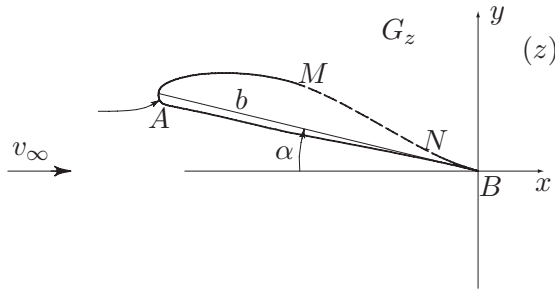


Рис. 20.1. Течение в физической плоскости

пропорциональна перепаду давлений между внешней и внутренней сторонами стенки (закон Дарси) (см., например, [81])

$$v_0(s) = -k \left[\left(p_0 - \frac{\rho v^2(s)}{2} \right) - p_a \right] = -C_0 + C_1 v^2(s), \quad (20.1)$$

где s – дуговая абсцисса, которая отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = 1$ в ней же так, что область течения при обходе остается слева, p_a – давление в крыле, $v(s)$ – распределение скорости внешнего течения на верхней границе ПС. Заметим, что вид распределения скорости отсоса ПС не имеет большого значения для метода решения задачи и вместо зависимости (20.1) можно считать скорость отсасывания постоянной или использовать формулы, приведенные в [62].

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики по заданному специальным образом распределению скорости $v(s)$.

Задание распределения скорости внешнего течения. Зададим распределение скорости так, чтобы ее падение происходило только на пронцаемом участке MN , а на остальных участках скорость либо возрастала, либо оставалась постоянной. Вид такого распределения скорости схематично изображен на рис. 20.2. В точке A ($s = s_a$) скорость обращается в нуль. На нижней стороне профиля скорость возрастает на участке от s_a до s_1 , а дальше до задней кромки $s = 0$ остается постоянной и равной v_0 . На верхней стороне имеется участок

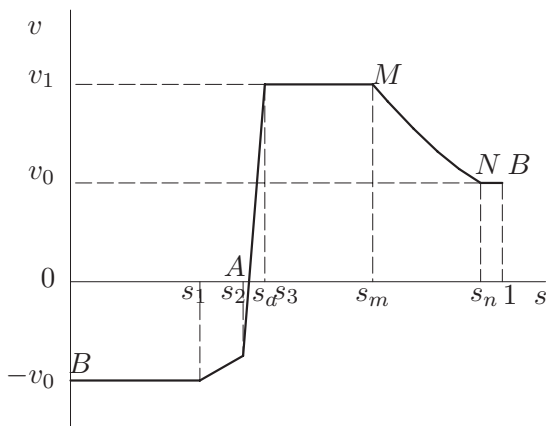


Рис. 20.2. Вид задаваемого распределения скорости

возрастания скорости (s_a, s_3) , участок с постоянной скоростью $v_1 (s_3, s_m)$, диффузорный участок (s_m, s_n) , на котором происходит отсасывание, и небольшой участок постоянной v_0 скорости $(s_n, 1)$ (этого участка может и не быть).

На диффузорном участке MN вид распределения скорости выбирается так, чтобы удовлетворить условию отсутствия отрыва или перехода ПС. Этот вид находится из условия безотрывного распределения формпараметра решением обратной задачи ПС.

О решении обратной задачи погранслоя. Для расчета ПС был использован метод Р.Эшплера, основанный на интегрировании системы двух дифференциальных уравнений (уравнения импульсов и уравнения энергии):

$$\delta^{**'}(s) = c_f(s) + \frac{v_0(s)}{v(s)} - (2 + H_{12}(s))\delta^{**}(s) \frac{v'(s)}{v(s)}, \tag{20.2}$$

$$\delta^{***'}(s) = c_d(s) + \frac{v_0(s)}{v(s)} - 3H_{32}(s)\delta^{**}(s) \frac{v'(s)}{v(s)},$$

где δ^* – толщина вытеснения, δ^{**} – толщина потери импульса, δ^{***} – толщина потери энергии, $H_{12} = \delta^*/\delta^{**}$, $H_{32} = \delta^{***}/\delta^{**}$ – формпараметры, c_f – коэффициент трения, c_d – коэффициент диссипации энергии. Для замыкания системы (2 уравнения и

5 неизвестных: δ^{**} , H_{12} , H_{32} , c_f , c_d) вводятся три уравнения связи [63]:

$$\begin{aligned} H_{12} &= H_{12}(H_{32}), \\ c_f &= c_f(H_{32}, v, \delta^{**}), \\ c_d &= c_d(H_{32}, v, \delta^{**}). \end{aligned}$$

Явный вид этих уравнений различен для разных видов ПС – ламинарного и турбулентного. Критерий безотрывности течения в методе Р.Эшлера записывается в виде

$$H_{32} > H_{32}^*, \quad (20.3)$$

где $H_{32}^* = 1.515$ для ламинарного ПС и $H_{32}^* = 1.46$ для турбулентного ПС, а критерий перехода – в виде

$$\text{Re } v(s)\delta^{**}(s) > \Phi(H_{32}). \quad (20.4)$$

Здесь Re – число Рейнольдса.

В прямой задаче ПС по распределению $v(s)$ скорости внешнего течения по верхней границе ПС и распределению $v_0(s)$ скорости отсоса находятся толщины ПС, а затем по приведенным выше критериям определяются точки перехода и отрыва ПС.

В обратной задаче ПС по заданной функции формпараметра $H_{32}(s)$ определяются распределения $v(s)$, $v_0(s)$ и толщины $\delta^*(s)$, $\delta^{**}(s)$, $\delta^{***}(s)$. Для нахождения неизвестных функций служат та же система уравнений (20.2) и связь между скоростями (20.1). Для удобства интегрирования эти уравнения целесообразно записать в нормальной форме:

$$\begin{cases} v' = v [H_{32}(c_f + \frac{v_0}{v}) - c_d - \frac{v_0}{v} + H'_{32}\delta^{**}] [H_{32}\delta^{**}(H_{12} - 1)]^{-1}, \\ \delta^{**'} = c_f + \frac{v_0}{v} - (2 + H_{12})\delta^{**} \frac{v'}{v}, \\ v_0 = -C_0 + C_1 v^2. \end{cases}$$

Функцию распределения формпараметра $H_{32}(s)$ следует выбирать так, чтобы она удовлетворяла критерию безотрывности (20.3). Вопрос о выборе конкретного вида $H_{32}(s)$ для

получения наибольшей величины падения скорости для непроницаемых поверхностей подробно исследован в [63]. Выберем линейную зависимость

$$H_{32}(s) = H_{32}(s_m) + (H_{32}^* - H_{32}(s_m) + \varepsilon) \frac{s - s_m}{s_n - s_m},$$

где ε – запас на безотрывность.

Вопрос о нахождении распределения скорости $v(s)$, при котором ПС остается ламинарным, сложнее. Дело в том, что критерий перехода (20.4), в отличие от критерия безотрывности, зависит не только от функции H_{32} , но и от функций $v(s)$, $\delta^{**}(s)$. Согласно этому критерию переход наступает при

$$\text{Re}v(s)\delta^{**}(s) - \Phi(H_{32}(s)) > 0.$$

Предположим, что s_t – точка перехода ПС и в ней

$$\text{Re}v(s)\delta^{**}(s) - \Phi(H_{32}(s)) = 0. \quad (20.5)$$

Найдем функции $v(s)$, $v_0(s)$, $\delta^{**}(s)$, $H_{32}(s)$ так, чтобы равенство (20.5) выполнялось на всем участке $s > s_t$. Продифференцируем (20.5) по s :

$$\text{Re}(v'\delta^{**} + v\delta^{**'}) - \varphi H'_{32} = 0. \quad (20.6)$$

Здесь $\varphi = \partial\Phi/\partial H_{32}$. После добавления уравнения (20.6) к (20.2) и (20.1) получим замкнутую систему дифференциальных уравнений для определения функций $v(s)$, $v_0(s)$, $\delta^{**}(s)$, $H_{32}(s)$. Приведя систему к нормальному виду, получим

$$\begin{cases} v' = v \frac{\varphi [H_{32}(c_f + \frac{v_0}{v}) - (c_d + \frac{v_0}{v})] + \text{Re}\delta^{**}v(c_f + \frac{v_0}{v})}{\delta^{**}[\varphi H_{32}(H_{12}-1) + \text{Re}\delta^{**}v(H_{12}+1)]}, \\ \delta^{**'} = c_f + \frac{v_0}{v} - (2 + H_{12})\delta^{**}\frac{v'}{v}, \\ H'_{32} = \frac{c_d + \frac{v_0}{v} - H_{32}(c_f + \frac{v_0}{v})}{\delta^{**}} + H_{32}(H_{12} - 1)\frac{v'}{v}, \\ v_0 = -C_0 + C_1v^2. \end{cases} \quad (20.7)$$

Эту систему целесообразно начать интегрировать не с точки перехода s_m , а отступив на некоторое расстояние Δs вверх по потоку, где Δs характеризует запас устойчивости.

20.2. Схема решения обратной краевой задачи аэродинамики. Для решения ОКЗА, то есть для определения формы контура крылового профиля, применялся метод, разработанный в [28] для непроницаемых крыловых профилей. Для этого вначале с использованием схемы построения крыловых профилей в рамках модели ИНЖ определяется форма полутела вытеснения над профилем. Затем, следуя изложенному выше, производится расчет ПС с учетом его отсасывания и, отступая от границ этого полутела внутрь по нормали на толщину вытеснения δ^* , отыскивается форма крылового профиля.

Так как полутело вытеснения считается непроницаемым, условия разрешимости данной задачи совпадают с условиями, полученными в [28]. Для их удовлетворения, в отличие от используемого в [28] метода квазирешений, в исходное распределение скорости было введено три свободных параметра – положение критической точки s_a , длина участка возрастания скорости $s_3 - s_a$ и скорость на “полке” v_1 . Параметры s_m, s_n, s_1, s_2 задавались произвольным образом.

Сначала по известному распределению скорости на участке (s_a, s_m) рассчитывался ПС и определялись его характеристики. Далее интегрированием (20.7) на участке MN решалась обратная задача ПС и находились распределения скорости на проницаемом участке. Затем по известной скорости в задней кромке $v_0 = v(s_n)$ достраивалось распределение скорости на нижней поверхности.

Коэффициент подъемной силы c_{ya} крылового профиля находился по формуле (5.8), а для определения профильного коэффициента сопротивления c_{xa} использовалась формула Сквайра-Юнга (19.8).

Отсасывание – энергетический способ управления ПС. Энергию, затраченную на отсасывание, разумно учитывать, включая ее в коэффициент сопротивления (см., например, [57, 62]). Поэтому будем считать, что

$$c_x = c_{xa} + c_{xp},$$

где c_{xp} – коэффициент эквивалентного сопротивления отсасы-

вания. Для его определения используем формулу [57]

$$c_{xp} = \frac{1}{bv_{\infty}^3} \int_{s_m}^{s_n} \left(v^2(s) + 2 \frac{p(s) - p_a}{\rho} \right) v_0(s) ds.$$

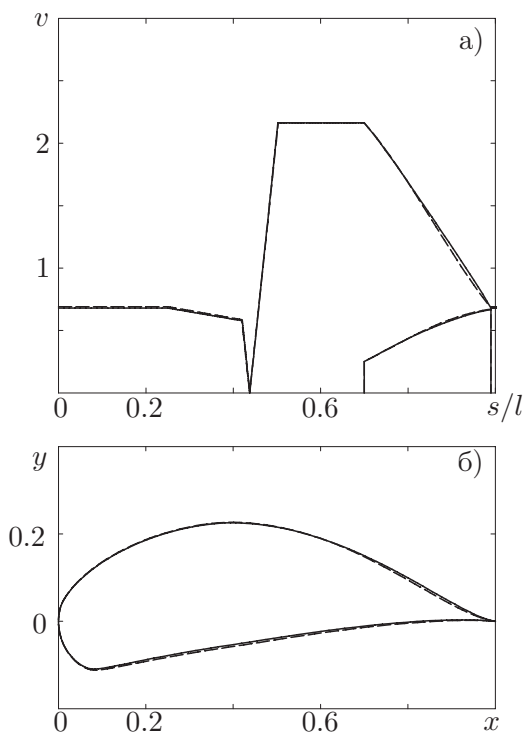


Рис. 20.3. Пример построения крылового профиля с распределенным отсосом

Примеры построения крыловых профилей. На рис. 20.3, 20.5 приведены взятые в качестве исходных данных распределения скорости и построенные крыловые профили. Их характеристики указаны в табл. 20.1.

Профиль, изображенный на рис. 20.3 сплошной линией, построен в предположении отсутствия перехода ПС на всей поверхности профиля. Отсасывание было выбрано на участке

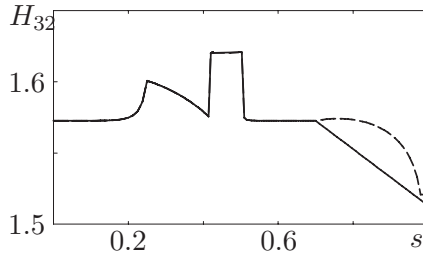


Рис. 20.4. Распределение формпараметра

Т а б л и ц а 20.1

Характеристики проницаемых профилей

№	C_0	v_1	v_0	s_a	s_m	s_n	c_{ya}	$c_x \cdot 10^3$	α°
1.	0.0072	2.16	0.68	0.44	0.70	0.99	2.85	2.35	13.4
2.	0.0072	2.16	0.69	0.44	0.70	0.99	2.81	2.42	13.6
3.	0.0090	2.25	0.59	0.42	0.75	0.99	3.52	3.30	14.6

$s \in [0.7; 0.99]$ с коэффициентами $C_0 = 0.0072$ и $C_1 = 0.001$. Характеристики найденного профиля приведены в первой строчке табл. 20.1, а распределение формпараметра $H_{32}(s)$ изображено на рис. 20.4 сплошной линией (на проницаемом участке оно имеет линейный вид).

Если проверить характеристики ПС на критерий перехода, то окажется, что течение в ПС будет оставаться ламинарным только в случае, когда стенки профиля являются гладкими. В случае шероховатых стенок в начале диффузорного участка на верхней поверхности появляется точка перехода ПС. Для исключения перехода была решена обратная задача ПС по предотвращению перехода (проинтегрирована система (20.7)). Найденное в результате этого новое распределение формпараметра изображено на рис. 20.4 штриховой линией. Распределение скорости и построенный крыловой профиль показаны на рис. 20.3 штриховыми линиями. Характеристики этого профиля приведены во второй строчке табл. 20.1.

Крыловой профиль, изображенный на рис. 20.5, был построен для получения высокого коэффициента подъемной си-

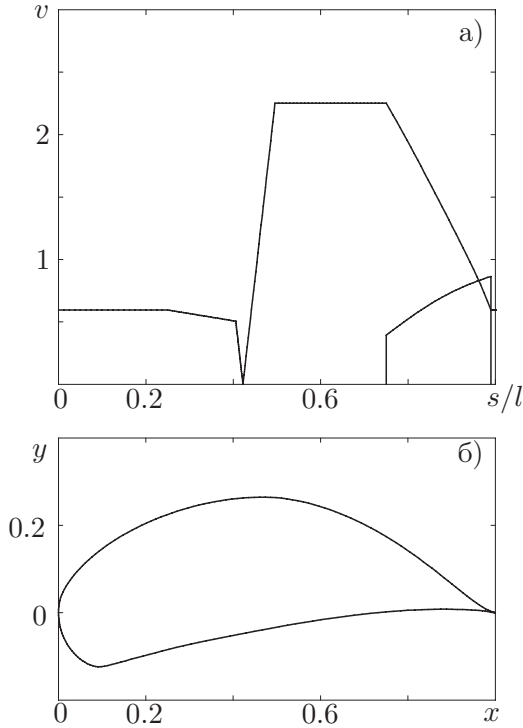


Рис. 20.5. Пример построения профиля с распределенным отсосом. Случай большой подъемной силы

лы. Для этого была увеличена зона постоянной скорости на верхней поверхности за счет уменьшения зоны отсоса ПС и увеличена интенсивность отсасывания ($C_0 = 0.009$, $C_1 = 0.001$) Полученный таким образом профиль имеет коэффициент подъемной силы 3.5. Другие характеристики приведены в третьей строчке табл. 20.1.

§ 21. Оптимизация параметров проницаемого участка крылового профиля

21.1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание заданного крылового профиля потоком вязкой несжимаемой жид-

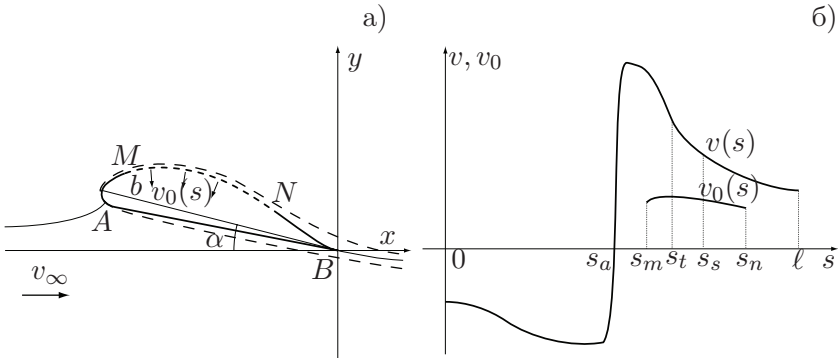


Рис. 21.1. а) физическая плоскость,
б) распределения скоростей $v(s)$, $v_0(s)$

кости при углах α_1 , α_2 атаки и достаточно больших числах Рейнольдса (порядка 10^6) со скоростью v_∞ на бесконечности (рис. 21.1, а). В предположении безотрывности обтекания для вычисления поля скоростей внешнего течения используем модель ИНЖ. Распределения скоростей $v_1(s)$, $v_2(s)$ по контуру крылового профиля при углах α_1 и α_2 соответственно найдем, решив прямую краевую задачу для функции комплексного потенциала при условии непротекания контура профиля (рис. 21.1, б, схематично показано одно из возможных распределение скорости $v(s)$). Здесь s – дуговая абсцисса контура профиля, отсчитываемая от задней кромки таким образом, что при ее возрастании область течения остается слева. Вязкость, влияние которой будет сказываться лишь вблизи поверхности профиля, будем учитывать по модели ПС. Предположим, что имеется одна камера отсоса с давлением p_c в ней, отсос ПС происходит по закону Дарси

$$v_0(s) = K(s)[p(s) - p_c], \quad (21.1)$$

где $v_0(s)$ – скорость отсоса ПС, $K(s)$ – распределение пористости проницаемого участка, $p(s)$ – давление на внешней поверхности крылового профиля.

Давление $p(s)$ вычислим по формуле, следующей из интеграла Бернулли в основном потоке и условия постоянства дав-

ления поперек ПС:

$$p(s) = p_\infty + \frac{\rho}{2}[v_\infty^2 - v^2(s)]. \quad (21.2)$$

По распределению $K(s)$ пористости и распределениям $v_1(s)$, $v_2(s)$ скоростей внешнего течения при двух расчетных углах атаки, скорость отсоса ПС находится по формуле (21.1) с учетом (21.2).

Если расчет ПС показывает, что на поверхности непроницаемого профиля хотя бы при одном угле атаки возникает отрыв потока, то для предотвращения этого явления расположим на поверхности профиля проницаемый участок (s_m, s_n) , через который будем осуществлять распределенный отсос ПС. Из всех множеств таких участков, предотвращающих отрыв, выберем оптимальный. Схематично эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Требуется найти такое положение концов s_m и s_n проницаемого участка, такое распределение $K(s)$ пористости и такие давления p_{c1} , p_{c2} в камере отсоса (для углов атаки α_1 и α_2 соответственно), чтобы сумма коэффициентов сопротивления

$$c_x = c_{x1} + c_{x2} \quad (21.3)$$

принимала минимальное значение при условии отсутствия отрыва ПС. Точная математическая постановка задачи будет дана ниже.

Коэффициент c_{xi} сопротивления при одном угле атаки α_i ($i = 1, 2$) будем вычислять по формуле

$$c_{xi} = c_{vi} + c_{si}. \quad (21.4)$$

Здесь c_{vi} – коэффициент сопротивления за счет трения, а c_{si} – коэффициент сопротивления, эквивалентный энергетическим затратам и потерям в устройстве отсоса. В дальнейшем знак “ i ” будем опускать. Заметим, что при отборе жидкости возникает сила R_x сопротивления, пропорциональная расходу Q забираемой жидкости (5.3). Но при рассмотрении летательного аппарата в целом появится и противоравная ей сила тяги

в месте выдува забранной жидкости. Поэтому в записанный коэффициент сопротивления (21.4) эта сила не включена.

Для простоты изложения рассмотрим случай расположения проникаемого участка только на верхней поверхности крылового профиля ($s \in [s_a, \ell]$), где s_a – дуговая абсцисса точки A разветвления потока на контуре профиля, ℓ – периметр контура профиля.

Для вычисления коэффициента сопротивления, эквивалентного энергетическим затратам на отсос, используем формулу из работы [65]:

$$c_s = \frac{v_c^2}{v_\infty^3 b} \int_{s_m}^{s_n} v_0(s) ds = \left(\frac{v_c}{v_\infty} \right)^2 q. \quad (21.5)$$

Здесь q – безразмерный коэффициент расхода, v_c – некоторая фиктивная скорость, зависящая от давления p_c в камере отсоса

$$v_c = \sqrt{v_\infty^2 - \frac{2(p_c - p_\infty)}{\rho}}.$$

Формулу (21.5), учитывающую по максимуму потери в ПС при прохождении проникаемой поверхности и каналов, можно получить теоретически из рассмотрения энергетических затрат. Действительно, в энергетическую установку поступает жидкость с полным давлением p_c и выходит с полным давлением $p_\infty + \rho v_\infty^2/2$. Выражение для мощности установки запишется в виде

$$P = \frac{1}{\eta_p} \left(p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - p_c \right) Q.$$

Согласно (5.16) получим

$$c_s = \frac{\eta_a}{\eta_p} \frac{2(p_\infty + \rho v_\infty^2/2 - p_c)}{\rho v_\infty^2} \frac{Q}{b v_\infty} = \frac{\eta_a}{\eta_p} \frac{v_c^2}{v_\infty^2} q$$

и при совпадении КПД двигателя и энергетической установки придем к формуле (21.5).

При вычислении коэффициента сопротивления за счет трения воспользуемся формулой Сквайра – Юнга

$$c_v = 2 \frac{\delta_2(\ell)}{b} \left[\frac{v(\ell)}{v_\infty} \right]^{\frac{5+H_{12}(\ell)}{2}}, \quad (21.6)$$

где $s = \ell$ соответствует точке схода потока, толщина $\delta_2(s)$ потери импульса и формпараметр $H_{12}(s)$ – интегральные характеристики ПС в задней кромке. Суммарный коэффициент трения c_x вычисляется по формуле (21.4).

21.2. Сведение к оптимизационной задаче. Обратимся к решению поставленной выше задачи нахождения проницаемого участка и величин $K(s)$, p_{c1} , p_{c2} так, чтобы c_x было минимально при отсутствии отрыва ПС. Будем считать, что распределение $K(s)$ пористости постоянно на всем проницаемом участке (s_m, s_n) , т. е. $K(s) = K_0$. Тогда поставленная задача сведется к задаче оптимизации функции пяти переменных s_m , s_n , K_0 , p_{c1} , p_{c2} . Далее наложим ограничения на величину скорости отсоса

$$0 \leq v_0(s) \leq v_{0\max}. \quad (21.7)$$

Ограничение снизу выражает тот факт, что через проницаемый участок не должен происходить выдув, а ограничение сверху ($v_{0\max} \lesssim 0.05v_\infty$) связано с законностью применения модели ПС при расчете вязкости, т. к. эта модель верна лишь в случае, когда скорости поперек ПС значительно меньше характерной скорости внешнего потока. Ограничения (21.7) и $s_s = \ell$ на отсутствие отрыва ПС будем учитывать в виде штрафных функций. Теперь с учетом (21.3), (21.5), (21.6) дадим окончательную постановку оптимизационной задачи.

Требуется найти такое положение концов s_m и s_n , пористость K_0 проницаемого участка и такие давления p_{c1} , p_{c2} в камере отсоса, чтобы функция

$$J(s_n, s_m, K_0, p_{c1}, p_{c2}) = J_1(s_n, s_m, K_0, p_{c1}) + J_2(s_n, s_m, K_0, p_{c2}) \quad (21.8)$$

принимала минимальное значение. Здесь

$$J_i = 2\delta_{2i}(\ell)[v_i(\ell)]^{\frac{5+H_{12i}(\ell)}{2}} + v_{ci}^2 \int_{s_m}^{s_n} v_{0i}(s) ds + \\ + A_s(\ell - s_s) + A_v \max_{s \in (s_m, s_n)} \left(0, -\frac{v_0(s)}{v_{0 \max}}, \frac{v_0(s)}{v_{0 \max}} - 1 \right),$$

где A_s , A_v – штрафные коэффициенты, которые необходимо брать достаточно большими (на порядок больше, чем c_x), а скорость $v_0(s)$ отсоса ПС вычислять по формуле (21.1). Для нахождения неизвестных параметров необходимо оптимизировать функцию (21.8), учитывая при расчете ПС формулы (19.5), (19.6).

21.3. Об используемом методе оптимизации. Для оптимизации функции (21.8) используем генетический метод численной многомерной оптимизации (см., например, [69]). Достоинством этого метода является то, что он хорошо работает при наличии большого количества переменных, не требует знания производной оптимизируемой функции, позволяет оптимизировать не выпуклые и не гладкие функции при наличии “плохих” (не выпуклых, не гладких, со сложной конфигурацией) областей допустимых значений и, наконец, позволяет найти глобальный минимум при наличии множества локальных. К недостаткам этого метода можно отнести значительные затраты времени при проведении расчетов и то, что положение минимума определяется этим методом лишь с некоторой заданной точностью. Положение оптимальной точки можно уточнить, используя обычный численный метод оптимизации, например, метод Хука – Дживса многомерной оптимизации (см., например, [8]).

21.4. Численная оптимизация аэродинамических характеристик крыловых профилей. Все расчеты сделаны при числе $Re = 10^6$ и параметрах штрафа $A_s = A_v = 1 \approx 10^3 c_x$.

В качестве первого примера оптимизации был выбран симметричный профиль NASA-0012, изображенный на рис. 21.2, а. Рассматривалось его обтекание потоком с образованием чисто

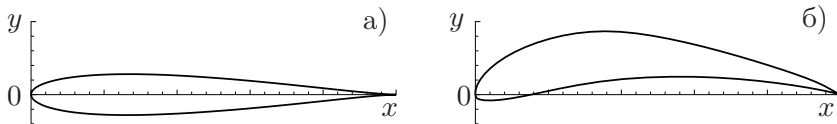


Рис. 21.2. Крыловые профили: а) NASA–0012, б) Профиль E-420

ТПС в диапазоне углов атаки от -9° до 9° . Расчет ПС показал, что при угле атаки $\alpha = 9^\circ$ происходит отрыв ПС на верхней поверхности, а при угле $\alpha = -9^\circ$ – на нижней. Ясно, что вследствие симметричности профиля для предотвращения отрыва оптимальные проницаемые участки следует вводить на нижней и верхней поверхностях, причем они также будут иметь симметричное расположение. Задача оптимизации в диапазоне свелась к задаче оптимизации проницаемого участка на верхней поверхности для одного угла атаки $\alpha = 9^\circ$.

Т а б л и ц а 21.1
Профиль NASA–0012

Тип ПС	s_m s_n	$K_0 \cdot 10^2$	α_1 α_2	p_{c1} p_{c2}	$(c_{x1} = c_{v1} + c_{s1}) \cdot 10^3$ $(c_{x2} = c_{v2} + c_{s2}) \cdot 10^3$
ТПС	0.655 1.041	2.696	-9° 9°	0.146 -0.374	2.703 = 2.459 + 0.244 11.371 = 7.63 + 3.731

Т а б л и ц а 21.2
Профиль E–420, верхняя поверхность

Тип ПС	s_m s_n	$K_0 \cdot 10^2$	α_1 α_2	p_{c1} p_{c2}	$(c_{x1} = c_{v1} + c_{s1}) \cdot 10^3$ $(c_{x2} = c_{v2} + c_{s2}) \cdot 10^3$
ТПС	0.74 0.914	3.452	-1° 13°	-0.929 -1.659	12.639 = 9.977 + 2.662 28.774 = 17.958 + 10.816
ЛПС	0.325 1.146	0.21	1° 13°	-2.686 -4.075	10.665 = 0.289 + 10.376 21.683 = 0.069 + 21.614
перех.	0.248 1.092	0.072	1° 13°	-3.474 -4.404	8.547 = 2.331 + 6.217 18.331 = 10.185 + 8.146

Было проведено решение поставленной выше оптимизационной задачи при $v_{0\max} = 0.015$. Расчет показал, что введе-

Т а б л и ц а 21.3

Профиль Е-420, нижняя поверхность

тип ПС	s_m	$K_0 \cdot 10^2$	α_1	p_{c1}	$(c_{x1} = c_{v1} + c_{s1}) \cdot 10^3$
	s_n		α_2	p_{c2}	$(c_{x2} = c_{v2} + c_{s2}) \cdot 10^3$
ЛПС	0.108	0.376	1°	-0.069	0.787 = 0.532 + 0.255
	0.288		13°	0.777	0.278 = 0.271 + 0.006

ние проницаемого участка с отсосом ПС через него позволило предотвратить отрыв ПС. Распределение скорости $v(s)$ внешнего потока на верхней поверхности профиля и оптимальное распределение скорости $v_0(s)$ отсоса ПС для двух расчетных углов атаки показано на рис. 21.3, а. Найденные параметры оптимизации и аэродинамические характеристики (в том числе и c_y – коэффициент подъемной силы) профиля приведены в табл. 21.1.

В качестве второго примера был выбран профиль Е-420 (рис. 21.2, б) из книги [64], специально спроектированный для получения больших коэффициентов c_y подъемной силы в некотором диапазоне углов атаки (от -1° до 13°). Решение оптимизационной задачи проводилось в трех случаях: ТПС, ЛПС и смешанный вариант с учетом перехода ПС по формуле (19.7). В последних двух случаях расчетный диапазон был от 1° до 13° , т. к. при угле атаки $\alpha = -1^\circ$ возникал отрыв ЛПС на нижней поверхности с носика профиля, размещение проницаемого участка на котором нежелательно.

Распределения скорости внешнего течения приведены на рис. 21.3, б и на 21.4, а, б. Из-за участка резкого падения скорости вблизи задней кромки почти всегда возникал отрыв ПС на верхней поверхности профиля. Для предотвращения этого явления была решена задача оптимизации размещения проницаемого участка. При расчетах полагалось $v_{0\max} = 0.04$. Результаты расчетов этих трех случаев для верхней поверхности профиля приведены в табл. 21.2, а оптимальные распределения скорости $v_0(s)$ отсоса показаны на рис. 21.3, б и на 21.4, а, б. Для нижней поверхности в случае ТПС отрыва на нижней поверхности не происходит во всем диапазоне и введение отсоса не выгодно. Поэтому расчеты проводились только в случае ЛПС

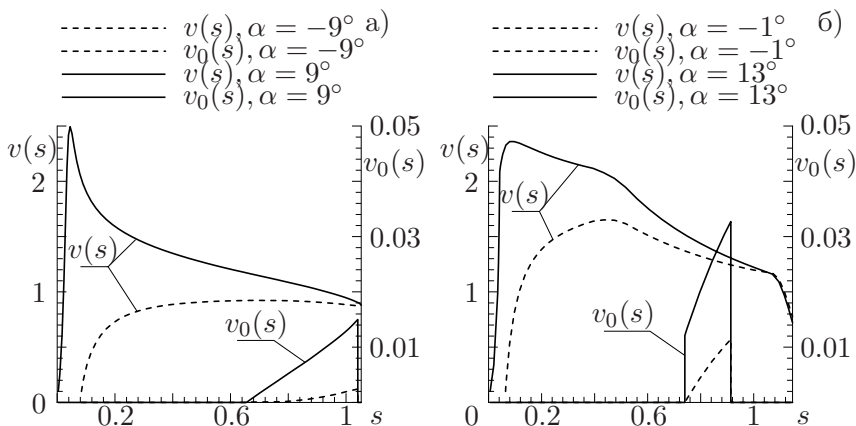


Рис. 21.3. Распределение скорости внешнего течения и скорости отсоса для ТПС на профиле NASA–0012 (а) и на профиле E–420 (б)

(характеристики приведены в табл. 21.3). Случай смешанного ПС с учетом перехода свелся к случаю ЛПС.

Представляет интерес и задача расчета крылового профиля с найденным проницаемым участком во всем диапазоне углов атаки. Единственным параметром, который может управлять течением в ПС, осталось лишь давление p_c в камере отсоса. Для каждого угла атаки из диапазона оно находится из условий минимальности коэффициента сопротивления c_x и условия отсутствия отрыва на поверхности профиля. Расчет показал, что управляя p_c , можно добиться безотрывного обтекания при всех углах диапазона. Зависимости p_c и полученных коэффициентов c_x сопротивления от угла атаки α приведены на рис. 21.5, а.

На рис. 21.5, б приведены аэродинамические поляры – зависимости коэффициента c_y подъемной силы от коэффициента c_x полного сопротивления. Штриховой линией показана зависимость для непроницаемого профиля, приведенная в [64], а сплошными линиями – найденные из решения оптимизационной задачи.

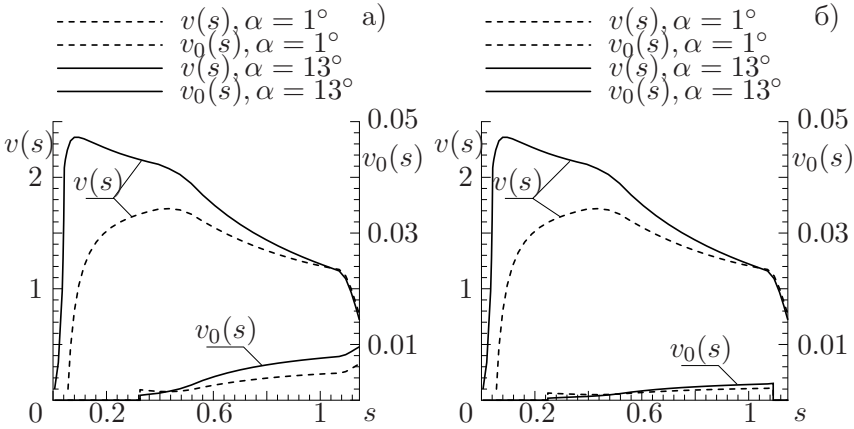


Рис. 21.4. Распределение скорости внешнего течения и скорости отсоса на профиле Е-420 для ЛПС (а) и ПС с учетом перехода (б)

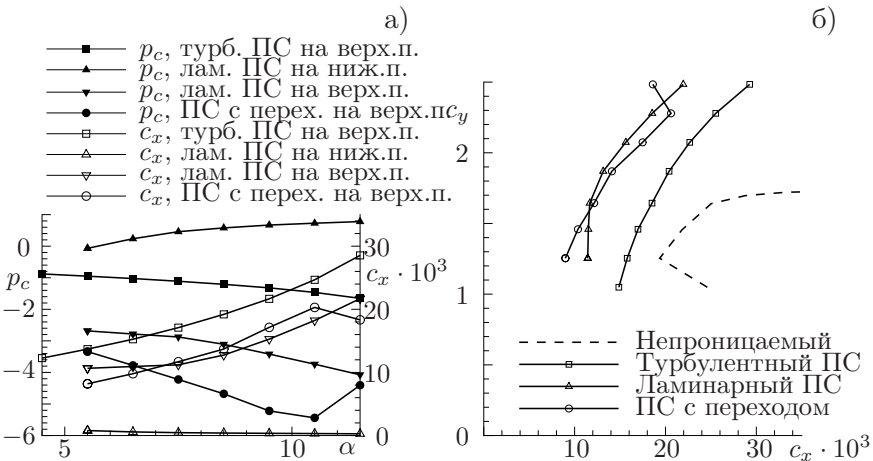


Рис. 21.5. Зависимости p_c и полученных коэффициентов c_x сопротивления от угла атаки α (а) и поляры $c_y(c_x)$ (б)

Подводя итог, отметим следующее. Численные расчеты показали, что при правильном управлении давлением в камере отсоса для рассчитанного профиля отрыв ПС отсутствует во всем диапазоне углов атаки. Приведены примеры улучшения аэродинамических характеристик крыловых профилей, взятых из литературы. Показана эффективность применения отсоса ПС даже при учете энергетических затрат на отсос.

Из анализа результатов расчетов можно сделать следующие выводы.

1. В случае ЛПС отсос нужно проводить во всей области сильного падения скорости (на верхней поверхности при больших углах атаки до конца профиля), но с небольшими скоростями отсоса (при оптимальном решении проницаемость K невелика, а перепады давления $\Delta p = p - p_c$ на проницаемой поверхности большие). Оптимальное решение дает предотрывный вариант обтекания при одном или обоих крайних углах обтекания.

2. Для ТПС проницаемый участок невелик и, как правило, его начало располагается перед точкой отрыва ПС. Скорости отсоса очень велики, в отличие от ЛПС. Уменьшение суммарного коэффициента сопротивления c_x достигается за счет значительного уменьшения толщины ПС и соответственно коэффициента сопротивления c_v за счет трения при сильном отсосе.

3. Наименьшим коэффициентом сопротивления профиля получается в случае наличия перехода ЛПС в турбулентный, который затягивает отрыв ПС (переход происходил на проницаемом участке). Кроме того, расход отсасываемой жидкости, а следовательно, и коэффициент c_s энергетических затрат получаются на порядок меньше, чем в предыдущем случае.

4. При соответствующем подборе функции $p_c(\alpha)$ отрыв удастся ликвидировать во всем диапазоне углов атаки для всех рассмотренных случаев.

Таким образом, введение проницаемого участка позволяет улучшать аэродинамические характеристики крыловых профилей за счет предотвращения отрыва ПС и, следовательно, уменьшения коэффициента сопротивления в более широком диапазоне углов атаки.

§ 22. Проектирование крылового профиля с минимальным коэффициентом аэродинамического сопротивления

Коэффициент подъемной силы c_y , пропорциональный циркуляции скорости, явно выражается через функцию $v(s)$. Для расчета коэффициента c_x сопротивления крылового профиля предварительно необходимо провести расчет ПС и лишь после этого, например, по формуле Сквайра – Юнга или непосредственным интегрированием вязких сил определить сопротивление. Связь $v(s)$ и c_x довольно сложная; задача определения оптимального $v(s)$ является важной. Способ правильного задания $v(s)$ особенно важен на диффузорном участке, на котором возможен отрыв потока, т. к. в задачах проектирования оптимальных крыловых профилей одно из ограничений – условие на безотрывность обтекания. Рассмотрим задачу построения оптимального крылового профиля с отсосом, причем в качестве параметра оптимизации возьмем сумму коэффициента вязкого сопротивления и коэффициента энергетических затрат на отсос.

22.1. Постановка задачи. В физической плоскости искомый крыловой профиль AB с бесконечно тонкой задней кромкой B обтекается плоским установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости. Точка схода потока совпадает с B и принята за начало координат, ось x выбрана параллельно вектору заданной на бесконечности скорости v_∞ (все скорости отнесем к v_∞). Дуговая абсцисса s отсчитывается по часовой стрелке от $s = 0$ в точке B до $s = \ell$ в ней же, где ℓ – периметр контура профиля. На участке $s \in L_1 = [s_l, s_u]$ задано распределение скорости $v(s)$, зависящее от $n \geq 3$ свободных параметров (рис. 22.1), скорость v_b в точке B задана.

Заданы максимальная скорость $v_{0\max}$ отсоса (случаю профиля без отсоса соответствует $v_{0\max} = 0$), число Рейнольдса $Re = v_\infty(\ell/2)/\nu$. Требуется определить распределение скорости $v(s)$ на участке $L_2 = (0, s_l) \cup (s_u, \ell)$, положения $(s_{mk}, s_{nk}) \subset L_2$ проницаемых участков, распределение скорости отсоса $v_0(s)$ на них и форму крылового профиля, имеющего минимальный ко-

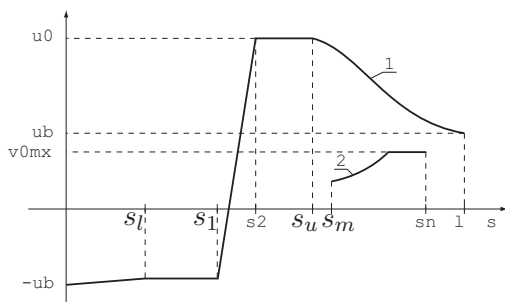


Рис. 22.1. Распределения скорости: 1 – задаваемая скорость $v(s)$ внешнего течения, 2 – искомая скорость $v_0(s)$ отсоса

эффицент сопротивления при ограничении на безотрывность обтекания.

22.2. Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики, расчет пограничного слоя и вычисление сопротивления. Поставленная задача разбивается на две. Первая – построение крылового профиля по заданному распределению скорости, а вторая – определение скоростей $v(s)$, $v_0(s)$ на участке L_2 . Предположим, что распределение $v(s)$ на этом участке найдено. Тогда задача сводится к классической ОКЗА и ее решение проводится по известной схеме [18]. Необходимо выполнение трех условий разрешимости – двух условий замкнутости контура крылового профиля и совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения. Для их удовлетворения используются три свободных параметра d_i . Так, для распределения скорости, изображенного на рис. 22.1, в качестве этих параметров выбраны дуговые абсциссы s_1 , s_2 и v_b .

Для расчета ПС использован интегральный метод Эшплера [64], описанный в § 19. Коэффициент полного сопротивления представлен как сумма коэффициентов вязкого и эквивалентного энергетическим затратам на отсос сопротивлений

$$c_x = c_v + c_s, \tag{22.1}$$

где c_v вычислялся по формуле Сквайра – Юнга (21.6), а коэф-

коэффициента c_s – по формуле (21.5).

Критерий отсутствия отрыва записан в виде $H \geq H^*$. В методе Эшлера для турбулентных слоев без отсоса реалистичные значения точки отрыва дает постоянная $H^* = 1.46$. В случае больших неблагоприятных градиентов давления и присутствия отсоса постоянную H^* необходимо выбрать с некоторым запасом, в расчетах взято $H^* = 1.50$.

22.3. Решение задачи оптимального управления.

Вторая задача – нахождение распределений $v(s)$ и $v_0(s)$ из условия минимальности c_x . Находится решение этой задачи на участке (s_u, ℓ) , на втором участке $(0, s_l)$ оно аналогично. Заданными считаем $v(s_u) = v_1$, $v(\ell) = v_b$, а также характеристики ПС $(\delta_{20}, \delta_{30})$ в точке s_u . Введем в рассмотрение функцию

$$c_x(s) = 2\delta_2(s) \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12}(s)}{2}} + \left(\frac{v_c}{v_\infty} \right)^2 \int_{s_u}^s \frac{v_0(s)}{v_\infty} ds + g(s). \quad (22.2)$$

Заметим, что при $g(\ell) = 0$ значение $c_x(\ell)$ с точностью до множителя $1/b$ совпадает с коэффициентом сопротивления верхней поверхности (22.1). Продифференцируем соотношение (22.2):

$$c'_x(s) = \left[2\delta'_2(s) + \delta_2(s) \ln \frac{v_b}{v_\infty} H'_{12}(s) \right] \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12}(s)}{2}} + \left(\frac{v_c}{v_\infty} \right)^2 \frac{v_0(s)}{v_\infty} + g'(s). \quad (22.3)$$

Введем вспомогательные функции

$$\sigma(s) = \frac{v_0(s)}{v(s)}, \quad \lambda(s) = \ln \frac{v(s)}{v_\infty}, \quad \mu(s) = \lambda'(s) = \frac{v'(s)}{v(s)}. \quad (22.4)$$

Добавим уравнение (22.3) и последнее уравнение (22.4) к системе (19.1):

$$\begin{aligned} c'_x &= \left[2\delta'_2 + \delta_2 \ln \frac{v_b}{v_\infty} H'_{12} \right] \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12}}{2}} + \left(\frac{v_c}{v_\infty} \right)^2 \frac{v}{v_\infty} \sigma + g'(s), \\ \lambda' &= \mu, \\ \delta'_2 &= c_f - (\delta_1 + 2\delta_2)\mu - \sigma, \\ \delta'_3 &= c_d - 3\delta_3\mu - \sigma. \end{aligned}$$

Полученную систему схематично запишем как

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \sigma, \mu), \quad (22.5)$$

где четырехкомпонентный вектор-функция \mathbf{x} и начальные условия для него в точке s_u имеют вид

$$\mathbf{x}(s) = \left(c_x(s), \lambda(s), \delta_2(s), \delta_3(s) \right)^T, \quad \mathbf{x}(s_u) = \left(c_{x0}, \ln \frac{v_1}{v_\infty}, \delta_{20}, \delta_{30} \right)^T.$$

Ограничение на безотрывность обтекания и условие $\lambda(\ell) = \ln \frac{v_b}{v_\infty}$ учтем в виде штрафной функции $g(s)$:

$$g(s) = A_s \int_{s_u}^s \ln \left\{ 1 + \exp \left[A_h \left(H^* - \frac{\delta_3(s)}{\delta_2(s)} \right) \right] \right\} ds + A_u [\lambda(s) - \ln v_b]^2, \quad (22.6)$$

где $A_s, A_h, A_u \gg 1$ – достаточно большие числа. При выполнении ограничения на безотрывность и условия совпадения скорости в задней кромке с заданной значение $g(\ell)$ практически равно нулю. В случае нарушения какого-либо ограничения $g(\ell) > 0$. Требуется минимизировать первую компоненту вектора \mathbf{x} в конечной точке ($s = \ell$):

$$\Phi[\mathbf{x}(\ell)] = x_1(\ell) \rightarrow \min.$$

В терминах задач оптимального управления функции $\sigma(s)$ и $\mu(s)$ являются управляющими. Для решения поставленной задачи используем принцип максимума Понтрягина [47]. Введем вспомогательную вектор-функцию $\mathbf{p}(s)$, для нахождения которой служит система дифференциальных уравнений

$$p'_i = - \sum_{j=1}^4 p_j \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \sigma, \mu)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (22.7)$$

с начальными условиями

$$p_i(\ell) = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i(\ell)} \quad \Rightarrow \quad p(\ell) = (-1, 0, 0, 0)^T.$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \sigma, \mu) = \sum_{i=1}^4 f_i(\mathbf{x}, \sigma, \mu) p_i = \mathcal{H}_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \mathcal{H}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{p})\sigma + \mathcal{H}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{p})\mu.$$

Неизвестные управляющие функции $\sigma(s)$ и $\mu(s)$ находим из принципа максимума Понтрягина

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \sigma^*, \mu^*) = \max_{\sigma \in D_\sigma, \mu \in D_\mu} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \sigma, \mu), \quad (22.8)$$

где индексом “*” обозначены значения функций в оптимальной точке, а множества D_σ и D_μ определены как

$$D_\sigma = \left\{ \sigma(s) = \frac{v_0(s)}{v(s)} \mid 0 \leq v_0(s) \leq v_{0\max}, \quad \forall s \in (s_u, \ell) \right\},$$

$$D_\mu = \left\{ \mu(s) \mid -\infty < \mu(s) \leq 0, \quad \forall s \in (s_u, \ell) \right\}.$$

В связи с тем, что гамильтониан \mathcal{H} зависит от $\sigma(s)$ и $\mu(s)$ линейно, принцип (22.8) преобразуем к виду

$$v_0^* = \begin{cases} 0, & \mathcal{H}_\sigma < 0, \\ [0, v_{0\max}], & \mathcal{H}_\sigma = 0, \\ v_{0\max}, & \mathcal{H}_\sigma > 0, \end{cases} \quad \mu^* = \begin{cases} -\infty, & \mathcal{H}_\mu < 0, \\ [\mu_{\min}, 0], & \mathcal{H}_\mu = 0, \\ 0, & \mathcal{H}_\mu > 0. \end{cases}$$

Заметим, что в связи с наличием ограничения на безотрывность градиент скорости на диффузорном участке не может принимать большие отрицательные значения, поэтому функция $\mu(s)$ будет всегда ограничена снизу (вариант $\mathcal{H}_\mu < 0$ не реализуется). Случаи $\mathcal{H}_\sigma = 0$ и $\mathcal{H}_\mu = 0$ – сингулярные и функции $\sigma(s)$ и $\mu(s)$ находятся из более сложных соотношений (см. [11]), следующих из рассмотрения уравнений $\mathcal{H}'_\sigma = 0$ и $\mathcal{H}'_\mu = 0$.

Основная сложность решения задачи оптимального управления состоит в том, что для нахождения $\sigma^*(s)$ и $\mu^*(s)$ необходимо знать функции \mathbf{x}^* , \mathbf{p}^* , а для определения последних из систем (22.5), (22.7) требуются $\sigma^*(s)$ и $\mu^*(s)$. Для преодоления этих трудностей использованы итерационные процедуры, описанные в [51].

22.4. Схема итерационного процесса. Для решения поставленной в п.22.1 задачи строится следующая итерационная процедура.

1. Задается каким-либо образом (например, линейно) нулевое распределение $v(s)$, $v_0(s)$, $s \in L_2$.
2. Решается ОКЗА, удовлетворяются условия разрешимости вариацией свободных параметров в распределении скорости.
3. Рассчитывается ПС, начиная от передней кромки до точек $s = s_u$ на верхней и $s = s_l$ на нижней поверхностях.
4. Решается задача оптимального управления по поиску $v(s)$, $v_0(s)$, $s \in L_2$.
5. Процесс повторяется с п.2 до тех пор, пока не будет достигнута сходимость процесса.

22.5. Числовые расчеты. Первый пример – тестовый, и в нем исследовалась работоспособность разработанного метода оптимизации, основанного на итерационных процедурах [51]. Исходное распределение скорости внешнего течения изображено на рис. 22.2 (кривая 1) и требовалось найти положение проницаемого участка и скорость отсоса на нем. Результат изображен на рис. 22.2 (кривая 2). Для сравнения здесь же приведено точное решение данной задачи (кривая 3), проведенное совместным интегрированием (22.5) и (22.7) [1]. Значение максимальной скорости отсоса было выбрано достаточно большим, поэтому на проницаемом участке реализуется сингулярный случай $\mathcal{H}_\sigma = 0$. Совпадение результатов численного и точного методов хорошее, что демонстрирует работоспособность численного метода.

Во втором примере решалась задача оптимизации скорости на диффузорном участке (профиль считался непроницаемым). В начальном приближении (кривая 1 на рис. 22.3, а) распределение скорости выбрано линейным. Соответствующий этому распределению крыловой профиль (кривая 1 на рис. 22.3, б) при расчетном угле атаки имеет коэффициент сопротивления $c_x = 10.29 \cdot 10^{-3}$ ($Re = 10^7$, ТПС). В результате оптимизации удалось достичь значения $c_x = 8.55 \cdot 10^{-3}$, распределение скорости и форма профиля изображены кривыми 2 на рис. 22.3.

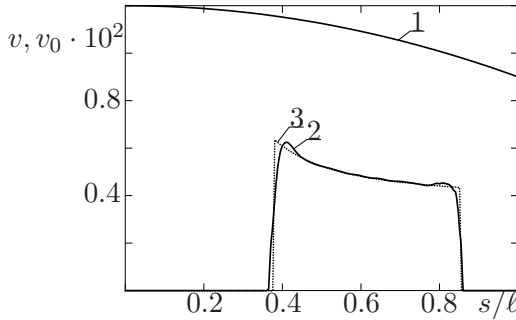


Рис. 22.2. Сравнение приближенного и точного методов решения задачи оптимального управления по нахождению $v_0(s)$: 1 – распределение $v(s)$, 2 – приближенный метод, 3 – точный метод

Т а б л и ц а 22.1

Сравнение характеристик крыловых профилей

№	Численно-аналитическое решение	XFLR5 (XFOIL)
1.	$c_x = 10.3 \cdot 10^{-3}$ $c_y = 1.058$	$c_x = 9.1 \cdot 10^{-3}$ $c_y = 0.978$
2.	$c_x = 8.6 \cdot 10^{-3}$ $c_y = 0.771$	$c_x = 7.8 \cdot 10^{-3}$ $c_y = 0.763$

Исходный и оптимизированный профили были рассчитаны программой “XFLR5”, основанной на программном коде “XFOIL” расчета дозвуковых крыловых профилей Марка Дрела [60]. Сравнение аэродинамических характеристик приведено в табл. 22.1, на рис. 22.4 показано сравнение распределений коэффициентов давления $c_p(x)$ для оптимального профиля. Небольшое расхождение вызвано, по-видимому, вязкими эффектами вблизи носика профиля и задней кромки.

В третьем примере задача решалась для распределения скорости, заданного в диапазоне углов атаки. Начальное распределение скорости изображено на рис. 22.5, а. Для достижения большого коэффициента подъемной силы максимальная скорость на верхней поверхности на полке в задаваемом распределении $v(s)$ выбрана равной 2.2 и на диффузорном участ-

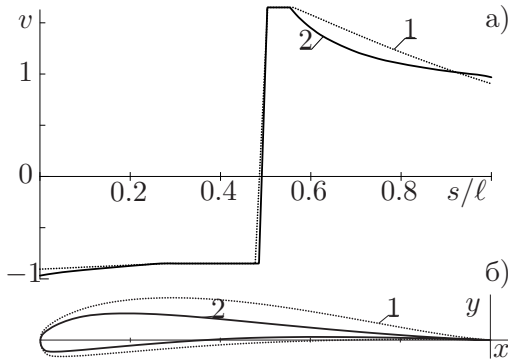


Рис. 22.3. Распределение скорости (а) и контур профиля (б): 1 – начальное приближение, 2 – профиль, полученный в результате минимизации c_x

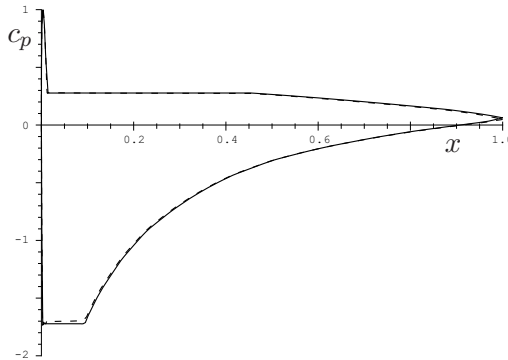


Рис. 22.4. Сравнение распределений коэффициентов давления численно-аналитического расчета (сплошная линия) и расчета в программе XFLR5 (штриховая)

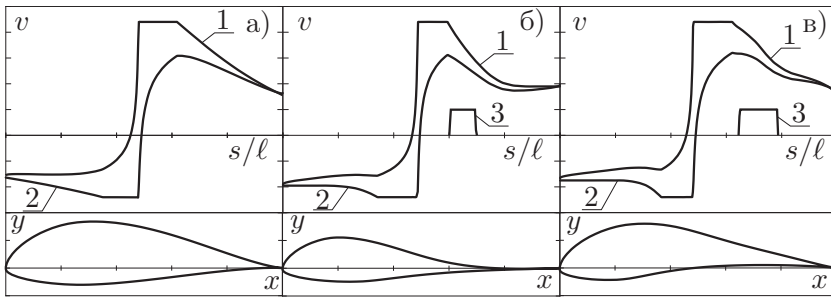


Рис. 22.5. Распределения скоростей и контуры профилей при решении задачи в диапазоне углов атаки: 1 – $v(s)$ для большего угла; 2 – $v(s)$ для меньшего угла; 3 – $v_0(s)$; а – начальное приближение; б – пример минимизации c_x ; в – пример совместной минимизации c_x и максимизации c_y

ке возникал отрыв потока ($Re = 10^6$, ТПС). Значения углов атаки и коэффициентов подъемной силы приведены в первой строчке табл. 22.2. Для предотвращения отрыва потока введен пронизываемый участок на верхней поверхности. Значение максимальной скорости отсоса выбрано $v_{0\max} = 5 \cdot 10^{-3}$. В ходе оптимизации искались распределения скорости внешнего течения и отсоса на диффузорных участках: $v(s)$ и $v_0(s)$ – на верхней поверхности из условия минимальности c_x при большем угле атаки α_2 ; $v(s)$ – на нижней поверхности из условия минимальности c_x при α_1 . Полученное распределение скорости изображено на рис. 22.5, б. Характеристики профиля приведены во второй строчке табл. 22.2.

Т а б л и ц а 22.2

Аэродинамические характеристики профилей

№	α_1	c_{y1}	c_{x1}	α_2	c_{y2}	c_{x2}
1.	-2°	0.3961	отрыв	14°	2.3563	отрыв
2.	0°	0.0709	1.0319	13°	1.6477	1.8159
3.	-1°	0.5881	1.1317	14°	2.3721	2.1802

Как видно, за счет введения пронизываемого участка и выбо-

ра $v(s)$ удалось достичь безотрывности и получить небольшой коэффициент c_x , но вместе с ним значительно уменьшился и коэффициент подъемной силы c_y . Во избежание этого модифицируем штрафную функцию (22.6), добавив к ней слагаемое $-A_\Gamma \int_{s_u}^s v(s) ds$. В результате среди множества распределений скорости с близким к оптимальному коэффициентом c_x будет отдано предпочтение распределению с большим коэффициентом c_y . Результат оптимизации при $A_\Gamma = 0.05$ изображен на рис. 22.5, в, характеристики профиля приведены в последней строчке табл. 22.2.

Таким образом, разработан метод оптимизации коэффициента аэродинамического сопротивления крылового профиля, основанный на теориях ОКЗА и оптимального управления. Приведены результаты числовых расчетов по проектированию крыловых профилей с минимальным сопротивлением как при одном угле атаки, так и в диапазоне. Исследован случай проектирования профилей с отсосом ПС, приведен способ определения положения проницаемого участка и скорости отсоса на нем.

Глава 6

Модельные задачи максимизации коэффициента подъемной силы контуров

Максимизация коэффициента подъемной силы крылового профиля является актуальной задачей аэродинамического проектирования. Задача определения формы гладкого замкнутого контура, на котором достигается наибольшее значение циркуляции скорости при обтекании потоком ИНЖ, исследовалась в ряде работ. В частности, в [25] сказано, что из формул М. А. Лаврентьева для вариаций конформных отображений следует, что таким контуром является окружность при режиме обтекания с совпадающими точками торможения и схода потока. Полное исследование этой задачи приведено в [17]; коэффициент подъемной силы, отнесенный к периметру контура и скорости набегающего потока, равен четырем.

Результаты, полученные в настоящей главе, позволяют теоретически оценить максимальную величину коэффициента подъемной силы контуров в рамках модели ИНЖ при наличии устройств управления потоком и для других сложных схем течения.

§ 23. Обтекание контура с источниками и стоками

Одним из простейших способов математического моделирования устройств отбора и выдува потока являются точечные особенности – сток и источник. В [2] показано, что решением задачи нахождения формы гладкого замкнутого контура фиксированной длины со стоком заданной интенсивности, обладающего максимальной циркуляцией, как и в непроницаемом слу-

чае, будет окружность с совпадающими точками разветвления и схода потока. Отмечено, что наличие стока позволяет увеличить максимальную циркуляцию до значений, не достижимых на непроницаемом круге. В [3] рассмотрен случай расположения на контуре источника и стока. Оптимальным контуром также будет окружность, причем максимальную циркуляцию удастся увеличить по сравнению со случаем одиночного стока. Естественно, вызывает интерес рассмотрение задачи в общем случае, когда на поверхности контура расположены m источников и n стоков.

23.1. Физическая формулировка задачи. В плоскости z искомым замкнутый гладкий контур L_z (рис. 23.1, а) фиксированного периметра ℓ обтекается потенциальным потоком ИНЖ с заданной скоростью v_∞ набегающего потока; область течения обозначим G_z . На контуре в точках M_j располагается m источников и в точках N_k – n стоков. Величины расходов через них обозначим через Q_{mj} , ($j = \overline{1, m}$) и Q_{nk} , ($k = \overline{1, n}$) соответственно (как и ранее, расход берется со знаком “плюс” для источника и со знаком “минус” – для стока). В дальнейшем будем использовать безразмерные расходы q_{mj} и q_{nk} , отнесенные к $v_\infty \ell$: $q_{mj} = Q_{mj}/(v_\infty \ell)$, $q_{nk} = Q_{nk}/(v_\infty \ell)$. Суммарные безразмерные расходы через все источники $q_m = \sum_{j=1}^m q_{mj}$ и стоки $q_n = \sum_{k=1}^n q_{nk}$ заданы. Считается, что выдуваемая через источники жидкость и внешний поток имеют одинаковые характеристики (а именно, плотность и полное давление), так что разрывов скорости на линиях раздела сред (как это было в § 8) нет. Предполагается, что критические точки, т. е. точки, в которых скорость обращается в нуль, располагаются только на контуре: A_k , ($k = \overline{0, n}$) – точки разветвления потока, B_j , ($j = \overline{0, m}$) – точки схода потока. Точка B_0 схода потока принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно направлению скорости набегающего потока.

Требуется определить форму контура, найти такое расположение на нем источников и стоков и такие величины расходов через них, чтобы коэффициент подъемной силы $c_y = 2\Gamma/(v_\infty \ell)$ был максимальным.

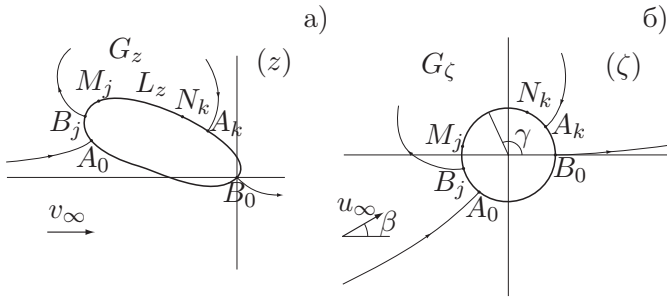


Рис. 23.1. Течение в физической и канонической плоскости

23.2. Сведение к оптимизационной задаче. Введем в рассмотрение каноническую область G_ζ ($|\zeta| > 1$) плоскости ζ (рис. 23.1, б). Соответствующие точки в плоскостях z и ζ обозначим одинаковыми буквами. Для взаимно однозначного конформного отображения областей G_z и G_ζ потребуем соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ и переход точки B_0 ($z = 0$) в точку $\zeta = 1$.

Как и в § 6, комплексно-сопряженную скорость $dw/d\zeta$ обтекания единичного круга с указанными выше источниками и стоками выпишем, воспользовавшись методом особенностей. Функция $dw/d\zeta$ имеет простые нули в точках $\zeta_{ak} = e^{i\gamma_{ak}}$ ($k = \overline{0, n}$) и $\zeta_{bj} = e^{i\gamma_{bj}}$ ($j = \overline{0, m}$). В точках $\zeta_{mj} = e^{i\gamma_{mj}}$ ($j = \overline{1, m}$) расположения источников и $\zeta_{nk} = e^{i\gamma_{nk}}$ ($k = \overline{1, n}$) стоков функция $dw/d\zeta$ имеет полюсы первого порядка, а на бесконечности равна $u_\infty e^{-i\beta}$. Таким образом,

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} \Omega(\zeta, \gamma_\nu), \quad (23.1)$$

$$\Omega(\zeta, \gamma_\nu) = \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_{a0}}{\zeta}\right) \prod_{j=1}^m \frac{\zeta - \zeta_{bj}}{\zeta - \zeta_{mj}} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta - \zeta_{ak}}{\zeta - \zeta_{nk}}, \quad (23.2)$$

где u_∞ и β – соответственно модуль и аргумент скорости потока на бесконечности в плоскости ζ ; а γ_ν , $\nu = \overline{1, 2m + 2n + 1}$ – свободные параметры $\gamma_{a0}, \gamma_{bj}, \gamma_{mj}, \gamma_{nk}, \gamma_{ak}$.

Рассмотрим выражение (23.1) на границе круга $|\zeta| > 1$ для установления связи между углом β и угловыми координатами точек на окружности и нахождения распределения скорости $u(\gamma) = \pm \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=e^{i\gamma}}$ (знак “+” выбирается при совпадении направления обхода контура с направлением скорости, а “-” – в обратном случае) по поверхности единичной окружности. Подставив в (23.1) $\zeta = e^{i\gamma}$ и отделив модуль и аргумент полученного выражения, получим связь углов

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\gamma_{a0} + \sum_{j=1}^m (\gamma_{bj} - \gamma_{mj}) + \sum_{k=1}^n (\gamma_{ak} - \gamma_{nk}) - \pi \right]$$

и выражение для распределения скорости

$$u(\gamma) = 4u_{\infty} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{a0}}{2} \times \prod_{j=1}^m \frac{\sin \frac{\gamma - \gamma_{bj}}{2}}{\sin \frac{\gamma - \gamma_{mj}}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\gamma - \gamma_{ak}}{2}}{\sin \frac{\gamma - \gamma_{nk}}{2}}. \quad (23.3)$$

Рассмотрим поведение $\frac{dw}{d\zeta}$ в окрестности бесконечно удаленной точки, в которой поток имеет источник интенсивности $-(Q_m + Q_n)$ и вихрь с циркуляцией $-\Gamma$:

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_{\infty} e^{-i\beta} + \frac{Q_m + Q_n + i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}.$$

Из (23.2) следует, что разложение $\Omega(\zeta)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\Omega(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta} \left(1 + \zeta_{a0} + \sum_{j=1}^m (\zeta_{bj} - \zeta_{mj}) + \sum_{k=1}^n (\zeta_{ak} - \zeta_{nk}) \right) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Следовательно,

$$Q_m + Q_n + i\Gamma = -u_{\infty} e^{-i\beta} \left(1 + \zeta_{a0} + \sum_{j=1}^m (\zeta_{bj} - \zeta_{mj}) + \sum_{k=1}^n (\zeta_{ak} - \zeta_{nk}) \right).$$

Выделив из этого равенства мнимую часть, получим соотношение для циркуляции

$$\Gamma = u_\infty f_0(\gamma_\nu), \quad (23.4)$$

где функция

$$f_0(\gamma_\nu) = -2\pi \left[\sin(-\beta) + \sum_{j=1}^m [\sin(\gamma_{bj} - \beta) - \sin(\gamma_{mj} - \beta)] + \right. \\ \left. + \sin(\gamma_{a0} - \beta) + \sum_{k=1}^n [\sin(\gamma_{ak} - \beta) - \sin(\gamma_{nk} - \beta)] \right].$$

Найдем аналогичные соотношения для расходов через источники и стоки, рассмотрев поведение комплексно-сопряженной скорости потока вблизи точек ζ_{mj} и ζ_{nk} . Так, вблизи источника с $j = r$ имеем

$$\frac{dw}{d\zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow \zeta_{mr}} \sim \frac{Q_{mr}}{2\pi} \frac{1}{\zeta - \zeta_{mr}} = \frac{q_{mr} v_\infty \ell}{2\pi} \frac{1}{\zeta - \zeta_{mr}}. \quad (23.5)$$

Из (23.1) следует, что

$$\frac{dw}{d\zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow \zeta_{mr}} \sim u_\infty e^{-i\beta} \frac{\Omega_{mr}}{\zeta - \zeta_{mr}}, \quad (23.6)$$

где

$$\Omega_{mr} = (\zeta_{mr} - \zeta_{br}) \left(1 - \frac{1}{\zeta_{mr}}\right) \left(1 - \frac{\zeta_{a0}}{\zeta_{mr}}\right) \prod_{j \neq r} \frac{\zeta_{mr} - \zeta_{bj}}{\zeta_{mr} - \zeta_{mj}} \prod_k \frac{\zeta_{mr} - \zeta_{ak}}{\zeta_{mr} - \zeta_{nk}}.$$

Можно убедиться, что произведение $e^{-i\beta} \Omega_{mr}$ является чисто вещественным выражением. Сопоставив (23.5) и (23.6), получим соотношения для расходов через источники

$$q_{mj} = \frac{u_\infty}{v_\infty \ell} f_{mj}(\gamma_\nu), \quad j = \overline{1, m}.$$

Проведя аналогичные рассуждения при $\zeta \rightarrow \zeta_{nr}$, найдем соотношения для расходов через стоки

$$q_{nk} = \frac{u_\infty}{v_\infty \ell} f_{nk}(\gamma_\nu), \quad k = \overline{1, n},$$

где f_{mj} и f_{nk} – функции от $2m + 2n + 1$ переменных:

$$f_{mr}(\gamma_\nu) = 8\pi \sin \frac{\gamma_{mr}}{2} \sin \frac{\gamma_{mr} - \gamma_{a0}}{2} \sin \frac{\gamma_{mr} - \gamma_{br}}{2} \times \\ \times \prod_{j \neq r} \frac{\sin \frac{\gamma_{mr} - \gamma_{bj}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{mr} - \gamma_{mj}}{2}} \prod_k \frac{\sin \frac{\gamma_{mr} - \gamma_{ak}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{mr} - \gamma_{nk}}{2}},$$

$$f_{nr}(\gamma_\nu) = 8\pi \sin \frac{\gamma_{nr}}{2} \sin \frac{\gamma_{nr} - \gamma_{a0}}{2} \sin \frac{\gamma_{nr} - \gamma_{ar}}{2} \times \\ \times \prod_j \frac{\sin \frac{\gamma_{nr} - \gamma_{bj}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{nr} - \gamma_{mj}}{2}} \prod_{k \neq r} \frac{\sin \frac{\gamma_{nr} - \gamma_{ak}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{nr} - \gamma_{nk}}{2}}.$$

Условия заданности суммарных расходов через источники и стоки запишутся в виде

$$q_m = \frac{u_\infty}{v_\infty \ell} f_m(\gamma_\nu), \quad q_n = \frac{u_\infty}{v_\infty \ell} f_n(\gamma_\nu), \quad (23.7)$$

где

$$f_m(\gamma_\nu) = \sum_{j=1}^m f_{mj}(\gamma_\nu), \quad f_n(\gamma_\nu) = \sum_{k=1}^n f_{nk}(\gamma_\nu).$$

Рассмотрим аналитическую в области G_ζ функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} - \ln \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} = \tilde{S} + i\tilde{\theta}. \quad (23.8)$$

Зададим действительную часть функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на границе $\zeta = e^{i\gamma}$:

$$\tilde{S}(\gamma) = \operatorname{Re} \tilde{\chi}(e^{i\gamma}) = \ln \left| \frac{dw/d\zeta}{dw/dz} \right|_{\zeta=e^{i\gamma}} - \ln \left| \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} \right| = \\ = \ln \frac{u(\gamma)}{v(\gamma)} - \ln \frac{u_\infty}{v_\infty}. \quad (23.9)$$

По ней можно восстановить всю функцию $\tilde{\chi}(\gamma)$ во внешности единичной окружности по (6.10) и, в частности, мнимую часть $\tilde{\theta}(\gamma) = \operatorname{Im} \tilde{\chi}(e^{i\gamma})$ на границе (формула (6.11)). Учтя (23.9), найдем распределение скорости $v(\gamma) = \left| \frac{dw}{dz} \right|_{\zeta=e^{i\gamma}}$ на контуре искомого профиля

$$v(\gamma) = \frac{v_\infty}{u_\infty} u(\gamma) e^{-\tilde{S}(\gamma)}. \quad (23.10)$$

Для нахождения формы контура перепишем (23.8) в виде

$$dz = \frac{u_\infty}{v_\infty} e^{\tilde{\chi}(\gamma) - i\beta} d\zeta.$$

Воспользовавшись соотношением $d\zeta = d(e^{i\gamma}) = e^{i(\gamma + \pi/2)} d\gamma$, запишем параметрическое уравнение контура

$$z(\gamma) = x(\gamma) + iy(\gamma) = \frac{u_\infty}{v_\infty} \int_0^\gamma e^{\tilde{S}(\gamma)} e^{i[\tilde{\theta}(\gamma) + \gamma + \pi/2 - \beta]} d\gamma.$$

Установим связь между заданным периметром ℓ контура и неизвестной величиной u_∞ , проинтегрировав $|dz|$ по границе круга

$$\ell = \int_{L_\zeta} |dz| = \frac{u_\infty}{v_\infty} J_\ell(\tilde{S}), \quad J_\ell(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} e^{\tilde{S}(\gamma)} d\gamma. \quad (23.11)$$

Функцию $\tilde{S}(\gamma)$ нельзя выбирать произвольно. Она, как известно (см., например, [18]), должна удовлетворять условиям разрешимости ОКЗА, которые включают в себя одно условие совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения и два условия замкнутости контура.

Для получения первого условия рассмотрим $\tilde{\chi}(\zeta)$ на бесконечности. Из (23.8) следует

$$\tilde{\chi}(\infty) = \ln \left. \frac{dw/d\zeta}{dw/dz} \right|_{\zeta=\infty} - \ln \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{u_\infty} = 0.$$

С другой стороны, из (6.10) имеем

$$\tilde{\chi}(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma.$$

Приравняв эти два выражения, получим первое условие разрешимости

$$J_1(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 0. \quad (23.12)$$

Условие замкнутости контура следует из равенства нулю вычета на бесконечности $dz/d\zeta$. Нетрудно показать, что оно будет выполнено в случае равенства нулю вычета функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на бесконечности. Используя (6.10) для записи этого вычета через $\tilde{S}(\gamma)$, получим два вещественных условия замкнутости:

$$J_2(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = 0, \quad (23.13)$$

$$J_3(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0. \quad (23.14)$$

23.3. Математическая формулировка оптимизационной задачи. Запишем максимизируемый коэффициент c_y подъемной силы с учетом (23.4) и (23.11):

$$c_y = \frac{2\Gamma}{v_\infty \ell} = \frac{2f_0(\gamma_\nu)}{J_\ell(\tilde{S})}.$$

Дадим следующую математическую формулировку оптимизационной задачи.

Задача А. Найти 2π -периодическую функцию $\tilde{S}(\gamma)$, $\gamma \in [0, 2\pi]$ и параметры $\gamma_\nu, \nu = \overline{2m + 2n + 1}$, при которых функционал

$$J_0(\tilde{S}, \gamma_\nu) = f_0(\gamma_\nu)/J_\ell(\tilde{S}) \quad (23.15)$$

принимает максимальное значение с учетом трех условий разрешимости:

$$J_1(\tilde{S}) = 0, \quad J_2(\tilde{S}) = 0, \quad J_3(\tilde{S}) = 0 \quad (23.16)$$

и условий заданности суммарных расходов:

$$f_m(\gamma_\nu) = q_m J_\ell(\tilde{S}), \quad (23.17)$$

$$f_n(\gamma_\nu) = q_n J_\ell(\tilde{S}). \quad (23.18)$$

23.4. Направление аналитического решения. Вся сложность решения задачи A состоит в наличии ограничений (23.17) и (23.18), связывающих искомую функцию $\tilde{S}(\gamma)$ и параметры γ_ν . При их отсутствии согласно (23.15) задача свелась бы к максимизации $f_0(\gamma_\nu)$ и минимизации функционала $J_\ell(S)$ при условиях (23.16). Однако задачу A можно подразделить на две более простых задачи.

Задача Б. Найти функцию $\tilde{S}(\gamma)$, удовлетворяющую условиям разрешимости (23.16) и уравнению $J_\ell(\tilde{S}) = C$, где $C > 0$ – заданное вещественное число.

Задача В. Найти параметры γ_ν , при которых функция $f_0(\gamma_\nu)$ принимает максимальное значение при двух ограничениях:

$$f_m(\gamma_\nu) = Cq_m, \quad f_n(\gamma_\nu) = Cq_n.$$

Решение задачи B согласно [17] следующее:

1. При $C < 2\pi$ решение не существует.
2. При $C = 2\pi$ решение существует и единственно: $\tilde{S}(\gamma) \equiv 0$.
3. При $C > 2\pi$ существует бесконечное множество решений.

Задачу B можно трактовать как задачу оптимизации расположения критических точек и особенностей на единичной окружности при единичной скорости набегающего потока и суммарном расходе $Q_m = Cq_m$ через источники и $Q_n = Cq_n$ через стоки (это следует из (23.7)). После ее решения определится значение оптимизируемой функции $f_0(\gamma_\nu)$, которое, естественно, будет зависеть от C . Согласно (23.15) оптимизируемый коэффициент c_y также будет функцией от C :

$$c_y = 2J_0(C) = \frac{2}{C} \left[\max_{\gamma_\nu} f_0(\gamma_\nu) \right] (C).$$

Если показать, что на интервале $[2\pi, \infty)$ эта функция имеет максимум в точке $C = 2\pi$ (для этого достаточно показать, что она является монотонно убывающей), то можно утверждать, что решением поставленной задачи будет окружность. Действительно, в этом случае $\tilde{S}(\gamma) \equiv 0$ и подставив в (23.10), получим,

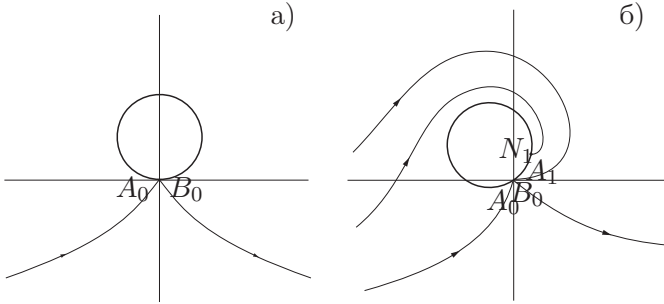


Рис. 23.2. Случай непроницаемого контура (а) и контура со стоком (б)

что распределение скорости на искомом контуре совпадает с точностью до константы с распределением скорости на окружности.

Исследование задачи *B* – оптимизации циркуляции скорости на окружности – начнем с простейших случаев.

23.5. Случай непроницаемого контура. Обтекание непроницаемого контура исследовано в [17]. В этом случае $n = 0$, $m = 0$. Имеется всего один свободный параметр γ_{a0} и требуется максимизировать

$$f_0(\gamma_{a0}) = 2\pi \left[\sin \frac{\gamma_{a0} - \pi}{2} - \sin \frac{\gamma_{a0} + \pi}{2} \right].$$

Ограничений нет. Эта функция достигает своего максимума 4π при $\gamma_{a0} = 2\pi$. Функция $J_0(C) = 4\pi/C$ является монотонно убывающей и на интервале $[2\pi, \infty)$ достигает максимума $J_0 = 2$ при $C = 2\pi$. Поэтому, согласно сказанному выше, оптимальным контуром будет окружность. Картина течения изображена на рис. 23.2, а; коэффициент подъемной силы для такого обтекания $c_y = 4$ (см. также [37]).

23.6. Случай контура со стоком. В этом случае $n = 1$, $m = 0$. Имеются три свободных параметра: $\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}$. Требуется максимизировать

$$f_0(\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}) = 2\pi [\sin \beta - \sin(\gamma_{a0} - \beta) + \sin(\gamma_{n1} - \beta) - \sin(\gamma_{a1} - \beta)],$$

$$\beta = \frac{1}{2}[\gamma_{a0} + \gamma_{a1} - \gamma_{n1} - \pi]$$

при одном ограничении

$$f_n(\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}) = Cq_n, \quad (23.19)$$

где

$$f_n(\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}) = 8\pi \sin \frac{\gamma_{n1}}{2} \sin \frac{\gamma_{n1} - \gamma_{a0}}{2} \sin \frac{\gamma_{n1} - \gamma_{a1}}{2}.$$

Для решения этой задачи введем функцию Лагранжа

$$L(\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}) = f_0(\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}) + \mu f_n(\gamma_{a0}, \gamma_{a1}, \gamma_{n1}).$$

В экстремальной точке необходимо выполнение следующих условий:

$$\partial L / \partial \gamma_{a0} = 0, \quad \partial L / \partial \gamma_{a1} = 0, \quad \partial L / \partial \gamma_{n1} = 0. \quad (23.20)$$

Выписав эти производные и сложив первое полученное выражение со вторым, получим

$$\sin \frac{\gamma_{n1}}{2} \left[\sin \frac{\gamma_{n1} - 2\beta}{2} - \mu \cos \frac{\gamma_{n1} - 2\beta}{2} \right] = 0.$$

Из (23.19) следует, что $\sin \frac{\gamma_{n1}}{2} \neq 0$ и, следовательно,

$$\mu = \operatorname{tg} \frac{\gamma_{n1} - 2\beta}{2}.$$

Сложив первое выражение (23.20) с третьим и второе с третьим, найдем

$$\mu = \operatorname{tg} \frac{\gamma_{a1} + \gamma_{n1} - 2\beta}{2}, \quad \mu = \operatorname{tg} \frac{\gamma_{a0} + \gamma_{n1} - 2\beta}{2}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\gamma_{a1} = 0, \quad \gamma_{a0} = 2\pi,$$

а угловая координата положения стока и величина циркуляции вычисляются по следующим формулам:

$$\gamma_{n1}(C) = 2 \arcsin \left(-\frac{Cq_n}{8\pi} \right)^{1/3},$$

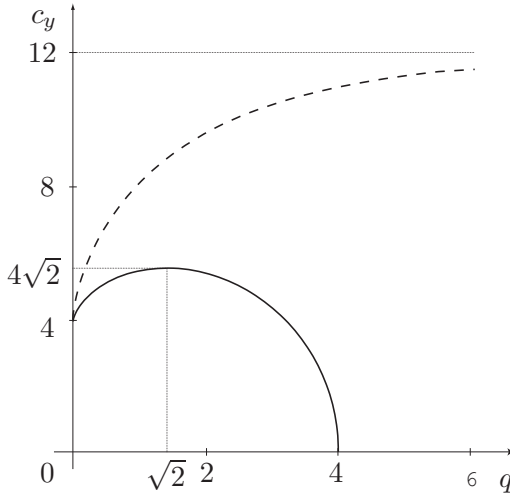


Рис. 23.3. Зависимость c_y от расхода

$$J_0(C) = \frac{\max_{\gamma_\nu} f_0(\gamma_\nu)}{C} = \frac{2\pi}{C} \left[3 \cos \frac{\gamma_{n1}(C)}{2} - \cos \frac{3\gamma_{n1}(C)}{2} \right].$$

Функция $J_0(C)$ для любых q_n является монотонно убывающей, поэтому на интервале $[2\pi, -8\pi/q_n]$ максимум достигается при $C = 2\pi$ (при $C > -8\pi/q_n$ решение не существует, т. к. реализуется течение с критической точкой в потоке). Следовательно, и в этом случае оптимальным контуром будет окружность.

Зависимость коэффициента подъемной силы от интенсивности стока $q = -q_n$ будет

$$c_y = 6 \cos \frac{\gamma_{n1}}{2} - 2 \cos \frac{3\gamma_{n1}}{2}, \quad \gamma_{n1} = 2 \arcsin \sqrt[3]{\frac{q}{4}}.$$

Схема течения изображена на рис. 23.2, б, зависимость $c_y(q)$ приведена на рис. 23.3 сплошной линией. Максимальному значению коэффициента подъемной силы соответствует режим обтекания с $q = \sqrt{2}$. При этом $c_y = 4\sqrt{2}$, что в $\sqrt{2}$ раз больше, чем при обтекании непроницаемого круга. При дальнейшем увеличении мощности стока $q \in (\sqrt{2}, 4)$ значение максимального c_y

уменьшается до нуля. При $q > 4$ точка схода потока отрывается от контура и отходит в поток, что не соответствует постановке задачи.

23.7. Случай контура с источником. Задача обтекания контура с одним точечным источником ($n = 0$, $m = 1$) полностью аналогична задаче со стоком, необходимо только поменять на противоположное направление вектора скорости на линиях тока на рис. 23.2, б.

23.8. Случай контура с источником и стоком. В этом случае $n = 1$, $m = 1$. Имеются пять свободных параметров γ_{a0} , γ_{a1} , γ_{n1} , γ_{b1} , γ_{m1} , обозначенные для краткости через γ_ν . Требуется максимизировать

$$f_0(\gamma_\nu) = 2\pi[\sin \beta - \sin(\gamma_{a0} - \beta) - \sin(\gamma_{a1} - \beta) - \\ - \sin(\gamma_{b1} - \beta) + \sin(\gamma_{n1} - \beta) + \sin(\gamma_{m1} - \beta)], \\ \beta = \frac{1}{2}[\gamma_{a0} + \gamma_{a1} + \gamma_{b1} - \gamma_{n1} - \gamma_{m1} - \pi]$$

при двух ограничениях:

$$f_1(\gamma_\nu) = Cq_m, \quad f_2(\gamma_\nu) = Cq_n,$$

где

$$f_1(\gamma_\nu) = 8\pi \sin \frac{\gamma_{m1}}{2} \sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{a0}}{2} \sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{a1}}{2} \times \\ \times \sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{b1}}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{n1}}{2}, \\ f_2(\gamma_\nu) = 8\pi \sin \frac{\gamma_{n1}}{2} \sin \frac{\gamma_{n1} - \gamma_{a0}}{2} \sin \frac{\gamma_{n1} - \gamma_{a1}}{2} \times \\ \times \sin \frac{\gamma_{n1} - \gamma_{b1}}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma_{n1} - \gamma_{m1}}{2}.$$

Эта задача представляет собой задачу минимизации функции пяти переменных; ее решение проведено численно. Установлено, что максимальное значение циркуляции достигается в случае совпадения всех критических точек, как и в предыдущем случае

$$\gamma_{a1} = 0, \quad \gamma_{a0} = 2\pi, \quad \gamma_{b1} = 2\pi.$$

С учетом этого можно записать аналитическое выражение для величины циркуляции

$$J_0(C) = \frac{2\pi}{C} \left[-4 \cos \frac{\gamma_{n1} + \gamma_{m1}}{2} + \cos \frac{3\gamma_{n1} + \gamma_{m1}}{2} + \cos \frac{3\gamma_{m1} + \gamma_{n1}}{2} \right],$$

где угловые координаты положения источника и стока находятся из решения следующей системы уравнений:

$$\frac{4 \sin^4 \frac{\gamma_{n1}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{n1}}{2}} = -\frac{Cq_n}{2\pi}, \quad \frac{4 \sin^4 \frac{\gamma_{m1}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{n1}}{2}} = \frac{Cq_m}{2\pi}. \quad (23.21)$$

Поведение функции $J_0(C)$ исследовалось численно. Как видно из системы (23.21), эта функция зависит от двух параметров q_m и q_n . Показано, что функция $J_0(C)$ является монотонно убывающей на всем интервале своего определения $[2\pi, C^*(q_m, q_n)]$ (правая граница этого интервала также находилась численно). Значит $J_0(C)$ достигает максимума при $C = 2\pi$, следовательно, в этом случае оптимальным контуром снова будет окружность.

Для окружности имеем

$$c_y = -8 \cos \frac{\gamma_{n1} + \gamma_{m1}}{2} + 2 \cos \frac{3\gamma_{n1} - \gamma_{m1}}{2} + 2 \cos \frac{3\gamma_{m1} - \gamma_{n1}}{2},$$

где γ_{n1} и γ_{m1} – решение системы

$$\frac{4 \sin^4 \frac{\gamma_{n1}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{n1}}{2}} = -q_n, \quad \frac{4 \sin^4 \frac{\gamma_{m1}}{2}}{\sin \frac{\gamma_{m1} - \gamma_{n1}}{2}} = q_m.$$

Схема течения для случая $|q_n| > |q_m|$ (мощность стока больше мощности источника) изображена на рис. 23.4, а.

Была найдена область существования решения, т. к. не при всяких заданных q_m и q_n возможно течение без критических точек в потоке. Эта область изображена на рис. 23.5, а. Если расходы q_m, q_n таковы, что точка с координатами (q_n, q_m) не попадает в заштрихованную область, то две или все четыре

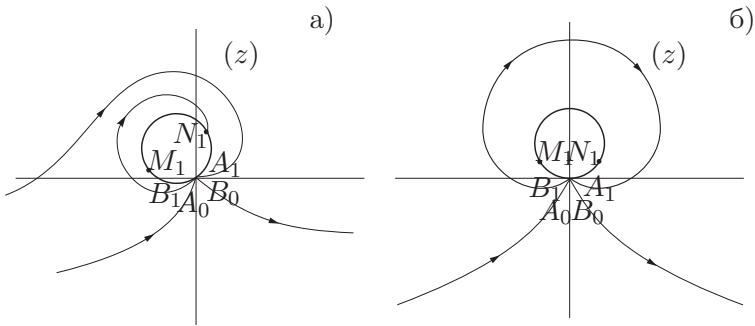


Рис. 23.4. Течение в физической плоскости в случае наличия на контуре источника и стока

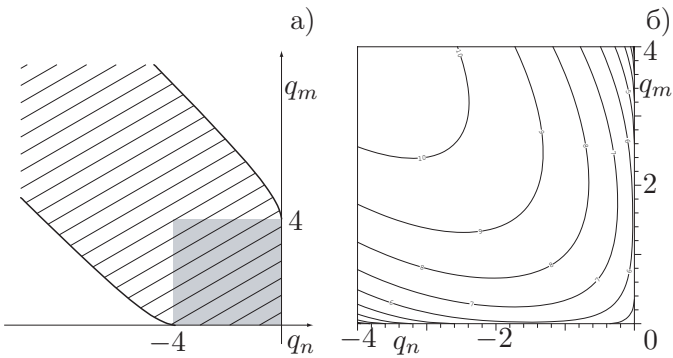


Рис. 23.5. Область существования решения и изолинии c_y в параметрической плоскости (q_n, q_m)

критические точки уходят во внешний поток, что не соответствует физической постановке задачи. На рис. 23.5, б в координатах q_m, q_n изображены изолинии максимальной величины циркуляции скорости на круговом контуре.

Наиболее интересен случай $|q_m| = |q_n|$ (мощности источника и стока равны). В этом случае $q_m = -q_n = q$ и картина обтекания симметрична (рис. 23.4, б) и $\gamma_m = 2\pi - \gamma_n$. Для c_y и q в этом случае имеем

$$c_y = 8 - 4 \cos \gamma_n, \quad q = 2 \sin^3 \frac{\gamma_n}{2} \cos^{-1} \frac{\gamma_n}{2}.$$

Зависимость c_y от величины абсолютного значения расхода q для этого случая приведена на рис. 23.3 штриховой линией. Максимальное значение коэффициента подъемной силы достигается при стремлении мощности источника и стока к бесконечности: $q \rightarrow \infty$. В этом случае $\gamma_n = \gamma_m \rightarrow \pi$ и в точке $\zeta = -1$ (рис. 23.1, б) образуется диполь. Максимальное значение $c_y = 12$, что в три раза больше, чем в случае непроницаемой окружности.

23.9. Случай контура с двумя стоками. Рассмотрим вариант, когда $n = 2, m = 0$. Незвестных параметров γ_ν пять: $\gamma_{a0} > \gamma_{n1} > \gamma_{a1} > \gamma_{n2} > \gamma_{a2}$. Задача максимизации $f_0(\gamma_\nu)$ решалась численно с использованием того же метода, что и в предыдущем пункте. При этом удалось показать, что оптимум достигается при $\gamma_{a0} = 2\pi, \gamma_{a2} = 0$. Зафиксируем эти параметры, а остальные ($\gamma_{n1}, \gamma_{a1}, \gamma_{n2}$) найдем аналитически. Требуется максимизировать

$$f_0(\gamma_{a1}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}) = 2\pi[3 \sin \beta - \sin(\gamma_{a1} - \beta) + \sin(\gamma_{n1} - \beta) + \sin(\gamma_{n2} - \beta)], \quad \beta = \frac{1}{2}[\gamma_{a1} - \gamma_{n1} - \gamma_{n2} + \pi]$$

при одном ограничении

$$f_1(\gamma_{a1}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}) = 2\pi[\cos(\gamma_{n1} - \beta) + \cos(\gamma_{n2} - \beta)] - 3 \cos \beta - \cos(\gamma_{a1} - \beta) = Cq_n.$$

Для решения этой задачи введем функцию Лагранжа

$$L(\gamma_{a1}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}) = f_0(\gamma_{a1}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}) + \mu f_1(\gamma_{a1}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}).$$

В экстремальной точке необходимо выполнение следующих условий:

$$\partial L / \partial \gamma_{n1} = 0, \quad \partial L / \partial \gamma_{n2} = 0, \quad \partial L / \partial \gamma_{a2} = 0.$$

Выписав эти производные и выполнив преобразования, из первого выражения получим

$$\mu = \operatorname{tg} \frac{2\beta - \gamma_{n1}}{2}.$$

Из двух других выражений найдем

$$\mu = \operatorname{tg} \frac{2\beta - \gamma_{n2}}{2}, \quad \mu = \operatorname{tg} \frac{2\beta - \gamma_{a1}}{2}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\gamma_{n1} = \gamma_{n2} = \gamma_{a1},$$

т. е. оба стока и одна критическая точка располагаются в одной точке. Таким образом, мы пришли к задаче пункта 23.6 об оптимизации c_y контура с одним стоком.

23.10. Общий случай. Аналитическое решение задачи B представляет значительные трудности, поэтому ее исследование проводилось численно. Для оптимизации использовался численный метод, описанный в пункте 23.8. Были исследованы несколько случаев с различными общим количеством источников и стоков и величинами расходов через них.

В результате проведенных вычислительных экспериментов построенная функция $J_0(C, q_n, q_m)$ оказалась совпадающей с аналогичной функцией в случае одного источника и одного стока. Таким образом, для достижения максимального значения циркуляции все источники должны сойтись в некоторой точке с угловой координатой γ_{n1} , а все стоки – в точке с угловой координатой γ_{m1} . Решение этой задачи было рассмотрено в пункте 23.8.

На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Оптимальным контуром в рассматриваемой задаче является окружность.

2. Значение максимального коэффициента подъемной силы достигается в случае одного источника и одного стока.
3. Максимальное значение c_y реализуется, когда источник и сток располагаются таким образом, что все четыре критические точки сходятся в одной точке.
4. Наличие источника и стока позволяет значительно увеличить коэффициент c_y . Так, для одного стока или источника c_y больше в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с коэффициентом подъемной силы непроницаемой окружности, при наличии и источника, и стока значение c_y в предельном случае в 3 раза больше, чем для непроницаемой окружности.

§ 24. Обтекание контура и вихря

В настоящем параграфе ставится и решается задача нахождения такого гладкого замкнутого контура, обтекаемого потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, и такого положения в этом потоке вихря, которые обеспечивали бы максимальный коэффициент подъемной силы.

24.1. Постановка задачи. В плоскости z искомым замкнутый гладкий контур L_z (рис. 24.1, а) фиксированного периметра ℓ обтекается потенциальным потоком ИНЖ с известной скоростью v_∞ набегающего потока. В некоторой точке O потока находится вихрь заданной интенсивности Γ_0 . Через Γ обозначена циркуляция потока по любому контуру, охватывающему контур L_z и вихрь. Предполагается, что реализуется схема течения с тремя критическими точками, две из которых располагаются на L_z (A – точка разветвления потока, B – точка схода), а третья (точка M) – в потоке. В то же время предполагается, что не реализуется схема течения, изображенная на рис. 24.1, б с чисто циркуляционным течением вокруг контура L_z и вихря в точке O , так как для такой схемы возможно любое сколь угодно большое значение циркуляции Γ . Точку B схода потока примем за начало координат, ось абсцисс выберем параллельно направлению скорости набегающего потока.

Требуется определить такую форму контура L_z и найти положение точки O расположения вихря, чтобы коэффициент

подъемной силы $c_y = 2\Gamma/(v_\infty \ell)$ был максимальным.

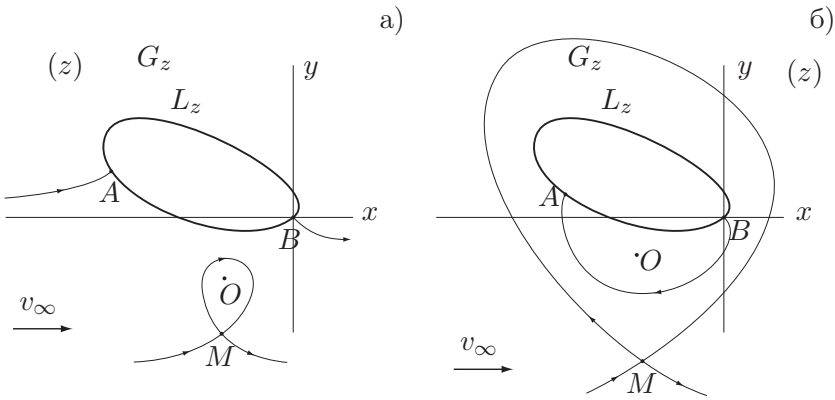


Рис. 24.1. Течение в физической плоскости: а) обычный случай, б) случай чисто циркуляционного течения

24.2. Выбор управляющих параметров. Введем в рассмотрение каноническую область G_ζ , ($|\zeta| > 1$) в плоскости ζ (рис. 24.2). Соответствующие точки в плоскостях z и ζ будем обозначать одинаковыми буквами. Для взаимно однозначного конформного отображения областей G_z и G_ζ потребуем соответствия бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ и выполнение условия

$$\operatorname{Im} \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\infty} = 0, \quad (24.1)$$

означающего, что скорость на бесконечности в канонической области также направлена вдоль оси абсцисс.

Комплексный потенциал $w(\zeta)$ обтекания окружности при наличии в потоке вихря с циркуляцией Γ_0 в точке $\zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ и вихря с циркуляцией Γ на бесконечности имеет вид

$$w(\zeta) = u_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln \left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right), \quad (24.2)$$

где u_∞ – модуль скорости на бесконечности в плоскости ζ .

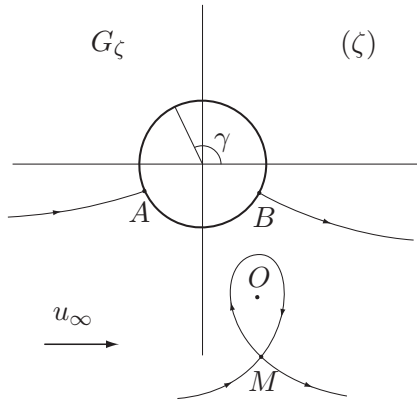


Рис. 24.2. Течение в канонической плоскости

Комплексно-сопряженную скорость $dw/d\zeta$ обтекания единичного круга с вихрем в потоке можно записать, воспользовавшись методом особенностей,

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty \cdot \frac{(\zeta - \zeta_a)(\zeta - \zeta_b)}{\zeta^2} \cdot \frac{(\zeta - \zeta_m)(\zeta - 1/\bar{\zeta}_m)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - 1/\bar{\zeta}_0)}. \quad (24.3)$$

В это соотношение входят неизвестные параметры: $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$, $\zeta_b = e^{i\gamma_b}$, $\zeta_m = r_m e^{i\gamma_m}$, определяющие положение критических точек A , B , M . Для нахождения этих параметров достаточно продифференцировать соотношение (24.2) и привести его к виду (24.3). Но удобнее использовать другой способ.

Рассмотрев (24.3) на границе круга $\zeta = e^{i\gamma}$, найдем распределение скорости $u(\gamma)$ по единичной окружности

$$u(\gamma) = 4u_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_b}{2} \times \frac{r_m + 1/r_m - 2 \cos(\gamma - \gamma_m)}{r_0 + 1/r_0 - 2 \cos(\gamma - \gamma_0)} \quad (24.4)$$

и установим зависимость между угловыми координатами критических точек

$$\gamma_a + \gamma_b + 2(\gamma_m - \gamma_0) = \pi, \quad (24.5)$$

которую используем для нахождения γ_a .

Пусть μ_k , ($k = \overline{1,5}$) – параметры γ_b , γ_0 , r_0 , γ_m , r_m , которые будем называть управляющими. Из выражения (24.3) в окрестности бесконечно удаленной точки, в которой поток имеет вихрь с циркуляцией Γ , получим соотношения

$$u_\infty f_1(\mu_k) = \Gamma, \quad (24.6)$$

$$f_2(\mu_k) = 0, \quad (24.7)$$

где

$$f_1(\mu_k) = 2\pi \left[\left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \sin \gamma_0 - \left(r_m + \frac{1}{r_m} \right) \sin \gamma_m - \sin \gamma_a - \sin \gamma_b \right],$$

$$f_2(\mu_k) = 2\pi \left[\left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \gamma_0 - \left(r_m + \frac{1}{r_m} \right) \cos \gamma_m - \cos \gamma_a - \cos \gamma_b \right].$$

Коэффициент подъемной силы, отнесенный к скорости на бесконечности и периметру контура, имеет вид

$$c_y = \frac{2u_\infty f_1(\mu_k)}{v_\infty \ell}. \quad (24.8)$$

Рассмотрев поведение комплексно-сопряженной скорости (24.3) вблизи точки ζ_0 , получим ограничение

$$u_\infty f_3(\mu_k) = \Gamma_0, \quad (24.9)$$

где

$$f_3(\mu_k) = 2\pi \operatorname{Im} \left[\frac{(\zeta_0 - \zeta_a)(\zeta_0 - \zeta_b)}{\zeta_0^2} \cdot \frac{(\zeta_0 - \zeta_m)(\zeta_0 - 1/\bar{\zeta}_m)}{(\zeta_0 - 1/\bar{\zeta}_0)} \right].$$

Еще одно ограничение следует из невозможности течения, изображенного на рис. 24.1, б. Это ограничение будет выполняться в случае, если

$$f_4(\mu_k) \geq 0, \quad f_4(\mu_k) = \operatorname{Im}[w(\zeta_b) - w(\zeta_m)]. \quad (24.10)$$

24.3. Выбор управляющей функции. Введем аналитическую в области G_ζ функцию

$$\chi(\zeta) \equiv S + i\theta = \ln \frac{dz}{d\zeta} - \ln \frac{u_\infty}{v_\infty}, \quad (24.11)$$

полностью определяющую вид контура L_z в физической плоскости. Для нахождения этой функции достаточно задать ее вещественную часть на границе. Поэтому в качестве управляющей функции выберем $S(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma})$. Из теории ОКЗА (см., например, [18]) известно, что $S(\gamma)$ должна удовлетворять трем условиям разрешимости:

$$\begin{aligned} J_1(S) &= \int_0^{2\pi} S(\gamma) d\gamma = 0, \\ J_2(S) &= \int_0^{2\pi} S(\gamma) \cos \gamma d\gamma = 0, \\ J_3(S) &= \int_0^{2\pi} S(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0. \end{aligned} \quad (24.12)$$

Первое условие следует из задания величины скорости v_∞ на бесконечности, второе и третье обеспечивают замкнутость L_z . Распределение скорости по искомому контуру L_z определяется по формуле

$$v(\gamma) = \frac{v_\infty}{u_\infty} u(\gamma) e^{S(\gamma)}.$$

Преобразовав (24.11), получим соотношение

$$dz = \frac{u_\infty}{v_\infty} e^{\chi(\zeta)} d\zeta$$

для нахождения формы искомого контура. Отсюда также следует связь между заданным периметром ℓ контура и параметром u_∞ :

$$u_\infty J_\ell(S) = v_\infty \ell, \quad J_\ell(S) = \int_0^{2\pi} e^{S(\gamma)} d\gamma. \quad (24.13)$$

Исключив величину u_∞ из соотношений (24.8) и (24.9), придем к следующей оптимизационной задаче.

24.4. Математическая формулировка оптимизационной задачи. Задача А. Найти функцию $S(\gamma)$ и пять параметров μ_k , при которых функционал

$$c_y = \frac{2f_1(\mu_k)}{J_\ell(S)}$$

принимает максимальное значение с учетом трех ограничений (24.12) на вид функции $S(\gamma)$, условий (24.7) и (24.10) на параметры μ_k и связи

$$\frac{f_3(\mu_k)}{J_\ell(S)} = \frac{\Gamma_0}{v_\infty \ell}. \quad (24.14)$$

Вся сложность решения поставленной задачи состоит в наличии ограничения (24.14), связывающего управляющую функцию $S(\gamma)$ и параметры μ_k . Для ее решения используем следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) ограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x, y} f(x, y) = \sup_x [\sup_y f(x, y)].$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \sup_{x, y} f(x, y)$. Тогда $\alpha \geq \sup_y f(x, y)$, а это влечет $\alpha \geq \sup_x [\sup_y f(x, y)]$.

Обратно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По определению \sup существует точка $(x_0, y_0) \in D$ такая, что $f(x_0, y_0) > \alpha - \varepsilon$. Тем более $\sup_y f(x_0, y) > \alpha - \varepsilon$, а значит и $\sup_x [\sup_y f(x, y)] > \alpha - \varepsilon$. Из произвольности ε следует $\sup_x [\sup_y f(x, y)] \geq \alpha$. Утверждение доказано.

Использував эту теорему, оптимизационную задачу А удастся разделить на две более простые задачи. Пусть скорость $u_\infty > 0$ – заданное вещественное число.

Задача Б. Найти функцию $S(\gamma)$, удовлетворяющую условиям разрешимости (24.12) и уравнению $J_\ell(S) = v_\infty \ell / u_\infty$.

Задача В. Найти параметры μ_k , при которых функция $f_1(\mu_k)$ принимает максимальное значение при ограничениях $f_2(\mu_k) = 0$, $f_3(\mu_k) = \Gamma_0 / u_\infty$, $f_4(\mu_k) \geq 0$.

Задача Б была рассмотрена в § 23.. Согласно [17]:

При $u_\infty > v_\infty \ell / 2\pi$ решение не существует;

При $u_\infty = v_\infty \ell / 2\pi$ решение существует и единственно,
 $S(\gamma) \equiv 0$;

При $u_\infty < v_\infty \ell / 2\pi$ существует бесконечное множество решений.

Задачу В можно трактовать как задачу оптимизации расположения критических точек и вихря при обтекании окружности при фиксированной скорости набегающего потока u_∞ и интенсивности вихря Γ_0 . После ее решения определится значение оптимизируемой функции $f_1(\mu_k)$, которое будет зависеть от u_∞ : $f_0(u_\infty) = \max_{\mu_k} f_1(\mu_k)$. Согласно (24.8) оптимизируемый коэффициент c_y также будет функцией от u_∞ : $c_y(u_\infty) = 2u_\infty f_0(u_\infty) / (v_\infty \ell)$. Если эта функция будет возрастающей, то максимум c_y будет достигаться при максимально возможном значении $u_\infty = v_\infty \ell / 2\pi$ и оптимальным контуром будет являться окружность.

24.5. Схема решения задачи В. Эта задача представляет собой задачу нахождения максимума функции пяти переменных при двух ограничениях-равенствах и одном ограничении-неравенстве. Численный анализ этой задачи показал, что оптимум достигается при обтекании окружности, симметричном относительно оси ординат. Симметричность картины обтекания является необходимым условием единственности решения задачи, т. к. в противном случае существует как минимум два симметричных относительно оси ординат обтекания окружности с одинаковыми значениями коэффициента подъемной силы.

Рассмотрим симметричный случай подробнее. Вихрь и критическая точка M располагаются на оси ординат под единичной окружностью: $\gamma_0 = \gamma_m = 3\pi/2$; из (24.5) следует $\gamma_a = \pi - \gamma_b$. Условие (24.7) при этом выполняется автоматически. Второе ограничение-равенство (24.14) удобно использовать для нахождения r_m . Таким образом, имеем задачу максимизации функции f_1 , зависящей от двух параметров (γ_b и r_0) при одном ограничении-неравенстве $f_4 \geq 0$.

На рис. 24.3, а представлены изолинии $f_1(\gamma_b, r_0)$ в области

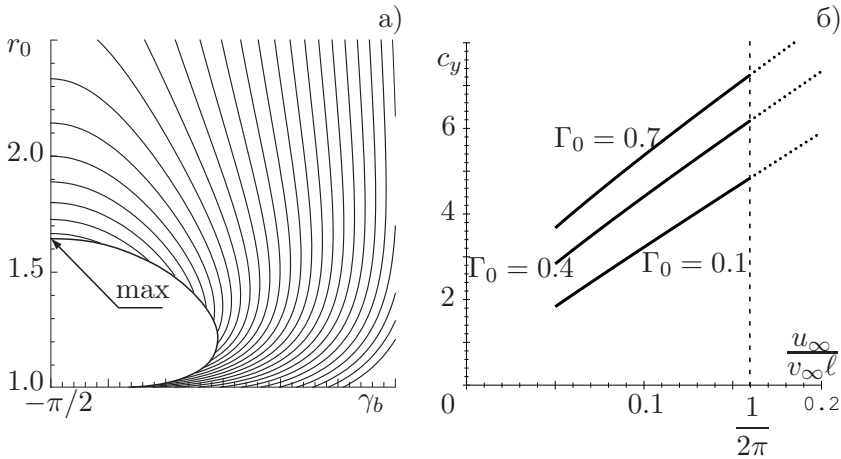


Рис. 24.3. а) Изолинии $c_y(\gamma_b, r_0)$, б) зависимость $c_y(u_\infty)$

$f_4(\gamma_b, r_0) \geq 0$ существования решения при $\Gamma_0/(v_\infty \ell) = 0.1$. Видно, что оптимум достигается в случае $\gamma_b = -\pi/2$ (т. е. точки A и B совпадают) и является граничным ($f_4 = 0$).

Проведем аналитическое исследование задачи в случае, когда точки A, B, O, M лежат на мнимой оси. Из (24.14) следует

$$r_m = A + \sqrt{A^2 - 1}, \quad A = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\Gamma_0}{4\pi u_\infty} \frac{r_0 + 1}{r_0 - 1}.$$

Величина r_0 находится из трансцендентного уравнения $f_4(r_0, r_m) = 0$, получаемого из (24.10). Заметим, что r_0 и r_m будут функциями от u_∞ .

Графики зависимости коэффициента подъемной силы

$$c_y(u_\infty) = \frac{u_\infty}{v_\infty \ell} \left[8\pi + 2 \frac{\Gamma_0}{u_\infty} \frac{r_0 + 1}{r_0 - 1} \right],$$

построенные для $\Gamma_0/(v_\infty \ell) = 0.1, 0.4, 0.7$, изображены на рис. 24.3, б. Эти функции являются монотонно возрастающими, следовательно, максимума c_y достигает при $u_\infty = v_\infty \ell / 2\pi$. Оптимальным контуром в этом случае будет окружность.

Линии тока обтекания окружности в случае обтекания с максимальным c_y приведены на рис. 24.4, а. На рис. 24.4, б

изображена кривая максимального коэффициента c_y в зависимости от безразмерной циркуляции вихря $\Gamma_0/(v_\infty \ell)$.

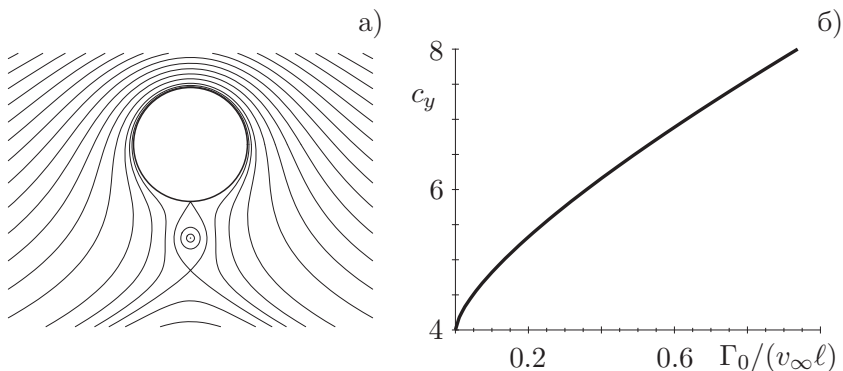


Рис. 24.4. Обтекание с максимальным c_y : а) линии тока, б) зависимость c_y от циркуляции вихря

Из анализа результатов расчетов следуют выводы:

- оптимальным контуром в рассмотренной задаче является окружность;
- максимальное значение коэффициента подъемной силы достигается в симметричном обтекании при совпадении точек разветвления и схода потока;
- наличие вихря в потоке позволяет увеличить значение коэффициента c_y по сравнению со случаем обтекания окружности без вихря в потоке.

§ 25. Контур с “реактивным” источником

Увеличить коэффициент c_y подъемной силы можно путем введения выдува реактивной струи [24]. В силу ряда эффектов – Коанда, суперциркуляции и струйного закрылка – выдув приводит к увеличению коэффициента подъемной силы в несколько раз по сравнению с непроницаемым крыловым профилем. Эффект от выдува можно увеличить, если одновременно с его введением изменять и форму контура.

Интересно теоретическое исследование задачи нахождения

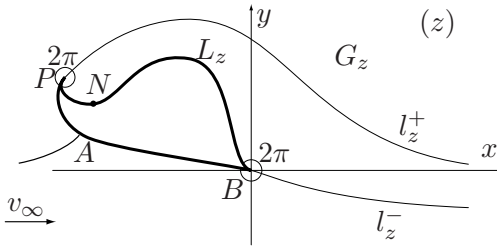


Рис. 25.1. Течение в физической плоскости

точной верхней оценки коэффициента подъемной силы крыловых профилей. Из § 23 следует, что в случае наличия точечного источника оптимальным контуром будет окружность. Но это было показано лишь для случая, когда параметры выдуваемой струи (плотность и полное давление) будут совпадать с параметрами внешнего потока. При выдуве реактивной струи вопрос о форме оптимального профиля становится не столь очевидным и решение задачи существенно усложняется. Рассмотрим эту задачу.

25.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ гладкий (за исключением точек B и P) контур L_z с периметром ℓ обтекается потоком ИНЖ со скоростью набегающего потока v_∞ , плотностью ρ и полным давлением p_0 (рис. 25.1). В точке N расположен источник с заданной безразмерной интенсивностью $q = Q/v_\infty \ell$, через который выдувается жидкость с параметрами ρ_j и p_{0j} . Внутренний к области течения угол в точках B и P равен 2π , эти точки являются точками схода потока; обтекание происходит плавно с конечными скоростями в этих точках. На контуре находится точка A разветвления потока, в которой скорость обращается в нуль. Точка B принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно скорости набегающего потока на бесконечности.

Требуется найти максимальный коэффициент c_y подъемной силы и определить, при какой схеме обтекания он достигается, т. е. найти форму контура и расположение на нем источника N и точек A, P .

25.2. Сведение к оптимизационной задаче. Сложность решения поставленной задачи заключается в том, что комплексный потенциал $w(z)$ не является непрерывной функцией в области течения G_z , на линиях l_z^\pm раздела сред касательная составляющая скорости v терпит разрыв, величина которого определяется из условия постоянства давления (8.1), где параметр μ – безразмерная разность полных давлений (5.12).

Решение задачи построения крылового профиля в случае выдува реактивной струи приведено в § 8. Отличие этой задачи заключается в другой схеме моделирования выдува – вместо кругового или прямолинейного канала используется точечный источник. Как и в § 8, введем в рассмотрение каноническую область G_ζ – внешность единичного круга в плоскости ζ (рис. 8.2). Пусть функция $z(\zeta)$ отображает эту область на физическую. Для однозначности потребуем, чтобы точка $z = \infty$ соответствовала $\zeta = \infty$, а граничная точка B ($z = 0$) – точке $\zeta = 1$. Введем в рассмотрение аналитическую функцию $\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} + i\tilde{\theta}$, связанную с производной $dz/d\zeta$ следующим соотношением (см. (8.11))

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{u_\infty}{v_\infty} e^{-i\beta - \tilde{\chi}(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right), \quad (25.1)$$

откуда

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \ln \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{v_\infty} - \ln \frac{dz}{d\zeta} + \ln \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right).$$

Здесь u_∞ и β – модуль и аргумент скорости набегающего потока течения в плоскости ζ , ζ_p – образ точки схода потока P .

Предположим, что функция $\tilde{S}(\gamma) = \operatorname{Re} \tilde{\chi}(e^{i\gamma})$ и три параметра γ_n , γ_p и γ_a (аргументы точек N , P , A на окружности $\zeta = e^{i\gamma}$) известны. Определим форму контура и его характеристики. Функцию $\tilde{\chi}(\zeta)$ восстановим по ее действительной части $\tilde{S}(\gamma)$ на окружности по формуле Шварца (6.10), для восстановления мнимой части этой функции на границе используем (6.11).

Перейдя в (25.1) на границу $\zeta = e^{i\gamma}$, получим

$$dz = dx + idy = 4 \frac{u_\infty}{v_\infty} e^{-\tilde{S}(\gamma)} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma}{2} e^{i(-\tilde{\theta}(\gamma) + (\gamma_p - \pi)/2 - \beta)} d\gamma.$$

Проинтегрировав это выражение, определим форму контура.

Неизвестную скорость u_∞ , влияющую на линейные размеры контура L_z , найдем из условия заданности периметра ℓ :

$$\ell = 4 \frac{u_\infty}{v_\infty} J_\ell(\tilde{S}), \quad J_\ell(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} e^{-\tilde{S}(\gamma)} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma}{2} d\gamma.$$

Как и во всех внешних ОКЗ, для получения замкнутого контура и совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения необходимо выполнение условий разрешимости. В этой задаче они имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1(\tilde{S}) &= \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 0, \\ J_2(\tilde{S}) &= \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = -\pi(1 + \cos \gamma_p), \\ J_3(\tilde{S}) &= \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = -\pi \sin \gamma_p. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Введем кусочно-аналитическую функцию $\Omega(\zeta) = T + i\Lambda$, теряющую разрыв на линии раздела сред l_ζ^\pm и связанную со скоростью в канонической области соотношением

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta - \Omega(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-1}.$$

Из анализа поведения $dw/d\zeta$ в окрестности источника N определим величину расхода через источник (8.22):

$$q = \frac{8\pi u_\infty}{v_\infty \ell} e^{-T(\gamma_n)} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2}. \quad (25.3)$$

Пусть t – дуговая абсцисса линий l_ζ^\pm раздела сред. Обозначим $\vartheta^\pm(t)$ угол наклона линий раздела сред в канонической

плоскости. На этих линиях введем функции

$$\lambda^{\pm}(t) = T(t) - T_j(t)|_{l^{\pm}_{\zeta}} = \ln \frac{v_j(t)}{v(t)} \Big|_{l^{\pm}_{\zeta}}. \quad (25.4)$$

Неизвестная функция $\Omega(\zeta)$ и угол β выражаются через четыре функции $\lambda^{\pm}(t)$ и $\vartheta^{\pm}(t)$ (формулы (8.5) и (8.16)). Для нахождения последних организуется итерационный процесс (см. § 8).

25.3. Расчет аэродинамических сил. Формулировка и решение оптимизационной задачи. Для расчета подъемной силы использовалась формула (5.14), где $\tilde{\Gamma}$ имела вид (8.24):

$$c_y = \frac{4\pi u_{\infty}}{v_{\infty} \ell} J_0(\tilde{S}, \gamma_a, \gamma_p, \gamma_n) = \pi \frac{J_0(\tilde{S}, \gamma_a, \gamma_p, \gamma_n)}{J_{\ell}(\tilde{S})}, \quad (25.5)$$

$$J_0(\tilde{S}, \gamma_a, \gamma_p, \gamma_n) = \sin(\gamma_n - \beta) - \sin(\gamma_a - \beta) - \sin(\gamma_p - \beta) + \sin \beta - \text{Im}(\omega e^{-i\beta}),$$

комплексная величина ω , зависящая от \tilde{S} , определяется по (8.25).

Функцию $\tilde{S}(\gamma)$ на окружности выберем в качестве управляющей; а в качестве управляющих параметров примем γ_a , γ_p и γ_n . Оптимизационная задача формулируется так.

Найти параметры γ_a , γ_p , γ_n и непрерывную, 2π -периодичную функцию $\tilde{S}(\gamma)$, удовлетворяющую условиям (25.2), при которых коэффициент c_y (25.5) принимает максимальное значение с учетом ограничения (25.3) заданности расхода.

Эта задача представляет собой изопериметрическую вариационную задачу. Сложность ее решения состоит в трудоемкости вычисления целевой функции (25.5) в результате нескольких вложенных друг в друга итерационных процессов.

Для численного решения целесообразно свести ее к задаче оптимизации функции многих переменных, представив искомую функцию конечным рядом Фурье:

$$\tilde{S}(\gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma. \quad (25.6)$$

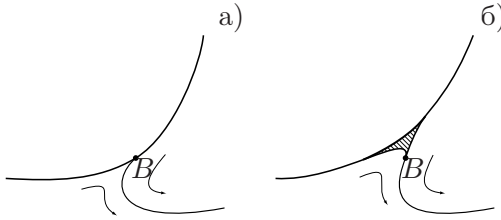


Рис. 25.2. Моделирование точек схода потока

Выполнение условий разрешимости (25.2) в этом случае трудностей не представляет:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -(1 + \cos \gamma_p), \quad b_1 = -\sin \gamma_p. \quad (25.7)$$

Однако результаты числовых расчетов показали, что оптимум достигается на контурах, являющихся полностью гладкими. Частным случаем такого контура при $\mu = 0$ является окружность. В результате вблизи точки оптимума $\tilde{S}(\gamma)$ число членов ряда (25.6) должно быть большим, что затрудняет процесс решения.

Но сход потока с гладкого контура трудно моделировать в случае $\mu \neq 0$, т. к. в этом случае сход происходит по касательной с образованием нулевого угла во внешнем течении (рис. 25.2, а). Поэтому обычно для исследования таких задач вводят застойные зоны (рис. 25.2, б), что равносильно обтеканию контура с острыми задними кромками (см., например, [50]).

Рассмотрим функцию

$$\tilde{S}^*(\gamma) = \ln \left| 4 \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right| + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K [a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma],$$

имеющую логарифмическую особенность в точках $\gamma = \gamma_p$ и $\gamma = 0$. Контур, построенный по этой функции, будет гладким. Кроме того, при $a_k = b_k = 0$, $k = 2, \dots, \infty$ контуром будет окружность – точное решение при $\mu = 0$. Ограничим эту функ-

цию снизу заданной величиной \tilde{S}_{\min} :

$$\tilde{S}(\gamma) = \max \left[\tilde{S}^*(\gamma), \tilde{S}_{\min} \right].$$

Физический смысл такого ограничения соответствует введению застойной зоны. Условия разрешимости в этом случае уже будут не (25.7), а имеющие более сложный вид (25.2).

25.4. Числовые расчеты. В случае $\mu = 0$ наибольшая подъемная сила достигается при $\gamma_p = \gamma_a = 2\pi$ (см. § 23). Численный расчет при других μ также показал, что при увеличении параметров γ_p и γ_a коэффициент c_y растет. Но моделирование застойных зон при $\gamma_p = \gamma_a = 2\pi$ невозможно, поэтому было выбрано $\gamma_p = 5.2$, $\gamma_a = 5.7$. В дальнейшем эти параметры были зафиксированы. Величина расхода через источник выбрана равной $q = 0.3$, угол γ_n находился из условия получения заданного расхода.

Результаты исследования по влиянию числа K на результат оптимизации при $\mu = 1.25$ приведены в табл. 25.1. При $K \geq 7$ коэффициент c_y меняется лишь в четвертом знаке после запятой. Поэтому дальнейшие расчеты проводились при $K = 6$ (10 оптимизируемых переменных), т. к. дальнейшее увеличение числа переменных значительно увеличивает время счета и практически не приводит к росту c_y .

Т а б л и ц а 25.1

Зависимость c_y от числа коэффициентов ряда Фурье

K	1	2	3	4	5	6	7	8
c_y	6.268	6.317	6.330	6.332	6.335	6.337	6.3396	6.3399

На рис. 25.3 представлена зависимость формы контура от числа μ . Результат оптимизации при $\mu = 0$ ($v_{\infty j} = 1$) приведен штриховой линией. Профиль получился практически совпадающим с окружностью, т. е. с точным решением, острые углы в точках B и P видны лишь при большом увеличении (10^3 – 10^4 раз), скорость во внешнем течении на границе застойной зоны получилась порядка $v = 10^{-4}$. Аналогичный расчет проводился при $\mu = 1.25$ ($v_{\infty j} = 1.5$) и $\mu = 3$ ($v_{\infty j} = 2$). Значения c_y приведены в табл. 25.2.

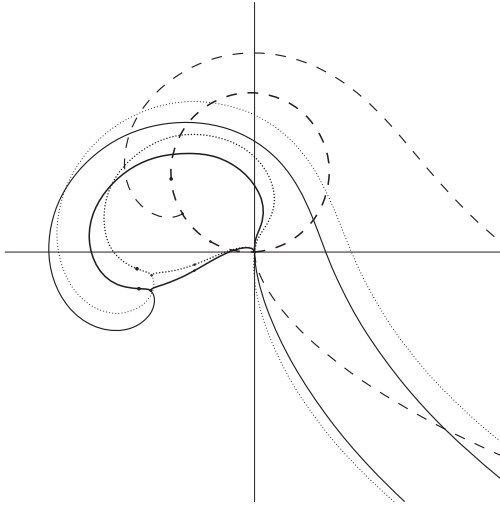


Рис. 25.3. Формы оптимальных контуров с выдувом реактивной струи

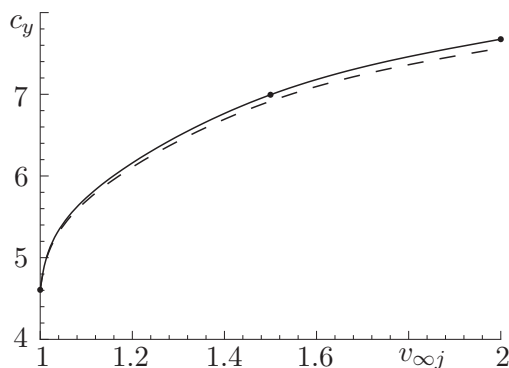
Т а б л и ц а 25.2

Зависимость c_y от числа μ

μ	0	1.25	3
$v_{\infty j}/v_{\infty}$	1	1.5	2
c_y	4.606	6.994	7.675

Результаты оптимизации приведены на рис. 25.3 пунктирной и сплошной линиями соответственно. Заметим, что с увеличением скорости в струе ее толщина на бесконечности уменьшается вследствие постоянства расхода, оптимальный контур становится все менее похожим на окружность. Если при $\mu = 0$ сход потока происходил перпендикулярно контуру, то уже при малых $\mu > 0$ течение полностью перестраивается и сход потока происходит по касательной.

Зависимость c_y от скорости $v_{\infty j}$ выдуваемой струи на бесконечности приведена на рис. 25.4. Сплошной линией показана зависимость для оптимального контура, форма которого определялась $v_{\infty j}$, а штриховой – зависимость, полученная для окружности. Точками отмечены решения, изображенные на рис. 25.3.

Рис. 25.4. Зависимость c_y от $v_{\infty j}$

Из графика видно, что наибольший рост c_y наблюдается при $v_{\infty j}$ чуть больших 1. Это можно объяснить перестройкой картины течения, особенно в окрестностях точек B и P . В дальнейшем при увеличении скорости $v_{\infty j}$ коэффициент c_y растет (что вполне естественно), но темп роста замедляется. Также заметим, что график c_y для оптимального контура лежит лишь незначительно выше графика c_y для окружности, откуда следует, что форма контура при больших скоростях $v_{\infty j}$ выдуваемой струи мало влияет на результирующий c_y и зависит в основном от расхода q и числа μ .

Результаты расчетов показали, что при наличии точечного источника с выдувом реактивной струи максимальное значение коэффициента подъемной силы достигается не на круге, как это было в случае отбора. Использование выдува позволяет значительно увеличить коэффициент подъемной силы. Так, абсолютный максимум c_y для непроницаемого контура, достигаемый на окружности, равен $c_y = 4$, в случае наличия выдува потока с теми же характеристиками через источник ($v_{\infty j} = 1$) при $q = 0.3$ имеем $c_y \approx 4.606$. Наличие выдува при $v_{\infty j} = 2$ позволяет достичь коэффициента $c_y \approx 7.675$.

§ 26. Двухэлементный контур

Одним из распространенных способов увеличения коэффициента подъемной силы крыла является его механизация путем введения закрылков и предкрылков, использование разрезных крыловых профилей. Поэтому представляет интерес задача максимизации коэффициента подъемной силы при обтекании системы, состоящей из двух контуров. В рамках модели ИНЖ рассмотрим модельную задачу максимизации коэффициента подъемной силы обтекания системы двух гладких контуров. Считаются заданными периметры контуров и расстояние между ними.

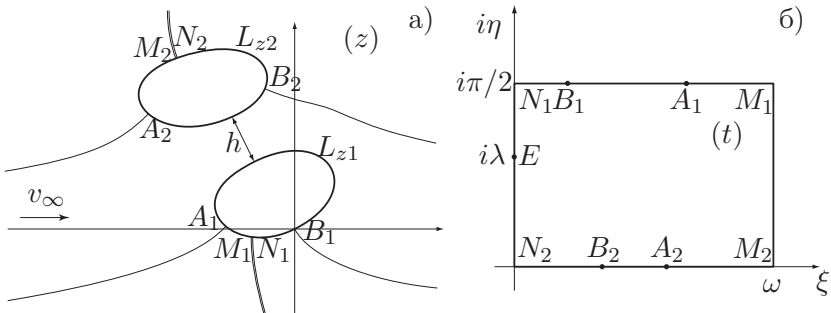


Рис. 26.1. Течение в физической и канонической плоскости

26.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ система из двух гладких контуров L_{zk} , $k = 1, 2$, с заданными длинами ℓ_k ($\ell_1 + \ell_2 = \ell$) обтекается потоком ИНЖ со скоростью набегающего потока v_∞ (рис. 26.1, а). Также задано безразмерное расстояние $h = H/\ell$ между контурами. Предполагается, что критические точки, т. е. точки, в которых скорость обращается в нуль, располагаются только на контурах: A_k – точки разветвления, B_k – точки схода потока. Точка B_1 принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно скорости набегающего потока на бесконечности. Циркуляции скорости вокруг контуров обозначим через Γ_k .

Требуется найти максимально возможный коэффициент

$c_y = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2)/(v_\infty \ell)$ подъемной силы обтекания такой системы и определить, при какой схеме обтекания он достигается, т. е. определить формы контуров, их взаимное расположение и положение критических точек A_k, B_k на них.

26.2. Сведение к оптимизационной задаче. Сложность решения поставленной задачи заключается в двусвязности области течения. Эту область в плоскости z отобразим на внутренность прямоугольника (рис. 26.1, б) в плоскости $t = \xi + i\eta$ со сторонами ω и $\pi/2$. При этом границы контуров соответствуют верхней и нижней сторонам прямоугольника, а на боковых гранях выполняется условие периодичности. Для единственности отображения потребуем, чтобы образ бесконечно удаленной точки в плоскости z лежал на мнимой оси (точка E с координатами $t_e = i\lambda$). В книге [49] приведено выражение для комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ течения в двусвязной области (задача о бипланах) и комплексно-сопряженной скорости dw/dt в виде функции от аргумента t :

$$w(t) = u_\infty \left[e^{i\beta} \zeta(t - i\lambda) + e^{-i\beta} \zeta(t + i\lambda) + \frac{g_1 + g_2}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(t - i\lambda)}{\sigma(t + i\lambda)} + Ku + C \right], \quad (26.1)$$

$$\frac{dw}{dt} = u_\infty \left[-e^{i\beta} \wp(t - i\lambda) - e^{-i\beta} \wp(t + i\lambda) + \frac{g_1 + g_2}{2\pi i} [\zeta(t - i\lambda) - \zeta(t + i\lambda)] + K \right], \quad (26.2)$$

где $\wp(t)$, $\zeta(t)$, $\sigma(t)$ – эллиптические функции Вейерштрасса с полупериодами $\pi i/2$ и $\omega/2$; u_∞ , β , g_1 , g_2 – вещественные постоянные, C – комплексная постоянная. Вещественная постоянная K находится по формуле

$$K = \frac{1}{\omega} \left[g_2 - (g_1 + g_2) \frac{\lambda \eta_1}{\pi} - 2\eta_1 \cos \beta \right],$$

$$\eta_1 = \zeta(t + \omega) - \zeta(t) = \text{const}.$$

Параметр β определяет момент диполя в точке E , u_∞ – его интенсивность, g_k прямо пропорциональны циркуляциям $g_k = \Gamma_k/u_\infty$.

Образы t_{ak}, t_{bk} критических точек A_k, B_k в плоскости t являются корнями уравнения $dw/dt = 0$. Так как комплексный потенциал течения находится с точностью до комплексной постоянной, то для получения C в (26.1) используется условие $w(t_{a1}) = 0$.

Таким образом, для однозначного определения $w(t)$ необходимо задать шесть параметров: $u_\infty, \omega, \lambda, \beta, g_1, g_2$. Вместо двух последних удобнее задавать положения точек разветвления потока $\xi_{ak} = \text{Re}(t_{ak})$, т. к. при произвольных g_k может реализоваться течение с критическими точками, расположенными не на контурах, а во внешнем потоке. Так как dw/dt в (26.2) зависит от параметров g_k линейно, то для их нахождения из уравнений $\frac{dw}{dt}(\xi_{ak}) = 0$ необходимо решить систему из двух линейных уравнений.

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(t) = \ln \frac{v_\infty}{u_\infty e^{i(\beta+\pi)}} \frac{dz}{dt}.$$

Для исключения логарифмической особенности у $\chi(t)$ в точке $t = i\lambda$ рассмотрим модифицированную функцию

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{S} + i\tilde{\theta} = \chi(t) - \chi_0(t), \tag{26.3}$$

где

$$\chi_0(t) = S_0 + i\theta_0 = 2 \ln \left[\frac{\pi}{\omega} \sin^{-1} \frac{\pi}{\omega} (t - i\lambda) \right].$$

Нетрудно показать, что $\tilde{\chi}(t)$ будет аналитической во всей области, т. к. особенность $\chi(t)$ в точке $t = i\lambda$ исключается аналогичной особенностью $\chi_0(t)$.

Зададим две периодичные функции $\tilde{S}_k(\xi), \xi \in [0, \omega]$, представляющие собой действительные части $\tilde{\chi}(t)$ на $L_{\zeta k}$ – верхней и нижней сторонах прямоугольника в плоскости t . Функцию $\tilde{\chi}(t)$ можно восстановить по формуле Вилля (см., например [7]):

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\omega \left[\tilde{S}_1(\xi) \zeta \left(t - \xi - \frac{\pi i}{2} \right) - \tilde{S}_2(\xi) \zeta(t - \xi) \right] d\xi + \\ + \frac{\eta_1 - 2}{2\omega} P_1 + iP_2, \end{aligned} \tag{26.4}$$

где P_2 – произвольная вещественная постоянная, а для P_1 имеем

$$P_1 = \int_0^{\omega} \tilde{S}_1(\xi) d\xi = \int_0^{\omega} \tilde{S}_2(\xi) d\xi. \quad (26.5)$$

Это условие, выражающее факт однозначности оператора Шварца для кольца, является условием разрешимости, накладываемым на функции $\tilde{S}_k(\xi)$. Запишем его так:

$$J_1(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) = \int_0^{\omega} [\tilde{S}_1(\xi) - \tilde{S}_2(\xi)] d\xi = 0. \quad (26.6)$$

Из (26.2) видно, что в окрестности точки $t = i\lambda$ функция $dw/dt \sim u_{\infty} e^{i(\beta+\pi)} (t - i\lambda)^{-2}$, и рассмотрев поведение функций $\chi(t)$ и $\chi_0(t)$ с учетом факта $dw/dz|_{z=\infty} = v_{\infty}$, из (26.3) получим

$$J_2(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) = \operatorname{Re} \tilde{\chi}(i\lambda) = 0, \quad (26.7)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\chi}(i\lambda) = 0. \quad (26.8)$$

Первое из этих равенств есть еще одно условие разрешимости, которому должны удовлетворять функции $\tilde{S}_k(\xi)$. Условие (26.8) служит для определения неизвестной P_2 в (26.4).

Перейдя в (26.4) на верхнюю и нижнюю стороны прямоугольника ($t = \xi + \pi i/2$ и $t = \xi$), найдем мнимые части $\tilde{\theta}_k(\xi)$ функции $\tilde{\chi}(t)$. Из (26.3) следует, что действительные и мнимые части $\chi(\zeta)$ на верхней и нижней сторонах прямоугольника

$$S_k(\xi) = \tilde{S}_k(\xi) + S_{0k}(\xi), \quad \theta_k(\xi) = \tilde{\theta}_k(\xi) + \theta_{0k}(\xi),$$

где $S_{0k}(\xi)$ и $\theta_{0k}(\xi)$ – действительные и мнимые части функции $\chi_0(t)$ при $t = \xi + \pi i/2$ и $t = \xi$.

Координаты контуров восстановим по формуле

$$z_k(\xi) = z_{bk} + \int_{\xi_{bk}}^{\xi} \frac{dz}{dt} d\xi = z_{bk} + \frac{u_{\infty} e^{i(\beta+\pi)}}{v_{\infty}} \int_{\xi_{bk}}^{\xi} e^{S_k(\xi) + i\theta_k(\xi)} d\xi,$$

где z_{bk} – координата точки B_k . Так как положение точки B_1 соответствует началу координат, то $z_{b1} = 0$, а для нахождения z_{b2} имеем

$$z_{b2} = \int_{t_{b1}}^{t_{b2}} \frac{dz}{dt} dt = \frac{u_\infty e^{i(\beta+\pi)}}{v_\infty} \int_{t_{b1}}^{t_{b2}} e^{\chi(t)} dt.$$

Условия замкнутости контуров записываются как $z_k(0) = z_k(\omega)$ или

$$\int_0^\omega e^{S_k(\xi) + i\theta_k(\xi)} d\xi = 0. \quad (26.9)$$

Эти два комплексных условия перепишем в виде четырех вещественных:

$$\begin{aligned} J_3(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) &= \int_0^\omega e^{S_1(\xi)} \cos \theta_1(\xi) d\xi = 0, \\ J_4(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) &= \int_0^\omega e^{S_2(\xi)} \cos \theta_2(\xi) d\xi = 0, \\ J_5(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) &= \int_0^\omega e^{S_1(\xi)} \sin \theta_1(\xi) d\xi = 0, \\ J_6(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) &= \int_0^\omega e^{S_2(\xi)} \sin \theta_2(\xi) d\xi = 0. \end{aligned} \quad (26.10)$$

Длины контуров вычисляются по формулам

$$l_k = \int_0^\omega \left| \frac{dz}{dt} \right| d\xi = \frac{u_\infty}{v_\infty} \int_0^\omega e^{S_k(\xi)} d\xi.$$

Так как эти длины заданы, появляются дополнительные условия:

$$\frac{lv_\infty}{u_\infty} = J_\ell(\tilde{S}_k, \omega, \lambda), \quad J_\ell(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) = \int_0^\omega (e^{S_1(\xi)} + e^{S_2(\xi)}) d\xi, \quad (26.11)$$

$$J_7(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) = \int_0^{\omega} \left(\ell_2 e^{S_1(\xi)} - \ell_1 e^{S_2(\xi)} \right) d\xi = 0. \quad (26.12)$$

Условие (26.11) служит для определения неизвестной величины u_{∞} , а (26.12) представляет собой еще одно условие разрешимости.

Расстояние между контурами находится по более сложной формуле

$$J_8(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) = \frac{v_{\infty}}{u_{\infty} J_{\ell}(\tilde{S}_k, \omega, \lambda)} \min_{\xi_1, \xi_2} |z_1(\xi_1) - z_2(\xi_2)| = h. \quad (26.13)$$

С использованием (26.11) коэффициент подъемной силы будет иметь вид

$$c_y = \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{v_{\infty} \ell} = \frac{2(g_1 + g_2)}{J_{\ell}(\tilde{S}_k, \omega, \lambda)}. \quad (26.14)$$

26.3. Формулировка оптимизационной задачи. Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать следующую основную оптимизационную задачу.

Найти пять параметров ω , λ , β , ξ_{a1} , ξ_{a2} и две периодические функции $\tilde{S}_k(\xi)$, $\xi \in [0, \omega]$, при которых функционал (26.14) принимает максимальное значение с учетом следующих восьми условий разрешимости: условия $J_1 = 0$ (26.6) однозначности оператора Шварца, условия $J_2 = 0$ (26.7) совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения, четырех условий $J_r = 0$, $r = 3, \dots, 6$ (26.10) замкнутости, условия $J_7 = 0$ (26.12), вытекающего из условий фиксированности длин контуров, и условия $J_8 = h$ (26.13) заданности расстояния между контурами.

Решим вначале вспомогательную задачу. Зададим параметры ω и λ , определяющие область в плоскости t , и положение в ней образа бесконечно удаленной точки. Заметим, что в (26.14) величины g_1 и g_2 зависят только от трех оставшихся параметров β , ξ_{a1} , ξ_{a2} и не зависят от $S_k(\xi)$. Также интеграл J_{ℓ} в (26.14) и все восемь ограничений не зависят от этих трех параметров, а зависят только от функций $S_k(\xi)$.

Поэтому задачу можно разбить на две более простые.

Задача А. Найти три параметра β , ξ_{a1} и ξ_{a2} , при которых сумма $g_1 + g_2$ принимает максимальное значение.

Задача Б. Найти две периодические функции $\tilde{S}_k(\xi)$, $\xi \in [0, \omega]$, при которых функционал J_ℓ (26.11) принимает минимальное значение с учетом шести условий разрешимости $J_r(\tilde{S}_k, \omega, \lambda) = 0$, $r = 1, \dots, 6$.

Заметим, что параметры ω и λ можно подобрать таким образом, чтобы добиться выполнения двух оставшихся условий $J_7 = 0$ и $J_8 = h$.

26.4. Решение задачи А. Эта задача представляет собой задачу максимизации функции трех переменных. Ее решение трудностей не представляет. Оптимум всегда достигается в случае, когда точки A_k разветвления потока совпадают с точками B_k схода потока. Этого всегда удается достичь подбором ξ_{ak} . Интересен факт, что максимальное значение суммы $g_1 + g_2$ не зависит от параметра β . При любом угле наклона системы из двух контуров в случае совпадения критических точек подъемная сила будет одной и той же (рис. 26.2). Одним из решений задачи А является симметричный случай $\beta = 0$, $\xi_{a1} = \omega$, $\xi_{b1} = 0$, $\xi_{a2} = \xi_{b2} = \omega/2$.

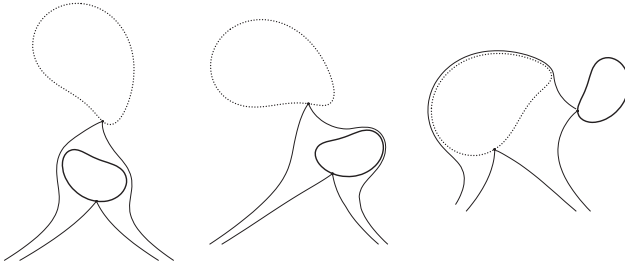


Рис. 26.2. Различные схемы обтекания с одинаковой суммарной циркуляцией $g_1 + g_2$ и, следовательно, подъемной силой

26.5. Решение задачи Б. Эта задача представляет собой изопериметрическую вариационную задачу. Сложность ее решения состоит в наличии четырех последних нелинейных ограничений (26.10), в которых θ_k определяется по \tilde{S}_k из сложного интегрального соотношения.

Легко показать, что если для функций $\tilde{S}_k(\xi) = \tilde{S}_k^*(\xi)$ все условия разрешимости выполняются, то для функций $\tilde{S}_k(\xi) = \tilde{S}_k^*(\omega - \xi)$ они также будут выполнены, при этом значение оптимизируемого функционала J_ℓ для этих функций будет одинаковым. Поэтому, если функции $\tilde{S}_k(\xi) = \tilde{S}_k^*(\xi)$ доставляют решение задачи Б, то функции $\tilde{S}_k(\xi) = \tilde{S}_k^*(\omega - \xi)$ также будут являться решением этой задачи. Таким образом, решение будет единственно лишь в случае, когда обе функции $\tilde{S}_k^*(\xi)$ будут четными, т. е. $\tilde{S}_k^*(\xi) = \tilde{S}_k^*(\omega - \xi)$.

Решение задачи Б получено численно двумя различными методами. В первом методе искомые функции $\tilde{S}_k(\xi)$ были представлены в виде ряда Фурье

$$\tilde{S}_k(\xi) = \frac{a_0^k}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n^k \cos \frac{2\pi n \xi}{\omega} + b_n^k \sin \frac{2\pi n \xi}{\omega} \right].$$

Численный анализ показал, что в точке оптимума все коэффициенты $b_n^k = 0$, следовательно, оптимум достигается на четных функциях и задача Б имеет единственное решение. Заметим также, что для четных функций $\tilde{S}_k(\xi)$ два ограничения ($J_5 = 0$ и $J_6 = 0$) выполняются автоматически.

В дальнейшем ограничимся лишь четным рядом Фурье

$$\tilde{S}_k(\xi) = \frac{a_0^k}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^k \cos \frac{2\pi n \xi}{\omega}.$$

Выполнение четырех условий $J_r = 0$, $r = 1, \dots, 4$, достигалось путем нахождения первых двух коэффициентов a_n^k , $n = 0, 1$, в данном разложении. Остальные коэффициенты были свободными и являлись параметрами оптимизации. Таким образом, задача Б свелась к задаче безусловной минимизации функции $2N - 2$ переменных. При вычислении функционала J_ℓ и ограничений J_r использовалась формула трапеций.

Во втором методе использовался метод проекций градиента (см., например, [9]). В качестве начального приближения выбирались функции \tilde{S}_k^1 , удовлетворяющие всем ограничениям. На итерации n в точке \tilde{S}_k^n численно находилась производная функционала J_ℓ по \tilde{S}_k^n и ее проекция на допустимое

множество ограничений. Эта проекция выбиралась в качестве направления спуска и путем одномерной минимизации по ней находилось новое приближение для \tilde{S}_k^{n+1} . Итерационный процесс повторялся до достижения условия оптимальности.

Численный расчет показал, что оба метода сходятся к одному решению для функций \tilde{S}_k , что позволяет надеяться на правильность результатов.

Для получения заданных длин l_1 , l_2 и расстояния h находились параметры ω и λ . Эта задача не представляла сложностей, т. к. зависимости $h(\omega)$ и $l_1(\lambda)$ для оптимальных \tilde{S}_k являются монотонными, вследствие чего решение существует и единственно.

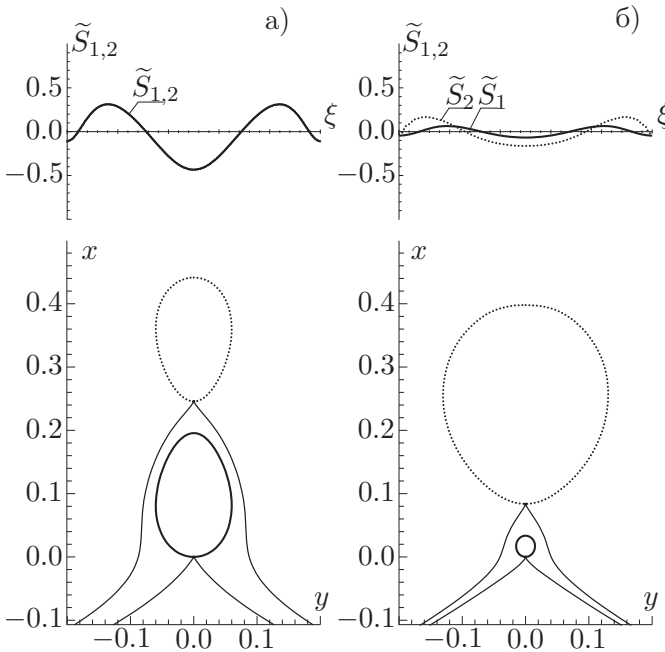


Рис. 26.3. Оптимальные контуры при решении вспомогательной задачи

На рис. 26.3, а и б приведены оптимальные функции $\tilde{S}_k(\xi)$ и контуры для длин $l_1 = 0.5l$ и $l_1 = 0.1l$ соответственно. Расстояние между контурами в обоих случаях выбрано равным $h =$

$= 0.05$. Значения максимального коэффициента подъемной силы получились $c_y = 3.5985$ и $c_y = 3.8156$. На нижних частях рис. 26.3, а и б изображены варианты обтекания с $\beta = 0$, когда один контур располагается над другим.

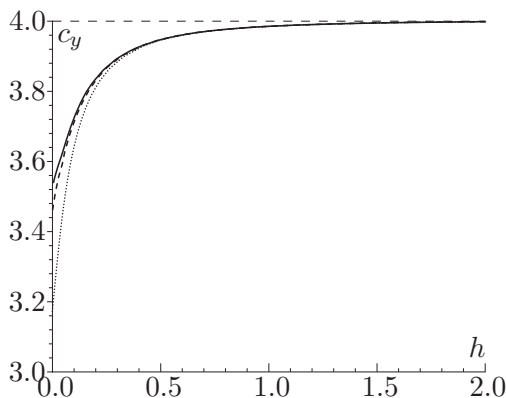


Рис. 26.4. Зависимость c_y системы контуров от расстояния h

При увеличении расстояния h формы оптимальных контуров стремятся к окружностям. Значение коэффициента подъемной силы при этом растет. Зависимость $c_{y \max}$ от h для случая контуров одинаковой длины ($\ell_1 = \ell_2$) приведена на рис. 26.4 штриховой линией. На этом же рисунке пунктирной линией приведена зависимость $c_{y \max}$ от h для системы из двух окружностей.

26.6. Решение основной задачи. Напомним, что при решении вспомогательной задачи параметры ω и λ задавались. В общем случае решения этой задачи и основной задачи не будут совпадать, причем оптимальное значение функционала (26.14) для основной задачи будет не меньше, чем вспомогательной. Решение основной задачи проведем следующим образом. В качестве параметров оптимизации выберем функции $\tilde{S}_k(\xi)$. Для нахождения параметров ω и λ используем ограничения $J_7 = 0$ и $J_8 = h$. Оставшиеся параметры выберем $\beta = 0$, $\xi_{a1} = \omega$, $\xi_{b1} = 0$, т. к. из решения задачи А видно, что оптимум $g_1 + g_2$ достигается при этих значениях, а условия разрешимости от

этих параметров не зависят. Таким образом, решение основной задачи от решения задачи Б отличается тем, что, во-первых, параметры ω и λ находятся на каждом итерационном шаге и, во-вторых, ищется не минимум J_ℓ , а максимум c_y (26.14). Для решения основной задачи использовались те же два метода, что и для задачи Б – метод разложения функции на коэффициенты Фурье и метод проекций градиента.

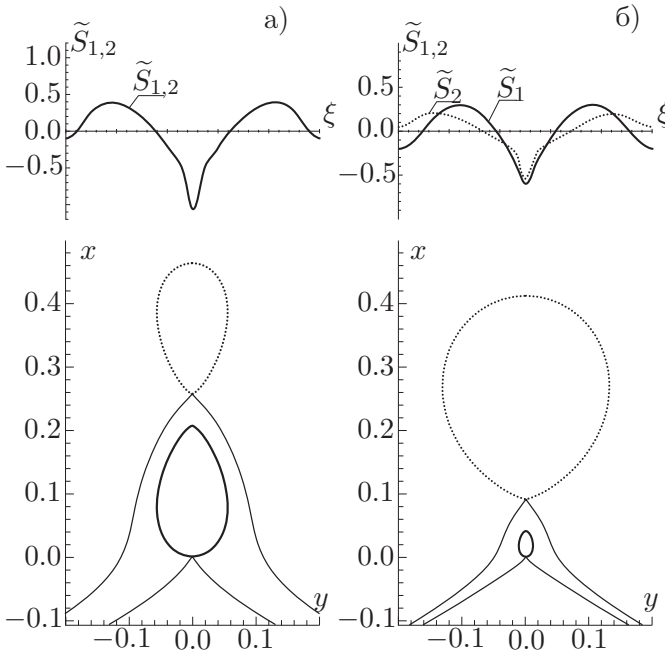


Рис. 26.5. Оптимальные контуры при решении основной задачи

На рис. 26.5, а и б приведены оптимальные функции $\tilde{S}_k(\xi)$ и контуры для длин $l_1 = 0.5l$ и $l_1 = 0.1l$ соответственно. Значения максимального коэффициента подъемной силы получились больше, чем при решении задачи Б: $c_y = 3.6195$ и $c_y = 3.8212$ соответственно. Заметим также, что функции $S_k(\xi)$ в точке $\xi = \omega/2$ имеют пик, вследствие чего контуры в соответствующих точках получаются с малым радиусом закругления. Вероятно, это связано с тем, что оптимум достигается на контурах, име-

ющих угловые точки (в этом случае $S_k(\xi)$ имеет логарифмическую особенность при $\xi = \omega/2$ и неограничена снизу).

Для контуров с одинаковыми длинами $l_1 = l_2$ исследовалась зависимость $c_{y \max}$ от h . Она приведена на рис. 26.4 сплошной линией. Для расстояний $h > 0.2$ сплошная и штриховая линии практически совпали.

На основе проведенных многочисленных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. В случае обтекания ИНЖ системы из двух контуров с фиксированным отношением их длин и расстоянием между ними максимальная подъемная сила достигается не на окружностях, как в случае изолированного контура.

2. Значение максимальной подъемной силы не зависит от угла поворота системы контуров (т. е. от угла атаки).

3. При увеличении расстояния между контурами значение коэффициента подъемной силы растет, формы контуров стремятся к окружностям.

4. При уменьшении длины одного контура до нуля значение коэффициента подъемной силы системы растет, форма оставшегося контура стремится к окружности.

§ 27. Контур вблизи экрана

В случае движения профиля над экраном (как и в задаче построения двухэлементного контура) область течения является двусвязной, что осложняет решение задачи оптимизации коэффициента подъемной силы контура крылового профиля экраноплана. Оптимизация коэффициента подъемной силы профилей экранопланов для частных случаев исследовалась в ряде работ. Так, оптимизация бесконечно-тонкого профиля вблизи экрана рассмотрена в [41], а крылового профиля при ограничении на максимум скорости – в работе [20]. Ниже исследуется задача нахождения максимально возможного коэффициента подъемной силы гладкого контура при его обтекании вблизи экрана, когда заданы периметр контура и его отстояние от экрана. Результаты могут быть полезны как точные верхние оценки коэффициента подъемной силы реальных кры-

ловых профилей экранопланов.

27.1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ гладкий контур L_z заданной длины ℓ обтекается потоком ИНЖ со скоростью набегающего потока v_∞ на заданном безразмерном расстоянии $h = H/\ell$ от экрана G_z (рис. 27.1, а). Предполагается, что критические точки располагаются только на контуре: A – точка разветвления, B – точка схода потока. Точка B принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно скорости набегающего потока на бесконечности.

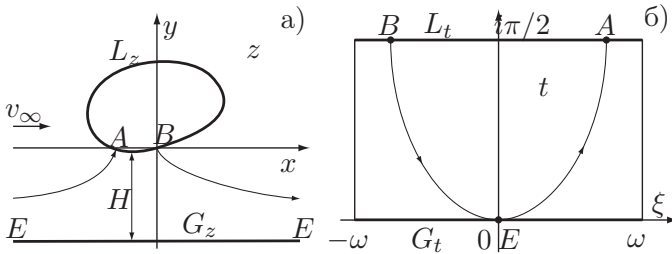


Рис. 27.1. Течение в физической и канонической плоскости

Требуется найти такую схему обтекания, т. е. определить форму контура и положение критических точек A и B на нем, при которой достигается максимально возможный коэффициент $c_{y\max}$ подъемной силы обтекания этого контура.

27.2. Сведение к оптимизационной задаче. Так как область течения является двухсвязной, отображим ее на прямоугольник со сторонами 2ω и $i\pi/2$ в канонической плоскости t таким образом, чтобы контуру соответствовала верхняя сторона L_t прямоугольника, экрану – нижняя сторона G_t , а на боковых сторонах выполнялось условие периодичности (рис. 27.1, б). Для единственности отображения потребуем, чтобы бесконечно удаленная точка E ($z = \infty$) переходила в точку $t = 0$. В [49] приведено выражение для комплексно-сопряженной скорости dw/dt в виде функции от аргумента t :

$$\frac{dw}{dt}(t) = u_\infty [\wp(t) - \wp(t_a)], \quad (27.1)$$

где $\wp(t)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с полупериодами ω и $i\pi/2$ (см., например, [7]); u_∞ – вещественная постоянная, определяющая интенсивность диполя в точке E , $t_a = \xi_a + i\pi/2$ – образ точки A разветвления потока. Так как $\wp(t)$ – четная функция, из (27.1) следует, что действительная часть образа точки B схода потока $\xi_b = -\xi_a$. Таким образом, для однозначного определения dw/dt необходимо задать три параметра: ω , u_∞ , ξ_a . Пусть

$$\begin{aligned} P(\xi, \xi_a) &\equiv \wp\left(\xi + \frac{i\pi}{2}\right) - \wp(t_a), & \xi \in (-\omega, \omega). \\ R(\xi, \xi_a) &\equiv \wp(\xi) - \wp(t_a), \end{aligned}$$

Заметим, что эти функции являются вещественными.

Аналитическая функция

$$\chi(t) = \ln\left(\frac{v_\infty dz}{u_\infty dt}\right) \quad (27.2)$$

имеет логарифмическую особенность в точке $t = 0$. Поэтому представим ее в виде суммы двух функций

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \tilde{\chi}(t),$$

где $\chi_0(t)$, содержащую такую же особенность в $t = 0$, определим из решения задачи обтекания окружности над экраном (см., например, [49]):

$$\chi_0(t) = -2 \ln \left[\frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2\omega} \right]. \quad (27.3)$$

Нетрудно показать, что для гладких контуров функция $\tilde{\chi}(t)$ будет аналитической во всей области течения. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} S(\xi) &\equiv \operatorname{Re} \chi|_{L_t} = S_0(\xi) + \tilde{S}(\xi), \\ T(\xi) &\equiv \operatorname{Re} \chi|_{G_t} = T_0(\xi) + \tilde{T}(\xi), \\ \theta(\xi) &\equiv \operatorname{Im} \chi|_{L_t} = \theta_0(\xi) + \tilde{\theta}(\xi), \end{aligned} \quad (27.4)$$

где $S_0(\xi)$, $T_0(\xi)$, $\theta_0(\xi)$ являются известными действительными и мнимыми частями $\chi_0(t)$ (27.3) на соответствующих границах.

Зададим $\tilde{S}(\xi) \equiv \text{Re } \tilde{\chi}(t)|_{L_t}$. Из условия непроницаемости экрана следует $\text{Im } \tilde{\chi}(t)|_{G_t} = 0$. Функцию $\tilde{\chi}(t)$, удовлетворяющую на верхней и нижней сторонах этим условиям, а на боковых сторонах – условию периодичности, можно восстановить по формуле [80]:

$$\tilde{\chi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \tilde{S}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}(\xi - t + 2k\omega)} d\xi.$$

Используя условие периодичности, доопределим $\tilde{S}(\xi)$ на всей числовой прямой. Поменяв в последней формуле местами интегрирование и суммирование, получим

$$\tilde{\chi}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega-2k\omega}^{\omega-2k\omega} \frac{\tilde{S}(\xi - 2k\omega)}{\text{ch}(\xi - t)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}(\xi)}{\text{ch}(\xi - t)} d\xi. \quad (27.5)$$

Из (27.5) найдем неизвестные действительные и мнимые части $\tilde{\chi}(t)$ на нижней и верхней сторонах прямоугольника соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}(\mu)}{\text{ch}(\mu - \xi)} d\mu, \\ \tilde{\theta}(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}(\mu) - \tilde{S}(\xi)}{\text{sh}(\mu - \xi)} d\mu. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Таким образом, по известной $\tilde{S}(\xi)$ можно восстановить $\tilde{T}(\xi)$ и $\tilde{\theta}(\xi)$. Функции $S(\xi)$, $T(\xi)$, $\theta(\xi)$ найдем по (27.4).

Используя (27.1) и (27.2), выразим производную dz/dt и комплексно сопряженную скорость dw/dz физической плоскости через $\chi(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_{\infty}}{v_{\infty}} e^{\chi(t)}, \quad \frac{dw}{dz} = v_{\infty} [\wp(t) - \wp(t_a)] e^{-\chi(t)}. \quad (27.7)$$

В окрестности $t = 0$ функция $\wp(t) \sim t^{-2}$ и $e^{-\chi_0(0)} \sim t^2$, следовательно, $dw/dz \sim v_{\infty} e^{-\tilde{\chi}(t)}$. Так как скорость на бесконечности в физической плоскости равна v_{∞} , из (27.7) следует

$\tilde{\chi}(0) = 0$. Используя (27.5), получим

$$J_1(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}(\xi)}{\operatorname{ch} \xi} d\xi = 0. \quad (27.8)$$

Это вещественное равенство – условие разрешимости, которому должна удовлетворять функция $\tilde{S}(\xi)$. Оно выражает факт совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения.

Координаты контура восстановим по формуле, полученной из (27.7):

$$x(\xi) + iy(\xi) = \frac{u_\infty}{v_\infty} \int_{\xi_b}^{\xi} e^{S(\mu) + i\theta(\mu)} d\mu. \quad (27.9)$$

Используя (27.9), условия замкнутости контура $z(-\omega + i\pi/2) = z(\omega + i\pi/2)$ запишем в виде

$$J_2(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{S_0(\xi) + \tilde{S}(\xi)} \cos[\theta_0(\xi) + \tilde{\theta}(\xi)] d\xi = 0, \quad (27.10)$$

$$J_3(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{S_0(\xi) + \tilde{S}(\xi)} \sin[\theta_0(\xi) + \tilde{\theta}(\xi)] d\xi = 0.$$

Эти два равенства являются еще двумя условиями разрешимости, которым должна удовлетворять функция $\tilde{S}(\xi)$. Если перейти от интегрирования по образу контура L_t к интегрированию по образу экрана G_t , получим другое представление J_2 и J_3 :

$$J_2(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{T_0(\xi)} (e^{\tilde{T}(\xi)} - 1) d\xi = 0, \quad (27.11)$$

$$J_3(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}(\xi) \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} d\xi = 0. \quad (27.12)$$

Длина контура вычисляется по формуле

$$\ell = \int_{-\omega}^{\omega} \left| \frac{dz}{dt} \right| d\xi = \frac{u_{\infty}}{v_{\infty}} J_{\ell}(\tilde{S}, \omega), \quad J_{\ell}(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{S_0(\xi) + \bar{S}(\xi)} d\xi, \quad (27.13)$$

а т. к. эта длина задана, (27.13) является условием для определения неизвестной постоянной u_{∞} , влияющей на линейные размеры контура.

Отстояние контура от экрана находится по формуле

$$h = J_4(\tilde{S}, \omega) = \frac{v_{\infty}}{u_{\infty} J_{\ell}(\tilde{S}, \omega)} \left[\min_{\xi \in [-\omega, \omega]} y(\xi) - \text{Im} \int_{\xi_b + i\pi/2}^{\xi_b} \frac{dz}{dt} dt \right], \quad (27.14)$$

где dz/dt имеет вид (27.7). Соотношение (27.14) можно использовать для нахождения ω .

По формуле Чаплыгина (5.1) определим комплексно-сопряженную силу $R_x - iR_y$, действующую на контур L_z :

$$R_x - iR_y = \frac{\rho i}{2} \oint_{L_z} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \frac{\rho i}{2} \int_{L_t} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{dz} \right) dt.$$

Используя (27.1) и (27.7) и перейдя к коэффициентам подъемной силы и сопротивления $c_x - ic_y = 2(R_x - iR_y)/(\rho v_{\infty}^2 \ell)$, запишем

$$c_x = \frac{u_{\infty}}{\ell v_{\infty}} J_x(\tilde{S}, \omega), \quad J_x(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\omega}^{\omega} P^2(\xi, \xi_a) e^{-S(\xi)} \sin \theta(\xi) d\xi,$$

$$c_y = \frac{u_{\infty}}{\ell v_{\infty}} J_y(\tilde{S}, \omega), \quad J_y(\tilde{S}, \omega) = - \int_{-\omega}^{\omega} P^2(\xi, \xi_a) e^{-S(\xi)} \cos \theta(\xi) d\xi.$$

Перейдя от интегрирования по образу контура к образу экрана и учитывая (27.11), (27.12), получим

$$J_x(\tilde{S}, \omega) = 0,$$

$$J_y(\tilde{S}, \omega) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{T_0(\xi)} - R^2(\xi, \xi_a) e^{-T_0(\xi) - \tilde{T}(\xi)} d\xi. \quad (27.15)$$

Следовательно, $c_x = 0$ и парадокс Даламбера в данной задаче выполняется. С учетом (27.13) соотношение для c_y перепишем в виде

$$c_y = \frac{J_y(\tilde{S}, \omega)}{J_\ell(\tilde{S}, \omega)}. \quad (27.16)$$

27.3. Формулировка оптимизационной задачи. Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать следующую оптимизационную задачу: найти два параметра ω , ξ_a и периодическую функцию $\tilde{S}(\xi)$, $\xi \in [-\omega, \omega]$, при которых функционал c_y (27.16) принимает максимальное значение с учетом следующих четырех условий разрешимости: условия $J_1 = 0$ (27.8) совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения, двух условий $J_2 = 0$ (27.10), $J_3 = 0$ (27.12) замкнутости, условия $J_4 = h$ (27.14) заданности отстояния от экрана. Функция $\tilde{\theta}(\xi)$ определяется из (27.6), известные функции $S_0(\xi)$, $\theta_0(\xi)$ – из (27.3). Заметим также, что вместо (27.10) можно использовать ограничение (27.11).

Параметр ξ_a , определяющий положение критической точки, входит лишь в числитель (27.16) и отсутствует во всех ограничениях поставленной задачи. Из (27.15) следует, что зависимость c_y от ξ_a схематично можно записать в виде

$$c_y = \int_{-\omega}^{\omega} [f_0(\xi, \tilde{S}) - R^2(\xi, \xi_a) f_1(\xi, \tilde{S})] d\xi,$$

где $f_0(\xi, \tilde{S})$, $f_1(\xi, \tilde{S}) > 0$ не зависят от ξ_a . Из свойств функции $\wp(t)$ следует, что функция $R(\xi, \xi_a) > 0 \forall \omega, \forall \xi, \xi_a \in [-\omega, \omega]$. Она минимальна при наибольшем значении $\wp(\xi_a + i\pi/2)$, которое достигается при $\xi_a = \omega$. Так как $\xi_b = -\omega$, то можно сделать вывод о том, что для любого (в том числе и оптимального) контура вблизи экрана коэффициент подъемной силы будет наибольшим при режиме обтекания с совпадающими точками разветвления и схода потока.

Легко показывается, что если для функции $\tilde{S}(\xi) = \tilde{S}^*(\xi)$ все условия разрешимости выполняются, то для функции $\tilde{S}(\xi) = \tilde{S}^*(-\xi)$ они также будут выполнены, при этом значение оптимизируемого функционала (27.16) для этих функций будет одинаковым. Поэтому, если функция $\tilde{S}(\xi) = \tilde{S}^*(\xi)$ доставляет решение задачи, то функция $\tilde{S}(\xi) = \tilde{S}^*(-\xi)$ также будет являться решением. Поэтому для единственности решения необходимо выполнение условия четности $\tilde{S}^*(\xi)$.

27.4. Численное решение задачи. Сложность аналитического решения оптимизационной задачи состоит в наличии нелинейных ограничений, поэтому она была решена численно. Заметим, что в случае $\tilde{S}(\xi) \equiv 0$ все ограничения выполняются, и мы имеем обтекание окружности над экраном. Этот случай выбирался в качестве начального приближения.

Как и в предыдущем параграфе, решение оптимизационной задачи было проведено двумя различными методами. В первом методе искомая функция $\tilde{S}(\xi)$ была представлена в виде ряда Фурье

$$\tilde{S}(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos \frac{\pi n \xi}{\omega} + b_n \sin \frac{\pi n \xi}{\omega} \right].$$

Тогда задача свелась к нахождению $2N + 2$ параметров: ω , a_0 , a_n , b_n ($n = 1, \dots, N$) из условий максимума (27.16) и выполнении ограничений $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, $J_4 = h$. Числовой расчет показал, что в точке оптимума коэффициенты $b_n = 0$. Это условие (четность функции $\tilde{S}(\xi)$) является необходимым для единственности решения задачи.

В дальнейшем при решении оптимизационной задачи функция $\tilde{S}(\xi)$ была представлена в виде четного ряда Фурье

$$\tilde{S}(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{\pi n \xi}{\omega}.$$

Заметим, что для такой функции ограничение $J_3 = 0$ выполняется автоматически.

Первые два коэффициента a_0 и a_1 в данном разложении и неизвестная ω находилась из условий $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_4 = h$. Остальные коэффициенты были свободными и являлись

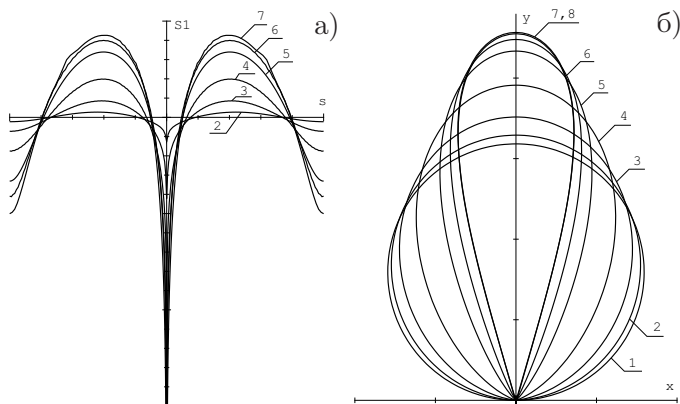


Рис. 27.2. Оптимальные $\tilde{S}(\xi)$ и соответствующие им контуры для различных отстояний

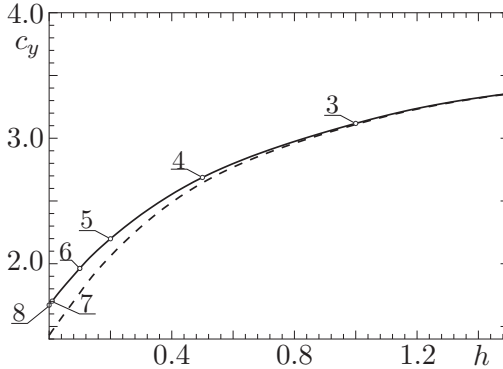
параметрами оптимизации. Таким образом, задача свелась к задаче безусловной минимизации функции $N - 1$ переменных (коэффициенты a_n , $n = 2, \dots, N$). При вычислении интегралов в функционале (27.16) и ограничениях (27.8), (27.10) использовалась формула трапеций, число точек разбиения отрезка $[-\omega, \omega]$ равно 200. В качестве метода оптимизации применялся метод сопряженных градиентов, оптимизация проводилась при различных $N \leq 15$.

Во втором методе использовался метод проекций градиента. В качестве неизвестных выбирались не коэффициенты a_n , а значения функции $\tilde{S}(\xi)$ в узлах при равномерном разбиении отрезка $[-\omega, \omega]$ (число узлов выбрано равным 200). На каждой итерации численно находились производные функционала (27.16) по $\tilde{S}(\xi)$ и по параметру ω , а также их проекции на допустимое множество ограничений. Эти проекции выбирались в качестве направления спуска и путем одномерной минимизации по ней находились новые $\tilde{S}(\xi)$ и ω . Итерационный процесс повторялся до достижения условия оптимальности.

При возрастании N (первый метод) установлена сходимость решения к решению, полученному по второму методу. Это позволяет надеяться на правильность полученных резуль-

Т а б л и ц а 27.1
Зависимость c_y от отстояния h

№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	∞	2	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0
c_y	4	3.476	3.118	2.687	2.199	1.963	1.702	1.6702

Рис. 27.3. Зависимость c_y от отстояния h

татов. На рис. 27.2, а и б приведены графики оптимальных функций $\tilde{S}(\xi)$ и контуры для различных отстояний (линии 1–7), полученные вторым методом. Значения максимального коэффициента подъемной силы приведены в табл. 27.1.

Заметим, что $\tilde{S}(\xi)$ имеет явно выраженный пик при $\xi = 0$, на контурах этой точке соответствует участок с большой кривизной. Это может быть связано с тем, что точный оптимум достигается не на гладких контурах, а на контурах, имеющих угловую точку в критической точке B .

Зависимость $c_{y \max}$ от h приведена на рис. 27.3 сплошной линией, точки 3–7 на ней соответствуют кривым 3–7, изображенным на рис. 27.2. Штриховой линией приведена зависимость c_y от h для окружности.

Интересно также исследовать задачу поиска оптимальной функции $\tilde{S}(\xi)$ при фиксированном параметре ω и без учета ограничения на J_4 . Физический смысл этой задачи состоит в

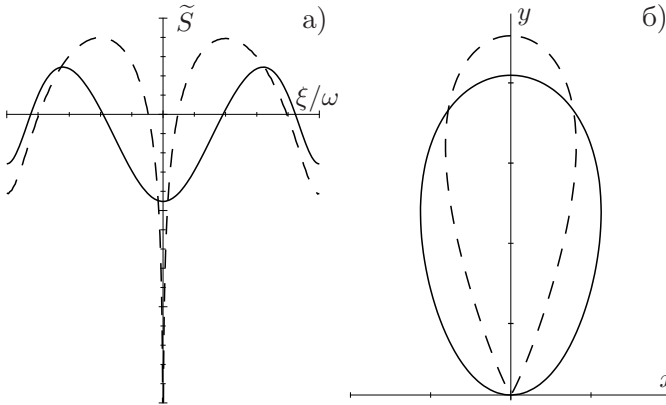


Рис. 27.4. Решение задачи в случае задания расхода

том, что задается не расстояние от контура до экрана, а расход между ними. Эта задача более легкая, т. к. в ней на одну неизвестную и на одно ограничение меньше. Ее решение проводилось тем же методом, что и основной задачи. Результат для $\omega = 4.09$ (соответствующий $h = 0.1$) приведен на рис. 27.4 сплошной линией. Контур получился гладким, без угловых точек, коэффициент $c_y = 1.9022$. Для сравнения штриховой линией приведено решение основной задачи.

27.5. Предельные случаи. При увеличении расстояния $h \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow 0$) форма оптимального контура стремится к окружности – контуру максимальной подъемной силы в безграничном потоке.

Другой предельный случай получается при $h \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow \infty$), он соответствует скользящему вдоль экрана контуру. Область течения становится односвязной и прямоугольник в канонической плоскости t трансформируется в горизонтальную полосу $0 < \text{Im } t < i\pi/2$.

Формула для dw/dt будет

$$\frac{dw}{dt} = \frac{u_\infty}{\text{sh}^2 t},$$

откуда следует

$$P(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi}, \quad R(\xi) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \xi}, \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Функция $\chi_0(t)$ (27.3) примет вид

$$\chi_0(t) = -2 \ln t.$$

Эта функция соответствует обтеканию окружности, лежащей на экране, т. е. угол в точке касания экрана и окружности равен нулю. Наряду с этой функцией рассмотрен также случай обтекания дуги окружности с углом между контуром и экраном, равным $\alpha\pi$, $\alpha \in (0, 1/2]$. Тогда

$$\chi_0(t) = -2 \ln \frac{\operatorname{sh} \alpha t}{\alpha}.$$

Заметим, что для дуги окружности не выполняется условие замкнутости по оси x , поэтому здесь в качестве начального приближения нельзя выбирать $\tilde{\chi}(t) \equiv 0$.

Оптимизационная задача в рассматриваемом предельном случае формулируется так. Требуется определить функцию $\tilde{S}(\xi)$, при которой функционал

$$c_y = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S_0(\xi) - \tilde{S}(\xi)} \cos[\theta_0(\xi) + \tilde{\theta}(\xi)] \operatorname{ch}^{-4} \xi d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{S_0(\xi) + \tilde{S}(\xi)} d\xi}$$

принимает максимальное значение при выполнении ограничений (27.8), (27.12) и (27.10), причем в последнем ограничении интегрирование идет по всей числовой оси.

Решение этой задачи проводилось аналогично решению задачи оптимизации контура над экраном за исключением того, что для численного счета интегралы с бесконечными пределами интегрирования были преобразованы к интегралам с конечными пределами. Оптимальный контур представлен на рис. 27.2,

б, линия 8. Он практически совпал с оптимальным контуром 7 ($h = 0.01$). Коэффициент подъемной силы представлен в последнем столбце табл. 1. Параметр α , влияющий на угол между контуром и экраном, найден из условия плавности изменения угла наклона касательной в окрестности точки касания и получился равным $\alpha \approx 0.4094$.

Из проведенных исследований следуют выводы.

1. В случае обтекания потоком ИНЖ контура заданной длины вблизи экрана максимальная подъемная сила достигается не на окружностях, как в случае безграничного потока.

2. Значение максимальной подъемной силы достигается при обтекании контура с совпадающими точками разветвления и схода потока (случай наличия критической точки в потоке не рассматривался).

3. При увеличении расстояния между контуром и экраном значение коэффициента подъемной силы растёт, форма контура стремится к окружности.

Приложение

Необходимость совершенства ЛА, в частности, улучшения аэродинамического качества и других аэродинамических характеристик по-прежнему сохраняет свою актуальность. Сокращение объема и времени дорогостоящих экспериментальных исследований в аэродинамических трубах и особенно в полете приводит к решению сложных математических проблем проектирования профилей крыльев ЛА при усложненных схемах течения. Развитие соответствующих аналитических, численных и численно-аналитических методов решения таких задач вызывает значительные трудности, преодоление которых требует от исследователя высокой квалификации.

В настоящей монографии, как это видно, на основе теории ОКЗ для аналитических функций поставлены и решены ОКЗА построения и оптимизации формы крыловых профилей самолетов и экранопланов в условиях усложненных схем обтекания и геометрии областей течения. Развита два подхода к решению соответствующих некорректных задач математической физики, основанных на методах квазирешений и введения свободных параметров. Эти подходы предоставляют возможность проектировщику получить ответы на следующие вопросы.

1. Если желаемые свойства искомого крылового профиля заданы с учетом физичности обтекания, т. е. обтекания реально существующего объекта, то решение ОКЗА позволяет сразу построить контур этого профиля по явным аналитическим формулам без итераций и приближений. Заметим, что прямыми методами решить такую задачу удастся лишь путем подбора.
2. Если исходные свойства идеализированы, т. е. не соответствуют физически реальному объекту, то решение ОКЗА сразу дает отрицательный ответ – контур профиля полу-

чается либо разомкнутым, либо неоднолиственным. Прямыми методами найти профиль с такими свойствами практически невозможно, т. к. вряд ли исследователю придет в голову искать неоднолиственный профиль с непростым контуром.

3. Применяв аппарат квазирешений к ОКЗА с идеализированными исходными данными, можно построить физически реальный крыловой профиль, обладающий свойствами, минимально (в указанном в теории квазирешений ОКЗА смысле) отличающимися от заданных.

За последнее десятилетие авторами и их учениками созданы многочисленные алгоритмы и программы решения ОКЗА, используемые при построении крыловых профилей различных ЛА. Существенным недостатком этих разработок, осложняющих их практическое применение, является отсутствие единого образа. Программы для расчетов составлены на различных языках программирования. Поэтому для повышения качества расчетов, расширения областей применения алгоритмов и программ, перевода их реализации на новую техническую базу, повышения производительности труда при расчетах все имеющихся программы решения ОКЗА объединяются в едином пакете, составившим универсальный интерфейс, понятный для любого пользователя. Подчеркнем, что основная цель пакета программ заключается не в восстановлении формы уже существующих профилей, а в проектировании новых профилей. Поэтому важным является ответ на вопрос, каким будет контур профиля при достаточно произвольном задании исходного распределения скорости по контуру.

Созданный пакет программ (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №20106110469) позволяет использовать его при работе на любых персональных компьютерах со средними характеристиками, объединяет возможности проектирования крыловых профилей не только в простейшем случае ИНЖ, но также с учетом сжимаемости потока по модели газа Чаплыгина и вязкости по теории ПС при заданных свойствах профиля. Реализуется решение ОКЗА на основе ГЦРС или произвольного импортированного

распределения скорости. Удовлетворение условий замкнутости искомого контура и заданности скорости потока на бесконечности дает возможность находить физически реализуемые профили путем модификации исходных распределений скорости с использованием аппарата квазирешений некорректных задач математической физики. С целью улучшения аэродинамических свойств крыловых профилей в пакете программ предусмотрена также возможность модификации известных профилей путем изменения распределения скорости.

Таким образом, пакет программ позволяет:

1. Решать ОКЗА на основе ГЦРС или произвольного импортированного распределения скорости.
2. Удовлетворять условиям замкнутости искомого контура и заданности скорости потока на бесконечности с использованием аппарата квазирешений некорректных задач математической физики.
3. Строить профили в диапазоне углов атаки.
4. Модифицировать известные профили путем изменения распределения скорости: срезание пиков скорости, изменение с целью увлечения продольной устойчивости крылового профиля.
5. Решать задачи расчета обтекания известных крыловых профилей панельным методом и методом конформных отображений.
6. Пересчитывать распределения скорости на другие углы атаки.
7. Рассчитывать ПС (ламинарный, турбулентный и с переходом) методами Кочина-Лойцанского и Эпплера, проверять критерий безотрывности.
8. Рассчитывать коэффициенты аэродинамических сил и моментов.
9. Вычислять аэродинамический фокус и центр давления для проверки условия продольной устойчивости крылового профиля.

Пакет программ не требователен к машинным ресурсам и позволяет быстро проводить расчеты с требуемой точностью.

Литература

1. *Абзалмилов Д. Ф.* Оптимизация распределенного отсоса турбулентного пограничного слоя // Матер. I-й науч.-практ. конф. молодых ученых и специалистов “Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности”. — М.: ОКБ Сухого, 2002. — С. 6–13.
2. *Абзалмилов Д. Ф., Ильинский Н. Б.* Об одной экстремальной задаче обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости гладкого замкнутого контура со стоком // *Доклады Академии наук России.* — 1997. — Т. 354, № 1. — С. 43–46.
3. *Абзалмилов Д. Ф., Марданов Р. Ф.* О максимизации подъемной силы гладкого контура с источником и стоком // Матер. всерос. молодеж. науч. шк.-конф. по матем. моделированию, геометрии и алгебре. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1998. — С. 9–15.
4. *Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б.* История развития обратных краевых задач в Казани. Очерки истории НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева. — Казань: Изд. Казан. ун-та, 1989. — С. 36–52.
5. *Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нузжин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г.* Теория обратных краевых задач для аналитических функций // *Итоги науки и техники. Матем. анализ.* — 1980. — Т. 18. — С. 67–124.
6. *Аристова Е. Ю., Поташев А. В.* Построение крыловых профилей с тангенциальным отсосом или вдувом // *Изв. вузов. Авиационная техника.* — 1991. — № 4. — С. 8–11.
7. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 304 с.
8. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982. — 583 с.
9. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. —

- М.: Наука, 1981. — 400 с.
10. *Воробьев Н. Ф.* Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. — Новосибирск: Наука, 1985. — 235 с.
 11. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
 12. *Голубев В. В.* О работе крыла с отсасыванием пограничного слоя // Труды по аэродинамике. — М.–Л.: Гостехиздат, 1957. — С. 142–144.
 13. *Голубев В. В.* Теоретические основания методов увеличения подъемной силы крыла. Разрезные крылья, щитки, отсасывание // Труды по аэродинамике. — М.–Л.: Гостехиздат, 1957. — С. 199–291.
 14. *Гошек И.* Аэродинамика больших скоростей. — М.: ИИЛ, 1954. — 548 с.
 15. *Гуревич А. М.* Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979. — 536 с.
 16. *Елизаров А., Ильинский Н. Б., Поташев А. В.* Обратная краевая задача для ламинарного профиля с отсосом // Тр. семин. по краевым задачам. — Казань: Казан. ун-т, 1987. — Т. 23. — С. 61–69.
 17. *Елизаров А. М.* Некоторые экстремальные задачи теории крыла // *Изв. вузов. Математика.* — 1988. — № 10. — С. 71–74.
 18. *Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1994. — 440 с.
 19. *Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Степанов Г. Ю.* Основные методы, результаты, приложения и нерешенные проблемы теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. — Казань: ДАС, 2001. — 225 с.
 20. *Елизаров А. М., Ихсанова А. Н., Фокин Д. А.* Численная оптимизация формы крыла экраноплана методами теории вариационных обратных краевых задач // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 165–167.
 21. *Елизаров А. М., Фокин Д. А.* Построение крыловых профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне измене-

- ния углов атаки // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* — 1990. — № 3. — С. 157–164.
22. Жуков В. И. Особенности аэродинамики, устойчивости и управляемости экраноплана. — М.: ЦАГИ, 1997. — 80 с.
23. Жуковский Н. Е. О реакции вытекающей и втекающей жидкости // Полное собр. соч. — М.-Л.: Главная редакция авиационной литературы, 1937. — Т. 4. — С. 7–21.
24. Жулев Ю. Г., Иншаков С. И. О возможности повышения эффективности тангенциального выдува целевой струи на поверхность профиля // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* — 1996. — № 4. — С. 182–186.
25. Зубов В. И. К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1980. — Т. 20, № 1. — С. 241–245.
26. Иванов Н. Г., Николаев М. А., Тельнов Д. С. Численное моделирование трехмерного течения и теплообмена в трансзвуковой турбинной решетке на основе модели турбулентности спаларта-аллмараса // *Проблемы газодин. и теплообмена в энергет. устан.* — М.: Изд-во МЭИ., 2003. — Т. 2. — С. 70–73.
27. Ильинский А. Н., Ильинский Н. Б., Маклаков Д. В., Поташев А. В. Метод аэродинамического проектирования крылового профиля экраноплана // *Изв. вузов. Авиационная техника.* — 1995. — № 2. — С. 54–63.
28. Ильинский А. Н., Поташев А. В. Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики с учетом пограничного слоя // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* — 1989. — № 4. — С. 28–32.
29. Ильинский Н. Б., Лотфуллин М. В., Маклаков Д. В., Поташев А. В. Определение формы крылового профиля, обтекаемого вблизи границы раздела двух сред, по заданной эпюре скорости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* — 1992. — № 6. — С. 15–21.
30. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крылового профиля с закрылком, моделируемым точным вихрем // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* — 1992. — № 1. —

С. 3–9.

31. *Ильинский Н. Б., Поташев А. В.* Модельная задача построения и аэродинамического расчета скользящего профиля крыла экраноплана // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. — 2003. — № 2. — С. 201–208.
32. *Иродов Р. Д.* Критерии продольной устойчивости экраноплана // *Ученые записки ЦАГИ*. — 1970. — Т. 1, № 4. — С. 63–72.
33. *Колесников Г. А., Марков В. К., Михалюк А. А.* Аэродинамика летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1993. — 544 с.
34. *Копырин М. А.* Решение обратной задачи аэродинамики при наличии на контуре источников и стоков // *Тр. Казанск. авиац. ин-та*. — 1949. — Т. 24. — С. 128–138.
35. *Котляр Л. М.* Построение тонкого профиля с реактивным закрылком по заданному распределению скорости // *Тр. семинара по обратным краевым задачам*. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. — Т. 1. — С. 53–59.
36. *Краснов Н. Ф.* Аэродинамика. Ч. 1. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла. — М.: Высшая школа, 1980. — 495 с.
37. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
38. *Лаврентьев М. М.* К вопросу об обратной задаче теории потенциала // *ДАН*. — 1956. — Т. 106, № 3. — С. 389–390.
39. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Изд. СО РАН, 1962. — 91 с.
40. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. — 287 с.
41. *Леонтьев В. Г., Поташев А. В.* Обобщение задачи М.А.Лаврентьева об оптимальной по коэффициенту подъемной силы дужки вблизи экрана // *Сборник трудов Первой научно-практической конференции молодых ученых и специалистов “Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности”*. — М.: ОКБ Сухого, 2002. —

- С. 98–104.
42. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 848 с.
 43. *Маклаков Д. В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. — М.: Янус-К, 1997. — 280 с.
 44. *Маскалик А. И., Колызаев Б. А., Жуков В. И., Л. Р. Г., Сунницын Д. Н., Зогорудько Л. К.* Экранопланы. Особенности теории и проектирования. — СПб.: Судостроение, 2000. — 320 с.
 45. *Насыров Р. М.* Определение формы биплана по заданному распределению скорости по поверхности профилей, его составляющих // *Учен. зап. Казан. ун-та.* — 1953. — Т. 113, № 10. — С. 31–41.
 46. *Некрасов А. И.* Обтекание профиля жуковского при наличии на профиле источника и стока // *Прикладная математика и механика.* — 1947. — Т. 11, № 1. — С. 41–54.
 47. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
 48. *Поташев А. В.* Построение крылового профиля с закрылком конечных размеров // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* — 1995. — № 1. — С. 173–180.
 49. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.
 50. *Седов Л. И.* Новые методы и новые направления механики сплошной среды // *Успехи механики.* — 2005. — Т. 3, № 1. — С. 94–106.
 51. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000. — 160 с.
 52. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1962. — 512 с.
 53. *Степанов Г. Ю.* Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* — 1993. — № 4. — С. 30–42.
 54. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 223 с.

55. *Тумашев Г. Г.* Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // *Уч. зап. Казан. ун-та.* — 1952. — Т. 112, № 3. — С. 3–41.
56. *Тумашев Г. Г., Нуэжин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. — 333 с.
57. *Чжен П.* Управление отрывом потока. — М.: Мир, 1979. — 552 с.
58. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
59. *Шурыгин В. М.* Аэродинамика тел со струями. — М.: Машиностроение, 1977. — 199 с.
60. *Drela M.* Xfoil: An analysis and design system for low reynolds number airfoils: Tech. rep. — University of Notre Dame: Conference on low reynolds number airfoil aerodynamics, 1989.
61. *Elizarov A. M., Il'inskiy N. B., Potashev A. V.* Mathematical methods of airfoils design. — Berlin: Akademie Verlag, 1997. — 292 p.
62. *Eppler R.* Gemeinsame Grenzschichtabsaugung für Hochauftrieb und Schnellflug // *WGLR.* — 1962. — P. 140–149.
63. *Eppler R.* Praktische Berechnung laminarer und turbulenter Absauge-Grenzschichten // *Ing. Arch.* — 1963. — Vol. 32. — P. 221–245.
64. *Eppler R.* Airfoil Design and Data. — Berlin: Springer-Verlag, 1990. — 512 p.
65. *Eppler R.* Airfoils with boundary layer suction, design and off-design cases // *Aerospace Science and Technology.* — 1999. — Vol. 3. — P. 403–415.
66. *Glauert M. B.* The design of suction aerofoils with a very large c_l -range: Rept. & Mem. 2111. — London: Aeronautical Research Council, 1945.
67. *Goldstein S.* Low-drag and suction airfoils // *J. of the Aeronautical Sciences.* — 1948. — Vol. 15, no. 4. — P. 189–220.
68. *Gopalathnam A., Selig M. S.* Multipoint inverse method for multielement airfoil design // *J. Aircraft.* — 1998. — Vol. 35, no. 3. — P. 398–404.
69. *Holland J. H.* Adaptation in Natural and Artificial Systems. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975. — 183 p.

70. James R. M. The theory and design of two-airfoil lifting systems // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng-ng.* — 1977. — Vol. 10, no. 1. — P. 13–42.
71. Lachmann G. V. Laminarization through boundary layer control // *Aeronautical Engineering Review.* — 1954. — Vol. 13, no. 8. — P. 37–51.
72. Liebeck R. H. Design of subsonic airfoil for high lift // *J. Aircraft.* — 1978. — Vol. 15, no. 9. — P. 547–561.
73. Lighthill M. J. A new method of two-dimensional aerodynamic design: Rept. & Mem. 2112. — London: Aeronautical Research Council, 1945.
74. Pankhurst R. C., Gregory N. Power requirements for distributed suction for increasing maximum lift: C. P. 82. — London: Aeronautical Research Council, 1952.
75. Pfenninger W. Untersuchungen über Reibungsverminderung an Tragflügeln, Insbesondere mit Hilfe von Grenzschichtabsaugung: Tech. Rep. 13. — ETH Zurich: Mitteilungen a.d. Inst.F.Aerodynamik, 1946.
76. Schrenk O. Tragflügel mit Grenzschichtabsaugung // *Z. Luftfahrtforschung.* — 1928. — Vol. 2. — P. 49.
77. Selig M. S., Maughmer M. D. Multipoint inverse airfoil design method based on conformal mapping // *AIAA J.* — 1992. — Vol. 30, no. 5. — P. 1162–1170.
78. Signorini A. Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa // *Anali di Mat.* — 1916. — Vol. 25. — P. 253–274.
79. Volterra V. Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa // *Annal. Mat. Pure ed Appl.* — 1883. — Vol. 11. — P. 1–55.
80. Woods L. C. Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* — 1954. — Vol. 7, no. 3. — P. 263–282.
81. Woods L. S. Generalized aerofoil theory // *Proc. Roy. Soc.* — 1957. — P. 358–388.

Используемые аббревиатуры и обозначения

ОКЗ	— обратные краевые задачи,
ОКЗА	— обратные краевые задачи аэрогидродинамики,
ПС	— пограничный слой,
ЛПС	— ламинарный пограничный слой,
ТПС	— турбулентный пограничный слой,
ГЦРС	— гидродинамически целесообразное распределение скорости,
ИНЖ	— идеальная несжимаемая жидкость,
$z = x + iy$	— комплексная координата физической плоскости,
$w = \varphi + i\psi$	— комплексный потенциал течения,
$\zeta = re^{i\gamma}$	— комплексная координата вспомогательной плоскости,
v	— величина скорости в физической плоскости,
u	— величина скорости в канонической плоскости,
v_∞, u_∞	— скорости на бесконечности,
ρ	— плотность жидкости или газа,
p	— давление жидкости или газа,
$p_0 = p + \rho v^2/2$	— полное давление,
G_z	— область течения,
L_z	— контур профиля,
G_w, G_ζ	— образы области течения G_z в плоскостях w и ζ ,
L_w, L_ζ	— образы контура профиля L_z в плоскостях w и ζ ,
s	— дуговая абсцисса контура профиля,

ℓ	— периметр контура профиля,
b	— хорда профиля,
α	— физический или расчетный угол атаки,
β	— теоретический угол атаки,
θ	— аргумент вектора скорости,
Γ	— циркуляция скорости по контуру профиля,
Q	— величина расхода,
$q = Q/(v_\infty b)$	— безразмерный коэффициент расхода,
$\chi = S - i\theta$	— функция Жуковского – Мичела,
$\tilde{\chi} = \tilde{S} + i\tilde{\theta}$	— функция χ с удаленными особенностями, аналитическая в G_ζ функция,
δ	— толщина пограничного слоя,
δ_1	— толщина вытеснения ПС,
δ_2	— толщина потери импульса,
δ_3	— толщина потери энергии,
n	— нормаль к контуру крылового профиля,
$u(s, n)$	— распределение касательной скорости в ПС,
$v(s, n)$	— распределение нормальной скорости в ПС,
$v_0(s)$	— распределение скорости отсоса,
Re	— число Рейнольдса,
$H_{12} = \delta_1/\delta_2$	— формпараметр,
$H_{32} = \delta_3/\delta_2$	— формпараметр,
R_y	— подъемная сила,
R_x	— сила сопротивления,
M_z	— момент силы относительно задней кромки,
$c_y = 2R_y/(\rho_\infty v_\infty^2 b)$	— коэффициент подъемной силы,
$c_x = 2R_x/(\rho_\infty v_\infty^2 b)$	— коэффициент силы сопротивления,
$c_m = 2M_z/(\rho_\infty v_\infty^2 b^2)$	— коэффициент момента.