Устойчивость и повышение эффективности явных схем решения задач теории упругости и теории оболочек (3)

Д.Т. Чекмарев
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Оценка устойчивости явной разностной схемы «крест» решения плоской задачи теории упругости (условие **Куранта** относительно минимального размера пространственной ячейки)

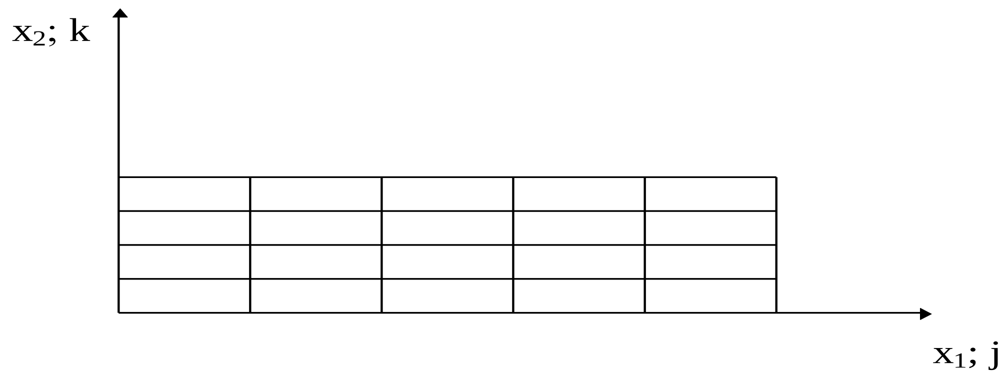
$$\tau \le \min(h_1, h_2)/c$$

где h_i - шаги по пространственной координате,

τ - шаг по времени

$c = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2G}{\rho}}$ - скорость распространения волн растяжения-сжатия

Предположим, мы решаем задачу на сетке с вытянутыми ячейками, когда один размер ячейки существенно больше другого.



Можем улучшить устойчивость разностной схемы до условия **Куранта** относительно максимального размера пространственной ячейки

$$\tau \le \max\left(h_1, h_2\right)/\, c$$

С этой целью дополним схему общего вида стабилизирующим оператором *A* в инерционном слагаемом уравнения

$$L_h u + A D_{tt} u = 0$$

Стабилизирующий оператор А зададим в виде

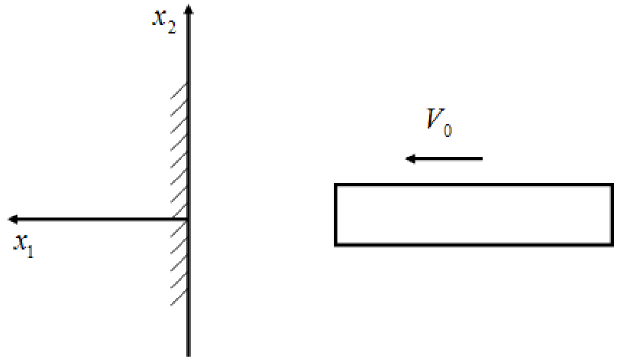
$$A = E - a D_{Si}$$

где Е – тождественный оператор, D_{Si}- оператор, построенный по трем узлам вдоль короткой стороны ячеек разностной сетки и пропорциональный второй производной по данному направлению; коэффициент $\acute{\alpha}$ определяется из необходимого условия устойчивости разностной схемы

$$D_{S2} u^{\ell}_{jk} = u^{\ell}_{j\ k+1} - 2u^{\ell}_{j\ k} + u^{\ell}_{j\ k-1}$$

$$\alpha = \left(\left(h_1 \ / \ h_2 \right)^2 - 1 \right) / \ 4$$

Тестовая задача



Пластина размерами *L*x*l* (*l*/*L*=0.2) ударяется короткой стороной о неподвижную преграду со скоростью *V0*, направленной вдоль оси *x1*

Для расчета пластина покрывалась разностной сеткой 10x10 ячеек, при этом $h_1 / h_2 = 5$. Расчеты проводились по схеме «крест» на 9-точечном пространственном шаблоне и той же схеме со стабилизирующим оператором

Геометрия пластин в момент времени $ct / L = 1$

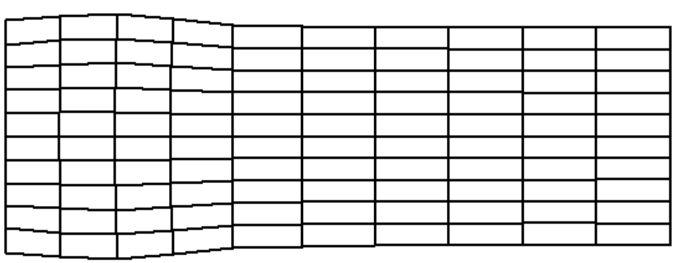


схема «крест» $\tau = h_2 / c$

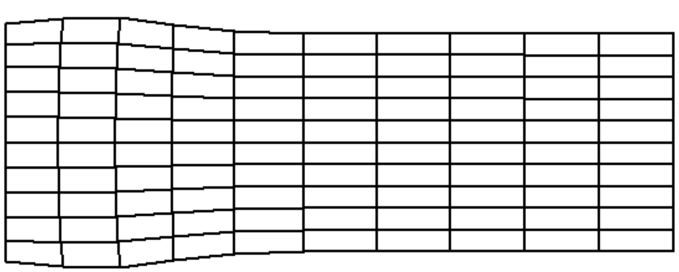
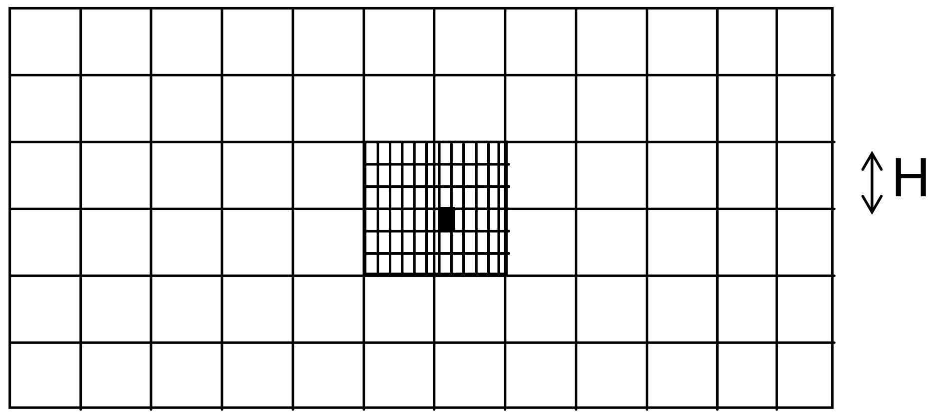


схема со стабилизирующим оператором $\tau = h_1 / c$

Предположим, мы решаем задачу, имеющую некоторую геометрическую особенность (выточку, отверстие, жесткое включение и т.п.) малого размера по отношению к геометрическим параметрам как самой конструкции



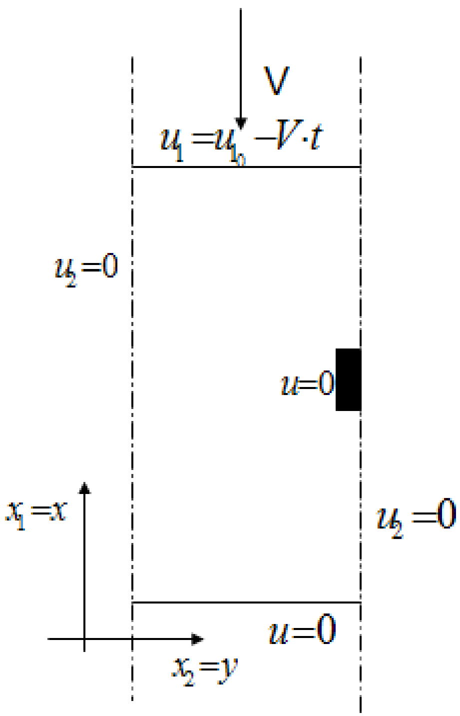
Для того, чтобы расчеты можно было вести с временным шагом, соответствующим крупной сетке, также введем стабилизирующий оператор в виде

$$A = A_1 * A_2$$, где

$$A_1 = E - \frac{1}{4}\left(2\frac{H^2}{h_1^2} - 1\right)D_{S1} \qquad A_2 = E - \frac{1}{4}\left(2\frac{H^2}{h_2^2} - 1\right)D_{S2}$$

Схема будет устойчивой при $\tau \le H / c$

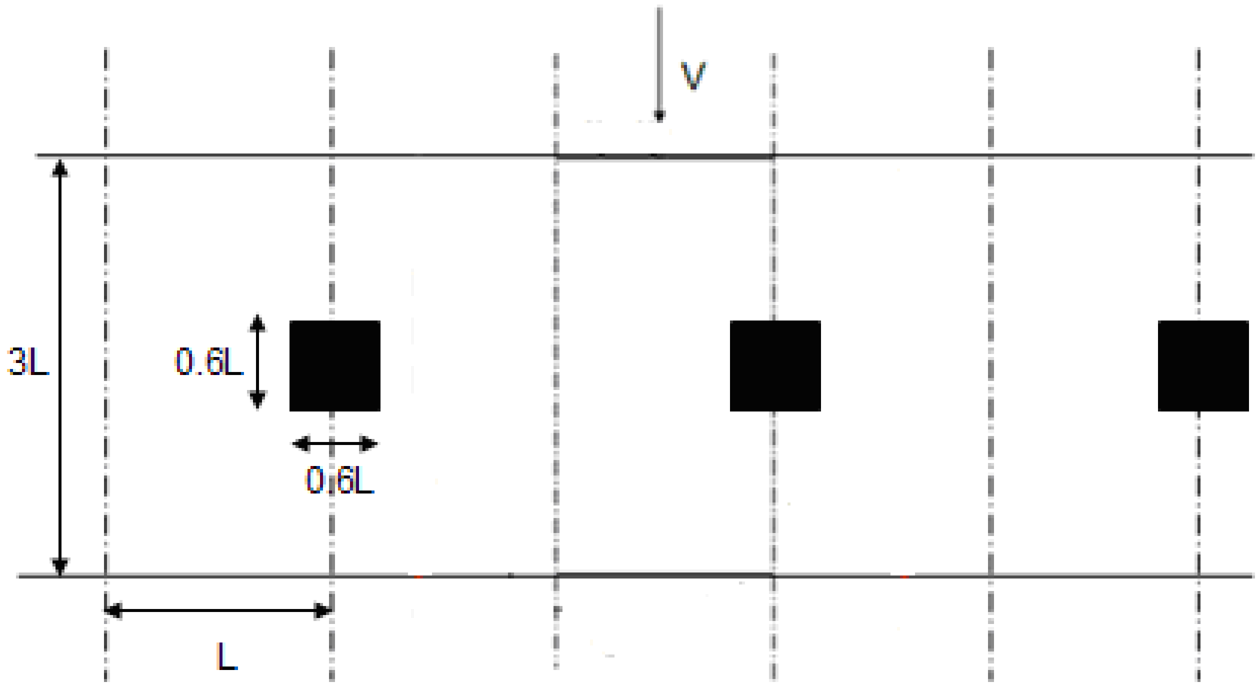
Тестовая задача



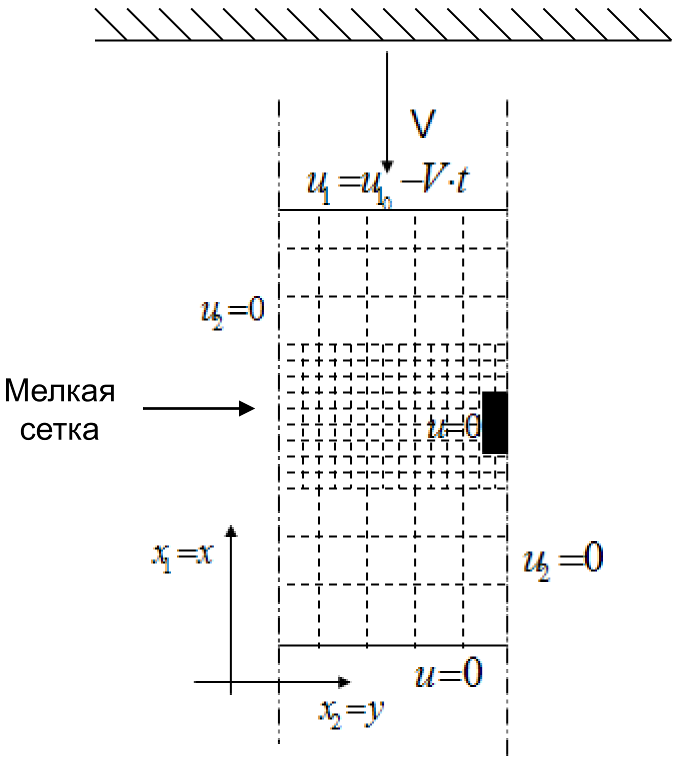
Рассмотрим задачу о деформировании упругой бесконечной полосы с симметрично расположенными закреплениями.

Для расчета пластина покрывалась разностной сеткой 30x30 ячеек, при этом $h_1 / h_2 = 1$, при этом для получения детальной картины в области закрепления $\begin{matrix} L \le x_1 \le 2L \\ 0 \le x_2 \le L \end{matrix}$ вводилась более мелкая сетка

Тестовая задача

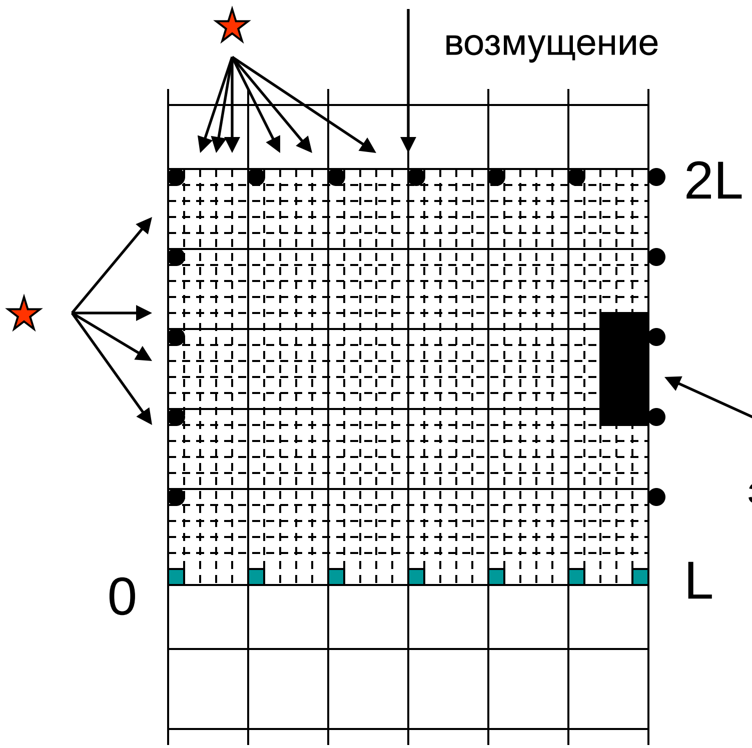


Мелкая сетка



Для расчета пластина покрывалась разностной сеткой 10x30 ячеек, при этом $h_1 / h_2 = 1$, для получения детальной картины в области закрепления $L \le x_1 \le 2L$, $0 \le x_2 \le L$ вводилась более мелкая сетка, каждая ячейка разбивалась на nxn ячеек (n=5)

Задание граничных условий в области закрепления



● значения в узлах берутся из крупной сетки

■ вычисленные значения передаются в узлы крупной сетки

$u_1 = 0$

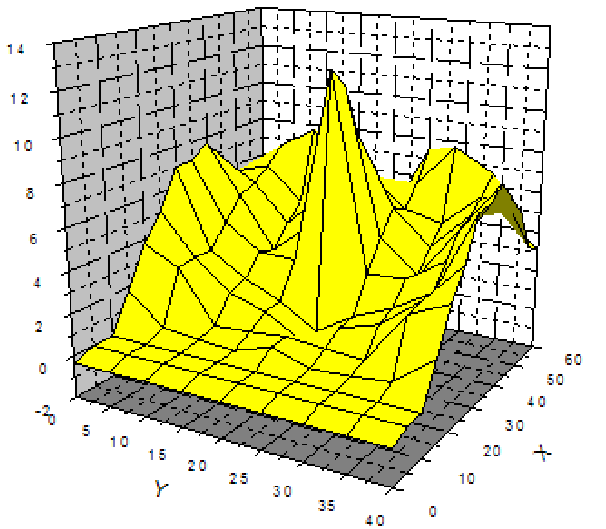
$u_2 = 0$

★ значения в промежуточных узлах строятся как линейные интерполяции ближайших значений крупной сетки

$$u^{\ell}_{j+i,k} = u^{\ell}_{j,k} + i \cdot (u^{\ell}_{j+5,k} - u^{\ell}_{j,k}), \qquad i = 1..4,\ j = 0,5,10,...$$

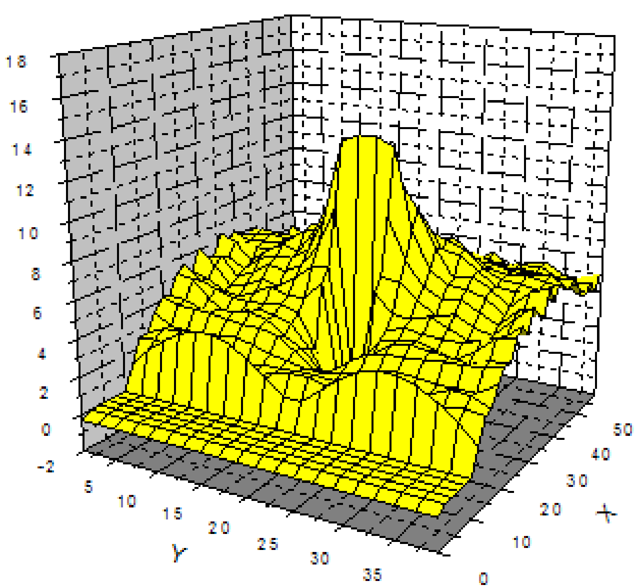
$$u^{\ell}_{j,k+i} = u^{\ell}_{j,k} + i \cdot (u^{\ell}_{j,k+5} - u^{\ell}_{j,k}), \qquad i = 1..4, k = 0,5,10,...$$

Картина давления $\sigma = \dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ в момент времени $tc / L = 1$



на крупной сетке 10х30 ячеек

с шагом $h_1 = h_2 = 2$



на мелкой сетке 50х150 ячеек

с шагом $h_1 = h_2 = 0.4$

Для получения детальной картины в области закрепления вводилась более мелкая сетка с шагом $h_1 = h_2 = 0.4$, при этом применение стабилизирующего оператора на мелкой сетке позволило оставить неизменным шаг по времени.

Линии уровня для давления

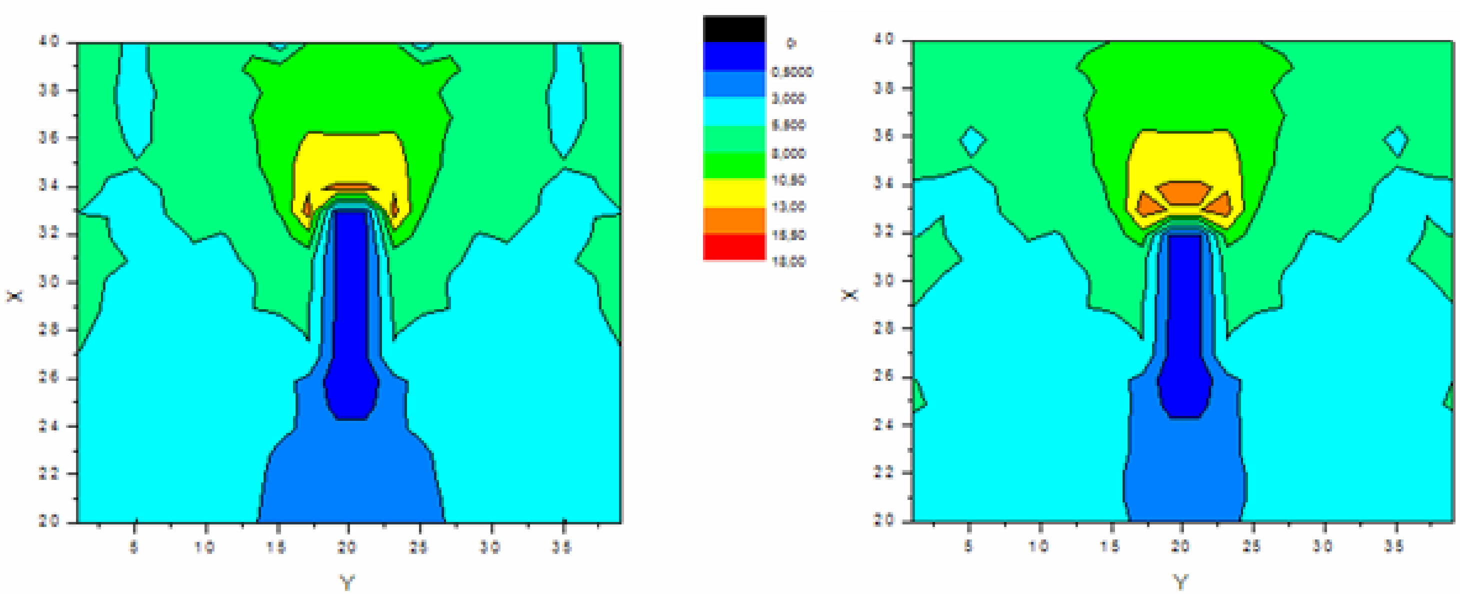


схема с сочетанием крупной и мелкой сетки

схема с мелкой сеткой