

Марат М. Арсланов

ИЕРАРХИЯ МНОЖЕСТВ
И СТЕПЕНЕЙ,
РАСПОЛОЖЕННЫХ НИЖЕ \emptyset'

Казань, Издательство Казанского университета,
2012

**УДК 519.5
ББК 22.14**

Арсланов М. М.

Иерархия множеств и степеней, расположенных ниже \emptyset' — Казань:
Издательство КГУ, 2012. — 177 с., ил.

Содержание настоящей книги составляют лекции, читаемые автором в течении ряда лет в виде специального курса для студентов механико-математического факультета, специализирующихся по математической логике на кафедре алгебры и математической логики. В ней подробно излагается иерархия множеств, расположенных по тьюринговой сводимости ниже \emptyset' и известная в литературе как иерархия Ершова. Иерархия Ершова в последние годы приобретает всю большую популярность среди математиков, работающих в самых различных областях теории вычислимости.

Книга рассчитана на читателей, интересующихся современными проблемами математической логики и теории вычислимости. Каждый параграф сопровождается упражнениями, многие из них могут быть использованы и как подходящие темы курсовых и/или дипломных работ, некоторые из них могут положить начало серьезной исследовательской работе по этой тематике.

Предполагается, что читатель знаком с математической логикой и теорией вычислимости в объеме стандартных университетских курсов, в частности предполагается знакомство с первыми четырьмя главами книги Р. Соара "Вычислимо перечислимые множества и степени", перевод которой с английского оригинала был осуществлен Казанским математическим обществом в 2000 году.

©Казанский государственный университет, 2012
©М.М. Арсланов, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава 1. Множества из иерархии Ершова	9
§1. Конечные уровни иерархии Ершова	10
§2. ω -в. п. множества. Связь с табличной сводимостью	17
§3. ω -в. п. множества как объекты разностной иерархии	23
§4. Свойства продуктивности и креативности н-в. п. множеств	29
§5. Обобщения критерия полноты	33
§6. Ординалы. Арифметика ординальных чисел	42
§7. Конструктивные ординалы. Обозначения для конструктивных ординалов	50
§8. Описание Δ_2^0 -множеств с помощью конструктивных ординалов	59
§9. Бесконечные уровни иерархии Ершова	66
§10. Обобщения табличной сводимости	71
§11. Свойства $g\alpha t$ — сводимости	78
Глава 2. Тьюринговые степени н-в. п. множеств	81
§1. Собственные н-в. п. степени. Теорема об иерархии	82
§2. Свойства слабой плотности d -в. п. степеней	95
§3. Структурные свойства d -в. п. степеней	100
§4. Теорема о вложении ромба	106
§5. Неплотность упорядочения н-в. п. степеней	112
§6. Свойства разложимости н-в. п. степеней	114
§7. Изолированные d -в. п. степени	117
§8. Изолирующие совокупности степеней	129
Глава 3. Относительная перечислимость	137
§1. СЕА-операторы и иерархия Ершова	137
§2. Новые свойства СЕА н-в. п. степеней	142
§3. Неинтерполяционная теорема	154

§4. Свойство изолированности d -в. п. степеней	158
Глава 4. Дальнейшие результаты и открытые проблемы	199
§1. Элементарные теории n -в. п. степеней	185
§2. Открытые проблемы	188
Глава 5. Иерархия действительных чисел	219
§1. Δ_2^0 -действительные числа	219
§2. Вычислимые и вычислимо перечислимые действительные числа	240
§3. d -в. п.. действительные числа	250
§4. Степени d -в. п. действительных чисел	260
§5. Сводимость Соловея	270
§6. Случайность, определяемая по n -в. п.. множествам строк .	280
§7. Случайность, определяемая ограничением количества а clopen neighborhood may enter or exit a test (instead of строк) .	290
Глава 6. Вычислимые модели	300
§1. Вычислимые модели	301
§2. Вычислимая категоричность и иерархия Ершова	310
Литература	340

Введение

Полезной характеристикой множеств, по тьюринговой сводимости расположенных ниже \emptyset' , является следующее их свойство: $A \leq_T \emptyset'$ тогда и только тогда, когда существует такая вычислимая функция $f(s, x)$, что $A(x) = \lim_s f(s, x)$. Здесь $A(x)$ характеристическая функция множества A : $A(x) = 1$, если $x \in A$, и $A(x) = 0$, если $x \notin A$. Таким образом, условие $A \leq_T \emptyset'$ эквивалентно тому, что множество A может быть вычислимо аппроксимируемо в следующем смысле: существует такое множество равномерно вычислимых последовательностей $\{f(0, x), f(1, x), \dots, f(s, x), \dots | x \in \omega\}$, состоящих из 0 и 1, что для каждого x предел последовательности $f(0, x), f(1, x), \dots$ существует и равен значению $A(x)$.

В своих теперь уже ставших классическими работах Ю.Л. Ершов [1968a,b][1970] построил иерархию множеств, расположенных ниже \emptyset' , теперь известную в литературе как "иерархия Ершова". Место множества A в иерархии определяется по количеству изменений в аппроксимации множества A с помощью описанной выше вычислимой последовательности, т. е. по количеству различных пар соседних элементов этой последовательности. Иерархия Ершова состоит из "конечных" и "бесконечных" уровней. К конечным уровням иерархии Ершова относятся множества, у которых количество таких изменений ограничено некоторым натуральным числом. В противном случае множество принадлежит одному из бесконечных уровней иерархии Ершова. Бесконечные уровни иерархии определяются с помощью бесконечных конструктивных ординалов. (Конечные уровни иерархии Ершова впервые под другими названиями были определены и изучены в работах Голда [1965], Путнама [1965] и других.)

Как оказалось, возникающая иерархия множеств исчерпывает всю совокупность множеств, расположенных по тьюринговой сводимости ниже \emptyset' , степени креативного множества. Каждый следующий уровень иерархии содержит все предыдущие, но не совпадает ни с одним из них, при этом уровни иерархии устроены настолько "равномерно", что высказывалась даже гипотеза, что полурешетки тьюринговых степеней множеств конечных уровней иерархии, начиная со второго, неразличимы на языке первого порядка. Это предположение получило известность как "гипотеза Довнея" и вызвало целый ряд публикаций.

Степени, содержащие множества из разных уровней иерархии Ершова, интенсивно исследовались начиная с 70-х годов прошлого столетия. Выяснилось, что они (частично упорядоченные отношением тьюринговой сводимости) имеют богатую внутреннюю структуру, во многом, но, как позднее выяснилось, не во всем, повторяя свойства своего важнейшего представителя - класса степеней, содержащих в. п. множества.

Содержание настоящей книги составляют лекции по иерархии Ершова, читаемые автором в течении ряда лет в виде специального курса для студентов механико-математического факультета в Казанском университете. В ней приведены с разной степенью подробности доказательства всех наиболее значительных (на мой взгляд) результатов как по строению самой иерархии множеств, так и по строению индуцированной иерархии полурешеток степеней неразрешимости.

Каждый параграф сопровождается упражнениями, многие из них могут быть использованы и как подходящие темы курсовых и/или дипломных работ, некоторые из них могут положить начало и серьезной исследовательской работе по этой тематике.

Спецкурс читается автором на старших курсах механико-математического факультета, после того, как студенты уже прослушали курсы по математической логике и теории алгоритмов. Поэтому при чтении книги предполагается знакомство читателя с математической логикой и теорией вычислимости в объеме стандартных университетских курсов, в частности предполагается знакомство с первыми четырьмя главами книги Р. Соара "Вычислимо перечислимые множества и степени", перевод которой с английского оригинала был осуществлен Казанским математическим обществом в 2000 году. Мы также придерживаемся обозначений, принятых в этой книге. В частности, множество всех натуральных чисел обозначается через ω , так же обозначается и первый бесконечный кардинал, причем по контексту будет понятно, что в каждом случае имеется ввиду. Для множества $A \subseteq \omega$ его дополнение, равное $\omega - A$, будем обозначать через \bar{A} . Мощность множества A обозначается через $|A|$. Стандартные нумерации всех в. п. и частично вычислимых функций обозначаются соответственно через $\{W_x\}_{x \in \omega}$ и $\{\Phi_x\}_{x \in \omega}$.

Как обычно, результат, полученный к концу шага s в процессе вычисления $\Phi_e(A; x)$ мы обозначаем через $\Phi_e(A; x)[s]$ означает. Например, если множество A в. п. (или допускает какуюнибудь пошаговую аппроксимацию), то эта запись означает результат, полученный за s шагов работы e -ой машины Тьюринга на входе x с оракулом $A[s]$, последнее означа-

ет подмножество множества A , перечисленное к концу шага s (соответственно, аппроксимацию множества A к концу шага s). Если $\Phi_e(A; x)$ определена, то значение ее use-функции записывается как $\varphi_e(A; x)$. По определению, $\varphi_e(A; x) = 1 +$ наибольшее число, использованное в этом вычислении. Аналогично определяется $\varphi_e(A; x)[s]$.

Запись $f \lceil x$ означает ограничение функции f к числам $y \leq x$. Таким образом, если $\Phi_e(A; x)$ определена, тогда значение ее use-функции равно $A \lceil \varphi_e(A; x)$, и изменение A в промежутке $\leq \varphi_e(A; x)$ разрушает это вычисление.

Двухместная функция $\langle x, y \rangle$, определенная как $\langle x, y \rangle := \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$ для $x, y \in \omega$, и осуществляющая биективное отображение ω^2 на ω , называется *канторовской нумерующей функцией*. Через l и r обозначаются однозначно определенные функции такие, что для всех $x, y \in \omega$, $\langle l(x), r(x) \rangle = x$, $l(\langle x, y \rangle) = x$, $r(\langle x, y \rangle) = y$; n -местная функция $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ при $n > 2$ определяется так: $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle \langle \dots \langle x_1, x_2 \rangle, x_3 \rangle, \dots, x_n \rangle$. В этом случае s -я компонента $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ обозначается через $c_{n,s}$. Таким образом, $\langle c_{n,1}(x), \dots, c_{n,n}(x) \rangle = x$ и $c_{n,s}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = x_s$. Если функция f в точке x определена, то пишем $f(x) \downarrow$, в противном случае пишем $f(x) \uparrow$. Через $A[x]$ обозначается конечное множество $A \cap \{0, 1, \dots, x - 1\}$. Характеристическая функция множества A обозначается той же буквой: $A(x) = 1$, если $x \in A$, в противном случае $A(x) = 0$. Через $\{D_n\}_{n \in \omega}$ обозначается *каноническая нумерация* всех конечных подмножеств ω : $D_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $n = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_n}$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. (Если $n = 0$, то по определению полагаем $D_n = \emptyset$.) Область определения функции f обозначается через $\text{dom}(f)$, область ее значений - через $\text{rng}(f)$.

Глава 1

Множества из иерархии Ершова

Эта глава содержит описание уровней иерархии, а также результаты о свойствах множеств из различных ее уровней. В §1 мы изучаем свойства множеств из конечных уровней иерархии Ершова. В §2 убедимся, что множества конечных уровней иерархии Ершова далеко не исчерпывают всю совокупность Δ_2^0 -множеств. Поэтому в §9 мы распространим эту иерархию и на бесконечные уровни, используя для этой цели клиниевскую систему обозначений для конструктивных ординалов. §8 содержит необходимые для этой цели определения и предварительные результаты, в частности описание Δ_2^0 -множеств на языке конструктивных ординалов. В §§3, 4 изучаются свойства множеств первого бесконечного уровня иерархии - ω -в. п. множеств.

В целом теоретико-множественная и степенная структуры множеств из бесконечных уровней иерархии Ершова устроены иначе, чем эти структуры для в. п. множеств. Но многие важнейшие свойства в. п. множеств переносятся и на общий случай. Мы это демонстрируем на двух примерах. В §4 по аналогии с понятиями продуктивного и креативного множеств вводятся понятия Σ_n^{-1} -продуктивного и Σ_n^{-1} -креативного множеств и изучаются некоторые их свойства, вполне похожие на свойства их классических аналогов. А в §5 известный критерий полноты в. п. множеств, использующий существование сводящихся по Тьюрингу функций "без неподвижных точек", обобщается на все конечные уровни этой

иерархии.

По известной теореме Карстенса [1978] (см. теоремы 8, 12) множества конечных уровней иерархии Ершова можно описать как множества, ограниченно таблично (btt-) сводящиеся к креативному множеству, а ω -в. п. множества как множества, которые к нему таблично (tt-) сводятся. В §10 мы обобщаем понятие табличной сводимости с тем, чтобы получить аналогичные описания и для множеств из других бесконечных уровней иерархии Ершова. В §11 изучаются некоторые свойства этих новых сводимостей.

§1. Конечные уровни иерархии Ершова

Определение 1 Говорят, что (всюду определенная) одноместная функция f является пределом последовательности (всюду определенных) функций $\{f_s\}_{s \in \omega}$, если $f_s(x) = f(x)$ для почти всех (т. е. для всех, кроме конечного числа) s при любом значении x . В этом случае также говорят, что последовательность функций $\{f_s\}_{s \in \omega}$ (поточечно) сходится к функции f (записывается как $f = \lim_s f_s$).

Начнем изложение со следующего утверждения, которое, как видно из сказанного во введении, является источником последующих рассмотрений.

Лемма 1 (Лемма о пределе) Для любой функции f , и для любого множества A , $f \leq_T A'$ тогда и только тогда, когда существует такая A -равномерно вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s \in \omega}$, что $f = \lim_s f_s$. (В частности, любая функция $f \leq_T \emptyset'$ является пределом некоторой равномерно вычислимой последовательности $\{f_s\}_{s \in \omega}$.)

Доказательство. Пусть $f \leq_T A'$. Так как A' в. п. относительно A , мы можем фиксировать такое n , что $A' = W_n^A$. Пусть $f = \Phi_e^{A'}$ для некоторого $e \in \omega$.

Определим

$$f_s(x) = \begin{cases} \Phi_e^{W_n^A}(x)[s] & , \text{ если } \Phi_e^{W_n^A}(x)[s] \downarrow; \\ 0 & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{f_s\}_{s \in \omega}$ является A -равномерно вычислимой последовательностью. Так как функция f всюду определена, то для любого x найдется такое s , что $\Phi_e^{W_n^A}(x)[s] \downarrow$, и для любого t , $\Phi_e^{W_n^A}(x)[s+t] = \Phi_{e,s}^{W_n^A}(x)$. Понятно, что $f(x) = f_s(x)$.

(\Leftarrow) Пусть $f = \lim_s f_s$, где $\{f_s\}_{s \in \omega}$ - A -равномерно вычислимая последовательность. Пусть $B = \{\langle s, x \rangle \mid \exists t \geq s (f_t(x) \neq f_{t+1}(x))\}$. Ясно, что B в.п относительно A , поэтому $B \leq_T A'$. Ясно также, что $f \leq_T B$. ■

Замечание 2 Если в лемме о пределе функция f является характеристической функцией некоторого множества, то удобно A -равномерно вычислимую последовательность $\{f_s\}_{s \in \omega}$ подобрать так, чтобы для всех s и x выполнялось условие $f_s(x) \in \{0, 1\}$. Этого, например, можно добиться, заменив в первой строке определения $f_s(x)$ выражение $\Phi_e^{W_n^A}(x)[s]$ на $sg(\Phi_e^{W_n^A}(x))[s]$. Для дальнейшего выбираем именно этот способ представления.

Пусть $A \leq_T \emptyset'$. По лемме о пределе существует такая вычислимая функция f , что $A = \lim_s f(s, x)$ и согласно замечанию 2 для любого $x \in N$ справедливо $f(0, x) = 0$.

Определим в. п. множества R_i , $i \in N$:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{y \mid \exists s (f(s, y) = 1)\}, \\ R_1 &= \{y \mid \exists s_0 < s_1 (f(s_0, y) = 1, f(s_1, y) = 0)\}, \text{ и в общем случае для } x > 0, \\ R_x &= \{y \mid \exists s_0 < s_1 < \dots < s_x (f(s_0, y) = 1, f(s_1, y) = 0, \dots, f(s_x, y) = rest(x+1, 2))\}, \end{aligned}$$

Ясно, что все множества R_x в. п., последовательность $\{R_x\}_{x \in \omega}$ равномерно вычислена, и $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$

Легко также проверить, что

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = \emptyset \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (R_{2n} - R_{2n+1}) \quad (1)$$

Обратно, пусть $\{R_x\}_{x \in \omega}$ такая равномерно вычислена последовательность в. п. множеств, что соотношения (1) выполнены. Для любого $x \in \omega$ имеем: если $x \notin R_0$, то $x \notin A$, если же $x \in R_0$, то

$$x \in A \Leftrightarrow \exists n (x \in R_{2n} - R_{2n-1})$$

(Такое число n найдется из-за условия $\bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = \emptyset$.)
Поэтому $A \leq_T \emptyset'$.

Таким образом, условие существования равномерно вычислимой последовательности в. п. множеств, удовлетворяющих соотношениям (1), является характеристическим для Δ_2^0 -множеств. Оформим это утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема 3 *Множество A T -сводится к \emptyset' тогда и только тогда, когда существует такая равномерно вычислимая последовательность в. п. множеств $\{R_x\}_{x \in \omega}$, что*

$$R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots, \quad \bigcap_{x=0}^{\infty} R_x = \emptyset, \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{x=0}^{\infty} (R_{2x} - R_{2x+1})$$

Если в этом представлении множества A через последовательность $\{R_x\}_{x \in \omega}$ все ее члены, начиная с некоторого n , равны пустому множеству, то мы получим множества, принадлежащие конечному уровню n иерархии Ершова.

Определение 2 *Множество A называется n -вычислимо перечислимым (n -в. п. множеством), если либо $n = 0$ и $A = \emptyset$, либо $n > 0$ и существуют такие в. п. множества $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_{n-1}$, что*

$$A = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (R_{2i} - R_{2i+1}) \quad (\text{Здесь при } n \text{ нечетном } R_n = \emptyset.)$$

Согласно этому определению при $n > 1$ и n четном ($n = 2m$) имеем

$$A = \bigcup_{x=0}^{m-1} (R_{2x} - R_{2x+1}),$$

и при $n > 1$ и n нечетном ($n = 2m + 1$)

$$A = \left[\bigcup_{x=0}^{m-1} (R_{2x} - R_{2x+1}) \right] \cup R_{2m}.$$

Таким образом, 1-в. п. множества - это в точности все в. п. множества, 2-в. п. множества имеют вид $R_1 - R_2$, где $R_1 \supseteq R_2$ - в. п. множества, поэтому их еще называют *d*-в. п. (difference-в. п.) множествами, 3-в. п. множества имеют вид $(R_1 - R_2) \cup R_3$ и т.д.

n-в. п. множества образуют уровень Σ_n^{-1} иерархии Ершова, о них также говорят как о Σ_n^{-1} -множествах. Множества, состоящие из дополнений Σ_n^{-1} -множеств, образуют уровень Π_n^{-1} иерархии (Π_n^{-1} -множества). Через Δ_n^{-1} обозначается пересечение этих двух классов:

$$\Delta_n^{-1} = \Sigma_n^{-1} \cap \Pi_n^{-1}.$$

Позднее в теореме 11 мы приводим имеющиеся соотношения между этими классами.

Рассуждения, приведенные перед формулировкой теоремы 3, позволяют теперь установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 4 *Множество A является n -в. п. для некоторого $n \geq 0$ тогда и только тогда, когда существует такая вычислимая функция g от двух переменных s и x , что $A(x) = \lim_s g(s, x)$, для любого x $g(0, x) = 0$, и*

$$|\{s | g(s+1, x) \neq g(s, x)\}| \leq n. \quad (1)$$

Обозначим количество элементов конечного множества $\{s | g(s+1, x) \neq g(s, x)\}$ через $\alpha_{A,g}(x)$. Ясно, что число $\alpha_{A,g}(x)$ является определенной числовой характеристикой "сложности" аппроксимации $A(x)$ посредством вычислимой функции g . Ясно также, что значения $\alpha_{A,g}$ зависят от выбранной функции g .

Через \mathcal{R}_n обозначим совокупность n -в. п. множеств. Каждое n -в. п. множество является также и $(n+1)$ -в. п. множеством, поэтому

$$\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \dots$$

Легко проверяется (см. теорему 5), что обратные вложения не имеют места.

Теорема 5 Для любого $n > 0$ существует $(n+1)$ -в. п. множество с $(n+1)$ -в. п. дополнением, которое не n -в. п. и даже не $\text{ко-}n$ -в. п.

Для доказательства см. упражнение 1.4.

Таким образом, справедлива

Теорема 6 (Теорема об иерархии) Для любого $n > 0$,

$$\Sigma_n^{-1} \cup \Pi_n^{-1} \subseteq \Sigma_{n+1}^{-1} \cap \Pi_{n+1}^{-1},$$

и это включение является собственным.

Упражнения

1.1. (Эштейн, Хаас и Крамер [1981]) Множество A называется n -слабо вычислимом перечислимым для $n \geq 0$ (n -слабо в. п. множество), если существует такая вычислимая функция g от двух переменных s и x , что $A(x) = \lim_s g(s, x)$ и

$$|\{s | g(s+1, x) \neq g(s, x)\}| \leq n$$

(т. е. повторяется определение n -в. п. множества, но при этом отсутствует условие " $g(0, x) = 0$ для любого x ").

а) Докажите, что множество 0-слабо в. п. тогда и только тогда, когда оно вычислимо; каждое n -в. п. множество и n -слабо в. п.; множество A n -слабо в. п. для произвольного $n \geq 0$ тогда и только тогда, когда его дополнение \bar{A} также n -слабо в. п.

б) Докажите, что множества A и \bar{A} оба $(n+1)$ -в. п. (т. е. $A \in \Delta_{n+1}^{-1}$) тогда и только тогда, когда они n -слабо в. п.

в) Докажите, что для любого $n > 0$ существует n -слабо в. п. множество, для которого ни оно, ни его дополнение не n -в. п.

1.2. Докажите, что для любого $n \geq 1$, множество A является $(n+1)$ -в. п. тогда и только тогда, когда существуют такие в. п. множество B и n -в. п. множество C , что $B \supseteq C$ и $A = B - C$.

1.3. Пусть A произвольное Σ_2^0 -множество. Докажите, что $A = \bigcup_{x=0}^{\infty} (R_{2x} - R_{2x+1})$ для некоторой равномерно вычислимой последовательности в. п. множеств $\{R_x\}_{x \in \omega}$ такой, что $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$. Таким образом, в теореме 3 условие $\bigcap_{x=0}^{\infty} R_x = \emptyset$ необходимо.

1.4. Докажите, что для любого $n > 0$ существует n -в. п. множество, дополнение которого не является n -в. п. множеством.

1.5. Докажите теорему 5.

1.6. (Марквалд) Докажите, что если A является n -в. п. множеством для некоторого $n \geq 1$, тогда либо A , либо дополнение A содержит бесконечное в. п. множество.

1.7. (Джокуш [1968]) Множество $M \in \omega$ называется *полурекурсивным*, если существует такая вычислимая функция f от двух переменных, что для произвольных $x, y \in \omega$, $f(x, y) \in \{x, y\}$ и $\{x, y\} \cap M \neq \emptyset \rightarrow f(x, y) \in \{x, y\} \cap M$.

(Джокуш и Оуингс [1990]) Докажите, что если полурекурсивное множество является n -в. п. множеством для некоторого $n \in \omega$, тогда либо оно само, либо его дополнение в. п.

1.8. (Лахлан [1968]) Докажите, что если d -в. п. множество D гипергипериммунно, тогда \overline{D} в. п. *Указание*. Пусть $D = B - A$, $A \subseteq B$. Определим равномерно в. п. последовательность в. п. множеств R_i , $i \in \omega$. На шаге $s + 1$ выберем такое наименьшее число (если существует) y , что:

i) $y \in B_s - A_s$,

ii) $y \notin \bigcup_{i \in \omega} R_{i,s}$, и

iii) для некоторого (наименьшего) j такого, что $R_{j,s} \subseteq A_s$, справедливо $y > \max_{i < j} |R_{i,s}|$.

Полагаем $R_{j,s+1} = R_{j,s} \cup \{y\}$, и $R_{i,s+1} = R_{i,s}$ для всех $i \neq j$. Наконец, для всех i , $R_i = \bigcup_{s \in \omega} R_{i,s}$.

a) Докажите, что не все множества R_i конечны (в противном случае множество $B - A$ не гипергипериммунно);

b) Пусть k - наименьшее натуральное число, для которого множество

R_k бесконечно. Докажите, что множество $C = \cup_{i \neq k} R_i$ вычислимо, $B - A \subseteq^* C \subseteq B$ и, поэтому, $\overline{D} = \overline{B - A} = A \cup \overline{B} =^* A \cup \overline{C}$.

1.9. (Лахлан) Докажите, что для любого 2-в. п. множества D существует такое в. п. множество A , что $A \leq_T D$ и D в. п. относительно A . (Таким образом, если D не в. п., то A не вычислимо.)

Указание. Пусть $D = D_0 - D_1$, где $D_0 \supseteq D_1$ в. п. множества, и $D_s = D_{0,s} - D_{1,s}$. Определите $A = \{\langle s, x \rangle | x \in D_s - D\}$.

1.10. (Ершов [1968]) Докажите, что для любого $n \geq 1$ следующие два предложения эквивалентны:

- a) множество D является $(n+1)$ -в. п. множеством;
- b) существует такая вычислимая 1-1-функция f , что $D = f(\omega - A)$ для некоторого n -в. п. множества A .

1.11. Обобщая упражнение 1.9 докажите, что для любого $n > 1$, если A является n -в. п. множеством, тогда существуют такие множества $A_1 \leq_T A_2 \leq_T \dots \leq_T A_{n-1} \leq_T A_n = A$, что каждое A_m , $1 \leq m < n$, является m -в. п. множеством, и A_{m+1} в. п. относительно A_m .

1.12. Докажите, что если скачок A' множества A является n -в. п. множеством для некоторого $n < \omega$, тогда A вычислимо.

1.13. По данному множеству A следующим образом определим множество $B(A)$: $B(A) = \{x | D_x \subseteq A\}$.

a) Докажите, что для произвольного n , $1 \leq n < \omega$, множество A является n -в. п. множеством тогда и только тогда, когда и $B(A)$ является n -в. п. множеством.

b) Постройте ω -в. п., но не n -в. п. ни для какого $n < \omega$ множество A , для которого соответствующее множество $B(A)$ является 3-в. п. множеством.

1.14. Пусть A в. п. множество и $\omega - A = \{a_0, a_1, \dots\}$. Докажите, что множество $\{a_0, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0, a_1, a_2 \rangle, \dots\}$ является d -в. п. множеством.

Комментарий. Лемма о пределе впервые появилась в работе Шёнфилда [1959]. Как уже говорилось, конечные уровни иерархии Ершова под другими названиями определялись и изучались также в работах

Путнама [1965] и Голда [1965]. Аддисон [1965] рассмотрел общий метод построения "разностных" иерархий. В частности, построенная им иерархия, порожденная в. п. множествами, приводит к тем же классам n - и ω - в. п. множеств (определение ω -в. п. множества см. в следующем параграфе). В этой же работе получены некоторые свойства n - и ω -в. п. множеств, например, теорема 6 об иерархии. Обозначения $\Sigma_n^{-1}, \Pi_n^{-1}$ и Δ_n^{-1} для конечных уровней иерархии, так же, как и аналогичные обозначения для последующих уровней, приведенные в параграфах 3 и 9, введены Ершовым [1968a,b].

§2. ω -в. п. множества. Связь с табличной сводимостью

Начнем изложение с теоремы 8, которая является хорошей характеристикой n -в. п. множеств в терминах табличной сводимости. В этой теореме свойство m -сводимости в. п. множества к креативному множеству обобщается на случай n -в. п. множеств с заменой m -сводимости на btt -сводимость с нормой n . Приведем сначала необходимые определения.

Пусть $\{\sigma_n\}_{n \in \omega}$ - эффективное перечисление всех пропозициональных формул, построенных из атомных высказываний вида $\langle k \in X \rangle$ для различных $k \in \omega$. Формулы σ_n называются табличными или tt -условиями. Нормой tt -условия называется количество входящих в него атомных высказываний.

Определение 3 a) Множество A таблично сводится (tt -сводится) к множеству B , пишем $A \leq_{tt} B$, если для некоторой вычислимой функции f и для всех x

$$x \in A \iff B \models \sigma_{f(x)},$$

т. е. B удовлетворяет условию $\sigma_{f(x)}$.

б) Если в предыдущем определении все tt -условия $\sigma_{f(x)}$ имеют норму n , то множество A btt -сводится к множеству B с нормой n .

Замечание 7 Легко проверить, что приведенное определение табличной сводимости множества A к множеству B эквивалентно следующему: пусть фиксирована некоторая эффективная нумерация всех пар вида (F, α) , где $F = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ n -элементное множество, а α -

n-местная булева функция. Каждую такую пару назовем табличным условием. Будем говорить, что множество A удовлетворяет табличному условию $\sigma = (F, \alpha)$ (пишем $A \models \sigma$), если $\alpha(A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_{n-1})) = 1$. Теперь $A \leq_{tt} B$, если существует такая вычислимая функция f , что для любого x , $x \in A \iff B \models \sigma_{f(x)}$. Здесь $\sigma_{f(x)}$ - табличное условие с номером $f(x)$ из этой нумерации пар.

Теорема 8 Если множество A является n -в. п. множеством, тогда $A \leq_{btt} K$ с нормой n .

Доказательство. Пусть, например, $A = (R_1 - R_2) \cup \dots \cup (R_{n-1} - R_n)$ (n -четное число), где $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_n$ - в. п. множества. Обозначим через f_i , $1 \leq i \leq n$, вычислимые функции, t -сводящие R_i к K . Тогда

$$x \in A \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{\frac{n}{2}} \{f_{2k-1}(x) \in K \& f_{2k}(x) \notin K\}.$$

Правую часть этого соотношения легко записать в виде tt -условия с нормой n . ■

Обратное утверждение не имеет места (см. упр. 2.2). Справедливо следующее более слабое утверждение.

Теорема 9 Если множество A btt -сводится к множеству K с нормой n , $n \geq 1$, то A является n -слабо в. п. множеством.

Доказательство. Пусть множество A btt -сводится к K с нормой n . Это значит, что для каждого x можно эффективно найти такую булеву функцию α и конечное множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, что $x \in A \leftrightarrow \alpha(K(x_1), \dots, K(x_n))$.

Определим вычислимую функцию g следующим образом:

$$g(s, x) = \alpha(K_s(x_1), \dots, K_s(x_n)).$$

Тогда, очевидно, $A(x) = \lim_s g(s, x)$, и $|\{s | g(s+1, x) \neq g(s, x)\}| \leq n$. ■

Следствие 10 Для любого $n \geq 1$ множество A является Δ_{n+1}^{-1} -множеством тогда и только тогда, когда оно btt -сводится к множеству K с нормой n .

Доказательство части "тогда" непосредственно следует из теоремы 9 и упражнения 1.16. Доказательство части "только тогда" следует из упражнения 1.16 предыдущего параграфа и из упражнения 2.1 (этого параграфа). ■

Мы видим, что n -в. п. множества при $n < \omega$ не исчерпывают всю совокупность Δ_2^0 -множеств. Чтобы получить более широкий класс Δ_2^0 -множеств, расширим понятие n -в. п. множества, накладывая более слабые ограничения на значения функции $\alpha_{A,g}(x)$ в представлении (1.1). Ясно, что любое такое расширение потребует с ростом x и неограниченного роста значений функции $\alpha_{A,g}(x)$. Наиболее естественным является следующее определение, в котором область значений функции $\alpha_{A,g}$ хотя и может быть бесконечной, но каждое $\alpha_{A,g}(x)$ ограничено значением в точке x некоторой фиксированной вычислимой функции.

Определение 4 Пусть f - произвольная всюду определенная одноместная функция. Множество A называется f -вычислимо перечислимым (f -в. п. множество), если существует такая вычислимая функция g , что для произвольных s и x ,

$$\begin{aligned} A(x) &= \lim_s g(s, x), \quad u \\ \alpha_{A,g}(x) &\leq f(x). \end{aligned}$$

Здесь по-прежнему $\alpha_{A,g}(x) = |\{s | g(s, x) \neq g(s + 1, x)\}|$.

(Если f вычислимая функция, то согласно определению 5 такие множества называются также ω -в. п. множествами.)

Теорема 11 а) Существует x -в. п. множество, которое не n -в. п. ни для какого $n \in \omega$.

б) Пусть f и g такие вычислимые функции, что $\exists^\infty x (f(x) < g(x))$. Тогда существует g -в. п., но не f -в. п. множество.

в) Существует Δ_2^0 -множество, которое не является f -в. п. множеством ни для какой вычислимой функции f .

Локазательство. Все три пункта теоремы доказываются одинаково. Например, для доказательства пункта а) теоремы фиксируем некоторую эффективную нумерацию всех n -в. п. ($n \geq 2$) множеств $\{V_e\}_{e \in \omega}$. Это можно сделать, например, следующим образом. Если $e = \langle 2k + 1, n \rangle$ и

$n = \langle n_0, \dots, n_{2k+1} \rangle$, то полагаем $V_e = \bigcup_{i=0}^k (W_{n_{2i}} - W_{n_{2i+1}})$, а если $e = \langle 2k, n \rangle$ и $n = \langle n_0, \dots, n_{2k} \rangle$, то полагаем $V_e = \{\bigcup_{i=0}^k (W_{n_{2i}} - W_{n_{2i+1}})\} \cup W_{n_{2k}}$ и проводим обычную диагональную конструкцию:

Для любого x определим $g(0, x) = 0$ и, рассматривая на шаге $s > 0$ множество V_e , где $e = \langle m, n \rangle$ (т. е. V_e является m -в. п. множеством), определим x_e (если x_e еще не определено) как наименьшее число, большее всех ранее рассмотренных (в частности $x_e > m$). Полагаем $g(s, x_e) = 1 - V_{e,s}(x_e)$ и $g(s, x) = g(s-1, x)$ для всех $x \neq x_e$.

Пусть $A = \{x \mid \lim_s g(s, x) = 1\}$. Ясно, что g вычислимая функция и A x -в. п. множество. Ясно также, что для любого e , $A(x_e) = \lim_s g(s, x_e) = \lim_s (1 - V_{e,s}(x_e)) = 1 - V_e(x_e)$.

Для доказательства п. в) см. упр. 1.2.5. ■

Выше мы видели, что n -в. п. множества при $n < \omega$ *btt*-сводятся к креативному множеству K с нормой n . Теперь покажем, что f -в. п. множества при вычислимых f *tt*-сводятся к K .

Теорема 12 Для любого множества A , $A \leq_{tt} \emptyset'$ тогда и только тогда, когда A является f -в. п. множеством для некоторой вычислимой функции f .

Доказательство.

(\Rightarrow) По данному x эффективно находим число n , булеву функцию $\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ и конечное множество $\{t_1, \dots, t_n\}$ такие, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\alpha(K(t_1), \dots, K(t_n)) = 1$, и определяем $g(s, x) = \alpha(K_s(t_1), \dots, K_s(t_n))$. Здесь по-прежнему K креативное множество и $\{K_s\}_{s \in \omega}$ эффективное перечисление элементов K .

Ясно, что $A(x) = \lim_s g(s, x)$, и $|\{s : g(s, x) \neq g(s+1, x)\}| \leq n$.

(\Leftarrow) Теперь пусть $A(x) = \lim_s g(s, x)$ и $|\{s : g(s, x) \neq g(s+1, x)\}| \leq \alpha(x)$ для некоторой вычислимой функции α . Определим

$$M = \{\langle i, x, a \rangle : \exists t(|\{s \leq t : g(s, x) \neq g(s+1, x)\}| = i \& g(t, x) = a)\}$$

Ясно, что M в. п. и $x \in A$ тогда и только тогда $\langle 0, x, 1 \rangle \in M \& \langle 1, x, 1 \rangle \notin M \& \langle 1, x, 0 \rangle \notin M \vee \langle 1, x, 1 \rangle \in M \& \langle 2, x, 1 \rangle \notin M \& \langle 2, x, 0 \rangle \notin M \vee \dots \vee \langle \alpha(x), x, 1 \rangle \in M$.

Последнее соотношение может быть записано в виде tt -условия. Поэтому $A \leq_{tt} M \leq_{tt} \emptyset'$. ■

Так как в определении f -в. п. множества область значений вычислимой функции f сверху не ограничена никаким натуральным числом (в отличие от случая n -в. п. множеств при $n < \omega$), то естественным является следующее определение.

Определение 5 *Множество A называется ω -в. п. множеством, если оно f -в. п. для некоторой вычислимой функции f .*

Покажем, что это определение не зависит от выбора конкретной функции f в том смысле, что при естественных ограничениях на область значений участвующих в этом определении вычислимых функций f , все возникающие при этом ω -в. п. множества оказываются m -эквивалентными.

Теорема 13 *Пусть A является f -в. п. множеством для некоторой вычислимой функции f , $A \neq \emptyset$, и пусть g - такая вычислимая функция, что $\forall y \exists x (g(x) \geq y)$ (то есть область значений функции g сверху неограничена). Тогда существует такое g -в. п. множество B , что $A \equiv_m B$.*

Доказательство. Пусть h такая вычислимая функция, что для каждого x $A(x) = \lim_s h(s, x)$ и

$$|\{s | h(s, x) \neq h(s + 1, x)\}| \leq f(x).$$

Следующим образом определим вспомогательную вычислимую функцию p : $p(0) = 0$, и для $x \geq 0$

$$p(x + 1) = \mu y \{y > p(x) \& g(y) \geq f(x + 1)\}.$$

Теперь пусть $B = \{x | \exists z \in A(x = p(z))\}$.

а) Докажем, что B является g -в. п. множеством. Действительно, для произвольного x , $x \in B$ тогда и только тогда, когда $x = p(z)$ для некоторого $z \in A$. Но в представлении множества A через p значение $A(z)$

требует не более $f(z)$ изменений. Поэтому достаточно проверить, что $f(z) \leq g(x)$. Но это непосредственно вытекает из определения множества B :

$$x = p(z) = \mu y \{y > p(z-1) \& g(y) \geq f(z)\}. \text{ Откуда } g(x) = g(y) \geq f(z).$$

b) Так как для любого z , $z \in A$ тогда и только тогда, когда $p(z) \in B$, имеем $A \leq_m B$.

c) Остается проверить, что $B \leq_m A$. Для этого следующим образом определим искомую т-сводящую функцию q : для любого x

$$q(x) = \begin{cases} \mu z \leq x (p(z) = x) & , \text{ если такой } z \text{ существует;} \\ a & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь a - фиксированный элемент из $\omega - A$. Нетрудно проверить, что $x \in B \Leftrightarrow q(x) \in A$. ■

Упражнения

2.1. Докажите, что если множество A является n -слабо в. п. множеством для некоторого $n \geq 1$, тогда $A \leq_{btt} K$ с нормой n .

2.2. Докажите, что для любого $n > 0$ существует множество A , бтт-сводящееся к креативному множеству K с нормой n , такое, что A не является n -в. п. множеством.

2.3. Пусть всюду определенные функции f и g таковы, что f мажорирует g , то есть существует такое число n , что $f(x) > g(x)$ для всех $x \geq n$. Докажите, что существует f -в. п., но не g -в. п. множество.

2.4. Постройте такую вычислимую функцию f , что существует f -в. п. множество, которое не является g -в. п. ни для какой примитивно рекурсивной функции g . *Указание.* Рассмотрите, например, функцию Аккермана, которая, как известно, вычислена и мажорирует все примитивно рекурсивные функции. Определение функции Аккермана см. в книге Роджерса [1972, с. 25].

2.5. Приведите подробное доказательство пункта в) теоремы 11. *Указание.* Так как эффективной нумерации всех f -в. п. множеств для вычислимых функций f не существует, то при доказательстве пункта в) теоремы для диагонализации в процессе пошаговой конструкции искомого Δ_2^0 -множества A против всех ω -в. п. множеств рассмотрите эффективную нумерацию $\{\{V_{e,s}\}_{s \in \omega}, \varphi_j\}$ всех вычислимых последовательностей конечных подмножеств множества натуральных чисел $\{V_{e,s}\}_{s \in \omega}$ и частично вычислимых функций φ_j . Пока условие $|\{t \leq s : n \in (V_{i,s} - V_{i,s+1}) \cup (V_{i,s} - V_{i,s+1})\}| \leq \varphi_{j,s}(n)$ для некоторого $n \in \omega$ не будет нарушено, то рассматривайте $\{V_{e,s}\}_{s \in \omega}$ как перечисление ω в. п. множества. Если же это условие нарушится или для некоторого n $\varphi_j(n)$ не определяется, то в дальнейшем просто игнорируйте эту пару $\{\{V_{e,s}\}_{s \in \omega}, \varphi_j\}$.

2.6. Приведите новые доказательства теоремы 5 и пунктов а) и в) теоремы 11 с помощью теорем 8,9 и 12, установив справедливость следующих утверждений:

- a) существует Δ_2^0 -множество A , которое к креативному множеству K таблично не сводится;
- b) для любого $n, 1 \leq n < \omega$, существует *btt*-сводящееся к K с нормой $n + 1$ множество A , которое к K с нормой n *btt*- не сводится.
- c) существует таблично сводящееся к K множество A , которое к нему *btt*- не сводится.

Комментарии. Теоремы 8 и 12 принадлежат Карстенсу [1978]. Слабо в. п. множества определены и изучены в работе Эпштейн, Хаас и Крамер [1981].

§3. ω -в. п. множества как объекты разностной иерархии

Теорема 14 Множество A является ω -в. п. множеством тогда и только тогда, когда существует такая частично-вычислимая функция ψ , что для любого x ,

$$A(x) = \psi(k, x), \quad \text{где } k = \mu t(\psi(t, x) \downarrow) \quad (1)$$

В этом случае пишем $A(x) = \psi(\mu t(\psi(t, x) \downarrow), x)$. В частности, справедливо

$$\forall x \exists s (\psi(s, x) \downarrow) \quad (2)$$

Доказательство. (\Leftarrow) Пусть $A(x) = \psi(\mu t(\psi(t, x) \downarrow), x)$ для любого x и некоторой частично-вычислимой функции ψ . Следующим образом организуем вычисление значений $\psi(k, x)$ при различных $k \in \omega$:

Для каждого $s \in \omega$ на шаге s делаем по s шагов в вычислении значения $\psi((s)_0, x)$. Пусть $s = \mu t(\psi((t)_0, x) \downarrow [t])$. В силу условия (2) такой шаг s существует. Полагаем $g(s, x) = \psi((s)_0, x)$, и $g(i, x) = 0$ для всех $i < s$.

Далее, если для некоторого (наименьшего) $s_1 > s$ окажется, что $(s_1)_0 < (s)_0$ и $\psi((s_1)_0, x) \downarrow [s_1]$, то снова определяем $g(s_1, x) = \psi((s_1)_0, x)$, и $g(i, x) = g(s, x)$ для всех $i, s \leq i < s_1$. (Если же такого s_1 не существует, то $g(i, x) = g(s, x)$ для всех $i \geq s$.) Так поступаем при каждом появлении нового s_1 .

Таким образом, пусть $s = s_0 < s_1 < \dots < s_k$ - все те числа, для которых

- a) $(s_k)_0 < (s_{k-1})_0 < \dots < (s_1)_0 < (s)_0$; и
- b) для любого $i, 0 < i \leq k$, $\psi((s_i)_0, x) \downarrow [s_i]$, $\psi((s_i)_0, x) \uparrow [s_i - 1]$.

Тогда для каждого $i, 0 < i \leq k$, имеем

$$g(t, x) = \begin{cases} g((s_i)_0, x) & \text{если } s_i \leq t < s_{i+1}, \\ g((s_k)_0, x) & \text{если } t \geq s_k. \end{cases}$$

(Если здесь $k = 0$, то $g(t, x) = g(s, x)$ для всех $t \geq s$).

Из (1) вытекает, что для любого x $A(x) = \lim_s g(s, x)$. Пусть $\alpha(x) = (s)_0$, где $s = \mu t(\psi((t)_0, x) \downarrow [t])$. Ясно, что α - вычислимая функция и по определению g

$$|\{s | g(s + 1, x) \neq g(s, x)\}| \leq \alpha(x).$$

(\Rightarrow) Теперь пусть A ω -в. п. и

$$A(x) = \lim_s g(s, x), |\{s | g(s + 1, x) \neq g(s, x)\}| \leq \alpha(x)$$

для некоторых вычислимых функций g и α . Определим частично-вычислимую функцию ψ следующим образом: для любого x

$$\psi(\alpha(x), x) = g(0, x).$$

Если $\exists s(g(s+1, x) \neq g(s, x))$, то пусть s_1 - наименьшее такое s . Определим $\psi(\alpha(x) - 1, x) = g(s_1 + 1, x)$. Далее по индукции: предположим, что $\psi(\alpha(x) - i, x) = g(s_i + 1, x)$ - последнее так определенное значение ψ . Если $\exists s > s_i(g(s+1, x) \neq g(s, x))$, то пусть s_{i+1} - наименьшее такое s . Определим $\psi(\alpha(x) - (i+1), x) = g(s_{i+1}, x)$. Ясно, что функция ψ - частично-вычислима и $A(x) = \psi(\mu s(\psi(s, x) \downarrow), x)$ для любого x . ■

В предыдущей теореме мы видели, что каждая двухместная частично-вычислимая функция ψ , обладающая свойством $\forall x \exists s \psi(s, x) \downarrow$, следующим образом задает некоторое ω -в. п. множество A : для любого $x \in \omega$, $A(x) = \psi(\mu t(\psi(t, x) \downarrow), x)$. Сейчас мы увидим, что заменив в этом определении μt на ограниченный квантор $\mu t_{\leq n}$ можно получить аналогичное описание и для n -в. п. множеств при $1 \leq n < \omega$.

Теорема 15 *Множество A является слабо n -в. п. для некоторого n , $1 \leq n < \omega$, тогда и только тогда, когда существует такая частично-вычислимая функция ψ , что для любого x*

$$A(x) = \psi(\mu t_{\leq n+1}(\psi(t, x) \downarrow), x). \quad (1)$$

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $A = \bigcup_{i=0}^m (R_{2i} - R_{2i+1})$.

(Здесь $n = 2m$, и A является n -в. п. множеством для четного n . Если A является n -в. п. множеством для нечетного n , то достаточно положить $R_{2m+1} = \emptyset$.)

Определим искомую функцию ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(n+1, x) &= 1, \text{ если } x \in R_0; \\ \psi(n, x) &= 0, \text{ если } x \in R_1, \\ \text{и для любого } i, 0 < i < m, \\ \psi(n - (2i-1), x) &= 1, \text{ если } x \in R_{2i}; \\ \psi(n - 2i, x) &= 0, \text{ если } x \in R_{2i+1}. \end{aligned}$$

Ясно, что ψ частично-вычислима и (1) выполнено.

(\Leftarrow) В эту сторону доказательство повторяет часть (\Leftarrow) доказательства теоремы 14 с очевидными изменениями, вызванными заменой μt на $\mu t_{<n}$. ■

Характеристика ω -в. п. множеств, полученная в теореме 14, позволяет получить для них и описание, аналогичное описанию n -в. п. множеств как конечного объединения d -в. п. множеств. Для этой цели построим равномерно в. п. последовательность в. п. множеств $\{R_i\}_{i \in \omega}$, но в отличие от такой же последовательности, приведенной в определении 2, нам будет удобно ее строить не монотонно убывающей, а наоборот, монотонно возрастающей.

Пусть A - ω -в. п. множество. По теореме 14 существует такая частично-вычислимая функция ψ , что для любого x

$$A(x) = \psi(\mu s(\psi(s, x) \downarrow), x)$$

Следующим образом определим множества R_i , $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{x | \psi(0, x) \downarrow = 0\}, \\ R_1 &= R_0 \cup \{x | \psi(0, x) \downarrow = 1\}, \\ &\dots \\ R_{2m} &= R_{2m-1} \cup \{x | \psi(m, x) \downarrow = 0\}, \\ R_{2m+1} &= R_{2m} \cup \{x | \psi(m, x) \downarrow = 1\}. \end{aligned}$$

Ясно, что все множества R_n , $n \geq 0$, в. п., последовательность $\{R_n\}_{n \in \omega}$ равномерно в. п., и

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq \dots \quad (*)$$

Проверим, что $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (R_{2n+1} - R_{2n})$.

Пусть $x \in A$. Тогда существует такое (наименьшее) s , что $\psi(s, x) \downarrow = A(x) = 1$ и, если $s > 0$, то $\psi(s - 1, x) \uparrow$. Тогда $x \in R_{2n+1}$ для некоторого (наименьшего) n , $x \notin \bigcup_{m<2n+1} R_m$, и поэтому $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (R_{2n+1} - R_{2n})$.

Обратно, если $x \notin A$, то существует такое (наименьшее) s , что $\psi(s, x) \downarrow = 0$ и, если $s > 0$, то $\psi(s - 1, x) \uparrow$. Тогда $x \in R_{2n}$ для некоторого (наименьшего) n , $x \notin \bigcup_{m<2n} R_m$, и поэтому $x \notin \bigcup_{n=0}^{2m+1} (R_{2n+1} - R_{2n})$.

Кроме того, так как $\forall x \exists s (\psi(s, x) \downarrow)$, имеем $\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i = \omega$.

Теперь пусть $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (R_{2n+1} - R_{2n})$ для некоторой равномерной в. п. последовательности в. п. множеств $\{R_n\}_{n \in \omega}$, где $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots$. Предположим также, что $\bigcup_{n=0}^{\infty} R_i = \omega$.

Определим

$$\psi(n, x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \in R_n \text{ и } n \text{ - четное,} \\ 1 & \text{если } x \in R_n \text{ и } n \text{ - нечетное.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $A(x) = \psi(\mu s (\psi(s, x) \downarrow), x)$ для каждого x . (Так как $\bigcup R_i = \omega$, то $\forall x \exists s \psi(s, x) \downarrow$. В упражнении 3.1 показано, что в нижеследующей теореме 16 это условие необходимо.)

Таким образом, установлена

Теорема 16 *Множество A является ω -в. п. множеством тогда и только тогда, когда существует такая равномерно в. п. последовательность в. п. множеств $\{R_x\}_{x \in \omega}$, что*

$$a) \bigcup_{x \in \omega} R_x = \omega;$$

$$b) R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots,$$

$$c) A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (R_{2n+1} - R_{2n}).$$

Замечание 17 Условие с) может быть записано еще и в следующей эквивалентной форме:

$$c') A = \{z : \exists x < \omega (x \text{ нечетно} \& z \in R_x \& \forall y < x (z \notin R_y))\}.$$

Как видно из их определения, ω -в. п. множества - пока первый пример множеств, принадлежащих бесконечному уровню иерархии Ершова. В последующих параграфах мы построим множества и из других бесконечных уровней иерархии, исчерпывая, в конечном итоге, все Δ_2^0 -множества. А пока введем в рассмотрение определенные Ю.Л. Ершовым Σ_ω^{-1} и Π_ω^{-1} -множества, с помощью которых, как сейчас увидим, также описываются ω -в. п. множества.

Определение 6 Множество $A \subseteq \omega$ принадлежит уровню Σ_ω^{-1} иерархии Ершова (или A является Σ_ω^{-1} -множеством), если существует такая частично-вычислимая функция ψ , что для любого x ,

$$\begin{aligned} x \in A &\rightarrow \exists s (\psi(s, x) \downarrow) \text{ и } A(x) = \psi(\mu s (\psi(s, x) \downarrow), x); \\ x \notin A &\rightarrow \text{либо } \forall s (\psi(s, x) \uparrow), \\ &\text{либо } \exists s (\psi(s, x) \downarrow) \& A(x) = \psi(\mu s (\psi(s, x) \downarrow), x). \end{aligned}$$

(Другими словами, $A \subseteq \text{dom}(\psi(\mu s (\psi(s, x) \downarrow), x))$, и для любого $x \in \text{dom}(\psi(\mu s (\psi(s, x) \downarrow), x))$ справедливо $A(x) = \psi(\mu s (\psi(s, x) \downarrow), x)$).

A принадлежит уровню Π_ω^{-1} иерархии Ершова (или A является Π_ω^{-1} -множеством), если $\overline{A} \in \Sigma_\omega^{-1}$. Наконец, A принадлежит уровню Δ_ω^{-1} иерархии Ершова (A является Δ_ω^{-1} -множеством), если A и \overline{A} оба являются Σ_ω^{-1} -множествами, то есть $\Delta_\omega^{-1} = \Sigma_\omega^{-1} \cap \Pi_\omega^{-1}$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из этих определений и теоремы 14.

Предложение 18 Множество A является ω -в. п. множеством тогда и только тогда, когда оно является Δ_ω^{-1} -множеством.

Упражнения

3.1. Докажите, что

- а) любое множество, которое определяется условиями *b*) и *c*) теоремы 16 является Δ_2^0 -множеством;
- б) существует такая равномерно в. п. последовательность в. п. множеств $\{R_x\}_{x \in \omega}$, что Δ_2^0 -множество *A*, определяемое условиями *b*) и *c*) теоремы 16, не является ω -в. п. множеством (следовательно, пункт *a*) в теореме 16 необходим);
- с) множество *A* является ω -в. п. множеством тогда и только тогда, когда оно и его дополнение $\omega - A$ удовлетворяют пунктам *b*) и *c*) теоремы 16 (при некоторых $\{R_x\}_{x \in \omega}$ и $\{P_x\}_{x \in \omega}$ соответственно);
- д) существует такое Δ_2^0 -множество *A*, что пункты *b*) и *c*) теоремы 16 совместно не выполняются ни для каких равномерно в. п. последовательностей в. п. множеств $\{R_x\}_{x \in \omega}$ (следовательно, альтернативная формулировка теоремы 3, в которой вместо монотонно убывающих последовательностей берутся монотонно возрастающие, не имеет места).

3.2. Докажите, что не для каждого Δ_2^0 -множества *A* существует такая частично-вычислимая функция ψ , что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\exists s(\psi(s, x) \downarrow) \& [A(x) = \psi(\mu s(\psi(s, x) \downarrow), x)]$.

3.3. Докажите, что существует такое ω -в. п. множество $A >_T \emptyset$, что если какое-нибудь *n*-в. п. для некоторого *n* множество *B* к нему Т-сводится, то *B* вычислимо. (Таким образом, для ω -в. п. множеств утверждение упражнения 1.8 не имеет места.)

Комментарии. Теоремы 14 и 16 содержатся в Эштейн, Хаас и Крамер [1981]. Определения уровней $\Sigma_\omega^{-1}, \Pi_\omega^{-1}, \Delta_\omega^{-1}$, а также последующих, более высоких уровней иерархии, принадлежащие Ю.Л. Ершову, мы приводим в §9. Здесь приведены эквивалентные определения, принадлежащие Эштейну, Хаасу и Крамеру [1981].

§4. Свойства продуктивности и креативности *n*-в. п. множеств.

Естественно, *n*-в. п. множества ведут себя иначе, чем в. п. множества. Например, в теореме 5 мы видели, что для любого $n > 0$ суще-

ствуют $(n+1)$ -в. п. множества, дополнения которых также $(n+1)$ -в. п., но которые не являются n -в. п. множествами (в отличии от случая в. п. множеств). Но, как и следовало ожидать, некоторые свойства в. п. множеств переносятся и на общий случай. Например, в упр. 4.1 показано, что если $X \leq_m Y$ и Y является n -в. п. множеством, то X также является n -в. п. множеством. Более того, как мы ниже увидим, на классах n -в. п. множеств можно ввести понятие креативного множества, аналогичное определению креативного множества на в. п. множествах, сохраняющее все основные свойства последнего. А в следующем параграфе докажем, что классы полных по Тьюрингу n -в. п. множеств описываются с помощью такого же критерия полноты, какой имеет место для класса в. п. множеств.

Определение 7 Множество P называется Σ_n^{-1} -продуктивным, $n \geq 2$, если существует такая n -местная вычислимая функция $f(x_1, \dots, x_n)$, что для любых в. п. множеств $W_{x_1} \supseteq W_{x_2} \supseteq \dots \supseteq W_{x_n}$, имеет место соотношение

$$\bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (W_{x_{2i-1}} - W_{x_{2i}}) \subseteq P \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in P - \bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (W_{x_{2i-1}} - W_{x_{2i}})$$

(при нечетном n $W_{x_{n+1}} = \emptyset$).

н-в. п. множество A называется Σ_n^{-1} -креативным, если его дополнение Σ_n^{-1} -продуктивно.

Для простоты рассуждений дальнейшее изложение ведем для случая $n = 2$. См. упр. 4.2 для общего случая.

Для d -в. п. множеств определение Σ_2^{-1} -продуктивного множества можно переформулировать следующим образом: множество P является Σ_2^{-1} -продуктивным, если существует такая одноместная вычислимая функция f , что для любого x ,

$$W_{l(x)} \supseteq W_{r(x)} \& (W_{l(x)} - W_{r(x)}) \subseteq P \Rightarrow f(x) \in P - (W_{l(x)} - W_{r(x)}).$$

Так же, как и в случае в. п. множеств, Σ_2^{-1} -продуктивные множества не могут быть d -в. п. множествами. Действительно, если $P = W_x - W_y$, $W_x \supseteq W_y$, то $f(\langle x, y \rangle) \in P - (W_x - W_y) = \emptyset$.

Определим

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x \mid x \in W_{l(x)} \cup W_{r(x)}\}, \\ R_2 &= \{x \mid x \in W_{r(x)}\} \end{aligned}$$

Ясно, что $R_1 \supseteq R_2$ и $R_1 - R_2 = \{x \mid x \in W_{l(x)} \& x \notin W_{r(x)}\}$.

Теорема 19 *Множество $R_1 - R_2$ является Σ_2^{-1} -креативным множеством.*

Доказательство. Надо показать, что $\omega - (R_1 - R_2) = (\omega - R_1) \cup R_2$ является Σ_2^{-1} -продуктивным.

Пусть $W_x - W_y \subset (\omega - R_1) \cup R_2$. Тогда, если $\langle x, y \rangle \in R_1 - R_2$, то $\langle x, y \rangle \in R_1 \& \langle x, y \rangle \notin R_2 \rightarrow \langle x, y \rangle \in W_x$ и $\langle x, y \rangle \notin W_y \rightarrow \langle x, y \rangle \in W_x - W_y$. Однако, так как $W_x - W_y \subset (\omega - R_1) \cup R_2$, этого не может быть. Поэтому $\langle x, y \rangle \in \omega - (R_1 - R_2)$. Если $\langle x, y \rangle \in W_x - W_y$, то $\langle x, y \rangle \in W_x$ и $\langle x, y \rangle \notin W_y$, значит $\langle x, y \rangle \in R_1 - R_2$, снова противоречие. Поэтому для всех x, y , $W_x - W_y \subseteq \omega - (R_1 - R_2) \rightarrow \langle x, y \rangle \in (\omega - (R_1 - R_2)) - (W_x - W_y)$. ■

Теорема 20 *Множество $R_1 - R_2$ является Σ_2^{-1} -полным в том смысле, что любое d -в. п. множество к нему t -сводится.*

Доказательство. Мы имеем $R_1 - R_2 = \{x \mid x \in W_{l(x)} \& x \notin W_{r(x)}\}$. Из доказательства теоремы 19 видно, что продуктивной функцией для $\overline{R_1 - R_2}$ является функция $\langle x, y \rangle$, то есть $W_x - W_y \subseteq \overline{R_1 - R_2} \rightarrow \langle x, y \rangle \in \overline{R_1 - R_2} - (W_x - W_y)$.

Пусть A_1 и A_2 в. п. множества, и $A_1 \supseteq A_2$. Построим t -сводящую $A_1 - A_2$ к множеству $R_1 - R_2$ вычислимую функцию h .

Сначала определим вычислимые функции g_1 и g_2 с помощью следующих соотношений.

$$W_{g_1(x)} = \{t \mid \Phi_x(t, 0) \downarrow = 0\}, W_{g_2(x)} = \{t \mid \Phi_x(t, 0) \downarrow = 0 \& \Phi_x(t, 1) \downarrow = 1\}.$$

Теперь пусть по определению:

$$q(y, z, t, n) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } y \in A_1, t \in W_z, n = 0; \\ 1 & , \text{ если } y \in A_2, t \in W_z, n = 1; \\ \uparrow & , \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

По $s - m - n$ -теореме существует такая вычислимая функция α , что $\Phi_{\alpha(y, z)}(t, n) = q(y, z, t, n)$. Отсюда

$$\Phi_{\alpha(y, z)}(t, n) = \begin{cases} n & , \text{ если } y \in A_{n+1}, t \in W_z, n \leq 1; \\ \uparrow & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Определим также $p(x) = \langle g_1(x), g_2(x) \rangle$. Пусть β - такая вычислимая функция, что для всех y, z , $W_{\beta(y, z)} = \{p(\alpha(y, z))\}$.

По теореме рекурсии существует такая вычислимая функция f , что для каждого y

$$W_{\beta(y, f(y))} = W_{f(y)}.$$

Из определения функции β видно, что $W_{f(y)} = \{p(\alpha(y, f(y)))\}$. Наконец, определим $h(y) = p(\alpha(y, f(y)))$.

Покажем, что для любого y , $y \in A_1 - A_2 \Leftrightarrow h(y) \in R_1 - R_2$. Пусть $y \in A_1 - A_2$. Тогда $\Phi_{\alpha(y, f(y))}(t, 0) \downarrow = 0 \Leftrightarrow t \in W_{f(y)} \Leftrightarrow t = p(\alpha(y, f(y))) \Leftrightarrow t = h(y)$. Поэтому $W_{g_1(\alpha(y, f(y)))} = \{h(y)\} = W_{f(y)}$. Так как $y \notin A_2$, то $W_{g_2(\alpha(y, f(y)))} = \emptyset$.

Обозначим $\langle g_1(\alpha(y, f(y))), g_2(\alpha(y, f(y))) \rangle$ через x . Тогда $x = p(\alpha(y, f(y)))$. Если $W_{g_1(\alpha(y, f(y)))} - W_{g_2(\alpha(y, f(y)))} \subset \overline{R_1 - R_2}$, то $x \in \overline{R_1 - R_2} - W_{g_1(\alpha(y, f(y)))}$, а так как $x = p(\alpha(y, f(y))) = h(y)$, то $h(y) \in \overline{R_1 - R_2} - W_{g_1(\alpha(y, f(y)))}$, противоречие.

Таким образом, $W_{g_1(\alpha(y, f(y)))} - W_{g_2(\alpha(y, f(y)))} \subset R_1 - R_2$. Так как множество из левой части состоит из единственного элемента $h(y)$, имеем $h(y) \in R_1 - R_2$.

Обратно, пусть $y \notin A_1 - A_2$. В этом случае: а) либо $y \notin A_1$, б) либо $y \in A_1 \cap A_2$.

Случай а) Если $y \notin A_1$, то функция q при этом значении y не определена ни для каких z, t, n , значит и функция $\Phi_{\alpha(y, f(y))}$ неопределена ни при каких t, n . Отсюда следует, что оба множества $W_{g_1(\alpha(y, f(y)))}$ и $W_{g_2(\alpha(y, f(y)))}$ пустые и $h(y) = \langle g_1(\alpha(y, f(y))), g_2(\alpha(y, f(y))) \rangle \in \overline{R_1 - R_2}$ из-за продуктивности множества $R_1 - R_2$.

Случай б) Если же $y \in A_1 \cap A_2$, тогда, как видно из их определений, множества $W_{g_1(\alpha(y, f(y)))}$ и $W_{g_2(\alpha(y, f(y)))}$ совпадают. Поэтому снова из-за продуктивности множества $R_1 - R_2$ имеем $h(y) \in \overline{R_1 - R_2}$.

Таким образом, функция $h(y)$ m -сводит множество $A_1 - A_2$ к Σ_2^{-1} -кreatивному множеству $R_1 - R_2$, что и требовалось. ■

Доказательство теоремы 20 может быть преобразовано так, чтобы установить более общее утверждение: любое Σ_n^{-1} -креативное множество является Σ_n^{-1} -полным в том смысле, что каждое n -в. п. множество к нему m -сводится. См. ниже упражнение 4.2в.

Упражнения

4.1. Докажите, что если $X \leq_m Y$ и Y является n -в. п. множеством, то X также является n -в. п. множеством.

4.2. (Ершов) Пусть $Q_n = \bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (R_{2i-1} - R_{2i})$ ($R_{n+1} = \emptyset$), где в. п. множества $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_n$ определены следующим образом: для любого i , $1 \leq i \leq n$, $R_i = \{x \mid x \in \bigcup_{s=i}^n W_{c_{ns}(x)}\}$.

а) Докажите, что множества Q_n являются Σ_n^{-1} -креативными для любого n , $2 \leq n < \omega$.

б) Докажите, что множества Q_n являются Σ_n^{-1} -полными.

Указание. Доказательство последнего утверждения проводится по той же схеме, как и в теореме 20. Теперь функции g_i , $1 \leq i \leq n$, и функция p определяются следующим образом: $W_{g_i(x)} = \{t \mid \Phi_x(t, 0) \downarrow = 0 \& \dots \& \Phi_x(t, i-1) \downarrow = i-1\}$, $p(x) = g(\langle g_1(x), \dots, g_n(x) \rangle)$, где g - продуктивная функция для \overline{Q}_n .

в) Используя ту же схему доказательства, как и в теореме 20, докажите, что любое Σ_n^{-1} -креативное множество является Σ_n^{-1} -полным.

Комментарий. Определения Σ_n^{-1} -продуктивного и Σ_n^{-1} -креативного множества, а также теоремы 19 и 20 содержатся в статье Ершова [1968b].

§5. Обобщения критерия полноты

Как известно (см., например, Арсланов [1981], Соап [1987]) совокупность полных по Тьюрингу множеств можно описать с помощью следующего критерия полноты, который можно рассматривать и как обобщение

теоремы рекурсии (или, как её иногда называют, теоремы о неподвижной точке): в. п. множество является Т-полным тогда и только тогда, когда существует такая функция $f \leq_T A$, что для любого x справедливо $W_x \neq W_{f(x)}$. Из этого критерия, в частности, следует, что все функции f , Т-сводящиеся к не Т-полному в. п. множеству A , обладают "неподвижными точками": $\exists x(W_{f(x)} = W_x)$. (Здесь число x является *неподвижной точкой* функции f .) Известно, что для всего класса Δ_2^0 -множеств подобный критерий не имеет места. Более того, нетрудно построить множество A , удовлетворяющее условию $A' \equiv_T \emptyset'$, для которого существует Т-сводящаяся к нему функция f без неподвижной точки (Арсланов [1979] и [1981]). Тем не менее, как было установлено в совместной работе Джокуша, Лермана, Соара и Соловея [1989], такой критерий полноты имеет место и для классов n -в. п. множеств, при всех n , $1 < n < \omega$. Ниже в теореме 67 мы доказываем это утверждение для случая $n = 2$, для случая $n > 2$ см. упр. 5.2. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 21 *Пусть A произвольное подмножество ω . Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists f \leq_T A \forall e(W_e \neq W_{f(e)})$;
2. $\exists g \leq_T A \forall e(\Phi_e \neq \Phi_{g(e)})$;
3. $\exists h \leq_T A \forall e(h(e) \neq \Phi_e(e))$.
4. $\forall n \exists k \leq_T A \forall e(k(e) \neq \Phi_n(e))$.

Доказательство. Импликация (1) \rightarrow (2) очевидна. Докажем, что (2) \rightarrow (3). Определим вычислимую функцию d :

$$\Phi_{d(u)}(z) = \begin{cases} \Phi_{\Phi_u(u)}(z) & , \text{ если } \Phi_u(u) \downarrow; \\ \uparrow & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $h = g \circ d$. Ясно, что $h \leq_T A$. Для получения противоречия предположим, что существует такое e , что $h(e) = \Phi_e(e)$. Тогда по (2) имеем

$$\Phi_{d(e)} \neq \Phi_{g(d(e))} = \Phi_{h(e)} = \Phi_{\Phi_e(e)} = \Phi_{d(e)},$$

противоречие.

Теперь докажем импликацию $(3) \rightarrow (1)$. Пусть ψ такая частично вычислимая функция, что для любого e , $W_e \neq \emptyset \rightarrow \psi(e) \in W_e$, а q такая вычислимая функция, что $\Phi_{q(e)} = \lambda y[\psi(e)]$.

Теперь пусть $h \leq_T A$ удовлетворяет соотношению (3). Следующим образом определим функцию $f \leq_T A$: для всех e , $W_{f(e)} = \{hq(e)\}$.

Для получения противоречия допустим, что для некоторого e имеем $W_e = W_{f(e)}$, в частности $W_e \neq \emptyset$. Тогда $\psi(e) \in W_e$ и, согласно (3), $hq(e) \neq \Phi_{q(e)}(q(e)) = \psi(e)$, поэтому $\psi(e) \notin W_{f(e)}$, противоречие.

Остается доказать эквивалентность соотношений (3) и (4). Для доказательства $(4) \rightarrow (3)$ выбираем n_0 таким, что для любого e верно $\Phi_{n_0}(e) \simeq \Phi_e(e)$, и применяем условие (4). Докажем $(3) \rightarrow (4)$. По данному числу n следующим образом определим вычислимую функцию r : для любых e и x , $\Phi_{r(e)}(x) = \Phi_n(e)$. Теперь пусть $h \leq_T A$ из соотношения (3) и определим $k = h \circ r$. Для всех $e \in \omega$ имеем

$$\Phi_n(e) = \Phi_{r(e)}(r(e)) \neq h(r(e)) = k(e),$$

что устанавливает справедливость (4). ■

Теорема 22 Пусть A произвольное не T -полное множество, т. е.

$\emptyset' \not\leq_T A$. Предположим, что для любого числа j существует частично вычислимая функция θ_j такая, что если Φ_j^A всюду определена, тогда для некоторого e имеет место $\theta_j(e) \downarrow$, и

$$\Phi_j^A(e) = \theta_j(e). \quad (2.1)$$

Предположим также, что номер функции θ_j находится равномерно по числу j , то есть существует такая вычислимая функция r , что $\theta_j = \Phi_{r(j)}$ для любого j .

Тогда каждая вычислимая относительно A функция Φ_j^A имеет неподвижную точку, то есть $\Phi_{\Phi_j^A(e)} \simeq \Phi_e$ для некоторого числа e .

Доказательство. Так как функция Φ_j^A всюду определена, то по условию теоремы $\Phi_j^A(e) = \Phi_{r(j)}(e)$ для некоторого e .

Согласно лемме 21 для доказательства теоремы достаточно установить, что для некоторого $n \in \omega$ справедливо соотношение:

$$\forall h \leq_T A \exists e (h(e) = \Phi_n(e)). \quad (2.2)$$

Предположим для получения противоречия, что наоборот, для любой частично-вычислимой функции Φ_n имеет место соотношение

$$\exists h \leq_T A \forall e (h(e) \neq \Phi_n(e)). \quad (2.2')$$

Определим $\psi(\langle i, j \rangle) = \Phi_{r(i)}(j)$ и возьмем функцию $h \leq_T A$ из соотношения (2.2') при $\Phi_n = \psi$. Определим $k_i(x) = h(\langle i, x \rangle)$ для всех i и x . Существует такая вычислимая функция p , что для всех i

$$k_i = \Phi_{p(i)}^A.$$

По теореме о неподвижной точке существует такое число i_0 , что $\Phi_{p(i_0)}^A = \Phi_{i_0}^A$. Ясно, что $\Phi_{i_0}^A$ всюду определена, и для всех e справедливо

$$\Phi_{i_0}^A(e) = \Phi_{p(i_0)}^A(e) = h(\langle i_0, e \rangle) \neq \Phi_n(\langle i_0, e \rangle) = \psi(\langle i_0, e \rangle) = \Phi_{r(i_0)}(e).$$

Таким образом, для каждого e имеем $\Phi_{i_0}^A(e) \neq \Phi_{r(i_0)}(e) = \theta_{i_0}(e)$, что противоречит соотношению (2.1) из условия теоремы при $j = i_0$. Полученное противоречие доказывает соотношение (2.2), а следовательно и теорему. ■

Теорема 58 является полезным инструментом для нахождения новых классов множеств, для которых все вычислимые относительно них функции обладают неподвижными точками, что, как мы увидим ниже, в некоторых случаях позволяет обобщить критерий полноты в. п. множеств на новые классы множеств. Например, легко проверить, что все не Т-полные в. п. множества удовлетворяют условиям теоремы 58. Действительно, если A не Т-полно, то пусть θ следующая частично вычислимая функция: для любого j ,

$$\theta_j(x) = \begin{cases} \Phi_{j,s}^{A_s}(x) & , \text{ если } \Phi_{j,s}^{A_s}(x) \downarrow \& x \in K_s; \\ \uparrow & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь по-прежнему K - креативное множество.

Теперь предположим, что для некоторого j функция Φ_j всюду определена. Если для каждого $e \in \omega$ имеет место неравенство $\Phi_j^A(e) \neq \theta(e)$, тогда, очевидно, для любого e , $e \in K \leftrightarrow e \in K_s$, где $s = \mu t(\Phi_{j,t}^{A_t}(e) \downarrow \& A \lceil \varphi_j(e) = A_t \lceil \varphi_{j,s}(e))$. Таким образом, $K \leq_T A$, что противоречит условию не Т-полноты A .

Мы видим, что в этом случае теорема 58 позволяет получить новое доказательство критерия полноты в. п. множеств. В теореме 67 она позволяет это сделать и для класса d -в. п. множеств.

Теорема 23 *Пусть $D <_T \emptyset'$ - d -в. п. множество. Каждая вычислимая относительно D функция f обладает неподвижной точкой на номерах в. п. множеств, то есть $W_{f(x)} = W_x$ для некоторого x .*

Доказательство. Пусть $D = B - C$, где $B \supseteq C$ - в. п. множества. Пусть $\{B_s\}_{s \in \omega}, \{C_s\}_{s \in \omega}$ - вычислимые перечисления B и C соответственно. Определим $D_s = B_s - C_s$. Ясно, что для любого x справедливо

$$D(x) = \lim_s D_s(x) \quad \text{и} \quad |\{s : D_{s+1} \neq D_s(x)\}| \leq 2.$$

Для каждого j и каждого n построим частично-вычислимую относительно D функцию $\Psi_{j,n}$, частично-вычислимую относительно D функцию Ω_j и частично-вычислимую функцию θ_j с тем, чтобы к концу конструкции

либо для каждого j удовлетворяются требования

$$P_j : \quad \Phi_j^D \text{ всюду определена} \Rightarrow \exists e(\Phi_j^D(e) \downarrow = \theta_j(e) \downarrow), \quad (1)$$

либо требование P_j для некоторого j не выполняется, но тогда для этого j и всех n, k выполняются требования

$$R_{n,k}^{(j)} : (a) \quad k \notin K \rightarrow \Psi_{j,n}(k) \downarrow \text{ и}$$

$$(b) \quad k \in K \& \Psi_{j,n}(k) \downarrow \& n \notin K \rightarrow \Omega_j(n) \downarrow, \quad (2a)$$

а также следующее глобальное требование:

$$S_j : \quad \forall n [\Omega_j(n) \downarrow \rightarrow n \notin \bar{K}]. \quad (2b).$$

Покажем сначала, что этого достаточно для доказательства теоремы. Действительно, если требование P_j выполнено для каждого j , то утверждение теоремы следует из теоремы 58. Если же для некоторого j требование P_j не выполнено, но удовлетворены все требования $R_{n,k}^{(j)}$, $n, k \in \omega$, а также требование S_j , то в этом случае функция Φ_j^D всюду определена и $\bar{K} \supseteq \text{dom } \Omega_j$. Так как $\bar{K} \neq \text{dom } \Omega_j$ (иначе $K \leq_T D$), то существует такое число n , что $n \in \bar{K} - \text{dom } \Omega_j$. Но тогда $\bar{K} = \text{dom } \Psi_{j,n}$ из-за выполнения требования $R_{n,k}^{(j)}$ и по выбору числа n .

(Отсюда также следует, что на самом деле к концу конструкции мы удовлетворим и требованиям P_j , $j \in \omega$, так как в силу предположения $K \not\leq_T D$ второго случая с условиями (2a) и (2b) быть не может.)

Конструкция.

Шаг $s + 1$, $s \geq 0$.

Подшаг 1) Для всех $k \leq s, n \leq s$ и $j \leq s$ поступаем следующим образом:

a) Если $k \notin K_s$, $\Psi_{j,n,s}^\sigma(k) \uparrow \& \Phi_{j,s}^\sigma(\langle n, k \rangle) \downarrow$ для некоторого $\sigma \subset D_s$, то определяем $\Psi_{j,n,s+1}^\sigma(k) = 0$.

(Заметим, что если Φ_j^D всюду определена, то это обеспечивает выполнение пункта a) требования $R_{n,k}^{(j)}$.)

b) Если $k \in K_s$ и $\Psi_{j,n,s}^\sigma(k) \downarrow$ для некоторого $\sigma \subset D_s$ и $n \notin K_s$, то определяем $\Omega_{j,s+1}^\sigma(n) = 0$.

(Этим обеспечивается выполнение пункта b) требования $R_{n,k}^{(j)}$.)

Подшаг 2) Для всех $k \leq s, n \leq s, j \leq s$, если $n \in K_s$ и $\Omega_{j,s}^\sigma(n) \downarrow$, $\Psi_{j,n,s}^\sigma(k) \downarrow$ для некоторого $\sigma \subset D_s$, но $\theta_{j,s}(\langle n, k \rangle) \uparrow$, то определяем $\theta_{j,s+1}(\langle n, k \rangle) = \Phi_{j,s}^\sigma(\langle n, k \rangle)$.

Конструкция закончена.

Замечание. Единственное место, где функция $\Psi_n^\sigma(k)$ определяется, пункт a) подшага 1. Поэтому имеет место соотношение

$$\Psi_{j,n,s+1}^\sigma(k) \downarrow \rightarrow \Phi_{j,s}^\sigma(\langle n, k \rangle) \downarrow. \quad (3)$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что если для некоторого j требование P_j не удовлетворено, то для этого j выполнено глобальное требование S_j .

По конструкции, если для некоторого $s, n \in K_s$ и для некоторого $\sigma \subset D_s$ справедливо $\Omega_{j,s}^\sigma(n) \downarrow$ (и, следовательно, $\Psi_{j,n,s}^\sigma(k) \downarrow$), тогда, если $\theta_{j,s}(\langle n, k \rangle) \uparrow$, то определяем $\theta_{j,s+1}(\langle n, k \rangle) = \Phi_{j,s}^\sigma(\langle n, k \rangle)$. Как мы ниже увидим, для d -в. п. множества D этого достаточно, чтобы удовлетворить глобальному требованию S_j (при условии, что не удовлетворено требование P_j).

Предположим, что для некоторого $n \in K$ имеем $\Omega_j^D(n) \downarrow$, то есть для этого n условие 2б) ложно. Фиксируем наименьший $\sigma_1 \subset D$ такой, что $\Omega_j^{\sigma_1}(n) \downarrow$ и пусть $u = \mu t[\Omega_{j,t}^{\sigma_1}(n) \downarrow]$. По конструкции существует такое число $k \in K_u$, что $\Psi_{j,n,u}^{\sigma_1}(k) \downarrow$, $n \notin K_u$ и $\sigma_1 \subseteq D_u$. Фиксируем такое число k .

Ясно, что $\Psi_{j,n}^D(k) \downarrow$, так как $\sigma_1 \subset D$. Так как $n \in K$, то существует такой шаг $v > u$, что $n \in K_v$, $\Psi_{j,n,v}^{D_v}(k) \downarrow$ и $\Omega_{j,v}^{D_v}(n) \downarrow$. Отсюда по конструкции имеем $\theta_j(\langle n, k \rangle) \downarrow$. Обозначим через $r + 1$ тот шаг, на котором определяется $\theta_j(\langle n, k \rangle)$, и выберем такое наименьшее $\sigma_2 \subseteq D_r$, что $\Psi_{j,n,r}^{\sigma_2}(k) \downarrow$.

Но теперь имеем $\Phi_{j,r}^{\sigma_2}(\langle n, k \rangle) \downarrow$, по замечанию (3), и, очевидно, $\Phi_{j,r}^{\sigma_2}(\langle n, k \rangle) = \theta_j(\langle n, k \rangle)$.

Ясно, что $\sigma_2 \not\subseteq D$, так как в противном случае $\theta_j(\langle n, k \rangle) = \Phi_{j,r}^D(\langle n, k \rangle)$ и требование P_j выполнено при $e = \langle n, k \rangle$.

Ясно также, что $r > u$, так как $n \in K_r - K_u$. Существуют две возможности:

1) $\sigma_2 \supseteq \sigma_1$. Тогда, так как $\Psi_{j,n,u}^{\sigma_1}(k) \downarrow$, имеем $\Phi_{j,u}^{\sigma_1}(\langle n, k \rangle) \downarrow$ по замечанию (3). Следовательно, так как $\Phi_j^D(\langle n, k \rangle) \downarrow$, имеем

$$\Phi_{j,u}^{\sigma_1}(\langle n, k \rangle) = \Phi_{j,r}^{\sigma_2}(\langle n, k \rangle) = \theta_j(\langle n, k \rangle),$$

что снова означает выполнение P_j .

2) $\sigma_2 \not\supseteq \sigma_1$. Но также $\sigma_1 \not\supseteq \sigma_2$, так как $D \supset \sigma_1$, но $D \not\supset \sigma_2$. Таким образом, строки σ_1 и σ_2 не сравнимы. Обозначим через y такое число, что $\sigma_2(y) \downarrow \neq \sigma_1(y) \downarrow$.

Пусть $q > r$ такой шаг, что $D_q \supseteq \sigma_1$, и пусть $p = \mu t[\Psi_{j,n,t+1}^{\sigma_2}(k) \downarrow]$. Такое число p существует, так как $\Psi_{j,n,r}^{\sigma_2}(k) \downarrow$. Имеем, по конструкции, $k \notin K_p$ и $D_p \supseteq \sigma_2$. Так как, кроме того, имеет место $k \in K_u - K_p$, имеем также $p < u$.

Таким образом, имеем $p < u < r < q$, и $D_p \supseteq \sigma_2$, $D_u \supseteq \sigma_1$, $D_r \supseteq \sigma_2$ и, наконец, $D_q \supseteq \sigma_1$. Это означает, что $D_p(y) \neq D_u(y) \neq D_r(y) \neq D_q(y)$, что противоречит тому, что множество D является d -в. п. множеством. ■

In §5 we continue the study of fixed point theorems which began with Kleene's Recursion Theorem II.3.1 and continued with Arslanov's Fixed Point Theorems V.5.1 and V.5.5. We show that for any function $f \leq_T \emptyset^{(2)}$ there is *Turing fixed point* n such that $W_n \equiv_T W_{f(n)}$.

The Recursion Theorem II.3.2 asserted that every recursive function f has a fixed point n satisfying $W_n = W_{f(n)}$. In Corollary V.5.2 this was extended to every function f of c. e. degree $< \mathbf{0}'$. Moving up one level we saw in Exercise V.5.5 that every function $f \leq_T \emptyset'$ has a *-fixed point n satisfying $W_n =^* W_{f(n)}$. We now show that every function $f \leq_T \emptyset^{(2)}$ has a *Turing fixed point*, namely some n satisfying $W_n \equiv_T W_{f(n)}$. This is an immediate corollary of Theorem 5.1. Both Theorem 5.1 and Corollary 5.2 are generalized in Theorems 6.2 and 6.3, respectively.

Теорема 24 *If ψ is a function partial recursive in $\emptyset^{(2)}$ then there is a recursive function g such that for all $e \in \text{dom } \psi$, $W_{g(e)} \equiv_T W_{\psi(e)}$.*

Следствие 25 *If f is a total function recursive in $\emptyset^{(2)}$ then there is an integer n such that $W_n \equiv_T W_{f(n)}$.*

Proof of Corollary 5.2. By Theorem 5.1 and the Recursion Theorem II.3.2.
Proof of Theorem. Since ψ is p.r. in $\emptyset^{(2)}$ we can apply the Limit Lemma III.3.3 twice to obtain a total recursive function \hat{f} such that

$$\psi(e) = \lim_y \lim_s \hat{f}(e, y, s)$$

for all $e \in \text{dom } \psi$, and such that $\lim_s \hat{f}(e, s, y)$ exists for all e and y . For each e , we shall construct uniformly in e an r.e set A_e , and hence there is a recursive function g such that $W_{g(e)} = A_e$. Furthermore, we shall arrange that $A_e \equiv_T W_{\psi(e)}$ for all $e \in \text{dom } \psi$. The reductions between A_e and $W_{\psi(e)}$, however, will not be uniform in e .

We define $A_e = \bigoplus_y A_e^y$ where the y th “row” $A_e^y = \bigcup_s B_{e,y,s}$, for $B_{e,y,s}$ constructed as follows.

Stage $s = 0$. For each e and y , set $B_{e,y,0} = \emptyset$.

Stage $s > 0$. Let $B_{e,y,s}$ contain all elements x satisfying:

- (i) $x \in W_{\hat{f}(e,y,s),s}$;
- (ii) (vertical condition) $(\forall j \leq x) [\hat{f}(e,y,s) = \hat{f}(e,y+j,s)]$; and
- (iii) (horizontal condition) $(\forall t)_{x \leq t \leq s} [\hat{f}(e,y,t) = \hat{f}(e,y,t+1)]$.

This ends the construction. (Note that $B_{e,y,s}$ is finite because

$$B_{e,y,s} \subseteq W_{\hat{f}(e,y,s),s}$$

by (i).)

Fix $e \in \text{dom } \psi$. Define y_0 and s_0 by

$$y_0 = (\mu y) (\forall z \geq y) [\lim_s \hat{f}(e,z,s) = \psi(e)],$$

and

$$s_0 = (\mu s) (\forall t \geq s) [\hat{f}(e,y_0,t) = \psi(e)].$$

(We think of all rows A_e^y , $y \geq y_0$, as *good* and rows A_e^y , $y < y_0$, as *bad*. We shall see that $A_e^y =^* W_{\psi(e)}$ for $y = y_0$ (and indeed for every good row A^y) while condition (ii) ensures that $A_e^y =^* \emptyset$ for each bad row. Condition (iii) ensures that $A_e \leq_T W_{\psi(e)}$.)

Lemma 1. $(\forall y < y_0) [A_e^y \text{ is finite}]$.

Proof. Fix $y < y_0$. By definition of y_0 , we have some y_1 , $y \leq y_1 \leq y_0$, such that $\lim_s \hat{f}(e,y_1,s) \neq \lim_s \hat{f}(e,y,s)$. Choose s such that $\hat{f}(e,z,t) = \lim_s \hat{f}(e,z,s)$ for all $t \geq s$ and $z \leq y_1$. Let $k = y_1 - y$. Choose any $t \geq s$. Now any $x \geq k$ fails by (ii) to enter $B_{e,y,t}$ so $B_{e,y,t} \subseteq [0, k)$, and hence A_e^y is finite since $A_e^y \subseteq \bigcup_{t < s} B_{e,y,t} \cup [0, k)$.

Lemma 2. $A_e^{y_0} =^* W_{\psi(e)}$ (and hence $W_{\psi(e)} \leq_T A_e$).

Proof. First $A_e^{y_0} \subseteq^* W_{\psi(e)}$ since for every $s \geq s_0$, $\hat{f}(e,y_0,s) = \psi(e)$ so $B_{e,y_0,s} \subseteq W_{\psi(e)}$ by (i). To see that $W_{\psi(e)} \subseteq^* A_e^{y_0}$ note that no $x \geq s_0$ is restrained from any $B_{e,y_0,t}$ by (iii). Thus, for any $x \geq s_0$, $x \in W_{\psi(e)}$, choose any t such that $x \in W_{\psi(e),t}$ and $\hat{f}(e,y_0,t) = \hat{f}(e,y_0+j,t)$ for all $j \leq x$. Then $x \in B_{e,y_0,t}$ so $x \in A_e^{y_0}$. (Such t exists since all good rows A_e^y have $\lim_t \hat{f}(e,y,t) = \psi(e)$.)

Lemma 3. $A_e \leq_T W_{\psi(e)}$.

Proof. By Lemma 1, $\bigcup_{y < y_0} A^y =^* \emptyset$ so it suffices to prove that for every $y \geq y_0$, $A_e^y \leq_T W_{\psi(e)}$ uniformly in y . Fix $y \geq y_0$. To test whether $x \in A_e^y$ see whether $x \in W_{\psi(e)}$.

Case 1. $x \in W_{\psi(e)}$. Choose the least $s > s_0$ such that $x \in W_{\psi(e),s}$ and (ii) is satisfied for x (i. e. $\hat{f}(e, y, s) = \hat{f}(e, y + j, s)$ for all $j \leq x$). If $x \notin B_{e,y,s}$ it must be that (iii) restrains x from entering $B_{e,y,s}$, but then (iii) ensures $x \notin B_{e,y,t}$ for any $t > s$. Hence, $x \in A_e^y$ iff $x \in \bigcup_{t \leq s} B_{e,y,t}$.

Case 2. $x \notin W_{\psi(e)}$. Then $x \in A_e^y$ only if $x \in B_{e,y,s}$ for some s such that $\hat{f}(e, y, s) \neq \psi(e)$. Choose any $s > x$ such that $\hat{f}(e, y, s) = \psi(e)$. (Such s exists because $y \geq y_0$.) If $x \in B_{e,y,t}$ for any $t > s$ then $\hat{f}(e, y, v) \neq \psi(e)$ for some minimal v , $s < v \leq t$. But then (iii) prevents $x \in B_{e,y,p}$ for any $p \geq v$.

Упражнения

5.1. (Джокуш) Пусть A произвольное подмножество ω . Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- a) для любого $n \in \omega$ существует такая вычислимая относительно A функция k , что справедливо соотношение $\forall e(k(e) \neq \Phi_n(e))$;
- b) для любой вычислимой функции r существует такая вычислимая относительно A функция h , что если $h = \Phi_i^A$ для некоторого i , тогда справедливо соотношение $\forall e(h(e) \neq \Phi_{r(i)}(e))$.

Указание. Доказательство $b) \rightarrow a)$ от противного: предположите, что $a)$ не выполняется при некоторой Φ_n и определите $r(i) = n$ для всех i .

Для доказательства $a) \rightarrow b)$ определите $\theta(\langle i, j \rangle) = \varphi_{r(i)}(j)$ и пусть $k \leq_T A$ функция из условия $a)$ при $\theta = \varphi_n$. Определите также для всех i, x , $k_i(x) = k(\langle i, x \rangle)$, и пусть p - такая вычислимая функция, что для всех i , $k_i = \Phi_{p(i)}^A$. По теореме рекурсии существует такое число i , что $\Phi_{p(i)}^A = \Phi_i^A$. Докажите, что условие $b)$ выполнено, если за h взять функцию Φ_i^A .

5.2. (Джокуш, Лерман, Соар и Соловей) Обобщая доказательство теоремы 67 установите, что если для некоторого $n > 1$ множество A является n -вычислимо перечислимым, тогда множество A Т-полно тогда и только тогда, когда существует Т-сводящаяся к нему функция без неподвижных точек.

Комментарии. Лемма 21 принадлежат Джокушу (см. Соар [1987]), теоремы 58, 67 принадлежат Джокушу, Лерману, Соару и Соловей [1989].

§6. Ординалы. Арифметика ординальных чисел.

Пусть $\langle A, R \rangle$ и $\langle B, S \rangle$ два линейно упорядоченных множества. Говорят, что $\langle A, R \rangle$ и $\langle B, S \rangle$ имеют *одинаковый порядковый тип*, если они изоморфны как линейно упорядоченные множества: $\langle A, R \rangle \simeq \langle B, S \rangle$.

Ясно, что отношение "иметь одинаковый порядковый тип" является отношением эквивалентности между линейно упорядоченными множествами, и соответствующие классы эквивалентности называются *порядковыми типами*. Интуитивно ясно, что если два линейно упорядоченных множества принадлежат одному и тому же порядковому типу, тогда они как линейно упорядоченные множества не различимы: одно из них можно превратить в другое, просто поменяв обозначение одного линейного порядка на другое.

Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются *ординалами*. Известно, что каждый такой порядковый тип содержит особое множество, линейно упорядоченное отношением " \in " принадлежности одного множества к другому в качестве его элемента. Часто это множество (как далее и в этой книге) принимается за определение ординала (см. упр. 6.2). Для конечных множеств ими являются множества $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$, которые "представляют" соответственно порядковые типы пустого, одноэлементного, двухэлементного, трехэлементного и т. д. множеств. Поэтому эти ординалы отождествляются с натуральными числами $0, 1, 2, 3, \dots$. (Далее по индукции, если уже определен ординал z , соответствующий натуральному числу n , то ординал $z \cup \{z\}$ соответствует натуральному числу $n + 1$.)

В общем случае ординалом называется *транзитивное* множество z , каждый элемент которого также транзитивен. Множество z называется *транзитивным*, если $\forall x \forall y (x \in y \& y \in z \rightarrow x \in z)$.

С помощью аксиомы выбора можно доказать, что каждое множество может быть вполне упорядочено. Таким образом, каждое множество может быть "представлено" некоторым ординалом, который с ним будет иметь одинаковый порядковый тип, подобно тому, как натуральные числа "представляют" конечные множества. По этой причине ординалы также называют *ординальными числами*.

Ординальные числа мы обозначаем малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (с индексами или без индексов). Если $\alpha \in \beta$, то пишем также $\alpha < \beta$ (читается " α меньше β "), в этом случае также говорят, что " α предшествует β ". Известно, что для любых двух ординалов α и β , либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\beta < \alpha$, другими словами класс всех орди-

нальных чисел (этот класс не является множеством) линейно упорядочен отношением " \in ". Каждый ординал совпадает с множеством своих предшественников и вполне упорядочен отношением " \in ". Известно также, что любая возрастающая последовательность ординат $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ имеет наименьшую верхнюю грань, которая обозначается через $\lim_n \alpha_n$.

Наименьший бесконечный ординал совпадает с множеством всех натуральных чисел и обозначается через ω : $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Каждый ординал γ имеет один из следующих (взаимно исключающих) видов:

- (1) Наименьший ординал 0;
- (2) Ординал, который имеет *непосредственного предшественника*:
 $\gamma = \alpha \cup \{\alpha\}$. В этом случае непосредственным предшественником для γ является α , а γ называется *последователем* α , пишется $\gamma = \alpha + 1$.
- (3) Предельный ординал. Ординал γ называется предельным, если он не наименьший и не имеет непосредственного предшественника.
Примером предельного ординала является ω .

Как уже говорилось, наименьшая верхняя грань для возрастающей последовательности ординат $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ обозначается через $\lim_n \alpha_n$. Последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ называется *фундаментальной последовательностью* для $\gamma = \lim_n \alpha_n$. Нетрудно проверить, что $\lim_n \alpha_n = \bigcup_{n < \omega} \alpha_n$.

Принцип математической индукции, который широко используется для доказательств различных свойств натуральных чисел (*доказательства индукцией*) и для определения различных функций натурального аргумента (*определения по индукции*), теперь обобщается на аналогичные принципы на ординалах, в этом случае говорят о доказательствах и определениях *трансфинитной индукцией*.

Теорема 26 (*Принцип трансфинитной индукции*) *Пусть \mathcal{R} – некоторое свойство ординат. Допустим, что, предположив справедливость свойства \mathcal{R} для всех ординат, меньших некоторого ординала α , мы можем вывести справедливость этого свойства и для ординала α . Тогда все ординалы обладают свойством \mathcal{R} .*

Доказательство от противного. Предположим, что все условия теоремы выполнены, но тем не менее некоторый ординал γ свойством \mathcal{R} не обладает. Ясно, что должен существовать ординал $\alpha_0 < \gamma$, который также этим свойством не обладает, иначе мы получим противоречие с условием теоремы. Продолжая рассуждать таким образом, получим непустое линейно упорядоченное множество ординалов $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_0 < \gamma$. Но теперь в силу вполне упорядоченности ординала γ , должен существовать наименьший ординал $\beta < \gamma$, который свойством \mathcal{R} не обладает. По выбору β все ординалы, меньшие чем β , свойством \mathcal{R} обладают и, следовательно, по условию теоремы свойством \mathcal{R} должен обладать и β , противоречие. ■

Определим трансфинитной индукцией операции сложения и умножения на ординалах:

Определение 8 Пусть α – произвольный ординал. Трансфинитной индукцией по β определим операции $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$.

(Сложение)

- a) Полагаем $\alpha + 0 = \alpha$;
- b) для произвольного ординала β определяем $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$;
- c) если γ предельный ординал, тогда определяем $\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \{\alpha + \beta\}$.

(Умножение)

- a) Полагаем $\alpha \cdot 0 = 0$;
- b) для произвольного ординала β определяем $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$;
- c) если γ предельный ординал, тогда определяем $\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \{\alpha \cdot \beta\}$.

Легко проверяется (см. упр. 6.4), что эти операции согласованы со следующими операциями сложения и умножения, определенными на линейных порядках. Другими словами, в определениях операций сложения и умножения на ординальных чисел мы можем пользоваться любым из этих двух определений, результат будет один и тот же в том смысле, что ординал, полученный по первому определению, будет иметь тот же порядковый тип, который бы он имел при применении второго определения.

Определение 9 Пусть $\langle A, R \rangle$ и $\langle B, S \rangle$ два линейных порядка.

(Сложение)

Суммой $\langle A, R \rangle + \langle B, S \rangle$ является следующий линейный порядок $\langle C, Q \rangle$:

- $c_1 <_Q c_2$ тогда и только тогда, когда
 - a) либо $c_1 \in A$ и $c_2 \in B$,
 - b) либо $c_1 \in A, c_2 \in A$ и $c_1 <_R c_2$,
 - c) либо $c_1 \in B, c_2 \in B$ и $c_1 <_S c_2$.

(Умножение)

Произведением $\langle A, R \rangle \cdot \langle B, S \rangle$ этих двух линейных порядков будет линейный порядок $\langle C, Q \rangle$, который определяется следующим образом: мы рассматриваем B -копий линейного порядка $\langle A, R \rangle$, для удобства предполагая, что элементы каждой копии обозначены разными буквами (хотя этого условия можно было бы и избежать). Получаем семейство $\{A_i : i \in B\}$ множеств, каждое из которых линейно упорядочено отношением R_i по типу $\langle A, R \rangle$. Теперь множество C определяется как объединение $\cup_{i \in B} \{A_i\}$. Отношение линейного порядка Q на элементах C задается следующим образом: для любых двух его элементов c_1 и c_2 определяем $c_1 <_Q c_2$, если

- a) либо для некоторого $i \in B$ имеем $c_1 \in A_i, c_2 \in A_i$ и $c_1 <_{R_i} c_2$,
- b) либо для некоторых $i \neq j, i, j \in B$, имеем $c_1 \in A_i, c_2 \in A_j$ и $i <_S j$.

Доказательство следующей теоремы достаточно простое и мы его не приводим (см. упр. 6.5).

Теорема 27 Операции сложения и умножения ординальных чисел удовлетворяют следующим законам: для всех ординалов α, β и γ ,

- a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$
- b) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma;$
- c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma;$
- d) $0 + \alpha = \alpha, \quad 0 \cdot \alpha = 0;$
- e) если γ предельный ординал, тогда $\exists \delta (\gamma = \omega \cdot \delta);$
- f) $\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta;$

g) если $0 < \gamma$, тогда $\alpha < \beta \rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$;

h) $\alpha \leq \beta \rightarrow (\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma) \& (\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma)$.

Для доказательства см. упражнение 6.5.

Как видно из этой теоремы (см. также упр. 6.7 и 6.8), операции сложения и умножения ординальных чисел обладают теми же свойствами, какими они обладают на множестве натуральных чисел. Но не все законы сложения и умножения натуральных чисел переносятся на этот общий случай. Например, $2 + \omega = \omega$, но $\omega + 2 = (\omega + 1) + 1 \neq \omega$, $2 \cdot \omega = \omega$, но $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega$. Таким образом, операции сложения и умножения ординальных чисел не коммутативны. На ординальных числах не выполняется также один из законов дистрибутивности (упр. 6.9).

Определим теперь операцию возвведения в степень на ординалах.

Определение 10 Пусть α некоторый ординал. Трансфинитной индукцией по β определим операцию возвведения в степень α^β .

$$(1) \alpha^0 = 1;$$

$$(2) \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha;$$

$$(3) \alpha^\lambda = \lim\{\alpha^\beta : \beta < \lambda\}, \text{ если } \lambda \text{ предельный ординал.}$$

Некоторые из основных свойств операции возвведения в степень приведены в упражнениях 6.12 и 6.13. Здесь мы лишь отметим, что эта операция отличается от операции возвведения в степень *кардинальных чисел*. Например, ординал ω^ω счетен, так как $\omega^\omega = \lim\{\omega^n : n < \omega\}$. Также, очевидно, счетен ординал 2^ω .

Следующая фундаментальная теорема Кантора [1897], которая теперь называется "Теоремой Кантора о нормальной форме", является одним из первых результатов теории ординальных чисел.

Теорема 28 Пусть α произвольный ординал. Тогда

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k,$$

для некоторых ординалов $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$ и натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_k . Такое представление α единственное.

Доказательство трансфинитной индукцией по α . Пусть β – наименьший ординал такой, что $\alpha < \omega^\beta$. Если β предельный ординал, тогда (см. упр. 6.13) $\alpha < \omega^\gamma$ для некоторого $\gamma < \beta$, что противоречит выбору β . Поэтому β является последователем: $\beta = \alpha_1 + 1$. Тогда $\omega^{\alpha_1} \leq \alpha$. Выберем n_1 таким, чтобы $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1)$. Таким образом, $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \gamma$, где $\gamma < \omega^{\alpha_1}$. Так как $\gamma < \alpha$, то, применяя индукционное предположение, получим

$$\gamma = \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \omega^{\alpha_3} \cdot n_3 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k.$$

Для получения искомого представления для α остается проверить, что $\alpha_1 > \alpha_2$.

Если $\alpha_2 > \alpha_1$, тогда $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 = \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 \leq \alpha$, что противоречит минимальности β . Если же $\alpha_2 = \alpha_1$, тогда получаем противоречие с выбором n_1 . Поэтому $\alpha_2 < \alpha_1$.

Остается доказать, что найденное представление для α единственное. Предположим, что существует еще одно представление для α :

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \dots + \omega^{\gamma_l} \cdot m_l,$$

Тогда имеем $\omega^{\gamma_1} \leq \alpha < \omega^{\gamma_1+1}$. Отсюда $\beta = \gamma_1 + 1$, поэтому $\alpha_1 = \gamma_1$. Применяя упр. 6.7 получим, что

$$\omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 - 1) + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\alpha_l} \cdot n_l = \omega^{\gamma_1} \cdot (m_1 - 1) + \omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \dots + \omega^{\gamma_l} \cdot m_l.$$

Остается применить индукционное предположение о единственности подобного представления для меньших ординалов. ■

Упражнения

6.1. Приведите пример множеств x и y таких, что

- a) x транзитивное множество, но не является ординалом;
- b) каждый элемент множества y транзитивен, но y не является ординалом.

6.2. а) Докажите, что порядковый тип любого вполне упорядоченного множества содержит некоторый ординал α , то есть множество $\{\beta : \beta < \alpha\}$, вполне упорядоченное отношением " \in ".

б) Докажите, что для порядкового типа любого вполне упорядоченного множества такой ординал α единственный.

6.3. Докажите, что каждый ординал имеет один из трех видов, описанных на стр. 42.

Указание. Предположив, что ординал $\gamma > 0$ и не имеет непосредственного предшественника, постройте возрастающую последовательность ординатов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ такую, что $\gamma = \lim_n \alpha_n$.

6.4. Докажите эквивалентность определений 8 и 9 операций сложения и умножения ординатов.

6.5. Докажите свойства а)-г) ординатов из теоремы 27.

6.6. Докажите, что для любого ординала $\alpha \neq 0$, $\alpha < \omega \cdot \alpha$.

6.7. Докажите, что для любых ординатов α, β и γ справедливо соотношение: $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \rightarrow \beta = \gamma$. *Указание.* См. пункт f теоремы 27.

6.8. Докажите, что для любых ординатов α и β справедливы следующие утверждения:

- а) Лемма о разности: $\alpha \leq \beta \rightarrow \exists! \tau (\alpha + \tau = \beta)$;
- б) Лемма о делении: $\exists! \tau \exists! \nu [(\alpha = \beta \cdot \tau + \nu) \& \nu < \beta]$.

6.9. Приведите пример ординатов α, β, γ , для которых $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \tau + \beta \cdot \gamma$.

6.10. Докажите, что для любых ординатов α и β ,
 $\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \tau : \tau < \beta\}$.

6.11. Докажите без использования теоремы Кантора о нормальной форме, что каждый ординал α единственным образом записывается в виде $\beta + n$, где β - предельный ординал, а n - натуральное число.

6.12. Докажите следующие свойства операции возвведения в степень ординатов:

- а) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;
- б) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

6.13. Докажите, что если $\beta < \alpha^\lambda$ и λ - предельный ординал, тогда $\beta < \alpha^\gamma$ для некоторого $\gamma < \lambda$.

§7. Конструктивные ординалы. Обозначения для конструктивных ординалов.

Эффективными аналогами счетного ординала являются *вычислимые ординалы*. Ординал α называется вычислимым, если его порядковый тип содержит вполне упорядоченное множество $\langle \omega, R \rangle$, где R - вычислимое отношение на ω . Вычислимые ординалы образуют хотя и небольшой, но достаточно богатый раздел теории ординальных чисел. Известно, что класс вычислимых ординалов по объему совпадает с классом *конструктивных ординалов*, которые, как мы увидим в последующих параграфах, окажутся полезными при обобщении построенной в предыдущих параграфах иерархии конечных булевых комбинаций множеств на бесконечные уровни. Ординал ξ является конструктивным (точное определение приводится позднее), если для него существует *система обозначений*, которая присваивает каждому ординалу $\leq \xi$ некоторое (единственное) натуральное число, его "обозначение", причем выполняются следующие свойства "конструктивности": а) по обозначению можно эффективно определить, какому из трех возможных типов (0, последовательь, или предельный ординал) относится ординал, получивший данное обозначение; б) если обозначение получает ординал ξ , который является последователем некоторого ординала $\zeta < \xi$, тогда можно эффективно определить обозначение и для ζ ; в) если обозначение получает предельный ординал ξ , тогда можно эффективно определить обозначения для возрастающей последовательности ординалов, в пределе дающих ξ . Но, пожалуй, наиболее примечательным свойством конструктивных ординалов является следующее их свойство: последовательь любого конструктивного ординала снова является конструктивным ординалом, и предел любой возрастающей вычислимой последовательности конструктивных ординалов также является конструктивным ординалом.

Известно, что семейство всех конечных и счетных ординалов по объему совпадает с наименьшим семейством ординалов, которое содержит 0 и замкнуто относительно взятия последователя и взятия предела счетной возрастающей последовательности ординалов (подробнее о них см. в книге Роджерса [1967, упр. 11-46]). Последнее семейство носит название

второго числового класса (первый числовой класс состоит из натуральных чисел). Он примечателен тем, что образует несчетное вполне упорядоченное семейство, каждый собственный начальный сегмент которого счетен.

Конструктивные ординалы образуют, таким образом, счетный бесконечный начальный сегмент второго числового класса. Счетные ординалы, не являющиеся конструктивными, с точки зрения теории вычислимости "несчетны", так как их нельзя достичь никакими вычислимыми возрастающими последовательностями конструктивных ординалов. Поэтому наименьший неконструктивный ординал обозначается символом ω_1^{CK} (в теории кардинальных чисел через ω_1 обозначается первый несчетный кардинал) и читается "Черч-Клини-омега-один".

В теории ординальных чисел мы часто имеем дело с различными обозначениями для ординалов. Например, при рассмотрении ординалов, меньших $< \omega^2$, мы пользуемся их обозначениями вида $\omega \cdot n + m$, где n и m натуральные числа. Конструктивными являются ординалы, для которых возможны обозначения с описанными выше свойствами "конструктивности".

Теория обозначений для ординалов была развита в пионерских работах Черча и Клини (Черч и Клини [1937], Черч [1938], Клини [1938]). С тех пор она претерпела незначительные изменения. Ниже мы более подробно рассмотрим систему обозначений O , известную как "клиниевская система обозначений" для конструктивных ординалов и которая, как мы позднее увидим, дает обозначение каждому конструктивному ординалу в том смысле, что если какой-нибудь ординал получает обозначение в некоторой (другой) системе обозначений, то он получает обозначение и в O .

Приведем сначала общее определение системы обозначений.

Определение 11

Системой обозначений S называется отображение $|.|_S$ некоторого подмножества D множества натуральных чисел на некоторый начальный отрезок ординальных чисел, для которого существуют такие частично вычислимые функции k, p и q , что для любого $x \in D$:

- a) если $|x|_S = 0$, тогда $k(x) = 0$,
- если $|x|_S$ является последователем, тогда $k(x) = 1$,
- если $|x|_S$ является предельным ординалом, тогда $k(x) = 2$;

- b) если $|x|_S$ является последователем, тогда
 $p(x) \downarrow$ и $|x|_S = |p(x)|_S + 1$;
- c) если $|x|_S$ является предельным ординалом, тогда $q(x) \downarrow$, функция $\Phi_{q(x)}$ тотальна, и последовательность $\{|\Phi_{q(x)}(n)|_S\}_{n \in \omega}$ является возрастающей последовательностью ординалов, имеющей своим пределом $|x|_S$.

Элементы множества D называются *обозначениями* S . Легко доказать индукцией (см. упр. 7.1), что если система S дает обозначение некоторому ординалу α , то она дает обозначение и каждому ординалу $< \alpha$.

Ординал α называется *конструктивным*, если некоторая система обозначений S дает ему обозначение, то есть существует такое натуральное число n , что $|n|_S = \alpha$.

Если α получает обозначение $a \in D$, то пишем $(\alpha)_S = a$.

Как уже отмечалось, в теории ординальных чисел приходится часто иметь дело с различными обозначениями для ординалов, которые соответствуют этому определению. Например, рассмотрим множество всех ординальных чисел $< \omega^\omega$. Каждый ординал α из этого множества в канторовской нормальной форме записывается как

$$\alpha = \omega^{n_1} \cdot m_1 + \omega^{n_2} \cdot m_2 + \dots + \omega^{n_k} \cdot m_k,$$

для некоторых натуральных чисел $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots, n_k, m_k$. Нетрудно проверить, что подходящей кодировкой натуральными числами этого представления мы получим систему обозначений для ординалов $< \omega^\omega$.

Система обозначений S называется *унивалентной*, если отображение $|\cdot|_S$ является взаимно-однозначным; *вычислимой*, если множество D вычислимо; *рекурсивной по упорядочению*, если множество

$$R_S = \{\langle x, y \rangle \mid x \in D \& y \in D \& |x|_S \leq |y|_S\}$$

вычислимо. Система обозначений S называется *максимальной*, если она дает обозначение каждому конструктивному ординалу. Наконец, система обозначений S называется *универсальной*, если для любой другой системы S' существует такая частично вычислимая функция $h : D_{S'} \rightarrow D_S$, что для любого $x \in D_{S'}$, $|x|_{S'} \leq |h(x)|_S$.

Непосредственно из этих определений следует, что любая универсальная система является максимальной, легко также проверяется (см. упр. 7.2), что унивалентные вычислимые системы рекурсивны по упорядочению. Примером универсальной (и, следовательно, максимальной) системы является клиниевская система обозначений O , к определению которой мы сейчас переходим.

Определение 12 (*Клиниевская система обозначений O*) Следующим образом определим отображение $| |_0$ некоторого подмножества множества D_O натуральных чисел в класс ординалов:

- a) $|1|_0 = 0$. (Ординал 0 получает обозначение 1.)
- b) Предположим, что $|n|_0 \downarrow$ для некоторого n , и $|n|_0 = \beta$. Тогда полагаем $|2^n|_0 = \beta + 1$. (Если β получил обозначение n , то его последователь $\beta + 1$ получает обозначение 2^n .)
- c) Предположим, что для некоторого e , $\forall n (\Phi_e(n) \downarrow \& |\Phi_e(n)|_0 \downarrow \& |\Phi_e(n)|_0 < |\Phi_e(n+1)|_0)$. Полагаем $|3 \cdot 5^e|_0 = \lim_n |\Phi_e(n)|_0$. (Если последовательность $\{\Phi_e(n)\}_{n \in \omega}$ состоит из обозначений для возрастающей последовательности ординалов $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$, тогда предельный ординал $\gamma = \lim_n \alpha_n$ получает обозначение $3 \cdot 5^e$.)

Область определения D_O отображения $| |_0$ обозначим также через O . Существование для O частично вычислимых функций k_O, p_O и q_O , участвующих в определении системы обозначений, легко проверяется.

Определим теперь частичный порядок $<_0$ на O .

Определение 13

Для любого $x \in O$ полагаем $x <_0 2^x$. Кроме того, полагаем $z <_0 2^x$ для каждого $z \in O$ такого, что $z <_0 x$.

Для любого $e \in \omega$, если $3 \cdot 5^e \in O$, тогда, согласно пункту с) предыдущего определения, $\Phi_e(n) \downarrow$ для любого n , и $\Phi_e(n) \in O$. Если, кроме того, $\forall n (\Phi_e(n) <_0 \Phi_e(n+1))$, то полагаем $z <_0 3 \cdot 5^e$ для каждого $z \in O$ такого, что $z <_0 \Phi_e(n)$ для некоторого n .

Непосредственно из определения следует, что если $x <_0 y$, тогда $|x|_0 < |y|_0$, обратное, очевидно, неверно. В следующей теореме мы приводим основные свойства системы O и отношения $<_0$.

Теорема 29 a) Для любого $x \in O$, множество $\{y|y <_0 x\}$ образует универсальную систему обозначений;

b) Существует такая вычислимая функция f , что для любого $x \in O$, $W_{f(x)} = \{y|y <_0 x\}$;

c) Для любого $x \in O$, отношение $<_0$ линейно упорядочивает множество $\{y|y <_0 x\}$.

Для доказательства см. упражнение 7.3.

Ниже в теореме 33 мы докажем, что O является универсальной системой обозначений. Определим сначала клиниевскую операцию сложения $+_0$ на обозначениях из O , которая, как мы позднее увидим, обладает многими полезными свойствами.

Пусть $h : \omega^3 \rightarrow \omega$ такая 1–1-вычислимая функция, что для всех e, a, d и n ,

$$\Phi_{h(e,a,d)}(n) \simeq \Phi_e(a, \Phi_d(n)).$$

Теперь следующим образом определим вычислимую функцию f :

$$\Phi_{f(e)}(a, b) \simeq \begin{cases} a & , \text{ если } b = 1 ; \\ 2^{\Phi_e(a,m)} & , \text{ если } b = 2^m ; \\ 3 \cdot 5^{h(e,a,d)} & , \text{ если } b = 3 \cdot 5^d ; \\ 0 & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть e_0 – неподвижная точка функции f : $\Phi_{f(e_0)} \simeq \Phi_{e_0}$. Имеем

$$\Phi_{e_0}(a, b) \simeq \begin{cases} a & , \text{ если } b = 1 ; \\ 2^{\Phi_{e_0}(a,m)} & , \text{ если } b = 2^m ; \\ 3 \cdot 5^{h(e_0,a,d)} & , \text{ если } b = 3 \cdot 5^d ; \\ 0 & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Легко проверить (см. упр. 7.4), что $\Phi_{e_0}(a, b)$ определена для всех натуральных чисел a, b . Поэтому мы можем определить вычислимую функцию $a +_0 b$ соотношением $a +_0 b = \Phi_{e_0}(a, b)$. Таким образом,

$$a +_0 b = \begin{cases} a & , \text{ если } b = 1; \\ 2^{\Phi_{e_0}(a, m)} & , \text{ если } b = 2^m; \\ 3 \cdot 5^{h(e_0, a, d)} & , \text{ если } b = 3 \cdot 5^d; \\ 0 & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Эта функция называется *клиниевской функцией* $+_0$ сложения на O . Основные свойства функции $+_0$ приведены в следующей теореме.

Теорема 30 *Вычислимая функция $+_0$ для всех чисел x, y и z обладает следующими свойствами.*

- a) $x, y \in O \rightarrow x +_0 y \in O;$
- b) $x, y \in O \& y \neq 1 \rightarrow x <_0 x +_0 y;$
- c) $x, y \in O \rightarrow |x +_0 y|_0 = |x|_0 + |y|_0;$
- d) $x \in O \& y <_0 z \leftrightarrow x +_0 y <_0 x +_0 z.$

Доказательство. Свойство b) очевидно. Все остальные импликации доказываются примерно одинаково трансфинитной индукцией по y . Мы приведем доказательство свойства c), оставив остальные в качестве упражнения.

Если $y = 1$, тогда $x +_0 y = x$, поэтому $|x +_0 y|_0 = |x|_0 = |x|_0 + 0 = |x|_0 + |y|_0$.

Если $y = 2^z$, тогда $z \in O$. Имеем $x +_0 y = 2^{x+0z}$ и, по индукционному предположению, $|x +_0 z|_0 = |x|_0 + |z|_0$. Отсюда $|x +_0 y|_0 = |2^{x+0z}|_0 = |x +_0 z|_0 + 1 = |x|_0 + |y|_0$.

Теперь пусть $y = 3 \cdot 5^e$. Тогда $\Phi_e(n) \downarrow$ для каждого $n \in \omega$ и, по предположению индукции, $|x +_0 \Phi_e(n)|_0 = |x|_0 + |\Phi_e(n)|_0$ для всех n . Поэтому, $|x +_0 y|_0 = \lim_n |x +_0 \Phi_e(n)|_0 = |x|_0 + |y|_0$. ■

Замечание 31 *В общем случае, для произвольных $x, y \in O$, соотношение $y <_0 x +_0 y$ не всегда выполняется (см. упр. 7.5). Однако, из пункта c) теоремы 30 следует, что для любого $x \in O$ такого, что $1 <_0 x$, справедливо $|y|_0 < |x +_0 y|_0$.*

Определение 14 *Пусть $a, b \in O$ и $|a|_0 = \alpha, |b|_0 = \beta$. Будем говорить, что α монотонно сводится к β (пишется $\alpha \preceq_0 \beta$), если существует такая частично вычислимая функция $h : \alpha \rightarrow \beta$, что*

1) $(\forall \delta, \gamma \in \alpha)(\delta \in \gamma \leftrightarrow h(\delta) \in h(\gamma)),$ и

2) $(\forall d_{|d|_0 \in \alpha})(k_0(d) = k_0(h(d))),$

здесь k_O - частично вычислимая функция, участвующая в определении O как системы обозначений.

Ясно, что отношение \preceq_0 рефлексивно и транзитивно. Теперь сказанное в предыдущем замечании позволяет сформулировать следующее полезное свойство обозначений из O , которое нам понадобится в параграфе 9.

Предложение 32 Для произвольных $x, y \in O$ имеет место соотношение $y \preceq_0 x +_0 y.$

С помощью функции $+_0$ мы теперь можем доказать, что O является универсальной системой обозначений.

Теорема 33 Система обозначений O является универсальной.

Доказательство. По данной системе обозначений S мы должны построить частично вычислимую функцию $f : D_S \rightarrow O$, для которой

$$x \in D_S \rightarrow \nu_S(x) \leq |f(x)|_0.$$

Пусть k_S, p_S и q_S частично вычислимые функции, участвующие в определении S как системы обозначений. Определим сначала вычислимую функцию h : для произвольного $z \in \omega$,

$$\Phi_{h(z)}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } k_S(x) = 0; \\ 2^{\Phi_z(p_S(x))} & , \text{ если } k_S(x) = 1; \\ 3 \cdot 5^y & , \text{ если } k_S(x) = 2 \text{ и } q_S(x) \downarrow; \\ \uparrow & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь y номер следующей частично вычислимой функции ψ :

$$\psi(0) = \Phi_z(\Phi_{q_S(x)}(0)), \text{ если } \Phi_{q_S(x)}(0) \downarrow;$$

$$\psi(n+1) = \psi(n) +_0 \Phi_z(\Phi_{q_S(x)}(n+1)), \text{ если } \Phi_z(\Phi_{q_S(x)}(n+1)) \downarrow.$$

По теореме рекурсии существует такое число n , что $\Phi_{h(n)} \simeq \Phi_n$. По определению положим $f = \Phi_n$. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } k_S(x) = 0; \\ 2^{f(p_S(x))} & , \text{ если } k_S(x) = 1; \\ 3 \cdot 5^y & , \text{ если } k_S(y) = 2 \text{ и } q_S(x) \downarrow; \\ \uparrow & , \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где y номер функции ψ , где $\psi(0) = f(\Phi_{q_S(x)}(0))$, и $\psi(n+1) = \psi(n) +_0 f(\Phi_{q_S(x)}(n+1))$, если $f(\Phi_{q_S(x)}(n+1)) \downarrow$.

Если $x \in D_S$, то пусть $|x|_0 = \alpha$. Индукцией по ординалам $\leq \alpha$ легко доказать, что $f(x) \downarrow$. Докажем, что $\nu_S(x) \leq |f(x)|_0$, если $x \in D_S$.

Предположим для получения противоречия, что это не так. Пусть $x \in D_S$ такое число, что $\nu_S(x)$ - наименьший ординал такой, что $\nu_S(x) > |f(x)|_0$. Ясно, что первые две строки определения $f(x)$ не могут иметь места, так как это немедленно ведет к противоречию. Остается третий случай. Так как в этом случае $k_S(y) = 2$ и $q_S(x) \downarrow$, то функция ψ , участвующая в определении f , всюду определена. Но из предположения индукции и предложения 32 следует, что для любого n , $\nu(\Phi_{q_S(x)}(n)) < |f(\Phi_y(n))|_0$. Поэтому и в этом случае должно быть $|f(x)|_0 > \nu_S(x)$, противоречие. ■

Упражнения

7.1. Докажите транфинитной индукцией по ординалам $< \alpha$, что если ν_S дает обозначение α и $\beta < \alpha$, тогда ν_S дает обозначение и β .

7.2. Докажите, что универсальные вычислимые системы рекурсивны по упорядочению.

7.3. Приведите доказательство теоремы 29.

7.4. Докажите, что клиниевская функция $+_0$ определена на всем множестве натуральных чисел. *Указание.* Предположим, что $x +_0 y$ не определена для некоторых x, y . Тогда $y = 2^z$ для некоторого z , так как другие возможности для y сразу же исключаются (напомним, что функция h всюду определена). Теперь наше предположение значит, что и $x +_0 z$ не определена. Остается провести рассуждение индукцией по z .

7.5. Приведите пример $x, y \in O$ таких, что неверно, что $y <_0 x +_0 y$.

7.6. Максимальная система обозначений O очевидно не является унивалентной: обозначение любого предельного ординала γ зависит от того, какой номер функции, перечисляющей обозначения для фундаментальной последовательности для γ , мы берем. Докажите, что существуют унивалентные максимальные системы обозначений. *Указание.* Расположите все элементы O в счетную последовательность x_0, x_1, x_2, \dots , и рассмотрите путь в O , содержащий $x_0, x_0 +_0 x_1, (x_0 +_0 x_1) +_0 x_2, \dots$

7.7. Докажите, что для каждого конструктивного ординала α существует рекурсивная по упорядочению унивалентная система обозначений, которая дает обозначение этому ординалу. *Указание.* Пусть $z \in O$ обозначение для α : $|z|_0 = \alpha$ (по теореме 33 такой z существует). Рассмотрите множество $A_z = \{y : y <_0 z \vee y = z\}$.

7.8. Определение. Ординал α называется *рекурсивным*, если его порядковый тип содержит вполне упорядоченное множество $\langle \omega, R \rangle$, где R – вычислимое отношение.

(Марквальд [1954], Спектор [1955]) Докажите, что ординал рекурсивен тогда и только тогда, когда он конструктивен. *Указание.* Для части "тогда" см. упр. 7.7. Множество A_z , построенное в этом упражнении по данному конструктивному ординалу α ($|z|_0 = \alpha$) дает пример искомого вполне упорядоченного множества. Для части "только тогда" пусть R – вычислимое бинарное отношение, которое на ω определяет вполне упорядоченное множество, порядковый тип которого совпадает с α . Следующим образом определите линейный порядок на ω :

$$Q = \{\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle | \langle x_1, x_2 \rangle \in R \ \& (x_1 = x_2 \rightarrow y_1 \leq y_2)\}.$$

Порядковый тип Q очевидно содержит $\omega \cdot \alpha$. По Q теперь определите систему обозначений S , где $D_S = \{x | \langle x, x \rangle \in Q\}$, которая дает обозначения всем ординалам $< \omega \cdot \alpha$, и, следовательно, ординалу α , так как $\alpha < \omega \cdot \alpha$ (см. упр. 6.6).

Комментарий. Как уже говорилось, теория обозначений для ординалов была развита в работах Черча и Клини (Черч и Клини [1937], Черч [1938], Клини [1938]). В этих же работах содержатся все приведенные

в этом параграфе определения и свойства конструктивных ординалов. Определение 14 в несколько более общей формулировке приведено в работе Ершова [1968b], там же доказано и утверждение предложения 32.

§8. Описание Δ_2^0 -множеств с помощью конструктивных ординалов

Как было установлено в теореме 11в), ω -в. п. множества не дают исчерпывающего описания всей совокупности Δ_2^0 -множеств, хотя и содержат важнейший класс таблично сводящихся к \emptyset' множеств. В следующем параграфе в результате дальнейшего расширения класса ω -в. п. множеств мы получим полное описание и всех Δ_2^0 -множеств. Для этой цели будут использованы идеи, содержащиеся в характеристике Δ_2^0 -множеств, приведенной в теореме 3, а также в определении n -в. п. множеств при $n < \omega$, и характеристике ω -в. п. множеств, содержащейся в теореме 16.

В описании ω -в. п. множеств (теорема 16) мы использовали равномерно в. п. неубывающие последовательности $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots$ в. п. множеств, а в определении n -в. п. множеств при $n < \omega$ были использованы невозрастающие последовательности $R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_{n-1}$ в. п. множеств. Прежде всего унифицируем наши определения, рассматривая равномерно в. п. последовательности в. п. множеств, в которых входящие в эти последовательности в. п. множества находятся в \subseteq -отношениях, согласованных с порядковым типом ординала, определяющего уровень множества в иерархии.

Определение 15 Пусть $P(x, y)$ - вычислимый предикат, который на множестве натуральных чисел задает частичный порядок. (Для удобства будем писать $x \leq_P y$, если $P(x, y)$.) Говорят, что равномерно в. п. последовательность $\{R_x\}$ в. п. множество является P - (или \leq_P -) последовательностью, если для любых x, y , $x \leq_P y$ влечет $R_x \subseteq R_y$.

Таким образом, согласно теореме 16 в описании ω -в. п. множеств участвуют ω -последовательности, т. е. последовательности $\{R_x\}_{x \in \omega}$, в которых отношение $R_x \subseteq R_y$ согласовано с порядковым типом $\omega = \{0 < 1 < \dots\} : R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots$

Определения n -в. п. множеств при $n < \omega$ также можно преобразовать, приведя в соответствие с этим определением. Действительно, если, например, $A = (A_1 - A_2) \cup A_3$, где $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$, то положив $R_0 = A_3$, $R_1 = A_2$ и $R_2 = A_1$, получим 3-последовательность ($3 = \{0 < 1 < 2\}$) $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2$, которая задает множество A : $A = (R_2 - R_1) \cup R_0$. В общем случае, если, например, $A = (A_1 - A_2) \cup \dots \cup (A_{n-1} - A_n)$ (n - четное число и A - n -в. п. множество), то пусть $R_0 = A_n, R_1 = A_{n-1}, \dots, R_{n-1} = A_1$. Тогда последовательность $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_{n-1}$ является n -последовательностью ($n = \{0 < 1 < \dots < n-1\}$) и $A = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (R_{2i+1} - R_{2i})$.

Определение 16 Пусть S - универсальная система обозначений для конструктивных ординалов, α - ординал, который получает при S некоторое обозначение, и пусть Ψ - частично-вычислимая функция, а f - некоторая одноместная функция. Мы пишем $\Psi \rightarrow_{\{\alpha, S\}} f$, если для всех $x \in \text{dom } f$ имеет место $f(x) = \Psi(n, x)$, где n - обозначение для наименьшего ординала $\lambda < \alpha$ такого, что $\Psi(n, x) \downarrow$.

В этом случае для краткости будем писать (ср. с теоремами 14 и 15) $f(x) = \Psi((\mu \lambda_{<\alpha})_S(\Psi((\lambda)_S, x) \downarrow), x)$.

Определим также понятие четности на ординалах. Ординал называется четным, если он либо равен 0, либо предельный, либо является последователем нечетного ординала. В противном случае ординал называется нечетным. Таким образом, если α - четен, что α' (последователь α) нечетен и наоборот.

В системе обозначений S функция четности $e(x)$ определяется так: Пусть $n \in D_S$. Тогда $e(n) = 1$, если ординал $|n|_S$ нечетен, и $e(n) = 0$, если $|n|_S$ четен.

Пусть α - ординал, получивший обозначение a в системе S , т. е. $|a|_S = \alpha$. Пусть для множества A , двухместной ч. в. функции Ψ и для любого x имеет место

$$A(x) = \Psi((\mu \lambda_{<\alpha})_S(\Psi((\lambda)_S, x) \downarrow, x)) \quad (1)$$

(В наших обозначениях $\Psi \rightarrow_{\{\alpha, S\}} A$)

Следующим образом определим a -последовательность в. п. множеств $\{R_x\}$: для любого $x <_S a$

$$R_x = \bigcup_{y <_S x} R_y \cup \begin{cases} \{z \mid \exists t \leq_S x (\Psi(t, z) \downarrow = 1)\}, & \text{если } e(x) \neq e(a). \\ \{z \mid \exists t \leq_S x (\Psi(t, z) \downarrow = 0)\}, & \text{если } e(x) = e(a). \end{cases}$$

Легко проверить, что справедливо представление

$$A = \{z \mid \exists x <_S a (z \in R_x \& e(x) \neq e(a) \& \forall y <_S x (z \notin R_y)\} \quad (2)$$

В частности, при $\alpha = \omega$ имеем полученное ранее (см. Замечание 17) описание ω -в. п. множеств через ω -последовательности, а при $\alpha = n < \omega$ (α – натуральное число), описание n -в. п. множеств.

Покажем, что если множество A определено как в (2) через некоторую α -последовательность $\{R_x\}$ такую, что выполнено условие $\bigcup_{x <_S a} R_x = \omega$, то верно и обратное утверждение: множество A может быть представлено как в (1) для некоторой частично вычислимой функции Ψ .

С этой целью следующим образом определим функцию Ψ :

$$\Psi(x, z) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } z \in R_x, e(x) \neq e(a); \\ 0 & , \text{ если } z \in R_x, e(x) = e(a); \\ \uparrow & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В силу условия $\bigcup_{x <_S a} R_x = \omega$ имеем $\forall z \exists x (\Psi(x, z) \downarrow)$. Теперь непосредственно проверяется, что $A(z) = \Psi((\mu \lambda_{<\alpha})_S(\Psi((\lambda)_S, z) \downarrow, z))$.

Замечание 34 Здесь условие $\bigcup_{x <_S a} R_x = \omega$ необходимо, т.к. иначе не будет выполнено условие $\forall z \exists x (\Psi(x, z) \downarrow)$, которое нужно для (1). Легко проверить, что α -последовательность $\{R_x\}$ в (2) также удовлетворяет этому условию.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 35 Пусть S – универсальная система обозначений для конструктивных ординалов, $A \subseteq \omega$ и α – ординал, получивший обозначение a при S . Следующие условия эквивалентны:

- a) Для любого x , $A(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\alpha})_S(\Psi((\lambda)_s, x) \downarrow, x))$ для некоторой частично-вычислимой функции Ψ .
- б) Существует такая a -последовательность $\{R_x\}_{x <_s a}$, что
- $$\bigcup_{x <_s a} R_x = \omega, \text{ и } A = \{z \mid \exists x <_s a (z \in R_x \& e(x) \neq e(a) \& \forall y <_s x (z \notin R_y)\}.$$

Мы видели, что теорема 35 обобщает полученные ранее описания ω - в. п. и n -в.п множеств при $n < \omega$ соответственно через ω - и n -последовательности в. п. множеств. Сейчас мы докажем, что любое Δ_2^0 -множество имеет такое описание для некоторой a -последовательности $\{R_x\}$, где a является обозначением для некоторого ординала α при системе обозначений S . Более того, как мы ниже увидим, α можно выбрать $\leq \omega^2$.

Докажем сначала, что множества, которые допускают такое описание через a -последовательности $\{R_x\}$ для некоторого $a \in S$, являются Δ_2^0 -множествами, т. е. эти определения не выводят за пределы Δ_2^0 -множеств.

Теорема 36 Пусть S - универсальная и рекурсивная по упорядочению система обозначений, α - конструктивный ординал, получивший некоторое обозначение при S , Ψ - частично-вычислимая функция, и функция f такова, что $\Psi \rightarrow_{\{\alpha, S\}} f$. Тогда $f \leq_T \emptyset'$.

Доказательство. Пусть x дано. Для вычисления $f(x)$ с помощью оракула \emptyset' находим первое (если оно существует) число n такое, что $\Psi(n, x) \downarrow$. (Если такого n нет, то $f(x) \uparrow$.)

Пусть $\Psi(n, x) \downarrow$ для некоторого n . С помощью оракула \emptyset' находим (если оно существует) такое m , что $\nu_S(m) < \nu_S(n)$ и $\Psi(m, x) \downarrow$. Так как S рекурсивна по упорядочению, то это можно сделать. Теперь повторяем предыдущие действия с заменой n на m и т.д. Так как множество α вполне упорядочено, то это проделываем не более чем конечное число раз. Пусть m - такое число, что $\nu_S(m)$ - наименьший ординал, для которого $\Psi(m, x) \downarrow$. Имеем $f(x) = \Psi(m, x)$. ■

Теорема 37 Пусть $f \leq_T \emptyset'$ - некоторая всюду определенная функция. Существуют универсальная рекурсивная по упорядочению система обозначений S и частично-вычислимая функция Ψ такие, что для любого x ,

$$f(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\omega^2})_S(\Psi((\lambda)_s, x) \downarrow), x).$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \lim_s g(s, x)$ для любого x и некоторой вычислимой функции g . Пусть $0 = s_0^x < s_1^x < \dots < s_{k_x}^x$ - все числа s , для которых $g(s, x) \neq g(s+1, x)$. Таким образом, k_x - количество различных значений функции g на множестве пар $\{(s, x) | s \in \omega\}$.

Расположим все пары (y, x) (точнее, номера $\langle y, x \rangle$ этих пар) в ω^2 -последовательность следующим образом:

$$\text{Блок 0} \left\{ \begin{array}{l} \langle s_{k_0}^0, 0 \rangle, \langle s_{k_0}^0 + 1, 0 \rangle, \langle s_{k_0}^0 + 2, 0 \rangle, \dots, \langle s_{k_0}^0 + j, 0 \rangle, \dots \\ \langle s_{k_0-1}^0, 0 \rangle, \langle s_{k_0-1}^0 + 1, 0 \rangle, \langle s_{k_0-1}^0 + 2, 0 \rangle, \dots, \langle s_{k_0}^0 - 1, 0 \rangle \\ \dots \\ \langle s_1^0, 0 \rangle, \langle s_1^0 + 1, 0 \rangle, \langle s_1^0 + 2, 0 \rangle, \dots, \langle s_2^0 - 1, 0 \rangle \\ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \dots, \langle s_1^0 - 1, 0 \rangle \end{array} \right.$$

$$\text{Блок 1} \left\{ \begin{array}{l} \langle s_{k_1}^1, 1 \rangle, \langle s_{k_1}^1 + 1, 1 \rangle, \langle s_{k_1}^1 + 2, 1 \rangle, \dots, \langle s_{k_1}^1 + j, 1 \rangle, \dots \\ \langle s_{k_1-1}^1, 1 \rangle, \langle s_{k_1-1}^1 + 1, 1 \rangle, \langle s_{k_1-1}^1 + 2, 1 \rangle, \dots, \langle s_{k_1}^1 - 1, 1 \rangle \\ \dots \\ \langle s_1^1, 1 \rangle, \langle s_1^1 + 1, 1 \rangle, \langle s_1^1 + 2, 1 \rangle, \dots, \langle s_2^1 - 1, 1 \rangle \\ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \dots, \langle s_1^1 - 1, 1 \rangle \end{array} \right.$$

$$\dots$$

Каждая i -я строка (кроме нулевой) x -го блока ($0 \leq x < \infty$) заполняется числами $\langle s_i^x, x \rangle, \langle s_i^x + 1, x \rangle, \langle s_i^x + 2, x \rangle, \dots, \langle s_{i+1}^x - 1, x \rangle$, а нулевая его строка состоит из бесконечной последовательности чисел $\langle s_{k_x}^x + j, x \rangle, j \geq 0$. Ясно также, что x -й блок матрицы содержит без повторений все натуральный числа вида $\langle j, x \rangle, j \geq 0$.

Преобразуем строки x -го блока для каждого x так, чтобы её i -я строка для любого $i \geq 0$ (а не только для $i = 0$) содержала бесконечное количество чисел, но при этом по-прежнему выполнялись условия:

- 1) первыми элементами каждой i -ой строки являются числа $\langle s_{k_x-i}^x, x \rangle$,
- 2) блок содержит без повторений все натуральные числа $\langle j, x \rangle, j \geq 0$.

С этой целью следующим образом заполняем строки x -го блока: вычисляем значения $g(0, x), g(1, x), \dots$ и одновременно заполняем числами $\langle 0, x \rangle, \langle 1, x \rangle, \langle 2, x \rangle, \dots$ позиции последней строки блока слева направо до

тех пор, пока не дойдем до числа s_1^x , для которого $g(s_1^x - 1, x) \neq g(s_1^x, x)$. После этого начинаем последовательно заполнять слева направо числами $\langle s_1^x, x \rangle, \langle s_1^x + 1, x \rangle, \dots$ позиции уже двух строк: предпоследней и последней, пока не дойдем до числа s_2^x , для которого $g(s_2^x - 1, x) \neq g(s_2^x, x)$. Теперь последовательно заполняем слева направо числами $\langle s_2^x, x \rangle, \langle s_2^x + 1, x \rangle, \dots$ позиции всех трех строк: предпредпоследней, предпоследней и последней (в таком порядке), пока не дойдем до числа s_3^x и так далее. Обозначим эту процедуру перечисления элементов построенной матрицы через \mathcal{M} , а элемент матрицы, находящийся в j -ом месте её i -ой строки через $a_{i,j}$.

Ясно, что для каждой пары (x, y) число $\langle x, y \rangle$ входит в одну и только одну из строк таблицы. Следующим образом определим линейный порядок $<_\varphi$ на элементах таблицы: $a_{i,j} <_\varphi a_{k,l}$, если либо $i < k$, либо $i = k$, но $j < l$. Таким образом, внутри каждого блока числа упорядочены по типу $\omega \cdot n$ для некоторого $n \geq 1$, а все числа внутри таблицы упорядочены по типу ω^2 .

Определим унивалентную систему обозначений S для ординалов $< \omega^2$ следующим образом. Отобразим (обозначим это отображение через ν_s) число $a_{i,j}$ в ординал $\omega \cdot i + j$, $0 \leq i < \omega$, сохраняя порядок: $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда $(\alpha)_S <_\varphi (\beta)_S$.

Чтобы проверить, что таким образом построенная система обозначений унивалентна, определим вычислимые функции k_S , p_S и частично-вычислимую функцию q_S , участвующие в определении системы обозначений для конструктивных ординалов:

$$k_S(\langle s, x \rangle) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } s = s_{k_0}^0, x = 0; \\ 2 & , \text{ если } s = 0 \vee (s > 0 \ \& \ g(s, x) \neq g(s - 1, x)); \\ 1 & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что k_S - вычислимая функция, и если $k_S(x) = 0$, то $\nu_S(x) = 0$; если $\nu_S(x)$ последователь, то $k_S(x) = 1$, и если $\nu_S(x)$ предельный ординал, то $k_S(x) = 2$.

Функцию $p_S(x)$ определяем так. Если $l(x) \neq s_i^{r(x)}$ для некоторого $i \leq k_{r(x)}$, то $p_S(x) = \langle l(x) - 1, r(x) \rangle$.

Ясно, что p_S - частично-вычислимая функция, и если $\nu_S(x)$ последо-

ватель, то $p_S(x)$ определена и $\nu_S(x) = \nu_S(p_S(x)) + 1$.

Теперь определим функцию q_s . Рассмотрим два случая.

1 случай. $x = \langle n, 0 \rangle$. (Число x находится в 0-м блоке таблицы.) Определяем $q_s(x)$ как геделевский номер следующей частично-вычислимой функции f : если $n < s_{k_0}^0$, тогда последовательно вычисляем значения $g(n, 0), g(n+1, 0), \dots$, до тех пор, пока не дойдем такого числа $s > n$, что $g(s-1, 0) \neq g(s, 0)$. (Ясно, что если $n = s_i^0$ для некоторого $i < k_0$, тогда $s = s_{i+1}^0$.) Определяем $f(t) = g(s+t, 0)$ для любого $t \geq 0$.

2 случай. $x = \langle n, m \rangle, m > 0$. (Число x находится в m -м ненулевом блоке.) В этом случае $q_s(x)$ является геделевским номером следующей частично-вычислимой функции f : значения $f(0), f(1), \dots$ последовательно определяем как $\langle 0, m-1 \rangle, \langle 1, m-1 \rangle, \langle 2, m-1 \rangle, \dots$ (последовательные элементы последней строки $m-1$ -го блока) и одновременно вычисляем значения $g(n, m), g(n+1, m), g(n+2, m), \dots$ до тех пор, пока снова не дойдем до такого числа $s > n$, что $g(s-1, 0) \neq g(s, 0)$. (Ясно, что если $n = s_i^m$ для некоторого $i < k_m$, тогда снова $s = s_{i+1}^m$.) После этого последующие значения функции f начинаем определять как значения функции $g(s+t, m), t \geq 0$.

Легко проверить, что если $\nu_S(x)$ является предельным ординалом, то $q_S(x)$ определено и $\{\nu_S(\Phi_{q_S(x)}(n))\}_{n \in \omega}$ является возрастающей последовательностью, имеющей своим пределом $\nu_S(x)$.

Так как, очевидно, $\nu_S(x) < \nu_S(y)$ тогда и только тогда, когда либо $r(x) < r(y)$, либо $r(x) = r(y)$, но $l(x) < l(y)$, то S является также рекурсивной по упорядочению системой обозначений.

Теперь пусть

$$\Psi(\langle s, y \rangle, x) = \begin{cases} g(s, x) & , \text{ если } x = y; \\ \uparrow & , \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Ясно, что Ψ - частично-вычислимая функция и для любого x $f(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\omega^2})_S(\Psi((\lambda)_S, x) \downarrow), x)$ ■

Упражнения

8.1. Докажите, что теорема 37 не имеет места, если в ней соотношение

$$f(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\omega^2})_S(\Psi((\lambda)_S, x) \downarrow), x)$$

заменить на

$$f(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\omega\cdot n})_S(\Psi((\lambda)_S, x) \downarrow), x)$$

для некоторого $n, 1 \leq n < \omega$.

8.2. Из теоремы 33 следует, что теорема 37 справедлива с заменой S на O . Приведите прямое доказательство теоремы 37 с такой заменой.

Комментарии. Теоремы 36 и 37 принадлежат Ершову [1968b]. В доказательствах использован подход, предложенный в Эпштейн, Хаас и Крамер [1981]. Теорема 35 также содержится в этой работе.

§9. Бесконечные уровни иерархии Ершова

Мы видели, что конечные уровни и уровень ω иерархии Ершова не исчерпывают класс всех Δ_2^0 -множеств. В этом параграфе распространим эту иерархию множеств по конструктивным ординалам. Мы увидим, что посредством такой расширенной по трансфинитам иерархии можно в точности исчерпать класс Δ_2^0 -множеств.

Дальнейшее изложение будет проводиться для клиниевской системы ординальных обозначений $(O, <_0)$. Напомним, что для $a \in O$ через $|a|_0$ обозначается ординал α , получивший O -обозначение a . Таким образом $|a|_0$ имеет порядковый тип $\langle \{x|x <_0 a\}, <_0 \rangle$, и слова "а-последовательность в. п. множеств $\{R_x\}$ " для $a \in O$ нужно понимать в смысле определения 15.

Определим для произвольного $a \in O$ операции S_a и P_a , которые отображают a -последовательности $\{R_x\}_{x <_0 a}$ в подмножества ω , следующим образом:

$$S_a(R) = \{z | \exists x <_0 a (z \in R_x \& e(x) \neq e(a) \& \forall y <_0 x (z \notin R_y))\}.$$

$$P_a(R) = \{z \mid \exists x <_0 a (z \in R_x \& e(x) = e(a) \\ \& \forall y <_0 x (z \notin R_y))\} \cup \{\omega - \bigcup_{x <_0 a} R_x\}.$$

Как видно из их определений, $P_a(R) = \overline{S_a(R)}$ для всех $a \in O$ и всех a -последовательностей R .

Класс Σ_a^{-1} (Π_a^{-1}) для $a \in O$ есть по определению класс всех множеств вида $S_a(R)$ (соответственно вида $P_a(R)$), где $R = \{R_x\}_{x <_0 a}$ пробегает все a -последовательности в. п. множеств. Обозначим $\Delta_a^{-1} = \Sigma_a^{-1} \cap \Pi_a^{-1}$.

Легко проверить, что для натуральных чисел $n > 0$ и для тех $a \in O$, где $|a|_0 = \omega$, эти определения совпадают с приведенными ранее. (Здесь и в дальнейшем конечные уровни иерархии Ершова нумеруем самими ординалами, а не их O -обозначениями.)

Докажем, прежде всего, следующую теорему об иерархии:

Теорема 38 (Об иерархии) Пусть $a, b \in O$ и $a <_0 b$.
Тогда $\Sigma_a^{-1} \cup \Pi_a^{-1} \subset \Sigma_b^{-1} \cap \Pi_b^{-1}$.

Доказательство. То, что при $a <_0 b$ выполняются включения $\Sigma_a^{-1} \cup \Pi_a^{-1} \subseteq \Sigma_b^{-1} \cap \Pi_b^{-1}$ следует непосредственно из определения классов множеств $\Sigma_a^{-1}, \Pi_a^{-1}$. Для доказательства того, что здесь все включения собственные, см. упр. 9.1.

Следствие 39 Для любого $a \in O$, $\Sigma_a^{-1} \subset \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.

Доказательство. Предположим для получения противоречия, что для некоторого $a \in O$ справедливо $\Sigma_a^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. Пусть $b \in O$ такое, что $a <_0 b$. Тогда, по теореме 38, $\Sigma_a^{-1} \subset \Sigma_b^{-1}$. Таким образом, $\Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0 = \Sigma_a^{-1} \subset \Sigma_b^{-1}$. Противоречие. ■

Теорема 40 Пусть $|a|_0$ - предельный ординал. Множество A принадлежит классу Δ_a^{-1} тогда и только тогда, когда существует такая a -последовательность R , что $A = S_a(R)$ и $\bigcup_{b <_0 a} R_b = \omega$.

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $A \in \Delta_a^{-1}$. Тогда $A = S_a(R_0)$ и $\omega - A = S_a(R_1)$ для a -последовательностей в. п. множеств $R_0 = \{R_{0,x}\}_{x <_0 a}$ и $R_1 = \{R_{1,x}\}_{x <_0 a}$.

Определим новую a -последовательность $P = \{P_x\}_{x <_0 a}$ следующим образом: если в порядке $\{x \mid x <_0 a\}$ ординал $|x|_0$ пределен, то полагаем $P_x = R_{0,x}$, в противном случае $|x|_0$ является последователем ординала $|y|_0$ для некоторого $y <_0 x$. Полагаем $P_x = R_{0,x} \cup R_{1,y}$.

Так как $A \subseteq \bigcup_{x <_0 a} R_{0,x}$, $\omega - A \subseteq \bigcup_{x <_0 a} R_{1,x}$, и для всех $y <_0 a$ справедливы включения $R_{0,y} \subseteq P_y$, $R_{1,y} \subseteq P_x$, где $y <_0 x <_0 a$, то $\bigcup_{x <_0 a} P_x = \omega$. Проверка условия $A = S_a(P)$ очевидна и оставляется читателю в качестве упражнения.

(\Leftarrow) Теперь пусть $A = S_a(P)$ для некоторой a -последовательности $P = \{P_x\}_{x <_0 a}$, предположим также, что $\bigcup_{x <_0 a} P_x = \omega$. Следующим образом определим новую a -последовательность $R = \{R_x\}_{x <_0 a}$: $R_1 = \emptyset$. Далее, для произвольного $x \in O$, $1 <_0 x <_0 a$, полагаем $R_x = \bigcup_{y <_0 x} R_y$, если $|x|_0$ пределен в $\{x \mid x <_0 a\}$. В противном случае полагаем $R_x = P_y$ для $y <_0 x$ такого, что $|x|_0$ является последователем $|y|_0$. Снова легко проверяется, что $\omega - A = S_a(R)$.

Обобщая определение 5 (см. также предложение 18) ω -в. п. множеств на бесконечные ординалы, примем следующее определение:

Определение 17 Пусть $|a|_0$ - предельный ординал. Если $A \in \Delta_a^{-1}$, тогда множество A называется $|a|_0$ -в. п. (или α -в. п., если $|a|_0 = \alpha$).

Также, как и n -в. п. множества при $n < \omega$, α -в. п. множества ведут себя иначе, чем в. п. множества, но некоторые свойства в. п. множеств снова переносятся и на общий случай. В упр. 4.1 было показано, что если $X \leq_m Y$ и Y является n -в. п. множеством, то X также является n -в. п. множеством. Покажем, что это свойство выполняется и в общем случае α -в. п. множеств.

Теорема 41 Если $A \in \Sigma_a^{-1}$ для некоторого $a \in O$, а $B \leq_m A$, то $B \in \Sigma_a^{-1}$.

Доказательство. Пусть f такая вычислимая функция, что для любого $x, x \in B \leftrightarrow f(x) \in A$, и пусть $A = S_a(R)$ для $R = \{R_x\}_{x <_0 a}$. Определим $R' = \{R'_x\}_{x <_0 a}$, где для каждого $x <_0 a$, $R'_x = f^{-1}(R_x)$. Ясно, что $B = S_a(R')$. ■

Следствие 42 Если $A |a|_0$ -в. п. для некоторого предельного $a \in O$, а $B \leq_m A$, то B также $|a|_0$ -в. п.

Доказательство непосредственно следует из предыдущей теоремы. ■

Следующая теорема является непосредственным следствием теорем 35,36 и 37 (см. упр. 9.4.)

Теорема 43 $\bigcup_{a \in O} \Sigma_a^{-1} = \bigcup_{a \in O, |a|_0 = \omega^2} \Sigma_a^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.

Покажем, что теорему 43 нельзя усилить:

Теорема 44 $\bigcup_{a \in O, |a|_0 < \omega^2} \Sigma_a^{-1} \neq \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.

Доказательство. Пусть $a, b \in O$ такие, что $|a|_0 = \omega^2, |b|_0 < \omega^2$. Тогда, как легко видеть, $b \preceq_0 a$, что влечет $\Sigma_b^{-1} \subseteq \Sigma_a^{-1}$ (см. упр. 9.2). Следовательно, для любого $a \in O$ такого, что $|a|_0 \geq \omega^2$, $\bigcup_{b \in O, |b|_0 < \omega^2} \subseteq \Sigma_a^{-1} \subset \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. ■

Теорема 45 а) Для любого $a \in O$ существует проходящий через a путь T_0 в O такой, что $\bigcup_{b \in T_0} \Sigma_b^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.

б) Существует путь T в O такой, что $|T|_0 = \omega^3$ и $\bigcup_{a \in T} \Sigma_a^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.

Доказательство.

а) Пусть $a \in O$, и пусть $\{b_0, b_1, \dots\}$ произвольный пересчет всех $b \in O$ таких, что $|b|_0 = \omega^2$. Определим T_0 как путь, который проходит через c_0, c_1, c_2, \dots , где $c_0 = a$, $c_1 = a +_0 b_0$, $c_2 = (a +_0 b_0) +_0 b_1, \dots, c_n = ((\dots (a +_0 b_0) +_0 \dots) +_0 b_n$. Ясно, что $c_0 <_0 c_1 <_0 c_2 <_0 \dots$, и порядковый тип T_0 есть $|a|_0 + \omega^3$. Так как для любого $n < \omega$ имеем $c_n = d +_0 b_n$ для некоторого $d \in O$, а для любых x, y , $y \preceq_0 x +_0 y$ (см предложение 32), то

для любого n справедливо $b_n \preceq_0 c_n$. Теперь из теоремы 43 следует, что

$$\bigcup_{b \in T_0} \Sigma_b^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0.$$

b) Непосредственно следует из предыдущего пункта при $a = 1$. ■

Теорему 45 b) так же нельзя усилить, так как справедливо следующее

Предложение 46 *Если путь T в O такой, что $|T|_0 < \omega^3$, то $\bigcup_{a \in T} \Sigma_a^{-1} \neq \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.*

Доказательство. Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 47 *Для любого $a \in O$ справедливо $\bigcup_{a \leq_0 b, |b|_0 - |a|_0 < \omega^2} \Sigma_b^{-1} \neq \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$.*

Доказательство леммы. Пусть $d \in O$ такой, что $a \leq_0 d$ и $|d|_0 = |a|_0 + \omega^2$. Тогда, как нетрудно убедиться, для любого $b \in O$ такого, что $a \leq_0 b$ и $|b|_0 - |a|_0 < \omega^2$ имеем $b \preceq_0 d$. Поэтому $\bigcup_{a \leq_0 b, |b|_0 - |a|_0 < \omega^2} \Sigma_b^{-1} \subseteq \Sigma_d^{-1} \neq \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. ■

Доказательство предложения 46. Так как $|T|_0 < \omega^3$, то в T найдется такой элемент a , что $|T|_0 = |a|_0 + \rho$ для некоторого ординала $\rho < \omega^2$. Тогда, если $b \in T$ и $a \leq_0 b$, то $|b|_0 - |a|_0 < \omega^2$. Следовательно, $\bigcup_{b \in T} \Sigma_b^{-1} \subseteq \bigcup_{a \leq_0 b, |b|_0 - |a|_0 < \omega^2} \Sigma_b^{-1}$. Теперь остается применить предыдущую лемму. ■

Упражнения

9.1. Завершите доказательство теоремы 38.

9.2. (Ершов) Докажите, что для любых $a, b \in O$ справедливо следующее: $a \preceq_0 b \rightarrow \Sigma_a^{-1} \subseteq \Sigma_b^{-1}$.

9.3. (Селиванов) Докажите, что если ординал $|a|_0$ является последователем ординала $|b|_0$ и $b <_0 a$, то множество A принадлежит классу Π_b^{-1} тогда и только тогда, когда существует такая a -последовательность R , что $A = S_a(R)$ и $\bigcup_{b <_0 a} R_b = \omega$.

9.4. Из теорем 35,36 и 37 выведите доказательство теоремы 43.

Комментарии. Все результаты этого параграфа принадлежат Ю.Л. Ершову и содержатся в его статье Ершов [1968b].

§10. Обобщения табличной сводимости

Выше мы видели (теорема 12), что табличная сводимость следующим образом связана с ω -в. п. множествами: Множество A таблично сводится к креативному множеству K тогда и только тогда, когда оно ω -в. п. Определим класс сводимостей, обобщающих табличную, так, чтобы с их помощью получить такую характеристику и для α -в. п. множеств для произвольного бесконечного конструктивного ординала α .

Чтобы сильно не загромождать построений, изложение будем вести только для ординалов, не превосходящих ω^ω .

Выберем университетную систему обозначений, соответствующую представлению $\alpha < \omega^\omega$ в нормальной форме:

$$\alpha = \omega^m \cdot n_0 + \dots + \omega \cdot n_{m-1} + n_m.$$

Из свойств универсальности $(O, <_0)$ следует, что существует частично-вычислимая функция, отображающая такую систему в O с сохранением порядка. Таким образом, для $\alpha < \omega^\omega$ вместо обозначений из O можно пользоваться самими ординалами, подразумевая их запись в нормальной форме.

Следующим образом определим классы *обобщенных табличных условий* (*gtt*(α)-условий) B_α , $\alpha \leq \omega^\omega$.

- $\alpha = n$: B_α состоит из всех *tt*-условий с нормой $< n$;
- $\alpha = \omega$: B_α состоит из всех *tt*-условий;
- $\alpha = \omega^m \cdot n + \beta$, $\beta < \omega^m$ ($n > 1$; если $n = 1$, тогда $\beta > 0$): B_α состоит из всех формул вида $\sigma_1 \& \tau_1 \vee \dots \vee \sigma_n \& \tau_n \vee \rho$,

где $\sigma_i \in B_\omega$, $\tau_i \in B_{\omega^m}$, $\rho \in B_\beta$.

- $\alpha = \omega^{m+1}$: $B_\alpha = \bigcup_n B_{\omega^m \cdot n}$;
- $\alpha = \omega^\omega$: $B_\alpha = \bigcup_n B_{\omega^n}$.

Ясно, что все $\text{gtt}(\alpha)$ -условия из B_α являются обычными tt -условиями, в них лишь выделена некоторая внутренняя структура. Пользуясь этой структурой, определим индукцией по α нумерацию $\{\sigma_n^\alpha\}_{n \in \omega}$ $\text{gtt}(\alpha)$ -формул связанных с $\text{gtt}(\alpha)$ -условиям из B_α .

Пусть формулой σ_n^ω будет tt -формула с номером n .

При $\alpha = \omega^m \cdot n + \delta$ ($m \geq 1, \delta < \omega^m, n > 1$; если $n = 1$, тогда $\beta > 0$), $\text{gtt}(\alpha)$ -формулой $\sigma_{\langle p, q, r \rangle}^\alpha$ с номером $\langle p, q, r \rangle$ будет формула

$$\sigma_{\Phi_p(0)}^\omega \& \sigma_{\Phi_q(0)}^\gamma \vee \dots \vee \sigma_{\Phi_p(n-1)}^\omega \& \sigma_{\Phi_q(n-1)}^\gamma \vee \sigma_r^\beta,$$

где $\gamma = \omega^m$, $\Phi_p(i)$ - частично-вычислимая функция с номером p , сходящаяся при всех $i \leq n-1$, $\Phi_q(i)$ - частично-вычислимая функция с номером q .

В дальнейшем запись $\sigma \in B_\alpha$ будет означать, что $\sigma = \sigma_i^\alpha$ для некоторого i .

Таким образом, $\text{gtt}(\alpha)$ -формула σ_i^α с номером $i = \langle p, q, r \rangle$ является некоторым gtt -условием $\sigma \in B_\alpha$, $\alpha = \omega^m \cdot n + \beta$, $m \geq 1, n \geq 1, \delta < \omega^m$, тогда и только тогда, когда $\Phi_p(x) \downarrow$ при всех $x \leq n-1$ и r является номером некоторого tt -условия из B_β .

Для $\alpha = \omega^{m+1}$ и $\alpha = \omega^\omega$ нумерация $\text{gtt}(\alpha)$ -формул $\{\sigma^\alpha\}$ определяется с помощью некоторого фиксированного эффективного пересчета всех tt -формул из $\bigcup_n B_{\omega^m \cdot n}$ (соответственно из $\bigcup_n B_{\omega^n}$).

Для удобства дополним натуральный ряд чисел также двумя новыми объектами *true* и *false*, для которых $\sigma_{\text{true}}^\alpha$ есть тождественно истинное tt -условие, а $\sigma_{\text{false}}^\alpha$ - противоречивое tt -условие.

В дальнейшем для удобства отождествляем класс B_α с классом всех $\text{gtt}(\alpha)$ -формул.

Определение 18 *gtt*-Формула σ из класса B_α называется сходящейся на множестве $A \subseteq \omega$, если

1. $\alpha \leq \omega$, т. е. любая формула из B_α , $\alpha \leq \omega$, сходится на любом множестве $A \subset N$, либо

2. σ имеет вид $(\bigvee_{i \leq m} \sigma_{f(i)}^\omega \& \sigma_{g(i)}^\gamma) \vee \sigma_j^\beta$, и для любого $i \leq m$, если $A \models \sigma_{f(i)}^\omega$, то $g(i) \downarrow$ и $\sigma_{g(i)}^\gamma$ сходится на A .

Определение 19 gtt -Формула σ из класса B_α выполняется на множестве $A \subseteq \omega$ (или множество A удовлетворяет σ , пишем $A \models \sigma$), если σ сходится на A и

если $\sigma \in B_\omega$, то A удовлетворяет tt -условию σ ,

если σ имеет вид $(\bigvee_{i \leq m} \sigma_i \& \tau_i) \vee \rho$, то $A \models \rho$ или найдется $i \leq m$ такое, что $A \models \sigma_i$ и $A \models \tau_i$.

Определение 20 Множество A $gtt(\alpha)$ -сводится к множеству B (пишем $A \leq_{gtt(\alpha)} B$), если существует такая вычислимая функция f , что для любого x

(i) gtt -формула $\sigma_{f(x)}^\alpha$ сходится на множестве B , и

(ii) $x \in A \leftrightarrow B \models \sigma_{f(x)}^\alpha$.

Замечание 48 Часть (i) в этом определении нужна для доказательства того, что для любого $\alpha \leq \omega^\omega$, $\leq_{gtt(\alpha)}$ -сводимость влечет тьюринговую (см. ниже теорему 49). С другой стороны, наличие условия (i) в определении $gtt(\alpha)$ -сводимости не позволяет удовлетворить главному требованию, которое мы предъявляем этим сводимостям: произвольное Δ_2^0 -множество A является α -в. п. тогда и только тогда, когда $A \leq_{gtt(\alpha)} K$. (В теореме 12 мы видели, что этим свойством обладает табличная сводимость.) Нижне в теореме 50 мы докажем более слабый вариант этого утверждения: если $A \leq_{gtt(\alpha)} K$, тогда A принадлежит уровню Σ_α^{-1} иерархии Ершова, а если наоборот, $A \in \Sigma_\alpha^{-1}$, тогда $A \leq_{gtt^*(\alpha)} K$. Здесь $gtt^*(\alpha)$ -сводимость получается из $gtt(\alpha)$ -сводимости изложением части (i) в определении 20. См. ниже определение 21

Теперь следствие 2.10 может быть переформулировано следующим образом: при $\alpha < \omega$ $A \in \Delta_{\alpha+1}^{-1} \leftrightarrow A \leq_{btt(\alpha)} K$ (т. е. $A \leq_{gtt(\alpha)} K$). Предложение 18 утверждает, что $A \in \Delta_\omega^{-1} \leftrightarrow A \leq_{gtt(\omega)} K$. Ниже обобщим эти утверждения на все Δ_α^{-1} -множества, при всех $\alpha \leq \omega^\omega$.

Полезной характеристикой $g\text{tt}(\alpha)$ -сводимости вне зависимости от конкретного выбора системы ординальных обозначений является следующее *свойство эффективности*: по ординалу α и номеру i формулы σ_i^α можно определить ее представление

$$\sigma_i^\alpha = \left(\bigvee_{i \leq m} \sigma_{g(i)}^\omega \& \sigma_{\psi(i)}^\gamma \right) \vee \sigma_k^\beta.$$

Это ее свойство окажется полезным при доказательстве теорем 49 и 50.

Если ординал α таков, что ни для какого $n > 0$ не имеет места $\alpha = \omega^n$, тогда, как нетрудно видеть (см. упр. 10.1), сводимость $\leq_{g\text{tt}(\alpha)}$ не является транзитивной, поэтому следующую теорему формулируем только для предельных ординалов вида $\omega^n, n > 0$.

Теорема 49 *При $\alpha = \omega, \omega^2, \dots, \omega^\omega$ сводимость $\leq_{g\text{tt}(\alpha)}$ является сводимостью по разрешимости, промежуточной между tt- и T-сводимостями, причем при различных α все $\leq_{g\text{tt}(\alpha)}$ различны.*

Доказательство. Легко проверить, что по номерам i и j формул $\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\alpha$ можно эффективно вычислить номер k формулы σ_k^α , получающейся при подстановке σ_i^α в σ_j^β , т. е. для $\alpha = 1, 2, \dots, \omega, \omega^2, \dots, \omega^\omega$ множество B_α эффективно замкнуто относительно подстановок и отношение $\leq_{g\text{tt}(\alpha)}$ в этом случае транзитивно. Ясно также, что отношение $\leq_{g\text{tt}(\alpha)}$ рефлексивно. Также очевидно, что она является обобщением табличной сводимости. Остается проверить, что $\leq_{g\text{tt}(\alpha)}$ -сводимость влечет тьюринговую.

Пусть $A \leq_{g\text{tt}(\alpha)} B$ для некоторых A, B и α . Обозначим через f вычислимую функцию, $g\text{tt}(\alpha)$ -сводящую A к B : для любого x

- (i) формула $\sigma_{f(x)}^\alpha$ сходится на множестве B , и
- (ii) $x \in A \leftrightarrow B \models \sigma_{f(x)}^\alpha$.

Как уже отмечалось, по ординалу α и номеру $f(x)$ формулы $\sigma_{f(x)}^\alpha$ можно определить ее представление

$$\sigma_i^\alpha = \left(\bigvee_{i \leq m} \sigma_{g(i)}^\omega \& \sigma_{\psi(i)}^\gamma \right) \vee \sigma_k^\beta$$

С помощью оракула множества B выясняем, найдется ли хотя бы один дизъюнкт $\sigma_{g(i)}^\omega \& \sigma_{\psi(i)}^\gamma$ такой, что $B \models \sigma_{g(i)}^\omega$. Если такой дизъюнкт есть, то $\psi(i)$ определена, так как по условию $\sigma_{f(x)}^\alpha$ сходится на множестве

B для любого x . Теперь мы можем с помощью оракула множества B проверить и выполнение условия $B \models \sigma_{\psi(i)}^\gamma$. Ясно, что если и оно выполнено, то имеем $x \in A$. Если же нет, то все это проделываем с σ_k^β , что в конечном итоге позволит определить принадлежность x к множеству A .

Так как для всех $a <_0 b$ совокупность Т-степеней Δ_a^{-1} -множеств является собственным подмножеством совокупности Δ_b^{-1} -множеств (Селиванов [1985]), то согласно теореме 50 по крайней мере степени креативного множества по этим сводимостям различны. См. упр. 10.2. ■

Определение 21 Множество A $gtt^*(\alpha)$ -сводится к множеству B (пишем $A \leq_{gtt^*(\alpha)} B$), если существует такая вычислимая функция f , что для любого x , $x \in A \leftrightarrow B \models \sigma_{f(x)}^\alpha$.

Теорема 50 Пусть $\omega \leq \alpha \leq \omega^\omega$. Тогда для любого множества $A \subseteq \omega$,

- (i) Если $A \in \Sigma_\alpha^{-1}$, тогда $A \leq_{gtt^*(\alpha)} K$;
- (ii) Если $A \leq_{gtt(\alpha)} K$, тогда $A \in \Sigma_\alpha^{-1}$.

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая $\alpha = \omega \cdot 2$. После этого будет ясно, как рассуждать и в общем случае.

(i) Пусть $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\omega \subseteq R_{\omega+1} \subseteq \dots$ является $\omega \cdot 2$ -последовательностью такой, что $A = (\cup_{i=0}^\infty (R_{2i+1} - R_{2i})) \cup (\cup_{i=0}^\infty (R_{\omega+2i+1} - R_{\omega+2i}))$.

Доказательство следующей леммы фактически повторяет часть \Leftarrow доказательства теоремы 12.

Лемма 51 Пусть A является Σ_ω^{-1} -множеством, и $P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$ такая ω -последовательность, что $A = \cup_{i=0}^\infty (P_{2i+1} - P_{2i})$. Для каждого $x \in \omega$, если $x \in P_n$ для некоторого $n < \omega$, существует такое tt-условие σ_m^ω , что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $K \models \sigma_m^\omega$. Здесь число t находится эффективно по x и n .

Доказательство леммы. Пусть $x \in P_n$ для некоторого $n < \omega$. Определим в. п. множество M :

$$M = \{\langle od(m), x, m \rangle : \exists s (x \in P_{m,s} \& x \notin P_{m-1,s})\}.$$

Здесь $od(x) = 1$, если x число нечетное, и $od(x) = 0$, если x число четное.

Ясно, что M в. п. и $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\langle 1, x, n \rangle \in M \& \langle 0, x, n-1 \rangle \notin M \& \langle 1, x, n-1 \rangle \notin M \vee \langle 1, x, n-1 \rangle \in M \& \langle 0, x, n-2 \rangle \notin M \& \langle 1, x, n-2 \rangle \notin M \vee \dots \vee \langle 1, x, 1 \rangle \in M \& \langle 0, x, 0 \rangle \notin M \& \langle 1, x, 0 \rangle \notin M$.

Очевидно, что последнее соотношение может быть записано в виде *tt*-условия. Поэтому $A \leq_{tt} M$.

Продолжим доказательство теоремы. По данному x сначала определяем $\sigma_{\Phi_{p(x)}(0)}^\omega = \sigma_{\Phi_{p(x)}(1)}^\omega = \text{"true"}$, оставляем $\Phi_{q(x)}(0)$ и $\Phi_{q(x)}(1)$ пока неопределенными, и ждем наступления такого шага, на котором для некоторого $i < \omega$ либо $x \in R_i$, либо $x \in R_{\omega+i}$. Если такой шаг наступит, тогда согласно предыдущей лемме для первого случая ($x \in R_i$) находим такое *tt*-условие $\sigma_{x_0}^\omega$, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $K \models \sigma_{x_0}^\omega$, аналогично для второго случая ($x \in R_{\omega+i}$) находим *tt*-условие $\sigma_{x_1}^\omega$ (по ω -последовательности $R_\omega \subseteq R_{\omega+1} \subseteq \dots$) такое, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $K \models \sigma_{x_1}^\omega$. В первом случае определяем $\sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega = \sigma_{x_0}^\omega$, а во втором случае определяем $\sigma_{\Phi_{q(x)}(1)}^\omega = \sigma_{x_1}^\omega$.

Теперь ясно, что $\sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega \& \sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega \vee \sigma_{\Phi_{p(x)}(1)}^\omega \& \sigma_{\Phi_{q(x)}(1)}^\omega$ является искомой $g_{tt}(\omega + 2)$ -формулой, которая $g_{tt^*}(\omega + 2)$ -сводит A к K : если $x \notin (\cup_{i=0}^\infty R_i) \cup (\cup_{i=0}^\infty R_{\omega+i})$, тогда $x \notin A$, а $\Phi_{q(x)}(0), \Phi_{q(x)}(1)$ остаются неопределенными. Если же $x \in (\cup_{i=0}^\infty R_i) \cup (\cup_{i=0}^\infty R_{\omega+i})$, тогда утверждение теоремы непосредственно следует из леммы.

(ii) Теперь пусть $A \leq_{g_{tt}(\omega+2)} K$, т. е. существует такая вычислимая функция f , что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $K \models \sigma_{f(x)}^{\omega+2}$. По определению существуют такие вычислимые функции p и q , что для всех x , $\sigma_{f(x)}^{\omega+2} = \sigma_{\Phi_{p(x)}(0)}^\omega \& \sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega \vee \sigma_{\Phi_{p(x)}(1)}^\omega \& \sigma_{\Phi_{q(x)}(1)}^\omega$, и для $i \leq 1$, если $K \models \sigma_{\Phi_{p(x)}(i)}^\omega$, тогда $\Phi_{q(x)}(i) \downarrow$.

Так как $\sigma_{\Phi_{p(x)}(0)}^\omega$ является обычным табличным условием, существуют булева функция $\alpha_{0,x}$ и конечное множество $F_0 = \{u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,n_0(x)}\}$ такие, что $\sigma_{\Phi_{p(x)}(0)}^\omega = (F, \alpha_{0,x})$ (здесь $n_0(x)$ и $\alpha_{0,x}$ вычислимые функции от x). Аналогично, если $\Phi_{q(x)}(0) \downarrow$, тогда для некоторых функций $m_0(x)$ и $\beta_{0,x}$ пусть $\sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega = (\{v_{0,1}, v_{0,2}, \dots, v_{0,m_0(x)}\}, \beta_{0,x})$.

Подобным образом определяем также функции $n_1(x), m_1(x), \alpha_{1,x}$ и $\beta_{1,x}$ для *tt*-условий $\sigma_{\Phi_{p(x)}(1)}^\omega$ и $\sigma_{\Phi_{q(x)}(1)}^\omega$ (если $\Phi_{q(x)}(1) \downarrow$).

Мы имеем $x \in A \leftrightarrow K \models \sigma_{\Phi_{p(x)}(0)}^\omega \& \Phi_{q(x)}(0) \downarrow \& K \models \sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega \vee K \models \sigma_{\Phi_{p(x)}(1)}^\omega \& \Phi_{q(x)}(1) \downarrow \& K \models \sigma_{\Phi_{q(x)}(1)}^\omega$.

Теперь построим такую $\omega + 2$ -последовательность $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\omega \subseteq R_{\omega+1} \subseteq \dots$, что $A = (\cup_{i=0}^\infty (R_{2i+1} - R_{2i})) \cup (\cup_{i=0}^\infty (R_{\omega+2i+1} - R_{\omega+2i}))$:

По данному $x \in \omega$ ждем наступления такого шага s , что либо $K_s \models \sigma_{\Phi_{p(x)}(0)}^\omega \& \Phi_{q(x),s}(0) \downarrow \& K_s \models \sigma_{\Phi_{q(x)}(0)}^\omega$, либо $K_s \models \sigma_{\Phi_{p(x)}(1)}^\omega \& \Phi_{q(x),s}(1) \downarrow \& K_s \models \sigma_{\Phi_{q(x)}(1)}^\omega$.

Предположим, что на некотором шаге s для некоторого $i \leq 1$ имеем $K_s \models \sigma_{\Phi_{p(x),s}(i)}^\omega \& \Phi_{q(x),s}(i) \downarrow \& K_s \models \sigma_{\Phi_{q(x),s}(i)}^\omega$.

Тогда перечисляем x в $R_{\omega+n_i(x)+m_i(x)}$ и ждем наступления такого шага $t > s$, на котором $K_t \not\models \sigma_{\Phi_{p(x),t}(i)}^\omega \vee K_t \not\models \sigma_{\Phi_{q(x),t}(i)}^\omega$. Тогда перечисляем x в $R_{\omega+n_i(x)+m_i(x)-1}$ и так далее.

Если позднее на некотором шаге $l > s$ получим $\Phi_{q(x),l}(1-i) \downarrow$, тогда перечисляем x в $R_{r(x)+\epsilon}$, где $r(x) = n_0(x) + n_1(x) + m_0(x) + m_1(x)$, а число ϵ определяется следующим образом:

(i) $\epsilon = 1$, если либо $K_l \models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(0)}^\omega \& K_l \models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(0)}^\omega$ или $K_l \models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(1)}^\omega$, $K_l \models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(1)}^\omega$, и $r(x)$ есть число четное, либо

если $K_l \not\models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(0)}^\omega \vee K_l \not\models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(0)}^\omega$, и $K_l \not\models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(1)}^\omega \vee K_l \not\models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(1)}^\omega$ и $r(x)$ есть число нечетное.

(ii) $\epsilon = 0$, если либо $K_l \models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(0)}^\omega \& K_l \models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(0)}^\omega$ или $K_l \models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(1)}^\omega$, $K_l \models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(1)}^\omega$, и $r(x)$ есть число нечетное, либо

если $K_l \not\models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(0)}^\omega \vee K_l \not\models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(0)}^\omega$, и $K_l \not\models \sigma_{\Phi_{p(x),l}(1)}^\omega \vee K_l \not\models \sigma_{\Phi_{q(x),l}(1)}^\omega$ и $r(x)$ есть число четное.

Тогда мы как прежде можем перечислить x в $R_{r(x)+\epsilon-1}$ (имея при $\epsilon = 1$ отрицание условия (i), и при $\epsilon = 0$ отрицание условия (ii)) и т.д. В результате получим $\omega \cdot 2$ -последовательность $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\omega \subseteq R_{\omega+1} \subseteq \dots$ такую, что $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} (R_{2i+1} - R_{2i}) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} (R_{\omega+2i+1} - R_{\omega+2i})$, что означает $A \in \Sigma_{\omega,2}^{-1}$. ■

Следствие 52 Пусть $\omega \leq \alpha \leq \omega^\omega$. Тогда для любого множества A ,

если $A \leq_{g\text{tt}(\alpha)} K \& \bar{A} \leq_{g\text{tt}(\alpha)} K$, тогда $A \in \Delta_\alpha^{-1}$, и

если $A \in \Delta_\alpha^{-1}$, тогда $A \leq_{g\text{tt}^*(\alpha)} K \& \bar{A} \leq_{g\text{tt}^*(\alpha)} K$.

Упражнения

10.1. Проверьте, что если $\alpha \neq \omega^n$ для некоторого $n \geq 1$, тогда существуют такие множества A, B и C , что $A \leq_{g\text{tt}(\alpha)} B$, $B \leq_{g\text{tt}(\alpha)} C$, но $A \not\leq_{g\text{tt}(\alpha)} C$.

10.2. Докажите, что если $\alpha < \beta < \omega^\omega$, то существуют такие множества A и B , что $A \leq_{g\text{tt}(\beta)} B$, $A \not\leq_{g\text{tt}(\alpha)} B$.

10.3. Приведите доказательство теоремы 50 для случаев $\alpha = \omega^2$, $\alpha = \omega^2 + n \cdot \omega$, $n \geq 1$ и $\alpha = \omega^\omega$.

10.4. Приведите определение $g\text{tt}(\alpha)$ -сводимости для $\alpha \leq \omega^\omega$ и докажите для них аналоги теорем 49 и 50.

§11. Свойства $g\text{tt}(\alpha)$ —сводимости

Начнем изложение со следующего утверждения, из которого следует, что тьюринговая сводимость не исчерпывается никаким набором $g\text{tt}(\alpha)$ -сводимостей.

Теорема 53 *Существует множество $A \leq_T K'$ такое, что для всех α $A \not\leq_{g\text{tt}(\alpha)} K'$.*

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 54 *Если $B \leq_{g\text{tt}(\alpha)} C$ для некоторого α , то существует вычислимая относительно K функция Φ_e^K такая, что*

$$(\forall x)[x \in B \leftrightarrow C \models \sigma_{\Phi_e^K(x)}^\omega]$$

Доказательство леммы. Пусть $B \leq_{g\text{tt}(\alpha)} C$ посредством вычислимой функции f , т. е. для любого x ,

$$x \in B \leftrightarrow C \models \sigma_{f(x)}^\alpha.$$

Как выше было замечено, по номеру f и ординалу α эффективно находим представление формулы

$$\sigma_{f(x)}^\alpha = \left(\bigvee_{i \leq m} \sigma_{g(i,x)}^\omega \& \sigma_{\psi(i,x)}^\gamma \right) \vee \sigma_{k(x)}^\beta.$$

Если $\gamma > \omega$, тогда находим такое представление также и для $\sigma_{h(i,x)}^\gamma$ через новые γ' и β' , и аналогично для $\sigma_{k(x)}^\beta$ и т.д. В конечном итоге получим следующее развернутое представление:

$$\sigma_{f(x)}^\alpha = \bigvee_{i \leq m} \left(\left(\bigwedge_{j_i \leq n_i} \sigma_{p_{i,j_i}(x)}^\omega \right) \& \sigma_{q_i(x)}^\omega \right),$$

где все $p_{i,j_i}(x)$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j_i \leq n_i$, определены, но некоторые $q_i(x)$, $0 \leq i \leq m$, для некоторых i могут быть не определены. Теперь пусть для $0 \leq i \leq m$,

$$\tau_s(x) = \begin{cases} \left(\bigwedge_{j_i \leq n_i} \sigma_{p_{i,j_i}(x)}^\omega \right) \& \sigma_{q_i(x)}^\omega, & \text{если } q_i(x) \downarrow; \\ \sigma_{\text{false}}^\omega, & \text{если } q_i(x) \uparrow. \end{cases}$$

Мы имеем $\sigma_{f(x)}^\alpha = \tau_0(x) \vee \tau_1(x) \dots \vee \tau_k(x)$. Ясно, что это – табличное условие, чей номер в нумерации всех tt-условий может быть найден эффективно с помощью оракула \emptyset' . ■

Доказательство теоремы. Положим

$B = \{x | (\exists y)[\Phi_x^K(x) = y \& K' \models \sigma_y^\omega]\}$ и пусть $A = \omega - B$.

Сводимость $A \leq_T K'$ очевидна. Если $A \leq_{g_{tt}(\alpha)} K'$ для некоторого α , то существует $\Phi_e^K(x)$ из леммы. Тогда

$$e \in A \leftrightarrow K' \models \sigma_{\psi_e^K(x)}^\omega \leftrightarrow e \in B \leftrightarrow e \notin A$$

■

С другой стороны, как мы сейчас докажем, слабо табличная сводимость является частным случаем $g_{tt}(\omega^2)$ -сводимости.

Теорема 55 *Если $A \leq_{wtt} B$, то $A \leq_{g_{tt}(\omega^2)} B$.*

Доказательство. Пусть $A = \Phi^B$ и g такая вычислимая функция, что $\varphi^B(x) < g(x)$ для любого x , где $\varphi^B(x)$ use-функция для Φ^B . Всего существует $2^{g(x)}$ подмножеств $X_i \subseteq \{0, 1, \dots, g(x) - 1\}$. Для каждого из них запишем tt-формулу $\sigma_{p(i)}^\omega$, $i \leq 2^{g(x)}$, такую, что

$$X \models \sigma_{p(i)}^\omega \leftrightarrow X \upharpoonright g(x) = X_i.$$

Теперь рассмотрим формулу

$$\sigma_{f(x)}^{\omega^2} \Leftarrow \sigma_{p(1)}^\omega \& \sigma_{q(1)}^\omega \vee \dots \vee \sigma_{p(2^{g(x)})}^\omega \& \sigma_{q(2^{g(x)})}^\omega,$$

где $\sigma_{p(i)}^\omega$ описаны выше, а $q(x)$ определяется так:

$$q(x) = \begin{cases} \text{true}, & \text{если } \Phi^{X_i}(x) \downarrow = 1; \\ \text{false}, & \text{если } \Phi^{X_i}(x) \downarrow = 0; \\ \uparrow, & \text{если } \Phi^{X_i}(x) \uparrow. \end{cases}$$

Ясно, что зная x мы можем эффективно вычислить номер $f(x)$ этой $\text{gtt}(\omega^2)$ -формулы в нумерации всех $\text{gtt}(\omega^2)$ -формул. Теперь $\Phi^B(x) = 1 \leftrightarrow B \models \sigma_{f(x)}^{\omega^2}$, т. е. $A \leq_{\text{gtt}(\omega^2)} B$ с помощью функции $f(x)$. ■

Заметим, что обращение этого утверждения не имеет места. Рассмотрим, например, множество $A \in \Delta_{\omega^2}^{-1} - \Delta_\omega^{-1}$. Тогда $A \leq_{\text{gtt}(\omega^2)} K$, но $A \not\leq_{wtt} K$, так как $A \leq_{wtt} K$ тогда и только тогда, когда $A \leq_{tt} K$ (см., напр., Роджерс [1967, упр. 9.45, с.159]), а это имеет место (по теореме 12) тогда и только тогда, когда $A \in \Delta_\omega^{-1}$.

Упражнения

11.1. Постройте прямой конструцией множество A такое, что $A \leq_{\text{gtt}(\omega^2)} K$, но $A \not\leq_{wtt} K$.

Глава 2

Тьюринговые степени н-в. п. степеней

В этой главе мы изучаем тьюринговые степени множеств, принадлежащих различным уровням иерархии Ершова. Первые результаты в этом направлении были получены в 70-х годах прошлого столетия, когда Барри Купер в своей диссертации от 1971 года установил существование тьюринговой степени, содержащей d -в. п. множество, но не содержащей в. п. множества (ниже такие степени мы называем *собственно d -в. п. степенями*), а Лахлан (неопубликовано) доказал, что для любого $n > 1$ под каждой собственно n -в. п. степенью находится некоторая невычислимая в. п. степень. Эти два результата показывают, что совокупности n -в. п. степеней отличаются как от совокупности в. п. степеней, так и от совокупности всех степеней, расположенных ниже $\mathbf{0}'$ (так как по известной теореме Сакса существуют минимальные степени $< \mathbf{0}'$, а по упомянутой теореме Лахлана никакая n -в. п. степень не может быть минимальной).

Эти работы вызвали определенный интерес среди математиков. Обобщая теорему Купера, Лерман и Хей установили, что для любого $n > 1$ существуют $(n+1)$ -в. п. степени \mathbf{c} и \mathbf{d} такие, что интервал $\{\mathbf{b} \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{d}\}$ не содержит n -в. п. степеней. Они также отметили, что сочетание предложенного Купером для доказательства существования собственно d -в. п. степени метода с методом разрешения позволяет построить под каждой

невычислимой в. п. степени собственную d -в. п. степень. Далее, Шор и Хей, объединяя метод Купера с методом кодирования Сакса, построили собственную d -в. п. степень и над каждой не T -полней в. п. степенью.

Эти работы не опубликованы, о них говорится в статье Хааса, Крамера и Эпштейна [1981].

Более активные исследования по разработке структурной теории n -в. п. (в основном d -в. п.) степеней начались после публикаций Арсланова [1985, 1988] и Доунея [1989], в которых установлено, что элементарные теории в. п. степеней и n -в. п. степеней различны. Арсланов доказал, что для любого $n \geq 1$ для каждой n -в. п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ существует d -в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$ такая, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{0}'$. Ранее в работах Ейтса и Купера (неопубликовано, см. статью Д. Миллера [1981]) было установлено, что в полурешетке в. п. степеней такой результат не имеет места. Отсюда следует, что эти теории различны на Σ_3^0 -уровне. Доуней доказал возможность вложения четырехэлементной решетки \Diamond , называемой также *ромбом*, в d -в. п. степени с сохранением $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ (ранее Лахланом [1966] было установлено, что в полурешетке в. п. степеней такой результат также не имеет места). Таким образом, эти теории различны уже на Σ_2^0 -уровне (на Σ_1^0 -уровне эти теории совпадают, что легко следует из приведенного выше результата Лахлана). В своей работе Доуней сформулировал также свою ставшую знаменитой гипотезу об элементарной эквивалентности упорядочений n - и m -в. п. степеней при $n \neq m, n, m > 1$.

В настоящее время структурная теория n -в. п. степеней достаточно хорошо разработана. К наиболее крупным результатам, полученным в этой области за эти годы, относятся, кроме упомянутых работ Арсланова и Доунея, работа Купера, Лахлана, Лемппа, Соара и Харрингтона [1991] о неплотности упорядочений n -в. п. степеней для любого $n > 1$, недавняя работа Арсланова, Калимуллина и Лемппа [ta], в которой устанавливается не элементарная эквивалентность полурешеток d -в. п. и 3-в. п. степеней, работа Йе Янг и Лианг Ю [ta], в которой авторы доказывают, что в. п. степени в сигнатуре $\{\leq\}$ не образуют Σ_1 -подструктуру n -в. п. степеней ни для какого $n \geq 2$, серия работ Купера, Ли, Йе, Ишмухаметова, в которых подробно исследована возможность разложения n -в. п. степеней над m -в. п. степенями при различных n и $m \geq 1$.

Однако ответы на целый ряд естественно возникающих вопросов все еще не получены. К ним прежде всего относятся проблема определимости в. п. степеней в структурах n -в. п. степеней при $n > 1$ (в более общей

постановке проблема определимости m -в. п. степеней в структурах n -в. п. степеней при $1 \leq m < n$), проблема элементарной эквивалентности структур n -в. п. степеней при различных $n > 2$, разрешимость ограниченных фрагментов элементарных теорий этих структур, в частности проблема разрешимости $\exists\forall$ -теории d -в. п. степеней.

В этой главе излагается большинство из перечисленных результатов. В последнем параграфе мы перечисляем также наиболее интересные открытые проблемы, относящиеся к теории n -в. п. степеней и приводим некоторые новые, относящиеся к этим проблемам, результаты.

§1. Собственно n -в. п. степени. Теорема об иерархии

Определение 22 Тьюринговая степень **a** называется n -вычислимо перечислимой (n -в. п. степень), если она содержит некоторое n -в. п. множество; n -в. п. степень **a** называется собственно n -в. п. степенью, если она не содержит m -в. п. множества ни для какого $m < n$.

Аналогично определяются ω -в. п. степени, а также a -в. п. степени, когда $a \in O$ - обозначение для конструктивного ординала $|a|_0$.

Совокупность всех n -в. п. степеней обозначим через \mathcal{D}_n , а через \mathcal{D} и $\mathcal{D}(\leq \mathbf{0}')$ - соответственно совокупности всех тьюринговых степеней и степеней, расположенных ниже $\mathbf{0}'$. Через \mathcal{D}_ω обозначается совокупность всех ω -в. п. степеней. Имеем

$$\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}_\omega \subseteq \mathcal{D}(\leq \mathbf{0}')$$

В предыдущей главе мы видели, что для каждого $n \in \omega$ существуют $(n+1)$ -в. п., но не n -в. п. множества. Теперь в теоремах 61 и 62 мы увидим, что n -в. п. множества образуют собственную иерархию и в терминах их степеней. Докажем сначала некоторое усиление упражнения 1.1.8 из предыдущей главы.

Пусть $D = D_0 - D_1$ - произвольное d -в.п. множество. Эффективным d -перечислением (иногда, для краткости, d -перечислением) d -в. п.

множества D называется в. п. последовательность конечных множеств $\{D_s\}_{s \in \omega}$, где $D_s = D_{0,s} - D_{1,s}$, а $\{D_{i,s}\}_{s \in \omega}, i \leq 1$, эффективные перечисления в. п. множеств $D_i, i \leq 1$. Аналогично определяются и эффективные n -перечисления n -в. п. множеств для произвольного $n, 2 < n < \omega$.

Назовем в. п. множество $A(D) = \{\langle s, x \rangle : x \in D_s - D\}$ ассоциированным с множеством D в. п. множеством. В упр. 1.1.9 мы видели, что $A(D) \leq_T D$ и D в. п. относительно $A(D)$. Ясно, что определение множества $A(D)$ зависит от выбора эффективного d -перечисления множества D . Тем не менее, тьюринговая степень множества $A(D)$ определяется однозначно по множеству D . Более того, справедливо следующее

Предложение 56 *Пусть D - произвольное d -в. п. множество и $A(D)$ - ассоциированное с D в. п. множество. Если D в. п. относительно некоторого множества B , тогда $A(D) \leq_T B$.*

Доказательство. Пусть $D = \text{dom}(\Phi(B))$, где Φ - частично вычислимый функционал. Для произвольного $\langle s, x \rangle$, если $x \notin D_s$, тогда $\langle s, x \rangle \notin A(D)$. Если же $x \in D_s$, то с помощью оракула множества B находим такой шаг $t > s$, что

- либо $x \notin D_t$ (в этом случае $\langle s, x \rangle \in A(D)$)
- либо $\Phi(B, x) \downarrow [t]$ (в этом случае $\langle s, x \rangle \notin A(D)$). ■

Как видно из следующей теоремы, номер (в нумерации всех в. п. множеств) ассоциированного с 2-в.п. множеством $D = D_0 - D_1$ в. п. множества $A(D)$ находится не равномерно по индексам в. п. множеств D_0 и D_1 .

Теорема 57 *Не существуют вычислимой функции g и асильно вычислимого функционала Φ таких, что если множество $W_e - W_i$ не вычислимо, то $W_{g(t,i)}$ не вычислимо и $W_{g(t,i)} = \Phi^{W_e - W_i}$.*

Доказательство. По данным в. п. множеству V и частично вычислимому функционалу Φ мы с помощью равномерной процедуры построим d -в. п. множество D , удовлетворяя для всех e следующим требованиям:

\mathcal{R} : Либо V вычислимо, либо $V \neq \Phi^D$;
 \mathcal{P}_e : $D \neq \bar{W}_e$.

Этого достаточно для доказательства теоремы. Действительно, предположим, что такие вычислимая функция g и частично вычислимый функционал Φ существуют. Тогда, в силу равномерности конструкции и по предположению теоремы существует такая вычислимая функция h , что для любого n , $W_{h(n)}$ не вычислимо и Т-сводится к множеству D (построенному по W_n), если D не вычислимо. По теореме рекурсии существует такое число j , что $W_{h(j)} = W_j$. Так как множество D из-за требований \mathcal{P}_e , $e \in \omega$, не вычислимо, то множество $V = W_j$ противоречит требованию \mathcal{R} .

Стратегия удовлетворения требования \mathcal{R} - стандартная стратегия Сакса сохранения равенства. Опишем стратегию удовлетворения требования \mathcal{P}_e при фиксированном e и при наличии некоторого требования \mathcal{R} более высокого приоритета.

- (1) Выбираем еще не использованного *свидетеля* x , и
- (2) ждем, когда на некотором шаге s x войдет в W_e .

Мы теперь могли бы удовлетворить \mathcal{P}_e , перечислив x в D , но нам может препятствовать запреты требования \mathcal{R} . Но тем не менее,

- (3) перечисляем x в D .

Теперь существуют две возможности.

1) Перечисление x в D не сократило длину равенства между множествами V и Φ^D . В этом случае мы удовлетворили требованию \mathcal{P}_e , не нарушив стратегию Сакса сохранения равенства при удовлетворении требования \mathcal{R} .

2) Перечисление x в D сократило длину равенства между множествами V и Φ^D . В этом случае мы изымаем x из D и удовлетворяем требование \mathcal{R} . а удовлетворение требования \mathcal{P}_e начинаем сначала с помощью нового свидетеля. ■

В упр. 1.1 мы увидим, что утверждение предложения 56 справедливо и для множеств, принадлежащих произвольным конечным уровням иерархии Ершова, при естественных изменениях в его формулировке.

Ясно, что по аналогии со случаем $n = 2$ для любого $n > 1$ можно определить ассоциированные с n -в. п. множеством D множество $A(D)$, в этом случае $A(D)$ будет $(n - 1)$ -в. п. множеством. Используя множество $A(D)$ легко доказать, что под любой n -в. п. степенью $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ (для любого $n > 1$) расположена невычислимая в. п. степень.

Предложение 58 *Пусть $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ является n -в. п. степенью для некоторого $n \geq 1$. Существует такая в. п. степень \mathbf{a} , что $\mathbf{d} > \mathbf{a} > \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть n -в. п. множество D имеет степень \mathbf{d} и не эквивалентно никакому $(n - 1)$ -в. п. множеству. Фиксируем некоторое его эффективное n -перечисление и по нему определим ассоциированное с D $(n - 1)$ -в. п. множество $A(D)$. Тогда $\emptyset <_T A(D) <_T D$ (нетрудно проверить, что если $A(D)$ вычислимо, тогда D является $(n - 1)$ -в. п. множеством, что противоречит выбору множества D). Если $n = 2$, то предложение доказано. Если $n > 2$, то аналогично рассуждая получим $\emptyset <_T A(A(D)) <_T A(D)$, и так далее, пока не доберемся до некоторого в. п. невычислимого множества $A(A \dots A(D) \dots)$. ■

Это предложение позволяет перенести некоторые свойства в. п. степеней на случай n -в. п. степеней при $n > 1$. В качестве примера приведем следующие два результата.

Из теоремы Лахлана о невозможности вложения ромба (т. е. четырехэлементной решетки $\{a, b, a \cup b, a \cap b\}$) в полурешетку в. п. степеней с сохранением наименьшего $\mathbf{0}$ и наибольшего $\mathbf{0}'$ элементов следует, что ни одна в. п. степень, за исключением $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ не имеет дополнения.

(*Дополнением* для в. п. степени \mathbf{a} естественно назвать такой элемент $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \mathbf{0}'$ и $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ясно, что $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ дополняют друг друга.) Позднее в теореме 74 мы докажем, что этот результат в полурешетках n -в. п. степеней при $n > 1$ не имеет места, но из предложения 58 легко выводится, что он переносится на случай n -в. п. степеней в следующей формулировке.

Теорема 59 *Существует такая в. п. степень, которая не имеет в качестве дополнения никакую n -в. п. степень ни для какого $n \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ такая в. п. степень, что $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ни для какой в. п. степени $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ (Ейтс [1966]). Если бы для некоторого

$n \geq 1$ существовала n -в. п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, для которой $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{0}$, тогда, по предложению 58, $\mathbf{a} \cap \mathbf{c} = \mathbf{0}$ для некоторой в. п. степени $\mathbf{c} > \mathbf{0}$, противоречие. ■

Далее, из предложения 58 следует, что для каждой минимальной в D_2 пары d -в. п. степеней \mathbf{d}_0 и \mathbf{d}_1 существует минимальная в \mathcal{R} пара в. п. степеней $\mathbf{a}_0 < \mathbf{d}_0$ и $\mathbf{a}_1 < \mathbf{d}_1$. Таким образом, из теоремы Лахлана [] о существовании в. п. степени, под которой нет минимальной пары в. п. степеней, теперь немедленно вытекает следующий результат:

Теорема 60 *Существует такая невычислимая в. п. степень, под которой нет минимальной пары d-в. п. степеней.*

Следующая теорема о существовании собственной d -в. п. степени, принадлежащая Куперу [1971], является первым результатом о степенях d -в. п. множеств.

Теорема 61 *Существует собственная d-в. п. степень.*

Доказательство. Искомое d -в. п. множество D строим в виде разности $D_1 - D_2$ двух в. п. множеств D_1 и D_2 . Для выполнения условия "тыюриговая степень D не является вычислимо перечислимой", для каждого в. п. множества W и частично-вычислимых функционалов Φ и Ψ удовлетворяем требования

$$\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi} : D \neq \Phi^W \vee W \neq \Psi^D.$$

Стратегия удовлетворения конкретного требования $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$ выглядит так:

- (1) Выбираем еще не использованного свидетеля x , и
- (2) ждем наступления такого шага s , на котором

$$D(x) = \Phi^W(x) \wedge W[\varphi(x)] = \Psi^D[\varphi(x)[s]$$

(Если это никогда не произойдет, тогда требование $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$ удовлетворено с помощью свидетеля x .)

- (3) запрещаем трогать элементы интервала $D \lceil \psi\varphi(x)$ при удовлетворении других требований.

(В дальнейшем в подобных ситуациях мы пишем просто "запрещаем интервал $D \lceil \psi\varphi(x)$ ".)

- (4) Кладем x в D (т. е. перечисляем x в D_1), и

- (5) ждем наступления нового шага s' , на котором

$$D(x) = \Phi^{W \lceil \varphi(x)}(x) \wedge W \lceil \varphi(x) = \Psi^{D \lceil \psi\varphi(x)} \lceil \varphi(x)[s'].$$

(Снова, если это никогда не произойдет, то требование $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$ удовлетворено посредством свидетеля x . Если же это случится, то только из-за изменения значения $\Phi^W(x)$ между шагами s и s' , что в свою очередь может произойти только из-за изменения значений $W \lceil \varphi(x)$.)

- (6) Удаляем x из D (т. е. перечисляем его в D_2).

Так как множество W в. п., то изменение значения $\Phi^W(x)$ между шагами s и s' окончательное, и поэтому, удалив x из D , мы удовлетворяем требование $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$, добившись выполнения второго дизъюнкта.

Теперь для проведения подробной конструкции надо выбрать приоритетное упорядочение всех требований $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$, выбирая для каждого требования в качестве свидетеля число, большее всех тех чисел, которые упомянуты до этого в процессе конструкции, и в случае, когда требования большего приоритета нарушают запреты, наложенные требованиями меньшего приоритета, заново начинать процедуру выполнения требований меньшего приоритета, в этом случае также говорят, что требования меньшего приоритета *инициализируются*. Стратегия некоторого требования инициализируется путем снятия всех его запретов и выбора в качестве свидетеля нового числа. Все это позволяет выполнить условие защиты запретов требований с большими приоритетами от действий требований с меньшими приоритетами. ■

Приведенное доказательство легко обобщается и на случай n -в. п. множеств, для любого $n > 1$.

Теорема 62 Для любого $n > 1$ существует собственная n -в. п. степень.

Доказательство. Искомое n -в. п. множество D строим так же, как это делалось в теореме 61, удовлетворяя для всех e всем требованиям $D \not\equiv_T V_e$, где V_e является n -в. п. множеством с номером e (в некоторой фиксированной нумерации $\{V_e\}_{e \in \omega}$ всех n -в. п. множеств). Так как мы значение $D(x)$ в процессе его предельного вычисления можем изменить на один раз больше, чем это делается при предельном вычислении значения $V_e(x)$, то в предыдущем доказательстве если после шага s' выяснится, что для некоторого $s'' > s'$ снова выполнено соотношение

$$D(x) = \Phi^{V[\varphi(x)]}(x) \wedge V[\varphi(x)] = \Psi^{D[\psi\varphi(x)]}[\varphi(x)[s'']],$$

(так как теперь $V[\varphi(x)]$ может вернуть свое предыдущее значение), тогда кладем x обратно в D и либо (при $n = 3$) диагонализируем $R_{V,\Phi,\Psi}$, либо (при $n > 3$) продолжаем процесс таким образом далее. ■

Таким образом, имеем

$$\mathcal{D}_0 \subsetneq \mathcal{D}_1 \subsetneq \mathcal{D}_2 \subsetneq \dots \subseteq \mathcal{D}_\omega \subseteq \mathcal{D}(\leq \mathbf{0}')$$

Теперь установим, что здесь последние два включения также собственные: $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{D}_n$ (\mathcal{D}_ω и \mathcal{D}_ω ($\mathcal{D}(\leq \mathbf{0}')$).

Теорема 63

- a) Существует ω -в. п. множество A , T -степень которого не является n -в. п. степенью ни для какого $n \in \omega$.
- b) Существует множество $A \leq_T \emptyset'$, T -степень которого не является ω -вычислимо перечислимой.

Доказательство. Так как существует эффективная нумерация всех n -в. п. множеств (одновременно для всех $n < \omega$), то доказательств пункта а) проводится по той же схеме, как и доказательства теорем 61 и 62 с незначительными изменениями. Для пункта б) нужно использовать аппроксимацию нумерации всех ω -в. п. множеств, описанную при доказательстве теоремы 11 (упр. 1.2.5). ■

Л. Хей и М. Лерман заметили, что небольшое изменение изложенной стратегии доказательства теоремы 62 позволяет следующим образом усилить эту теорему.

Теорема 64 Для всех $n > 1$ существуют такие n -в. п. множества $V <_T U$, что по T -сводимости между V и U нет $(n - 1)$ -в. п. множеств.

Доказательство. Искомые n -в. п. множества V и U строим, удовлетворяя для всех $(n - 1)$ -в. п. множеств D , частично-вычислимых функционалов Φ, Ψ и Θ требованиям

$$\mathcal{R}_{D,\Phi,\Psi} : V \neq \Phi^D \vee D \neq \Psi^{V \oplus U},$$

$$\mathcal{S}_\Theta : U \neq \Theta^V.$$

Требования $\mathcal{R}_{D,\Phi,\Psi}$ удовлетворяются так же, как это делалось в доказательстве теоремы 62. Для удовлетворения требования \mathcal{S}_Θ выбираем еще не использованного свидетеля x , ждем вычисления значения $\Theta^V(x)$ и определяем $U(x)$ так, чтобы $U(x) \neq \Theta^V(x)$. Так как вся конструкция проводится методом приоритета с конечными нарушениями, то эти стратегии удовлетворения требований $\mathcal{R}_{D,\Phi,\Psi}$ и \mathcal{S}_Θ легко сочетаются. ■

Если в теореме 64 заранее фиксировать одно из множеств $U >_T \emptyset$ или $V <_T \emptyset'$, то возможно ли построить другое множество так, чтобы выполнялось утверждение теоремы? В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен (см. об этом подробнее в §7). Но, например, существует такое низкое d -в. п. множество V , что между ним и \emptyset' по T -сводимости нет в. п. множеств.

Теорема 65 Существует такое низкое d -в. п. множество V , что если некоторое в. п. множество $W \geq_T V$, то $W \geq_T \emptyset'$.

Доказательство.

В следующем параграфе мы убедимся, что собственные n -в. п. степени расположены достаточно плотно среди степеней $\leq \emptyset'$, в частности

между двумя в. п. степенями существуют n -в. в. степени для произвольного $n > 1$. Пока лишь докажем, что среди собственных n -в. п. степеней нет минимальных. Теорема формулируется для случая $n = 2$, для общего случая см. упр. 1.5 и 1.6.

Теорема 66 *Пусть A - невычислимое в. п. множество. Существует такое d -в. п. множество $D <_T A$, что $\forall x(W_x \not\equiv_T D)$.*

Доказательство. Стратегия удовлетворения требований $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$ из теоремы 61 комбинируем с методом *разрешения*: с каждым требованием связываем не одно, а возрастающую последовательность x_0, x_1, \dots свидетелей, и числа x_i перечисляются в D или изымаются из него только если множество A "разрешает" это сделать, изменившись в промежутке $A[x_i]$. Так как множество A невычислимо, такая стратегия в конечном итоге приводит к успеху. Более подробно, стратегия удовлетворения требований

$$\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi} : D \neq \Phi^W \vee W \neq \Psi^D$$

теперь выглядит так: мы используем ω -последовательность циклов $k = 0, 1, 2, \dots$, где каждый цикл $k \geq 0$ работает следующим образом:

Этап 1. В качестве свидетеля выбираем новое, еще не использованное число x_k и ждем наступления такого шага s , на котором

$$D(x_k) = \Phi^W(x_k) \wedge W[\varphi(x_k)] = \Psi^D[\varphi(x_k)[s]]$$

(Если это никогда не произойдет, тогда требование $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$ удовлетворено посредством свидетеля x_k .)

Этап 2. Запрещаем интервал $D[\psi\varphi(x_k)]$ и ждем перечисления какого-нибудь элемента $y < x_k$ в множество A , одновременно начинаем работать в цикле $k + 1$;

Этап 3. Приостанавливаем работу циклов $> k$, перечисляем x_k в D_1 и ждем наступления такого шага s' , на котором

$$D(x) = \Phi^{W[\varphi(x)]}(x) \wedge W[\varphi(x)] = \Psi^{D[\psi\varphi(x)]}[\varphi(x)[s']].$$

(Снова, если это никогда не произойдет, то требование $\mathcal{R}_{W,\Phi,\Psi}$ удовлетворено посредством свидетеля x .)

Этап 4. Снова ждем перечисления какого-нибудь элемента $y < x$ в множество A , и возобновляем работу в циклах $> k$;

Этап 5. Перечисляем x_k в D_2 и прекращаем работы во всех циклах.

Возможные выходы этой стратегии таковы:

A. Существует только конечное число работающих циклов, Это значит, что некоторый цикл k либо бесконечно ожидает на одном из этапов 1 или 3, либо завершает работу на этапе 5.

В этом случае требование удовлетворено либо из-за того, что по крайней мере один из функционалов Φ и Ψ не всюду определен, либо из-за выполнения второго его дизъюнкта.

B. Существуют бесконечно много работающих циклов таких, что каждый из-них бесконечно ожидает на этапе 4.

Этого случая быть не может, иначе множество A было бы вычислимым. Действительно, чтобы для произвольного y определить, принадлежит y множеству A или нет, проводим конструкцию до тех пор, пока некоторый цикл k , для которого $x_k > y$, на некотором шаге s не подойдет к этапу 4 конструкции. Тогда $y \in A$ тогда и только тогда, когда $y \in A_s$.

C. Предыдущие две возможности не имеют места. Но это значит, что существуют бесконечно много циклов, и начиная с некоторого цикла k каждый цикл бесконечно ожидает на этапе 2.

Но этого случая снова быть не может, так как иначе множество A вычислимо. Чтобы для произвольного $y > x_{k+1}$ определить, принадлежит y множеству A или нет, проводим конструкцию до тех пор, пока некоторый цикл k' , для которого $x_{k'} > y$, на шаге s не подойдет к этапу 2 конструкции. Тогда $y \in A$ тогда и только тогда, когда $y \in A_s$. ■

Следствие 67 Среди собственно d -в. п. степеней нет минимальных.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 66 и упражнения 1.1.9. ■

Упражнения

1.1. Следующим образом обобщите предложение 56: пусть D - произвольное n -в. п. множество, для произвольного $n > 1$. Тогда для ассоциированного с D $(n-1)$ -в. п. множества $A(D)$ справедливо следующее: $A(D) \leq_T D$, D в. п. относительно $A(D)$, и если D в. п. относительно некоторого $(n-1)$ -в. п. множества B , тогда $A(D) \leq_T B$.

1.2. Пусть \mathbf{a} - собственная n -в. п. степень для некоторого $n > 1$. Обобщая предложение 58 докажите, что существуют такие степени $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \dots, \mathbf{a}_{n-1}$, что $\mathbf{0} < \mathbf{a}_0 < \dots < \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{a}$, для любого $m, 0 < m \leq n-1$, \mathbf{a}_i является собственной m -в. п. степенью, вычислимой перечислимой относительно \mathbf{a}_{m-1} , а \mathbf{a}_0 является в. п. степенью.

1.3. (Ишмухаметов [1999]) Докажите, что степень ассоциированного с d -в. п. множеством D в. п. множества $A(D)$ хотя и не зависит (согласно предложению 56) от выбора способа d -перечисления множества D , но зависит от выбора самого множества D из d -в. п. степени, которой принадлежит D . Более того, существуют такие d -в. п. множества D_1 и D_2 , что $D_1 \equiv_T D_2$, но их ассоциированные множества $A(D_1)$ и $A(D_2)$ несравнимы по Тьюрингу.

1.4. Пусть $D_0 \supseteq D_1$ - в. п. множества и $D = D_0 - D_1$, а вычислимая функция f такая, что $\text{rng}(f) = D_0$. Определим $A^*(D) = f^{-1}(D_1)$. (Ясно, что множество $A^*(D)$ зависит от выбора перечисляющей D_0 вычислимой функции, также, как множество $A(D)$ зависит от выбора эффективного перечисления множества D .) Докажите, что независимо от выбора этих перечислений справедливо $A(D) \equiv_m A^*(D)$. Таким образом, как утверждение упражнения 1.1.9, так и предложение 56 остаются справедливыми, если заменить $A(D)$ на $A^*(D)$.

1.5. Докажите, что если \mathbf{a} невычислимая в. п. степень, тогда для любого $n > 1$ существует собственная n -в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{a}$. (При $n = 2$ это - теорема 66.)

1.6. (Ишмухаметов, Селиванов) Для любого $a \in O$ существует собственная a -в. п. степень.

1.7. Докажите следующее усиление упражнения 1.1.13б: существует такое ω -в. п. множество A , что Т-степень A не содержит n -в. п. множеств ни для какого $n < \omega$, а множество $B(A) = \{x | D_x \subseteq A\}$ является 3-в. п. множеством.

1.8. Пусть A - произвольное n -в. п. множество, что $\emptyset <_T A <_T \emptyset'$. Из теоремы Сакса о разложении (см. Соар [1987, теорема VII.3.2 и упр. VII.3.8]) следует, что существует такое в. п. множество D , что $D|_T A$. Постройте такое множество D прямой конструкцией. *Указание.* Комбинируйте доказательство теоремы 61 со стратегиями удовлетворения следующих требований:

$\mathcal{R}_\Phi : D = \Phi^A \rightarrow K = \Gamma^A$ (по данному частично вычислимому функционалу Φ строится частично вычислимый функционал Γ),

$\mathcal{N}_\Psi : A = \Psi^D \rightarrow A = \Delta$. (по данному частично вычислимому функционалу Ψ строится частично вычислимый функционал Δ).

Для удовлетворения требования \mathcal{R}_Φ для каждого $k \geq 0$ выберите некоторое еще неиспользованное и не запрещенное число $x(k)$ и ждите установления равенства $D|x(k) = \Phi^A|x(k)$, определите $\Gamma^A(k) = 0$ с $\gamma(k) = \varphi(k)$ и ждите, пока $k \searrow K$. Тогда положите $x(k)$ в D и дождитесь изменения $A|\varphi(k)$ для того, чтобы поправить $\Gamma^A(k) = 0$. Для удовлетворения требования \mathcal{N}_Ψ для каждого $k \geq 0$ ждите установления равенства $A|k = \Psi^D|k$ и заприте интервал $D|\psi(k)$ с соответствующим приоритетом. Так как A не вычислимо, рано или поздно это приведет к диагонализации левой части требования. Для совместного удовлетворения всех \mathcal{R} - и \mathcal{N} -требований проведите стандартное приоритетное рассуждение с конечными нарушениями.

1.9. а) Обобщите предыдущее упражнение, заменив $\mathbf{0}'$ на произвольное в. п. множество $B >_T A$.

б) Если в пункте а) множество B заменить на произвольное d-в. п. множество, то такое утверждение не имеет места (см. теорему 4.?? из §1 главы 4). Проанализируйте трудности, которые возникают в стратегии удовлетворения соответствующих требований при такой замене.

Комментарий. Теорема 57 содержится в работе Доуни и Стоба [1993]. Обобщая предложение 56 Ишмухаметов [1999] доказал, что существует такое d-в. п. множество D , что степень ассоциированного с D в. п. мно-

жества $A(D)$ является наименьшей среди всех степеней, расположенных ниже степени \mathbf{d} множества D , относительно которых \mathbf{d} вычислимо перечислима. Теорему 65 без условия $V' \equiv_T \emptyset'$ доказали Л.Хей и Р. Шор (см. Эпштейн, Хаас и Крамер [1981]).

§2. Свойства слабой плотности d -в. п. степеней.

В предыдущем параграфе мы видели, что d -в. п. степени наследуются вниз: под каждой собственной d -в. п. степенью есть невычислимая в. п. степень, под которой, в свою очередь располагается некоторая новая собственная d -в. п. степень и т. д. В теореме ... мы убедимся, что, тем не менее, упорядочение n -в. п. степеней при $n > 1$ неплотно, хотя, как мы докажем в этом параграфе, n -в. п. степени расположены плотно среди в. п. степеней. Другими словами, между любыми двумя в. п. степенями $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ можно построить собственную n -в. п. степень, для любого $n > 1$. Это свойство упорядочения n -в. п. степеней называется свойством их *слабой плотности*. Докажем сначала, что над каждой неполной в. п. степенью также можно построить собственную d -в. п. степень, хотя, как мы позднее увидим, не над каждой собственной d -в. п. степенью находится неполная в. п. степень.

Теорема 68 Пусть $V <_T \emptyset'$ - в. п. множество. Существует такое d -в. п. множество $D >_T V$, что $\forall x(W_x \not\equiv_T D)$.

Доказательство. Строим в. п. множества D_1 и D_2 , $D_1 \supseteq D_2$, тогда исключим d -в. п. множеством будет множество $V \oplus D$, где $D = D_1 - D_2$. С этой целью для всех $i \in \omega$ удовлетворяем требованиям

$$R_i : D \neq \Phi^W \vee W \neq \Psi^{V \oplus D}, \quad (1)$$

где $\{(W_i, \Phi_i, \Psi_i)\}_{i \in \omega}$, эффективная нумерация всех троек, состоящих из в. п. множества W и частично вычислимых функционалов Φ и Ψ . Стратегия удовлетворения конкретного требования R_i повторяет стратегию удовлетворения аналогичного требования из теоремы 61 с некоторыми

изменениями. Эти изменения вызваны тем, что теперь в оракуле правого дизъюнкта требования (1) присутствует множество V , которое неподвластно нашему контролю: $V \oplus D[\psi\varphi(x)]$ может измениться после наложения запрета на множество $D[\psi\varphi(x)]$ из-за изменения в этом интервале множества V , испортив всю последующую работу. Чтобы обойти эту трудность, эти изменения множества V используем для построения функционала Γ , который Т-сводит креативное множество K к множество V . Поэтому для удовлетворения требования R_i мы теперь используем не одну, а целую серию попыток, используя при каждой попытке нового свидетеля x_k .

При k -й попытке мы пытаемся удовлетворить требование \mathcal{R} с помощью свидетеля x_k так же, как это делалось при доказательстве теоремы 61, используя возможные изменения множества V после этапа (4) в интервале $[0, \dots, \psi\varphi(x_k)]$ для корректного определения значения функционала Γ^V в точке k . С этой целью мы следующим образом модифицируем соответствующую стратегию теоремы 61. На этапе 4 стратегии число x_k пока в V не перечисляем, а

- (3a) определяем аксиому $K(k) = \Gamma^V(k) = 0$ со значением use-функции $\gamma(x_k) = \psi\varphi(x_k)$, и
- (3b) ждем, пока либо k перечислится в K , либо изменится $V[\psi\varphi(x_k)]$.
- (3c) Если произойдет изменение $V[\psi\varphi(x_k)]$, то просто переопределяем аксиому с тем же значением, а если k перечислится в K , то
- (4) кладем x_k в D , и дальше как в теореме 61.

Теперь либо требование \mathcal{R} удовлетворится посредством свидетеля x_k , либо после этапа (4) произойдет изменение $V[\psi\varphi(x_k)]$, что позволит поправить аксиому $K(k) = \Gamma^V(k)$ с новым значением $\Gamma^V(k) = 1$. Так как по условию $K \not\leq_T V$, то одна из этих попыток должна увенчаться успехом.

Таким образом, стратегия удовлетворения требования R_i теперь проходит по ω -последовательности циклов $k = 0, 1, \dots$, и работа каждого цикла $k \geq \omega$ выглядит так:

- (1) Выбираем еще не использованного свидетеля x_k , и
- (2) ждем наступления такого шага s , на котором

$$D(x_k) = \Phi^W(x_k) \wedge W[\varphi(x_k)] = \Psi^{V \oplus D}[\varphi(x_k)[s]$$

- (3) Запрещаем интервал $D \lceil \psi\varphi(x_k)$ и определяем $K(k) = \Gamma_i^V(k)[s]$ с $\gamma_i(k) = \psi\varphi(x_k)$.
- (4) Открываем цикл $k + 1$ и ждем либо изменения $V \lceil \psi\varphi(x_k)$, либо перечисления k в K на некотором шаге $s' > s$.

Случай a) Произошло изменение $V \lceil \psi\varphi(x_k)$. В этом случае

- (5a) прекращаем работы во всех циклах $> k$, оставляем значение $\Gamma^V(k)$ неопределенным (это возможно из-за изменения $V \lceil \psi\varphi(x_k)$) и возвращаемся к выполнению этапа (2) стратегии.

Случай b) $V \lceil \psi\varphi(x_k)$ не изменилось, а k перечислился в K . В этом случае

- (5b) перечисляем x_k в D , приостанавливаем работу циклов $> k$ и
- (6b) ждем либо изменения $V \lceil \psi\varphi(x_k)$, либо наступления нового шага s'' , на котором

$$D(x_k) = \Phi^{W \lceil \varphi(x)}(x_k) \wedge W \lceil \varphi(x_k) = \Psi^{V \oplus D \lceil \psi\varphi(x_k)} \lceil \varphi(x_k)[s'']. \quad (2)$$

Случай b_1) Произошло изменение $V \lceil \psi\varphi(x_k)$. В этом случае

- (7b₁) поправляем значение $\Gamma^V(k)$ так, чтобы $\Gamma^V(k) = K(k)$, завершаем работу цикла k и возобновляем работу циклов $> k$.

Случай b_2) На некотором шаге s'' установилось соотношение (2). В этом случае

- (7b₂) удаляем x_k из D ,
- (8b₂) ждем изменения $V \lceil \psi\varphi(x_k)$ и
- (9b₂) возвращаемся к пункту (7b₁).

Возможные выходы стратегии:

A. Некоторый (наименьший) цикл k бесконечное число раз возвращается к пункту 2 стратегии. В этом случае требование удовлетворено из-за того, что по крайней мере один из функционалов Φ^W и $\Psi^{V \oplus D}$ в точке k не определен.

В. Некоторый цикл бесконечно ожидает в одном из пунктов (2) или (6b). В этом случае требование удовлетворено из-за выполнения одного из его дизъюнктоов.

С. Существует бесконечно много циклов, и каждый цикл либо бесконечно ожидает в пункте (4), либо завершает свой работу в п. (7b₁). Это означает, что мы построили всюду определенный функционал Γ , который по Тьюрингу сводит K к V . Этого не может быть по выбору множества V , поэтому этого выхода стратегии не существует. ■

Купер, Лемпи и Ватсон [1989] обобщили этот результат, заменив креативное множество K произвольным в. п. множеством $U >_T V$.

Теорема 69 Пусть $V <_T U$ - в. п. множество. Существует такое d -в. п. множество D , что $V <_T D <_T U$ и $\forall x(W_x \not\equiv_T D)$.

Доказательство. Для доказательства повторяем конструкцию предыдущей теоремы при $K = U$ с изменениями, связанными с необходимости обеспечить сводимость $D \leq_T U$. С этой целью используем метод разрешения. Нам нужно получить разрешение от U на этапах (5b) и (7b₂) конструкции (соответственно при перечислении x_k в D и при изъятии x_k из D). Так как на этапе (5b) число x_k перечисляется в D при условии, что на этом шаге число k перечисляется в U , то первое разрешение от U мы уже имеем. Для получения второго разрешения следующим образом используется условие $U \not\leq_T V$:

Стратегия удовлетворения требования R_i теперь происходит по $\omega \times \omega$ -последовательности циклов (j, k) , $j, k = 0, 1, \dots$. Для каждого $j \geq 0$, на ω -последовательности циклов $(j, 0), (j, 1), \dots$ пытаемся удовлетворить требованию \mathcal{R} с помощью свидетелей $x_{j,0}, x_{j,1}, \dots$ так же, как это делалось при доказательстве теоремы 68 со следующим изменением: на этапе (7b₂) число $x_{j,k}$ из множества D пока не изымаем, а создаем новую аксиому $U(j) = \Delta^V(j)$ со значением use-функции $\delta(j) = \psi\varphi(x_{k,j})[s'']$. Если в дальнейшем значение $U(j)$ не изменится, то эта аксиома остается корректной, в противном случае мы получаем разрешение от U и изымаем $x_{k,j}$ из D .

После такой модификации стратегии удовлетворения требования \mathcal{R} , оно может остаться не удовлетворенным только если для каждого $j \geq 0$, для каждого $x_{k,j}$, $k \geq 0$, после этапе (7b₂) конструкции

- либо $U(j)$ не меняется,

- либо $U(j)$ меняется, но после этого происходит изменение $V \models \psi\varphi(x_{k,j})$.

Но это означает, что функционал Δ^V всюду определен и корректно вычисляет значения $U(j)$ для каждого j , что противоречит условию теоремы.

Упражнения

2.1. Постройте такое d -в. п. множество D , что $D <_T K$, и если для некоторого в. п. множества W верно $D <_T W$, то $K \leq_T W$.

2.2. Обобщая упражнение 2.1 докажите, что для любого $n > 1$ существует такое n -в. п. множество $D <_T K$, что по Т-сводимости строго между D и K нет $(n - 1)$ -в. п. множеств, и что существует такое ω -в. п. множество $U <_T K$, что по Т-сводимости строго между U и K нет n -в. п. множеств ни для какого $n < \omega$.

2.3. Сочетая метод доказательства теоремы 69 с методом доказательства интерполяционной теоремы Сакса (см. Соар [упр. VIII.2.7]) докажите, что если V и U такие в. п. множества, что $V <_T U$, тогда существует d -в.п. множество D такое, что $V <_T D <_T U$, $\forall x(W_x \not\models_T D)$ и $D' \equiv_T V'$.

2.4. Пусть W - произвольное в. п. невычислилое множество. Докажите, что

- а) Существует такое в. п. подмножество A множества W , что Т-степень множества $W - A$ не содержит в. п. множества.
- б) Существуют такие в. п. подмножества A и B множества W , что Т-степени множеств $W - A$ и $W - B$ образуют минимальную пару степеней.

2.5. Пусть W - произвольное в. п. множество с бесконечным дополнением.

- а) Существует ли такое в. п. надмножество A множества W , что $A - W$ не Т-эквивалентно никакому в. п. множеству? Ясно, что если W вычислимо, то такого A не существует. Из теоремы Лахлана о гипергипериммунных множествах (см. упр. 1.1.8) следует, что если W гипергиперпросто, то снова такого A не может существовать. Верно ли, что если W невычислимо и негипергиперпросто, то такое в. п. множество A существует?

б) Существуют ли такие в. п. надмножества A и B множества W , что степени $A - W$ и $B - W$ не сравнимы? Ясно, что если W вычислимо, то такие множества A и B существуют.

2.6. Докажите, что для каждой в. п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ существует минимальная ω -в. п. степень $\mathbf{m} < \mathbf{a}$. *Указание.* Доказательство теоремы существования под каждой в. п. степенью $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ множества M минимальной степени (см., напр., Эпштейн [1975]) проводится методом разрешения, который, как легко проверить, позволяет построить множество M x -вычислимо перечислимым.

(Таким образом, для ω -в. п. множеств аналоги упражнений 1.1.9 и 1.1.11 не имеют места.)

Комментарии. Теорема 68 содержится в статьях Арсланова [1985, 1988]. Можно ли в теореме 69 степень множества D сделать в. п. относительно V ? Этот вопрос активно изучался. Позднее мы убедимся (см. теорему ...), что в общем случае этого нельзя добиться даже при $U = \emptyset'$. Можно ли это сделать при $V' \equiv_T U = \mathbf{0}'$ - открытый вопрос. Этот проблему мы обсудим в §....

§3. Структурные свойства d -в. п. степеней

В этом параграфе мы докажем теорему Арсланова [1985, 1988] о том, что для любого $n \geq 1$ и для каждой n -в. п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ существует такая d -в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{0}'$. Как показали Ейтс и, независимо, Купер, в полурешетке в. п. степеней такой результат не имеет места, поэтому отсюда следует, что элементарные теории \mathcal{R} и \mathcal{D}_n различны на \S_3^0 -уровне.

Исходные доказательства этой теоремы Ейтсом и Купером не опубликованы. Подробное доказательство более общего результата содержится в статье Миллера [1981]. Поэтому, для полноты картины, мы изложение начнем с ее доказательства.

Теорема 70 *Существует такое невычислимое в. п. множество A , что $A \oplus U <_T \emptyset'$ для каждого в. п. множества $U <_T \emptyset'$.*

Доказательство. Нам нужно построить невычислимое в. п. множество A так, чтобы для каждого в. п. множества $U <_T \emptyset'$ выполнялось соотношение $\emptyset' \not\leq_T A \oplus U$.

С этой целью искомое множество A , а также вспомогательное в. п. множество D строим, удовлетворяя требованиям:

$$\mathcal{Q}_e : A \neq \Phi_e$$

$$\mathcal{N}_e : K \oplus D = \Phi_e^{A, W_e} \Rightarrow \exists \Gamma_e (K = \Gamma_e^{W_e})$$

Ясно, что удовлетворение всем \mathcal{Q} -требованиям обеспечивает выполнение условия "множество A не вычислимо", \mathcal{N} -требования нацелены на выполнение всех остальных условий теоремы (легко проверить, что их удовлетворение обеспечивает и условие не Т-полноты множества A).

Стратегия удовлетворения требования \mathcal{Q}_e ::

- (1) Выбираем некоторого свидетеля $x_e \notin A$ и
- (2) ждем наступления такого шага, на котором $\Phi_e(x_e) \downarrow = 0$ (если такой шаг не наступит, то требование удовлетворено, так как $0 = A(x_e) \neq \Phi_e(x_e)$).
- (3) Перечисляем x_e в A .

Стратегия (обозначим ее через β) удовлетворения требования \mathcal{N}_e :

Стратегия нацелена на построение такого (частичного) функционала Γ_β , что если $K \oplus D = \Phi_e^{A, W_e}$, то $K = \Gamma_e^{W_e}$.

Следующим образом определяем функцию "длти соглашения":

$$l(\beta, s) = \max\{x : (\forall y < x)(K \oplus D(y)[s] = \Phi_e^{A, W_e}(y)[s])\},$$

$$m(\beta, s) = \max\{l(\beta, t) : t < s \text{ и } t \text{ является } \beta\text{-шагом}\}.$$

По определению шаг s является β -расширяющимся, если либо $s = 0$, либо s является β -шагом и $l(\beta, s) > m(\beta, s)$.

Значения Γ_β определяем только на β -расширяющихся шагах. Именно, если шаг s является β -расширяющимся и $\Gamma_\beta(x)[s] \uparrow$, где $2x < l(\beta, s)$, тогда определяем $\Gamma_\beta(x) = ()[s]$ со значением *use*-функции, большим, чем $\varphi(2x)[s]$. После шага s $\Gamma_\beta(x)$ может стать не определенным только, если в W_e перечисляются меньшие, чем $\varphi(2x)[s]$, числа. Если позднее число x перечислится в K , то нам необходимо иметь W_e -изменение ниже $\varphi(2x)[s]$, тогда мы сможем переопределить $\Gamma_\beta(x)$ равным $K(x)$.

Стратегия β имеет два выхода: бесконечный выход 0, который соответствует случаю, когда β строит всюду определенный функционал Γ_β , и конечный выход 1, он соответствует случаю, когда происходит диагонализация требования.

Единственный трудный случай при выполнении этих требований, это когда некоторая Q -стратегия α расположена под 0-выходом стратегии β некоторого N -требования: может случиться, что на некотором шаге s $\Gamma_\beta^{W_e}(x)[s] \downarrow$, а перечисляет некоторое число $n < \varphi(2x)[s]$ в A . Далее, может случиться, что между шагами s и следующим β -расширяющимся шагом s' число x перечислится в K , а W_e в интервале до $\gamma_\beta(x)[s]$ не изменится. Это может привести к тому, что после шага s' мы будем иметь $\Gamma_\beta^{W_e}(x)[s'] \downarrow = 0 \neq 1 = R(x)[s']$ и $\Gamma_\beta^{W_e}(x)[s']$ становится не корректным.

Для избежания этой трудности нам необходимо при перечислении числа $n < \varphi(2x)[s]$ в A добиться, чтобы $\Gamma_\beta^{W_e}(x)[s']$ стала неопределенной. С этой целью в стратегию удовлетворения требования β вносим следующее изменение. Как только возникает необходимость перечисления некоторого числа $n < \varphi(2x)[s]$ в A , мы сначала перечисляем в D некоторое число $< x$ с тем, чтобы вынудить измениться W_e в интервале до $\gamma_\beta(x)[s]$ (в противном случае $K \oplus D \neq \Phi_e^{A, W_e}$ и требование удовлетворено).

Таким образом, с такой задержкой определение значения $\Gamma_\beta^{W_e}$ выглядит так: при выборе числа n как нового свидетеля для некоторой Q -стратегии ξ , мы одновременно выбираем некоторое большее всех существующих запретов число $\alpha\beta$ и на шаге $\Gamma_\beta^{W_e}$ определяем только если $l(\beta, s)$ становится больше, чем $2\alpha\beta + 1$ (то есть $\Phi_e^{A, W_e}(2\alpha\beta + 1)[s] \downarrow$).

Теперь предположим, что ξ на некотором шаге $s' > s$ хочет положить число n в A . Тогда ξ сначала кладет $\alpha\beta$ в D (для того, чтобы вынудить $W_t \lceil \gamma_\beta(x)$ измениться и сделать $\Gamma_\beta^{W_e}(x) \uparrow$ для всех $x \geq \alpha\beta$), и ждет нового β -расширяющегося шага $s'' > s'$. Если такой шаг существует, то между шагами s' и s'' произошло изменение W_e , которое сделало $\Gamma_\beta^{W_e}(x)$ неопределенной. Теперь на шаге s'' β кладет n в A и в случае необходимости (в следующем β -расширяющемся шаге) поправляет значения $\Gamma_\beta^{W_e}$. ■

Теорема 71 Для любого в. п. множества $A >_T \emptyset$ существует такое d -в. п. множество $D <_T \emptyset'$, что $A \oplus D \equiv_T \emptyset'$.

Доказательство. Пусть в. п. множество $A >_T \emptyset$ дано. Искомое d -в. п. множество D строим, удовлетворяя требованиям:

$$\mathcal{S}: D \not\leq_T \emptyset', \text{ и}$$

$$\mathcal{R}: \text{Креативное множество } K \leq_T A \oplus D.$$

Как обычно, для удовлетворения требования \mathcal{S} строим вспомогательное не Т-сводящееся к D в. п. множество B , т. е. требование \mathcal{R} переписывается так:

$$\mathcal{S}: B \not\leq_T D.$$

С этой целью для каждого e удовлетворяем требованиям:

$$S_e : B \neq \Phi_e^D$$

с помощью обычной стратегии Фридберга-Мучника: берем некоторое еще не использованное число x_e и

1) ждем, пока на некотором шаге s не получим $\Phi_e^D(x_t)[s] \downarrow = 0$.

2) Перечисляем x_e в B и запрещаем $A \lceil \varphi_e(x_e)$ для стратегий с меньшими приоритетами.

Опишем стратегию удовлетворения глобального требования \mathcal{R} с учетом S -требований. Для простоты рассмотрим случай, когда требования \mathcal{R} взаимодействует с одним S требованием $B \neq \Phi^D$. Случай, когда под ним расположены несколько S -требований, разбирается аналогично, с необходимыми и понятными изменениями в стратегии.

Нам нужно построить Т-сводящий множество K к множеству $A \oplus D$ функционал Γ ($K = \Gamma^{A \oplus D}$). С этой целью последовательно для каждого n на некотором шаге s_n создаем аксиому $K(n) = \Gamma^{A \oplus D}(n)$ с достаточно большим (большим всех ранее упомянутых в процессе конструкции чисел) значением *use-функции* $\gamma(n)$, и ждем $n \searrow K$ на некотором шаге v . Тогда, чтобы поправить аксиому $K(n) = \Gamma^{A \oplus D}(n)$, перечисляем

$\gamma(n)$ в D . Если при этом окажется, что выполнение S -требования нарушено, т. е. оказалось, что $\gamma(n) < \varphi(x)$, то инициализируем выполнение S -требования, выбирая для его выполнение новое число $x_1 > x$ и начав выполнение S -требования сначала. Кроме того, все $\gamma(m) < \varphi(x)$, $m > n$, которые к этому шагу определены, переопределяем с сохранением порядка их расположения большими, чем $\varphi(x)$ (т. е. выводим их из зоны, могущей изменить значение $\Phi^D(x)[v]$). Если позднее обнаружится, что для некоторого n произошло $A|\gamma(n)$ -изменение, тогда все перечисленные в D числа $\gamma(m)$, $m \geq n$, удаляем из D , а те $\gamma(m)$, $m \geq n$, которые определены, но еще в D не положены, переопределяем большими, чем $\varphi(x)$.

Покажем, что эта стратегия рано или поздно позволит удовлетворить S -требование. Предположим, что функция Φ^D всюду определена (в противном случае требование удовлетворено). Согласно стратегии, для удовлетворения S -требования последовательно выбираются числа $x < x_1 < x_2 < \dots$. Достаточно доказать, что при некотором очередном выборе числа x_i после того, как на некотором шаге s_i значение $\Phi^D(x_i)$ определится равным 0 (если такого шага не существует, то требование S удовлетворено), мы получим $\Phi^D(x_i)[s_i] = \Phi^D(s_i)$. Действительно, если ни для какого x_i это равенство не выполнено, то это значит, что

- 1) в процессе конструкции выбираются бесконечная последовательность чисел $x < x_1 < x_2 < \dots$,
- 2) для каждого из них на шаге s_i имеет место равенство $\Phi_e^D(x_i) = B(x_i) = 0$, и
- 3) на некотором шаге $t_i > s_i$ некоторое число $\gamma(y) < \varphi(x_i)$ перечисляется в D и из него позднее не выбрасывается.

Отсюда, очевидно, следует, что множество $A|\gamma(y)$ после шага s_i не меняется, а это, учитывая 1), означает, что множество A вычислимо, что противоречит условию теоремы. ■

Следствие 72 Пусть $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ является n -в. п. степенью для некоторого $n \geq 1$. Существует такая d -в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{0}'$.

Доказательство. По предложению 58 существует в. п. степень $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. Теперь утверждение вытекает из теоремы 71 при $A \in \deg(\mathbf{b})$. ■

Следствие 73 Для каждого $n \geq 2$, \mathcal{D}_n и \mathcal{R} не элементарно эквивалентны на Σ_3 -уровне.

Доказательство. Обозначим через φ следующее предложение:

$$\exists \mathbf{x} (\mathbf{x} > \mathbf{0} \& \forall \mathbf{y} (\mathbf{y} < \mathbf{0}' \rightarrow \mathbf{x} \cup \mathbf{y} < \mathbf{0}')).$$

Из теорем 70 и 71 соответственно следует, что $R \models \varphi$ и $D_n \models \neg\varphi$. Согласно алгоритму Тарского-Куратовского,

$$\varphi \equiv \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\mathbf{x} > \mathbf{0} \& [\neg(\mathbf{y} < \mathbf{0}') \vee (\mathbf{z} < \mathbf{0}' \& \mathbf{x} < \mathbf{z} \& \mathbf{y} < \mathbf{z})]).$$

Так как и в R , и в D_n справедливы соотношения $\mathbf{x} = \mathbf{0} \leftrightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{x} \leq \mathbf{y})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{0}' \leftrightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{y} \leq \mathbf{x})$, то φ записывается в виде $\exists \forall \exists$ -формулы в сигнатуре $\{\leq\}$. ■

Упражнения

3.1. Докажите следующее обобщение теоремы 71: Для всех $n, m \geq 1$ и невычислимых n -в. п. степеней $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ существует такая д-в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$, что $\mathbf{a}_i \cup \mathbf{d} = \mathbf{0}', 1 \leq i \leq m$. *Указание.* В случае $n = 2$ (для $n > 2$ доказательство такое же) используйте стратегию доказательства теоремы 71: по данным в. п. множествам $A_1 >_T \emptyset, A_2 >_T \emptyset$ постройте д-в. п. множество D , удовлетворяя следующим требованиям:

- 1) $\emptyset' \not\leq_T D$,
- 2) $K \leq_T A_1 \oplus D$,
- 3) $K \leq_T A_2 \oplus D$,

Для удовлетворения 1) постройте вспомогательное множество $B \not\leq_T D$ с помощью стратегии Фрибберга-Мучника. Для удовлетворения 2) и 3) постройте функционалы Γ и Δ такими, чтобы $K = \Gamma^{A_1 \oplus D}$ и $K = \Delta^{A_2 \oplus D}$, как в доказательстве теоремы 4.1. Теперь трудность заключается в том, что нам нужно, чтобы A_1 - и A_2 -изменения происходили одновременно, чтобы мы могли удалить $\gamma(x)$ из D (чтобы поправить обе аксиомы $K = \Gamma^{A_1 \oplus D}$ и $K = \Delta^{A_2 \oplus D}$) для удовлетворения требования $S_e : B \neq \Phi_e^D$. Но, очевидно, мы можем предположить, что $A_1 \not\leq_T A_2$ и $A_2 \not\leq_T A_1$ (иначе это теорема 71). Теперь, если каждый раз A_2 -изменение на шаге s влечет $A_1 \lceil \gamma(x) = A_{1,s} \lceil \gamma(x)$, то это значит, что $A_1 \leq_T A_2$.

3.2. Сочетая стратегию выполнения требований из предыдущего упражнения с методом *high permitting* докажите следующее утверждение: пусть \mathbf{h} – высокая в. п. степень, $\mathbf{a} < \mathbf{h}$ и $\mathbf{b} < \mathbf{h}$ – произвольные невычислимые в. п. степени. Тогда существует такая d -в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{h}$, что $\mathbf{h} = \mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{b} \cup \mathbf{d}$. *Указание.* Описание метода *high permitting* см. в книге Соара [1987, глава XI, §2].

3.3. Выведите из теоремы 71, что для любого $n > 1$ и любой n -в. п. степени \mathbf{a} , $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, существует такая d -в. п. степень \mathbf{d} , что $\mathbf{a} \mid \mathbf{d}$.

3.4. Докажите, что элементарные теории \mathcal{D}_n и \mathcal{D}_m при $n \neq m$, $n, m \leq \omega$, совпадают на Σ_1 уровне. *Указание.* Докажите, что любое конечное частично-упорядоченное множество вложимо в \mathcal{D}_n , $n \geq 1$, с сохранением отношения \leq_T .

3.5. Докажите, что элементарные теории \mathcal{D}_n , $n \geq 1$, и \mathcal{D}_ω отличаются на Σ_2 уровне. *Указание.* См. упр. 2.5.

Комментарий. В доказательстве теоремы 70 использовано предложенное Г.Ву упрощение. Купер, Лемпп и Ватсон [1989] следующим образом усилили теорему 71: для произвольных в. п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ и высокой в. п. степени $\mathbf{h} > \mathbf{a}$ существует такая d -в. п. степень $\mathbf{b} < \mathbf{h}$, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \mathbf{h}$ (см. также упр. 3.2). Харрингтон (см. Миллер [1981]), в свою очередь, обобщил теорему Купера и Ейтса, заменив в ней $\mathbf{0}'$ произвольной высокой в. п. степенью. Таким образом, для каждого $n \geq 2$ и для произвольной высокой в. п. степени \mathbf{h} , $\mathcal{D}_n(\leq \mathbf{h})$ и $\mathcal{R}(\leq \mathbf{h})$ также не элементарно эквивалентны на Σ_3 -уровне.

§4. Теорема о вложении ромба

Как известно, ромб нельзя вложить в \mathcal{R} с сохранением наибольшего и наименьшего элементов (Лахлан [1966]). Однако это можно сделать, если заменить в. п. степени Δ_2^0 -степенями (см. Купер [1972] и Познер и Робинсон [1981]). Возникает естественный вопрос, при каких наименьших

$|a|_0$, $a \in O$, это можно сделать в \mathcal{D}_a ? Следующий результат Доунея [1989] устанавливает, что это можно сделать уже при $a = 2$. Отсюда также следует, что элементарные теории полурешеток \mathcal{R} и \mathcal{D}_n , $n > 1$, различаются уже на Σ_2^0 -уровне.

Теорема 74 *Существуют такие d-в. п. множества A и B , что $A|_T B$, $\emptyset' \leq_T A \oplus B$ и для любого d-в. п. множества W , если $W \leq_T A$ и $W \leq_T B$, то W вычислимо.*

Доказательство. Искомые d-в.п. множества A и B , $K \leq_T A \oplus B$, где K креативное множество, строим пошаговой конструкцией, удовлетворяя для всех $\in \omega$ требованиям:

$$P_{2e} : \bar{A} \neq W_e; \quad P_{2e+1} : \bar{B} \neq W_e.$$

N_e : $\Phi_e^A = \Phi_e^B =$ (всюду определенной функции f) $\rightarrow f$ вычислима.

Стратегии выполнения P -требований стандартные: например, для требования P_{2e} выбираем некоторое число $x \notin A$ в качестве свидетеля, ждем, пока x не перечислится в W_e , и тогда перечисляем x в A . Для удовлетворения N -требований пользуемся методом, который используется при построении минимальной пары в. п. степеней: для сохранения достигнутого к шагу s равенства $\Phi_e^A = \Phi_e^B$ при необходимости положить некоторое число в, например, A , перечисляем x в A , и удерживаем запрет на соответствующий интервал множества B , пока достигнутое к шагу s равенство $\Phi_e^A = \Phi_e^B$ не восстановится.

Конфликт между этой стратегией и стратегии Δ_2^0 -разрешения, используемой для удовлетворения требования $K \leq_T A \oplus B$, разрешается следующим образом:

С каждым числом x на шаге s связываем подвижной маркер $\gamma(s, x)$ так, чтобы существовал предел $\gamma(x) = \lim_s \gamma(s, x)$ и соблюдалось условие $x \in K \Leftrightarrow \gamma(x) \in A \oplus B$. Для этого, как обычно, при перечислении некоторого числа $y \leq x$ в A или в B , $\gamma(s+1, x)$ переопределяется так, чтобы $\gamma(s+1, x) > \gamma(s, x)$ и $\gamma(s+1, x) \notin A \oplus B$. (Кроме того, при $x < y$, $\gamma(s, x) < \gamma(s, y)$.)

Если на некотором шаге s некоторое число x перечислится в K , то перечисляем $\gamma(s, x)$ в оба множества A и B и ждем, пока не некотором шаге $s' > s$ не произойдет одно из следующих событий:

Случай 1) Некоторое число $y < \gamma(s, x)$ перечисляется в $A \cup B$.

Случай 2) На шаге s' восстановится достигнутое к шагу s равенство $\Phi_e^A = \Phi_e^B$.

В первом случае изымаем $\gamma(s, x)$ из обоих множеств A и B .

Во втором случае изымаем $\gamma(s, x)$ из одного из этих множеств. Это позволяет диагонализировать левую часть равенства $\Phi_e^A = \Phi_e^B$ против его правой части. Это же происходит, если ни один из этих двух случаев не имеет места).

Теперь доказательство теоремы проводится по той же схеме, по которой строятся в.п. множества, образующие минимальную пару степеней.

■

Следствие 75 Для каждого $n \geq 2$, \mathcal{D}_n и \mathcal{R} не элементарно эквивалентны на Σ_2 -уровне.

Доказательство. Предложение $\exists x \exists y (x \cap y = \mathbf{0} \& x \cup y = \mathbf{0}')$, которое легко записывается в виде $\exists \forall$ -формулы в сигнатуре $\{\leq\}$, истинно в \mathcal{D}_n для каждого $n > 1$ и ложно в \mathcal{R} . ■

Теорему 74 можно попробовать усилить в нескольких направлениях. Прежде всего возникает естественный вопрос о возможности в этой теореме степени $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ заменить произвольными в. п. степенями \mathbf{a} и \mathbf{b} , $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, соответственно. Далее, как следует из теоремы Лахлана о невложимости ромба в в. п. степени, в теореме 74 по крайней мере одна из степеней d-в. п. множеств A и B обязана быть собственной d-в. в. степенью. Но нельзя ли одно из этих множеств сделать вычислимым? Наконец, теорема 74 также означает, что существует по крайней мере одна нетривиальная d-в. п. степень \mathbf{d} , обладающая дополнением в полурешете \mathcal{D}_2 . (Дополнением степени \mathbf{d} называется такая степень \mathbf{c} , что $\mathbf{d} \cup \mathbf{c} = \mathbf{0}'$ и $\mathbf{d} \cap \mathbf{c} = \mathbf{0}$.) Возникает естественный вопрос о том, какие степени из \mathcal{D}_2 обладают дополнениями?

С первым из этих вопросов связан более общий вопрос о разложимости в. п. степени \mathbf{a} над данной в. п. степенью \mathbf{b} на две несравнимые d-в. п. степени, т. е. о существовании таких d-в. п. степеней \mathbf{c}_0 и \mathbf{c}_1 , что

$\mathbf{c}_0 > \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_1 > \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{c}_0 \cup \mathbf{c}_1$. (Как вытекает из теоремы Лахлана о неразложении, в \mathcal{R} такое утверждение не имеет места при $\mathbf{a} = \mathbf{0}'$ и некоторой в. п. степени $\mathbf{b} > \mathbf{0}$.)

Отрицательный ответ на первый вопрос получила Д. Каддах [1993], построив в \mathcal{D}_2 под каждой в. п. степенью $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ неветвящуюся¹⁾ в d-в. п. степенях в. п. степень $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$. Таким образом, существует, например, низкая в. п. степень $\mathbf{l} > \mathbf{0}$ такая, что между степенями $\mathbf{0}'$ и \mathbf{l} ромб нельзя вложить, сохранив \mathbf{l} как его наименьший элемент. Свойства разложимости d-в. п. степеней мы более подробно изучим в шестом параграфе. Ответ на второй вопрос оказался положительным. Это вытекает из следующей теоремы, принадлежащей Ли и Ий [1999].

Теорема 76 *Существуют неполные d-в. п. степени \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 такие, что для каждой n-в. п. степени $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, либо $\mathbf{a}_0 \cup \mathbf{x} = \mathbf{0}'$, либо $\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{x} = \mathbf{0}'$.*

Доказательство получим обобщая доказательство теоремы 74. Мы построим d-в. п. множество A и вычислимое перечислимое множество B , удовлетворяющие условиям теоремы. Таким образом, мы должны построить множества A и B , удовлетворяя следующим требованиям.

Следствие 77 *Существуют в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ и d-в. п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ такие, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \mathbf{0}'$ и $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 удовлетворяют теореме 76. Ясно, что $\mathbf{a}_0 \cap \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ – произвольная d-в. п. степень. Предположим для определенности, что $\mathbf{d} \cup \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}'$. Если $\mathbf{d} \cap \mathbf{a}_0 \neq \mathbf{0}$, то существует такая в. п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, что $\mathbf{b} \leq \mathbf{d}$ и $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}_0$. Так как $\mathbf{a}_0 \cap \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, то и $\mathbf{b} \cap \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{b} \cup \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0$, то по теореме ?? имеем $\mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}'$. Таким образом, искомыми являются либо степени \mathbf{d} и \mathbf{a}_0 , либо степени \mathbf{b} и \mathbf{a}_1 . ■

Обсуждение статуса остальных вопросов, поставленных перед формулировкой теоремы 76 мы отложим до главы 4.

Доказательство теоремы 76. Мы построим d-в. п. множество A и вычислимое перечислимое множество B , удовлетворяющие условиям теоремы

¹⁾Степень \mathbf{a} называется *ветвящейся*, если существуют такие степени $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} > \mathbf{a}$, что $\mathbf{b} \cap \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

74. Таким образом, мы должны построить множества A и B , удовлетворяя следующим требованиям.

\mathcal{G} : $K = \Gamma^{A \oplus B}$;
 (Это - глобальное требование, которое не участвует в приоритетном распределении требований. По нему мы строим вычислимый функционал Γ , который Т-сводит креативное множество K к $A \oplus B$.)

$$\mathcal{N}_{\Phi, \Psi} : \Phi^A = \Psi^B \text{ всюду определены} \rightarrow \Phi^A = \Delta;$$

$$\mathcal{P}_\Theta^0 : A \neq \Theta;$$

$$\mathcal{P}_\Theta^1 : B \neq \Theta;$$

Последние три требования (без учета глобального требования \mathcal{G}) удовлетворяются стратегией построения минимальной пары в. п. степеней, знакомство с которой предполагается (см., напр., Соар [1987, теорема IX.1.2], см. также п. 3.1 главы XIV книги Соара).

На шаге s стратегии удовлетворения этих трех требований возможными выходами являются:

- А. Шаг s является расширяющимся;
- Б. Запрещено множество B (в соответствующем интервале);
- С. Запрещено множество A .

Опишем стратегию удовлетворения требования \mathcal{G} с учетом стратегий удовлетворения остальных трех требований:

Для каждого $k \in \omega$, пока $k \notin K$, определяем аксиому $\Gamma^{A \oplus B} = 0$ с достаточно большим значением use-функции $\gamma(k)$, и ждем перечисления k в K . Как только на некотором шаге s число k перечисляется в K , перечисляем $\gamma(k)$ в A_{s+1} . Как мы уже видели, возможно одно из следующих трех случаев:

- А. Шаг s является расширяющимся шагом.
- Б. На шаге s запрещено множество B .
- С. На шаге s запрещено множество A .

Ясно, что только случай С требует внесения изменений в стратегию построения минимальной пары степеней. В этом случае поступаем следующим образом.

1. Ждем очередного расширяющего шага $s' > s$, в частности восстановления равенств на аргументах, на которых были определены Δ -аксиомы.
2. Такой шаг s' наступил. Возможны следующие два случая.

Случай a) На тех аргументах, на которых Δ -аксиомы были определены при $A(\gamma(x)) = 0$, значения Φ^A не изменились.

Этот случай благоприятный и мы никаких дополнительных действий не совершим.

Случай b) Существует y такой, что $\Delta(y) \downarrow [s']$ и $\Phi^A(y)[s'] \neq \Delta(y)$. Это значит, что $\Phi^A(y) \neq \Phi^{A-U}(y)[s']$, где $U = \{\gamma(k') \mid \gamma(k') \in A_{s'} - S_s\}$.

В этом случае,

3. Ожидаем очередного расширяющего шага s'' .
4. Перечисляем в B все числа из U и
4. ждем нового расширяющего шага.
5. Выбрасываем из A все числа из U и диагонализируем Φ^A против Ψ^B .

Упражнения

4.1. (Доуни) Докажите, что для любого $n > 1$, $(1 - n - 1)$ -решетка вложима в \mathcal{D}_2 с сохранением наименьшего и наибольшего элементов.

4.2. Теорема 74 о вложении ромба означает, что элементарные теории \mathcal{R} и $\mathcal{D}_n, n > 1$, на языке $\mathcal{L} = \{\cup, \cap, 0, 1\}$ различаются на §1-уровне. Докажите, что §1-теории \mathcal{R} и $\mathcal{D}_n, n > 1$, совпадают на языках $\mathcal{L}_1 = \{\cup, 0, 1\}$ и $\mathcal{L}_2 = \{\leq, \cap, 0, 1\}$.

4.3. Докажите, что в \mathcal{D}_2 утверждение, *дуальное* к теореме ??, не имеет места, т. е. таких не вычислимых d -в. п. степеней \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 , что для каждой d -в. п. степени $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$, либо $\mathbf{a}_0 \cap \mathbf{x} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{x} = \mathbf{0}$, не существует.

4.4. Докажите, что произвольная высокая в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ является вершиной ромба, основанием которого является $\mathbf{0}$. *Указание.* Используйте конструкцию Купера [] построения под каждой высокой в. п. степени \mathbf{h} минимальной пары в. п. степеней.

Комментарий. В работе Джиянга [1993] содержится утверждение, что в теореме 74 множество \emptyset' можно заменить произвольным в. п. множеством высокой степени. Как показано в упр. 4.4, этот результат может быть также получен с помощью конструкции, предложенной Купером [] для построения под каждой высокой в. п. степени минимальной пары в. п. степеней. С другой стороны, из теоремы 60 следует, что не каждая в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ является в \mathcal{D}_2 вершиной ромба.

§5. Неплотность упорядочения n -в. п. степеней

Вопрос о плотности упорядочения n -в. п. степеней при $n > 1$, в частности, d -в. п. степеней, долго оставался открытым, пока Купер, Харрингтон, Лахлан, Лемпп и Соар [1991] не установили существование d -в. п. степени $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$, максимальной не только среди всех d -в. п. степеней, но и для совокупности всех ω -в. п. степеней. Таким образом упорядочения всех n -в. п. степеней для каждого $n > 1$, а также всех ω -в. п. степеней, неплотны.

Теорема 78 *Существует такая d -в. п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$, что ни для какой ω -в. п. степени \mathbf{b} не выполняется соотношение $\mathbf{d} < \mathbf{b} < \mathbf{0}'$.*

Доказательство.

Из следующей теоремы Купера [1991] вытекает, что в случае 2-низких n -в. п. степеней при $n > 1$ мы имеем другую картину.

Теорема 79 Для любого $n > 1$ упорядочение 2-низких n -в. п. степеней плотно. Более того, если $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ – 2-низкие n -в. п. степени, то существуют такие n -в. п. степени \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 , что $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \cup \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b} < \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$.

Доказательство.

Как видно из теоремы 78, существует d-в. в. степень $< \mathbf{0}'$, максимальная среди всех ω -в. п. степеней. Джиянг [1993] усилил этот результат, установив существование максимальной d-в. п. степени над каждой низкой n -в. п. степени, для любого $n \geq 1$. С другой стороны, существует такая высокая в. п. степень $\mathbf{h} < \mathbf{0}'$, под которой нет максимальной d-в. п. степени (Ий [ta]). Отсюда следует, что полурешетки \mathcal{D}_2 и $\mathcal{D}_2(\leq \mathbf{h})$ не элементарно эквивалентны.

Упражнения

5.1. Частично упорядоченное множество \mathcal{M} плотно, если для любых его элементов $a < b$ найдется такой элемент c , что $a < c$ и $c < b$. Заменим это определение плотности следующей её *слабой версией*: если $a < b$ и a не является наименьшим, b – наибольшим элементами M , тогда найдутся такие два элемента c_0 и c_1 , что $a < c_0$, но $b \not\leq c_0$, и $c_1 < b$, но $c_1 \not\leq a$. Докажите, что упорядочение d-в. п. степеней плотно относительно этой слабой версии плотности.

5.2. Пусть $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$ – d-в. п. степень, построенная в теореме 78, $D \in \mathbf{d}$ – d-в. п. множество, а $A(D)$ – ассоциированное с D в. п. множество. Мы видели, что $A(D) <_T D$ и D в. п. относительно $A(D)$. Отсюда по теореме Сакса о плотности в. п. степеней, релятивизированной относительно множества D , следует существование такого в. п. относительно $A(D)$ множества B , что $D <_T B <_T \emptyset'$. Определите (по возможности наименьший) уровень множества B в иерархии Ершова. Из теоремы 78 следует, что он должен быть выше ω .

5.3. Из теоремы 79 Купера следует, что упорядочение *низких* d-в. п. степеней также плотно. Приведите не зависящее от теоремы 79 доказательство плотности низких d-в. п. степеней.

5.4. Докажите, что если d -в. п. степени \mathbf{a}, \mathbf{b} таковы, что $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ и $\mathbf{a}' = \mathbf{0}', \mathbf{b}' = \mathbf{0}''$, то существует такая d -в. п. степень \mathbf{c} , что $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$.

Комментарий. Теорема 79 оставляет открытым вопрос об элементарной эквивалентности полурешеток 2-низких в. п. степеней и 2-низких d -в. п. степеней. На сегодняшний день примеров, которые бы отличали эти две полурешетки, не известно.

§6. Свойства разложимости n -в. п. степеней

Пара степеней \mathbf{b} и \mathbf{c} называется разложением степени \mathbf{a} , если $\mathbf{b} | \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} \cup \mathbf{c} = \mathbf{a}$. Если при этом \mathbf{b} и \mathbf{c} принадлежат \mathcal{D}_n для некоторого $n \geq 1$, то пара \mathbf{b} и \mathbf{c} называется разложением \mathbf{c} в n -в. п. степенях. Если обе степени \mathbf{b} и \mathbf{c} расположены над некоторой степенью \mathbf{d} , то это - разложение \mathbf{c} над \mathbf{d} . Наконец, разложение \mathbf{a} на \mathbf{b} и \mathbf{c} является разложением, которое минует верхний конус степеней \mathbf{d} , если $\mathbf{d} \not\leq \mathbf{b}, \mathbf{d} \not\leq \mathbf{c}$.

Как известно (Лахлан [1975]), существуют такие в. п. степени $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, что \mathbf{b} неразложима в в. п. степенях над \mathbf{a} , более того, здесь за степень \mathbf{b} можно принять степень $\mathbf{0}'$ (Харрингтон []). Покажем сначала, что такое разложение в. п. степени \mathbf{b} в n -в.п. степенях возможно при любом $n > 1$ над произвольной в. п. степени $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

Теорема 80 Пусть $n > 1$. Произвольная в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ может быть разложена в \mathcal{D}_n над любой в. п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Теперь пусть $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ – произвольная собственная n -в. п. степень, для некоторого $n > 1$, а \mathbf{b} – такая в. п. степень, что $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. Так как \mathbf{a} в. п. относительно некоторой $(n-1)$ -в. п. степени $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}$ (упр. 1.1.11), то, согласно теореме Сакса о разложении, релятивизированной относительно $\mathbf{a}_0 \cup \mathbf{b} < \mathbf{a}$, \mathbf{a} разложима на две Δ_2^0 -степени, расположенные над \mathbf{b} . Оказывается, такое разложение возможно и в d -в. п. степенях.

Теорема 81 Купер и Ли [2001]) Каждая d -в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ может быть нетривиально разложена в \mathcal{D}_2 над любой в. п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Доказательство.

Так как упорядочение d -в. п. степеней неплотно, то в теореме 86 в. п. степень \mathbf{b} нельзя также заменить на d -в. п. степень. Более того, как следует из теоремы 78, этого в общем случае нельзя сделать даже если \mathbf{a} вычислимо перечислена. Однако, любая в. п. степень разложима в d -в. п. степенях над любой *низкой* d -в. п. степенью:

Теорема 82 (Арсланов, Купер и Ли [2000, 2004]) Пусть \mathbf{a} – произвольная в. п. степень, \mathbf{l} – низкая d -в. п. степень, и $\mathbf{l} < \mathbf{a}$. Существуют такие d -в. п. степени $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$, что $\mathbf{l} < \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 < \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_0 \cup \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}$.

Доказательство.

Из теоремы 79 следует, что свойства плотности и разложения могут быть соединены в полурешетке 2-низких n -в. п. степеней. Известно (Шор и Сламан [1990]), что 2-низкие в. п. степени также разложимы в \mathcal{R} над любой в. п. степенью, расположенной ниже заданной. Эта и некоторые другие структурные свойства, общие для полурешеток 2-низких в. п. и 2-низких n -в. п. степеней при $n > 1$, позволили Доунею и Стобу [] высказать следующее предположение:

Гипотеза 83 Упорядочение 2-низких d -в. п. степеней должно быть элементарно эквивалентно упорядочению 2-низких в. п. степеней.

.....

Для 3-низких n -в. п. степеней Купер и Ли [] установили следующее:

Теорема 84 Для любого $n > 1$, существует 3-низкая n -в. п. степень \mathbf{a} и в. п. степень \mathbf{b} , $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$, такие, что при любом разложении \mathbf{a} на n -в. п. степени \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 , хотя бы одна из степеней \mathbf{a}_0 или \mathbf{a}_1 будет располагаться над \mathbf{b} . (В этом случае говорят, что \mathbf{a} нельзя разложить, минуя верхний конус степеней над \mathbf{b}).

Так как в \mathcal{R} такое разложение 3-низких в. п. степеней возможно (кто?), то отсюда следует, что эти две полурешетки также не элементарно эквивалентны.

Теорема 85 (Сакс [31]) *Каждая в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ разложима на две в. п. степени, минуя верхний конус степеней \mathbf{b} , для любой Δ_2^0 -степени $\mathbf{b} > \mathbf{0}$.*

Теорема (Робинсон [33]). *Каждая в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ разложима на две низкие в. п. степени над любой низкой в. п. степенью.*

Теорема (Купер [34] для случая $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, Купер и Ли [35] для общего случая). *Каждая d -в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ разложима в d -в. п. степенях над произвольной в. п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.*

Теорема (Купер, Лахлан, Лемпи, Соар и Харрингтон [15]). *Не каждая n -в. п. степень (даже в. п. степень) \mathbf{d} разложима (даже в ω -в. п. степенях) над произвольной d -в. п. степенью $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, для любого $n > 1$.*

Теорема (Арсланов, Купер и Ли [35, 36]). *Любая в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ разложима в d -в. п. степенях над произвольной низкой d -в. п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.*

Теорема (Ли [37]). *Каждая d -в. п. степень $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ разложима в d -в. п. степенях над каждой низкой d -в. п. степенью $\mathbf{x} < \mathbf{d}$.*

Теорема (Шор и Сламан [38]). *Пусть степени \mathbf{d} , \mathbf{a} и \mathbf{b} такие, что \mathbf{d} является n -в. п. для некоторого $n \geq 1$, а \mathbf{a} и \mathbf{b} такие Δ_2^0 -степени, что $\mathbf{a} \not\geq \mathbf{b}$. Тогда \mathbf{d} можно разложить над \mathbf{a} в Δ_2^0 -степенях, минуя верхний конус степеней \mathbf{b} .*

Ясно, что последний результат нельзя усилить, рассматривая разложения на d -в. п. степени (в [15] доказано, что этого нельзя сделать даже при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$). Ямалеев [20] доказал, что такое разложение возможно при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, если \mathbf{d} является собственно d -в. п. степенью, а \mathbf{b} такая невычислимая Δ_2^0 -степень, что между \mathbf{d} и \mathbf{b} нет в. п. степеней.

Пусть $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ – произвольная собственная n -в. п. степень, для некоторого $n > 1$, а \mathbf{b} – такая в. п. степень, что $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. Так как \mathbf{a} в. п. относительно некоторой $(n - 1)$ -в. п. степени $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}$ (упр. 1.1.11), то, согласно теореме Сакса о разложении, релятивизированной относительно $\mathbf{a}_0 \cup \mathbf{b} < \mathbf{a}$, \mathbf{a} разложима на две Δ_2^0 -степени, расположенные над \mathbf{b} , т. е. существуют

такие Δ_2^9 -в. п. степени \mathbf{c}_0 и \mathbf{c}_1 , что $\mathbf{c}_0 \cup \mathbf{c}_1 = \mathbf{a}$, и $\mathbf{b} < \mathbf{c}_0 < \mathbf{a}, \mathbf{b} < \mathbf{c}_1 < \mathbf{a}$. Оказывается, такое разложение возможно и в d -в. п. степенях.

Теорема 86 (*Купер и Ли [2001]*) *Каждая d -в. п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ может быть нетривиально разложена в \mathcal{D}_2 над любой в. п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.*

Доказательство.

Как следует из "монстра-теоремы" Лахлана [1975], в в. п. степенях такое разложение невозможно. Так как упорядочение d -в. п. степеней неплотно, то в теореме 86 в. п. степень \mathbf{b} нельзя также заменить на d -в. п. степень. Более того, как следует из теоремы 78, этого в общем случае нельзя сделать даже если \mathbf{a} вычислимо перечислима. Однако, любая в. п. степень разложима в d -в. п. степенях над любой *низкой* d -в. п. степенью (Арсланов Купер и Ли [2000]).

Упражнения

6.1.

6.2.

6.3.

Комментарии.

§7. Изолированные d -в. п. степени

Купер и Ий [] определили изолированные d -в. п. и изолирующие в. п. множества. Говорят, что в. п. множество A изолирует d -в. п. множество D , если $A <_T D$ и для любого в. п. множества W ,

$$W \leq_T D \rightarrow W \leq_T A.$$

В этом случае также говорят, что d -в. п. множество D изолировано в. п. множеством A . Тьюринговая степень называется изолированной d -в. п.

(изолирующей в. п.) степенью, если она содержит изолированное d -в. п. (соответственно, изолирующее в. п.) множество.

Позднее выяснилось, что эти определение являются весьма удачным инструментом для исследования расположения d -в. п. множеств среди вычислимые перечислимых. В частности установлено, что как изолированные, так и неизолированные d -в. п. степени расположены плотно в упорядочении в. п. степеней (ЛаФорт [1995, 1996] и Арсланов, Лемпп и Шор [1996], соответственно), а также что существует такая невычислимая в. п. степень \mathbf{a} , которая не изолирует никакую степень $\mathbf{b} > \mathbf{a}$, вычислимую перечислимую относительно \mathbf{a} (Арсланов, Лемпп, Шор [1996]).

Теорема 87 *Существует изолированная d -в. п. степень.*

Доказательство. Построим в. п. множество $A_1, A_2 \leq_T U$ так, чтобы множество $A = A_1 - A_2$ было искомым множеством. Для выполнения условия "степень A не является вычислимо перечислимой", мы для каждого e удовлетворяем требованиям

$$R_e : A \neq \Theta_e^{W_e} \vee W_e \neq \Phi_e^A.$$

Для выполнения условия "степень A не является изолированной" для каждого e удовлетворяем требованиям

$$S_e : W_e = \Psi_e^A \Rightarrow (\exists \text{ в. п. } U_e \leq_T A)(\forall i)(U_e \neq \Omega_i^{W_e}).$$

Здесь $\{(W_e, \Theta_e, \Phi_e, \Psi_e, \Omega_e)\}_{e \in \omega}$ является некоторой нумерацией всех возможных пятерок, состоящих из в. п. множества W и частично вычислимых функционалов Θ, Φ, Ψ и Ω .

Требования $\{R_e\}_{e \in \omega}$ удовлетворяются также, как в теореме 68. Поэтому рассмотрим только стратегию удовлетворения требований $\{S_e\}_{e \in \omega}$. С этой целью мы построим в. п. множество U_e так, что если $W_e = \Psi_e^A$, то $U_e \neq \Omega_i^{W_e}$ для всех i и $U_e \leq_T A$.

Сначала следующим образом разобьем требование S_e на подтребования $S_{e,i}$:

$$S_{e,i} : W_e = \Psi_e^A \Rightarrow U_e \neq \Omega_i^{W_e}.$$

Основной модуль.

- (1) Выбираем для требования $S_{e,i}$ такое число x , что оно больше всех ранее упомянутых в процессе конструкции чисел.
- (2) Ждем наступления такого шага s , что

$$\Omega_{i,s}^{W_{e,s}}(x) \downarrow = 0,$$

и такого (наименьшего) числа u , что

$$W_{e,s}[\omega_{i,s}(x)] = \Psi_{e,s}^{A_s \upharpoonright u}[\omega_{i,s}(x)].$$

(Если это никогда не произойдет, тогда требование $S_{e,i}$ удовлетворено через x .)

- (3) Запрещаем интервал $A \upharpoonright u$ от воздействия других стратегий.
- (4) Перечисляем x в U_e и A .
- (5) Ждем наступления такого шага s' , на котором

$$\Omega_{i,s'}^{W_{e,s'}}(x) \downarrow = 1,$$

и появления такого (наименьшего) числа u' , что

$$W_{e,s'}[\omega_{i,s'}(x)] = \Psi_{e,s'}^{A_{s'} \upharpoonright u'}[\omega_{i,s'}(x)].$$

(Снова, если это никогда не случится, тогда требование $S_{e,i}$ удовлетворено посредством x . Если же мы дождемся такого шага, тогда изменение в $\Omega_i^{W_e}(x)$ между шагами s и s' могло произойти только из-за изменения в $W_e[\omega_{i,s}(x)]$. Так как W_e является в. п. множеством, то это изменение является необратимым.)

- (6) Удаляем x из A и запрещаем интервал $A \upharpoonright u'$ от воздействия других стратегий. Теперь требование $S_{e,i}$ удовлетворено посредством x , так как

$$\Psi_e^A[\omega_{i,s}(x)] = \Psi_{e,s}^{A_s}[\omega_{i,s}(x)] = W_{e,s}[\omega_{i,s}(x)] \neq W_e[\omega_{i,s}(x)].$$

Мы видим, что $S_{e,i}$ -стратегия в основном выполняется так же, как R_e -стратегия, при естественных изменениях. Это позволяет удовлетворить требования $\{S_{e,i}\}_{e,i \in \omega}$ и $\{R_e\}_{e \in \omega}$ совместно с помощью естественного приоритетного упорядочения требований. ■

Теорема 88 *Существует не изолированная собственная d -в. п. степень.*

Из теоремы 89 следует, что определение изолированной d -в. п. степени нельзя усилить, потребовав, чтобы строго между изолированной d -в. п. степени \mathbf{d} и ее изолирующей в. п. степени $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ не находились d -в. п. степени.

Теорема 89 *Пусть \mathbf{a} в. п. и $\mathbf{d} > \mathbf{a}$ d -в. п. степени. Тогда существует такая d -в. п. степень \mathbf{c} , что $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{d}$.*

Пусть в. п. степень \mathbf{a} изолирует d -в. п. степень $\mathbf{d} > \mathbf{a}$. Так как между степенями \mathbf{a} и \mathbf{d} нет в. п. степеней, отличных от \mathbf{a} , то можно подумать, что степени \mathbf{a} и \mathbf{d} расположены "достаточно близко". Из следующей теоремы Ишмухаметова и Ву [1] следует, что это не так (если согласиться, что высокие степени расположены "близко" к $0'$, а низкие - "близко" к 0).

Теорема 90 *Существуют высокая d -в. п. степень \mathbf{d} и ее изолирующая низкая в. п. степень $\mathbf{a} < \mathbf{d}$.*

Возникает вопрос о плотности расположения изолированных и не изолированных d -в. п. степеней среди в. п. степеней (т. е. верно ли, что такие степени существуют между любыми двумя сравнимыми в. п. степенями). Кроме того, естественно спросить, верно ли, что каждая в. п. степень изолирует некоторую d -в. п. степень. На первый из этих вопросов положительный ответ получил ЛаФорт [1995]:

Теорема 91 *Пусть $\mathbf{v} < \mathbf{u}$ в. п. степени. Существует изолированная d -в. п. степень \mathbf{d} такая, что $\mathbf{v} < \mathbf{d} < \mathbf{u}$.*

Плотность расположения не изолированных d -в. п. степеней среди в. п. степеней установили Арсланов, Лемпп и Шор [1996]. Доказательство этой теоремы проводится методом приоритета с бесконечными нарушениями примерно по той же схеме, по которой в работе Купера, Лемппа и Ватсона [1989] (см. теорему 69) между любыми двумя сравнимыми в. п. степенями строится собственная d -в. п. степень.

Теорема 92 *Пусть $U >_T V$ в. п. множества. Существует такое d -в. п. множество C собственной d -в. п. степени, что $V <_T C <_T U$, и для любого в. п. множества B , если $B <_T C$, тогда $B <_T W <_T C$ для некоторого в. п. множества W .*

Доказательство. Построим в. п. множество $A_1, A_2 \leq_T U$. Пусть $A = A_1 - A_2$. Тогда $C = V \oplus A$ будет искомым множеством. Для выполнения условия "степень $V \oplus A$ не является вычислимой перечислимой", мы для каждого e удовлетворяем требованиям

$$R_e : A \neq \Theta_e^{W_e} \vee W_e \neq \Phi_e^{V \oplus A}.$$

Для выполнения условия "степень множества $V \oplus A$ не является изолированной" для каждого e удовлетворяем требованиям

$$S_e : W_e = \Psi_e^{V \oplus A} \Rightarrow (\exists \text{ в. п. } U_e \leq_T V \oplus A)(\forall i)(U_e \neq \Omega_i^{W_e}).$$

Здесь $\{(W_e, \Theta_e, \Phi_e, \Psi_e, \Omega_e)\}_{e \in \omega}$ является некоторой нумерацией всех возможных пятерок, состоящих из в. п. множества W и частично вычислимых функционалов Θ, Φ, Ψ и Ω .

Требования $\{R_e\}_{e \in \omega}$ удовлетворяются также, как в теореме 68. Поэтому рассмотрим только стратегию удовлетворения требований $\{S_e\}_{e \in \omega}$. С этой целью используя несколько модифицированный метод разрешения мы построим в. п. множество U_e так, что если $W_e = \Psi_e^{V \oplus A}$, то $U_e \neq \Omega_i^{W_e}$ для всех i , и $U_e \leq_T V \oplus A$.

Разобьем сначала требование S_e на подтребования $S_{e,i}$:

$$S_{e,i} : W_e = \Psi_e^{V \oplus A} \Rightarrow U_e \neq \Omega_i^{W_e}.$$

Основной модуль. Сначала опишем стратегию удовлетворения требования $S_{e,i}$ без условия $A \leq_T U$ и при отсутствии V -изменений. (Ясно, что при этих ограничениях мы имеем дело с доказательством существования изолированной d -в. п. степени.)

- (1) Выбираем еще не использованного кандидата x для $S_{e,i}$, большего всех до сих пор упомянутых чисел.
- (2) Ждем наступления такого шага s , что

$$\Omega_{i,s}^{W_{e,s}}(x) \downarrow = 0,$$

и наименьшего u такого, что

$$W_{e,s} \lceil \omega_{i,s}(x) = \Psi_{e,s}^{(V \oplus A)_s \lceil u} \lceil \omega_{i,s}(x).$$

(Если это никогда не произойдет, тогда требование $S_{e,i}$ удовлетворено посредством x).

- (3) Защищаем $A \upharpoonright u$ от воздействия других стратегий .
- (4) Кладем x в U_e и A .
- (5) Ждем такого шага s' , что

$$\Omega_{i,s'}^{W_{e,s'}}(x) \downarrow = 1,$$

и такого (наименьшего) u' , что

$$W_{e,s'} \upharpoonright \omega_{i,s'}(x) = \Psi_{e,s'}^{(V \oplus A)_{s'} \upharpoonright u'} \upharpoonright \omega_{i,s'}(x).$$

(Снова, если это никогда не произойдет, то требование $S_{e,i}$ удовлетворено посредством x . Если же такие s' и u' найдутся, то изменение в $\Omega_i^{W_e}(x)$ между шагами s и s' могло произойти только из-за изменения в $W_e \upharpoonright \omega_{i,s}(x)$. Так как W_e в. п. множество, то это изменение необратимо.)

- (6) Удаляем x из A и защищаем интервал $A \upharpoonright u'$ от воздействия других стратегий.

(Теперь требование $S_{e,i}$ окончательно удовлетворено посредством x , так как

$$\Psi_e^{V \oplus A} \upharpoonright \omega_{i,s}(x) = \Psi_{e,s}^{(V \oplus A)_s} \upharpoonright \omega_{i,s}(x) = W_{e,s} \upharpoonright \omega_{i,s}(x) \neq W_e \upharpoonright \omega_{i,s}(x).$$

Как видим, $S_{e,i}$ -стратегия в отдельности и без условий $A \leq_T U$ и $V \leq_T A$ существенно повторяет R_e -стратегию под аналогичными условиями. Это позволяет совместно удовлетворить все требования $\{S_{e,i}\}_{e,i \in \omega}$ и $\{R_e\}_{e \in \omega}$ примерно по той же схеме, по которой были удовлетворены требования из теоремы 69.

Так же, как и в этой теореме, мы добиваемся выполнения условия $V \leq_T A$ с помощью вспомогательного функционала Γ , который будет использовать трудности, мешающие выполнению условия $V \leq_T A$, для сведения $U \leq_T V$.

Для этого мы делаем бесконечно много попыток удовлетворения $S_{e,i}$, как было описано выше, через ω -последовательность “циклов”, каждый цикл k действует как выше со своим собственным кандидатом и со следующим дополнительным шагом, вложенным после шага 3:

- (3 $\frac{1}{2}$) Определяем $\Gamma_e^V(k) = U_s(k)$ со значением *use*-функции $\gamma(k) = u$, одновременно открываем цикл $k+1$ и ждем изменения $U(k)$, тогда останавливаем все циклы $k' > k$ и действуем дальше.

Наконец, для выполнения условия $A \leq_T U$ используем метод разрешения. Число x должно получить разрешение от U при перечислении в A на этапе (4) и при удалении из A на этапе (6). Первое разрешение уже имеется из-за того, что на этапе (4) произошло $U(k)$ -изменение, а для получения последнего разрешение мы несколько изменим стратегию.

Основной модуль $S_{e,i}$ -стратегии при этих изменениях состоит из $(\omega \times \omega)$ -последовательности циклов $(j, k), j, k \in \omega$. Первым открывается цикл $(0, 0)$, каждый цикл (j, k) в процессе работы может открыть циклы $(j, k+1)$ или $(j+1, 0)$ и прекратить работу, либо может закрыть все циклы $(j', k') > (j, k)$ (при лексикографическом упорядочении циклов). Кроме того, каждый цикл (j, k) может определить $\Gamma_j^V(k)$ и $\Delta^V(j)$.

Описание цикла (j, k) :

- (1) Выбираем пока еще не использованного кандидата x такого, что $x - 1$ больше всех ранее упомянутых в процессе конструкции чисел.
- (2) Ждем наступления такого шага s_1 , что

$$\Omega_{i,s_1}^{W_{e,s_1}}(x) \downarrow = 0,$$

и такого (наименьшего) числа u , что

$$W_{e,s_1}[\omega_{i,s_1}(x) = \Psi_{e,s_1}^{(V \oplus A)s_1}[u]\omega_{i,s_1}(x)].$$

- (3) Защищаем интервал $A[u$ от воздействия остальных стратегий.
- (4) Определяем $\Gamma_j^V(k) = U_{s_1}(k)$ со значением *use*-функции $\gamma_j(k) = u$, и открываем цикл $(j, k+1)$ для одновременной работы.
- (5) Ждем изменения либо $V[u$, либо $U(k)$.

Если сначала произойдет $V[u$ -изменение, то закрываем все циклы $(j', k') > (j, k)$, ликвидируем A -запрет цикла (j, k) , и возвращаемся к этапу (2).

Если сначала произойдет $U(k)$ -изменение, тогда приостанавливаем циклы $(j', k') > (j, k)$ и переходим к выполнению этапа (6).

- (6) Перечисляем x в A и U_e .
- (7) Ждем наступления такого шага s_2 , что

$$\Omega_{i,s_2}^{W_{e,s_2}}(x) \downarrow = 1,$$

и такого (наименьшего) числа u' , что

$$W_{e,s_2} \lceil \omega_{i,s_2}(x) = \Psi_{e,s_2}^{(V \oplus A)_{s_2} \lceil u'} \lceil \omega_{i,s_2}(x).$$

- (8) Защищаем $A \lceil u'$ от воздействия других стратегий.
- (9) Определяем $\Delta^V(j) = U_{s_2}(j)$ со значением *use*-функции $\delta(j) = u'$ и открываем цикл $(j+1, 0)$ для одновременной работы.
- (10) Ждем изменения в $V \lceil u'$ или $U(j)$.

Если первым изменится $V \lceil u'$, то закрываем циклы $(j', k') \geq (j+1, 0)$, ликвидируем A -запрет цикла (j, k) и возвращаемся к этапу (7).

Если первым изменится $U(j)$, то приостанавливаем циклы $(j', k') \geq (j+1, 0)$ и переходим к выполнению этапа (11).

- (11) Удаляем x из A .
- (12) Ждем $V \lceil u \neq V_{s_1} \lceil u$.
- (13) Переопределим $\Gamma_j^V(k) = U(k)$, перечисляем $x + 1$ в A , закрываем циклы $(j', k') > (j, k)$, открываем цикл $(j, k+1)$, и прекращаем работу цикла (j, k) .

Всякий раз, когда открывается цикл (j, k) , вся ее предыдущая работа уничтожается и его функционалы становятся неопределенными из-за V -изменений, следовательно Γ_j и Δ определяются корректно.

Этот основной модуль имеет четыре возможных выхода, аналогичных выходам основного модуля R_e -стратегии.

- (A) Существует такой шаг s , после которого ни один цикл не работает. Это значит, что некоторый цикл (j_0, k_0) бесконечно ожидает на одном из этапов 2, 7 или 12. В этом случае требование $S_{e,i}$ удовлетворено на цикле (j_0, k_0) .
- (B) Некоторый (наименьший) цикл (j_0, k_0) действует бесконечно часто. Это значит, что он осуществляет бесконечное количество переходов либо из этапа 5 к этапу 2, либо из этапа 10 к этапу 7. Это значит, что по крайней мере один из функционалов Ψ_e или Ω_e является частичным. Заметим, что в этом случае совокупный запрет, наложенных на всех циклах, имеет конечный \liminf .
- (C) Существует такое (наименьшее) число j_0 , что каждый цикл $(j_0, k), k \in \omega$, бесконечно ожидает либо на этапе 5, либо на этапе 13. (Таким образом, “столбец j_0 действует бесконечно часто”.) Это означает, что $U \leq_T V$ посредством Γ_{j_0} , в противоречие с условием теоремы.
- (D) Для каждого j существует цикл (j, k_j) , который бесконечно ожидает на этапе 10. (“Каждый столбец лейтвает конечное число раз”). Это значит, что $U \leq_T V$ посредством Δ , в противоречие с условием теоремы.

Теперь доказательство теоремы завершается как в теореме 69, за исключением следующей детали: при удалении x из A мы теряем U_e -разрешение, ранее полученное при перечислении x в U_e . (Ясно, что x остается в U_e). Но если позднее не произойдет $V \upharpoonright u$ -изменения, то при этом мы окончательно удовлетворили требование S_e и во множестве U_e больше не нуждаемся. Если же позднее происходит $V \upharpoonright u$ -изменение, то мы перечисляем $x+1$ в A и $V \oplus A$ предоставляет требуемое разрешение.

■

Следствие 93 Пусть $\mathbf{v} < \mathbf{u}$ в. п. степени. Существует не изолированная собственная d -в. п. степень \mathbf{d} такая, что $\mathbf{v} < \mathbf{d} < \mathbf{u}$.

В Купер и Ий [] авторы оставили открытым вопрос о том, каждая ли в. п. степень $\mathbf{a}, \mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, изолирует некоторую d -в. п. степень $\mathbf{d} > \mathbf{a}$. Если d -в. п. степень \mathbf{d} изолирована в. п. степенью $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, тогда, как

нетрудно видеть, \mathbf{d} является вычислимо перечислимой относительно \mathbf{a} собственной d -в. п. степенью. Таким образом, положительный ответ на вопрос Купера и Ий приводит к также положительному ответу на следующий вопрос: верно ли, что над каждой в. п. степенью $\mathbf{a}, \mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, находится собственная d -в. п. степень, вычислимо перечислимая относительно \mathbf{a} ? Последний вопрос многими и в течении долгого времени активно изучался, однако полного ответа на него все еще не получено. Известно лишь, что каждая неполная высокая в. п. степень этим свойством обладает (Арсланов, Лемпп и Шор [1996]), но существуют и не обладающие этим свойством в. п. степени (те же авторы там же). До сих пор неизвестно, обладают ли этим свойством низкие невычислимые в. п. степени. Все эти результаты мы обсуждаем в третьей главе настоящей книги.

Таким образом, ответ на вопрос Купера и Ий отрицателен. Ниже в теореме 95 приводится прямое доказательство более общего результата. Докажем сначала следующее простое предложение.

Предложение 94 *Пусть \mathbf{d} – d -в. п. (или n -в. п. для произвольного $n > 1$) и \mathbf{a} – в. п. степени такие, что $\mathbf{d} > \mathbf{a}$. Тогда существует в. п. относительно \mathbf{a} степень $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$, которая расположена строго выше степени \mathbf{a} . Таким образом, если \mathbf{a} изолирует \mathbf{d} , то \mathbf{a} изолирует и \mathbf{c} .*

Доказательство. По предложению 56, \mathbf{d} в. п. относительно некоторой в. п. степени $\mathbf{e} < \mathbf{d}$. Если $\mathbf{e} \leq \mathbf{a}$, то \mathbf{d} сама является в. п. относительно \mathbf{a} , и за искомую степень \mathbf{c} можно принять \mathbf{d} . Если же $\mathbf{e} \not\leq \mathbf{a}$, тогда $\mathbf{a} < \mathbf{e} \cup \mathbf{a} \leq \mathbf{d}$ и поэтому искомой является степень $\mathbf{e} \cup \mathbf{a}$. (Практически такое же рассуждение проводится по индукции и для случая, когда \mathbf{d} является n -в. п. степенью для $n > 2$.) ■

Теорема 95 *Существует такое в. п. невычислимое множество A , что его степень \mathbf{a} не изолирует никакую СЕА (\mathbf{a}) степень, т. е. $\forall e(A <_T W_e^A \rightarrow \exists B(B \text{ в. п.} \& B \leq_T W_e^A \& B \not\leq_T A))$.*

Доказательство. Искомое множество A строим, для каждого e удовлетворяя требованиям:

$$P_e : \Phi_e \neq A \text{ (для каждой частично вычислимой функции } \Phi_e).$$

$$N_e : A <_T W_e^A \rightarrow B_e \leq W_e^A \& B_e \not\leq A \text{ (для каждого } e \text{ мы построим соответствующее в. п. множество } B_e).$$

Требования N_e разбиваются на подтребования:

$N_{e,i} : \Phi_i^A \neq B_e$ (для каждого частично вычислимого функционала Φ_i).

Требования $P_e, N_{e,i}$ по их приоритетности упорядочиваем по типу ω : $\langle R_n \rangle$. Стратегии удовлетворения каждого требования по отдельности стандартные. Для удовлетворения требования P_e выбираем некоторого свидетеля x , ждем шага s такого, что $\Phi_e(x) = 0[s]$, и перечисляем x в A . Для удовлетворения $N_{e,i}$ -требования ждем появления такого $x \in \omega^{[e,i]}$, что $\Phi_i(A; x) = 0[s]$ и x имеет разрешение от W_e^A на шаге s . Тогда перечисляем x в B_e . Для получения разрешения сначала аппроксимируем W_e^A как обычно: $x \in W_e^A[s]$ тогда и только тогда, когда $\Phi_e(A; x) \downarrow [s]$. Тогда мы говорим, что x имеет разрешение от W_e^A на шаге s , если if it looks as if some $y < x$ is in W_e^A at s but it does not, at s , look as if it was in at $s - 1$ by an A -correct computation, i.e.

$$\exists y < x \{y \in W_e^A[s] \& (y \notin W_e^A[s - 1] \vee \exists z < \varphi_e(y, s - 1)[z \in A_s - A_{s-1}])\}.$$

The restraint necessary to preserve the A -use relevant to this computation will be imposed automatically by our procedure for choosing potential witnesses for the P_e .

Теорема 96 Для любой невычислимой в. п. степени \mathbf{c} существует невычислимая в. п. степень $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$, которая не изолирует степени, являющиеся CEA-степенями над ней.

Теорема 97 Пусть C CEA-множество над \emptyset' . Существует невычислимое в. п. множество A такое, что $A' \equiv_T C$ и для любого e ,

$$A <_T W_e^A \rightarrow \exists e. n. B(B \leq_T W_e^A \& B \not\leq_T A)$$

Ниже мы приведем следующий результат, принадлежащий Гуохуа Ву [], который легко получается из уже известных и является интересным обобщением идеи изолированности.

Теорема 98 Существуют такие d -в. п. степени $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, что между ними существует в точности одна в. п. степень \mathbf{c} . Причем степень \mathbf{b} можно заключить внутри любого наперед заданного интервала высоких в. п. степеней \mathbf{u} и \mathbf{v} , $\mathbf{u} < \mathbf{v}$.

Доказательство. Пусть \mathbf{u} и \mathbf{v} , $\mathbf{u} < \mathbf{v}$, произвольные высокие в. п. степени. По теореме 91 между любыми двумя в. п. степенями \mathbf{u} и \mathbf{v} , $\mathbf{u} < \mathbf{v}$, существует изолированная d -в. п. степень \mathbf{b} . Обозначим через $\mathbf{c} < \mathbf{b}$ в. п. степень, изолирующую \mathbf{b} . Легко видеть, что $\mathbf{u} \leq \mathbf{c}$, в противном случае в. п. степень $\mathbf{u} \cup \mathbf{c}$ противоречит изолированности \mathbf{b} . Поэтому, так как степень \mathbf{u} высокая, высокой является и степень \mathbf{c} . В конце третьего параграфа говорилось о результате Харрингтона о том, что для любой высокой в. п. степени, в частности для степени \mathbf{c} , существует такая в. п. степень \mathbf{d} , $\mathbf{d} < \mathbf{c}$, что для каждой в. п. степени $\mathbf{x} < \mathbf{c}$ справедливо $\mathbf{x} \cup \mathbf{d} < \mathbf{c}$. В то же время в работе Купер, Лемпп и Уотсон [1989] установлено, что для любой высокой в. п. степени, в частности для степени \mathbf{c} , и для любой ненулевой в. п. степени ниже нее, в частности для степени \mathbf{d} , существует такая d -в. п. степень $\mathbf{a} < \mathbf{c}$, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{c}$. Отсюда вытекает, что между степенями \mathbf{a} и \mathbf{c} нет в. п. степеней. (Если бы такая в. п. степень \mathbf{x} существовала, то мы бы имели $\mathbf{x} \cup \mathbf{d} = \mathbf{c}$, что противоречит выбору \mathbf{d} .) Таким образом, степени \mathbf{a}, \mathbf{c} и \mathbf{b} являются искомыми. ■

Упражнения

7.1. Пусть $\mathcal{A} = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_2 \mid \forall \mathbf{b} \exists \mathbf{d} (\mathbf{a} < \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} < \mathbf{d} < \mathbf{b})\}$. Из теоремы 89 следует, что $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$. Если бы $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, то это бы означало, что в. п. степени определимы в D_2 . Однако это неверно: докажите, что существует такая низкая собственная d -в. п. степень \mathbf{d} , что для каждой d -в. п. степени $\mathbf{b} > \mathbf{d}$ существует такая d -в. п. степень \mathbf{c} , что $\mathbf{d} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$. *Указание.*

7.2. Докажите следующее обобщение теоремы 95: под каждой невычислимой в. п. степени \mathbf{c} существует невычислимая в. п. степень $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$, которая не изолирует никакую СЕА (\mathbf{a}) степень. *Указание.* Следующим образом используйте предыдущую конструкцию в сочетании с методом разрешения: для каждого требования P_e используется не одна, а целую серию свидетелей. А именно, если для P_e на шаге s не существует такого z , что $\Phi_e(z) = 0[s]$, $z \in A$ и $\Phi_e(y) = 0[s]$ для каждого существующего свидетеля, тогда назначаем для P_e нового "достаточно большого" свидетеля

$x \in \omega^{[e]}$ (большего всех тех шагов, на которых совершались действия по выполнению требований большего приоритета, и большего всех уже назначенных свидетелей). На некотором последующем шаге этот свидетель будет уничтожен, если на этом шаге будут совершаться действия по выполнению требований большего приоритета. Теперь, если некоторый свидетель x такой, что $\Phi_e(x) = 0$ получит разрешение от C (т. е. некоторое число $y < x$ перечислится в C на шаге s) тогда мы удовлетворяем P_e , положив x в A . В противном случае действуем как прежде. Далее доказательство завершается как обычно для рассуждений методом разрешения. Предположив, что после некоторого шага s все требования с большим, чем у P_e , приоритетом уже не совершают действия по их удовлетворению, используем невычислимость множества C для того, чтобы доказать, что для выполнения требования P_e мы совершаляем только конечное число действий. (В противном случае для P_e без перечисления чисел в A будут назначены все большие и большие свидетели, и если x любой из них, то как только окажется, что $\Phi_e(x) = 0$ на шаге $t > s$, то ни одно число $y < x$ не может перечислится в C .)

7.3.

Комментарии.

§8. Изолирующие совокупности степеней

Определение 23 Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – две совокупности множеств такие, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Будем говорить, что множество $A \in \mathcal{A}$ изолирует множество $B \in \mathcal{B}$, если $A <_T B$ и для любого множества $W \in \mathcal{A}$,

$$W \leq_T B \rightarrow W \leq_T A.$$

В этом случае также говорим, что множество B изолировано множеством A (A -изолировано). Тьюринговая степень **b** называется A -изолированной степенью, если она содержит A -изолированное множество.

В частности, если A – совокупность m -в. п. степеней, а B – совокупность n -в. п. степеней, $m < n$, тогда получим понятия n -в. п. степени,

изолированной некоторой т-в. п. степенью, и т-в. п. степени, изолирующей некоторую п-в. п. степень. (Ясно, что при $n = 2$ и $m = 1$ это обычные понятия изолированности.)

Определение 24 Пусть A и B – две совокупности множества такие, что $A \subseteq B$, и пусть $A, B \in B$. Будем говорить, что $A \leq^{\{*,A\}} B$, если для любого множества $W \in A$, $W \leq_T A \rightarrow W \leq_T B$.

Если здесь A – совокупность n -в. п. множеств для некоторого $n \geq 1$, то вместо $A \leq^{\{*,A\}} B$ пишем $A \leq^{\{*,n\}} B$.

Если в последнем определении положить $A = B$, то получим обычную тьюринговую сводимость. Кроме того, очевидно, что

- 1) $A \leq_T B \rightarrow A \leq^{\{*,A\}} B$,
- 2) $A \leq^{\{*,A\}} B, B \leq^{\{*,A\}} C \rightarrow A \leq^{\{*,A\}} C$.

Таким образом, можно обычным образом определить $\{*,A\}$ -степени неразрешимости. Из 1) следует, что каждая $\{*,A\}$ -степень состоит из одной или нескольких Т-степеней.

Эти определения естественным образом связаны с понятиями изолированности. Например, если в. п. степень **a** изолирует некоторую d -в. п. степень **b**, т. е. $\forall c (c \leq b \rightarrow c \leq a)$, то это значит, что $b \leq^{\{*,1\}} a$. Таким образом, $a =^{\{*,1\}} b$, т. е. все изолированные d -в. п. и их изолирующие в. п. множества лежат в одной $\{*,1\}$ -степени. Теорема Купера и Ий [9] о существовании изолированной d -в. п. степени **d** теперь означает, что существует $\{*,1\}$ -степень, содержащая как в. п., так и не в. п. d -в. п. степени. Наоборот, существование неизолированной d -в. п. степени означает, что существует $\{*,1\}$ -степень, содержащая d -в. п. и не содержащая в. п. множества. (Это также было установлено Купером и Ий [9].) Наконец, в [5, теорема 3.8] было установлено существование в. п. степени, не изолирующей никакую d -в. п. степень. Это означает, что существует $\{*,1\}$ -степень, которая состоит из единственной в. п. степени.

Дальнейшее изложение ведем для совокупности d -в. п. множеств и их $\{*,1\}$ -степеней.

Ясно, что любая $\{*,1\}$ -степень содержит не более одной в. п. степени и, вообще говоря, может содержать несколько d -в. п. степени. Как обычно, назовем $\{*,1\}$ -степени, содержащие в. п. степени, в. п. $\{*,1\}$ -степенями.

Покажем, что каждая в. п. $\{*,1\}$ -степень либо не содержит не в. п. d -в. п. степени, либо содержит бесконечно много таких степеней.

Теорема 99 *Любая в. п. $\{*,1\}$ -степень либо состоит из единственной в. п. степени, либо содержит бесконечную убывающую цепь не в. п. d -в. п. степеней.*

Доказательство. Пусть в. п. $\{*,1\}$ -степень содержит в. п. множество A и d -в. п. множество D , не Т-эквивалентное никакому в. п. множеству. Так как $A \equiv^{\{*,1\}} D$, то должно быть $A <_T D$ и A изолирует D . В [9, теорема 3.1] доказано, что существует такое d -в. п. множество C , что $A <_T C <_T D$. Легко проверить, что множество A также изолирует множество C , поэтому $A \equiv^{\{*,1\}} C \equiv^{\{*,1\}} D$. Теперь повторяем это рассуждение с A и C вместо A и D и т. д.

Легко проверить, что в. п. $\{*,1\}$ -степени образуют верхнюю полурешетку, причем точной верхней гранью $\{*,1\}$ -степеней, содержащих в. п. множества A и B , является множество $A \oplus B$. Действительно, если $A \leq^{\{*,1\}} C$ и $B \leq^{\{*,1\}} C$ для некоторого множества C , то должно быть $A \leq_T C$ и $B \leq_T C$, иначе в. п. множества A и B опровергают $\{*,1\}$ -сводимость множеств A и B к множеству C , соответственно. Поэтому $A \oplus B \leq_T C$ и, следовательно, $A \oplus B \leq^{\{*,1\}} C$. Образуют ли верхнюю полурешетку $\{*,1\}$ -степени d -в. п. множеств, мы не знаем. Можно показать, что в общем случае оператор сочленения $A \oplus B$ не дает точную верхнюю грань $\{*,1\}$ -степеней множеств A и B . Это вытекает из теоремы 100. Доказательство этой теоремы не приводим, так как оно представляет собой обычное рутинное приоритетное рассуждение с конечными нарушениями.

Теорема 100 *Существуют такие $\leq^{\{*,1\}}$ -несравнимые d -в. п. множества A и B , а также d -в. п. множество C и в. п. множество W , что*

- a) $A \leq^{\{*,1\}} C$, c) $W \leq_T A \oplus B$,
- b) $B \leq^{\{*,1\}} C$, d) $W \not\leq_T C$.

Теорема 101 *Для любого $n \geq 2$ существует $\{*,1\}$ -степень, которая содержит по крайней мере n несравнимых тьюоринговых степеней.*

Для доказательства достаточно построить в. п. множество A и попарно Т-несравнимые d -в. п. множества D_1, \dots, D_n , которые изолируют (по отдельности) множество A . Это доказательство является обобщением доказательства Купера и Ий [9] о существовании изолированной d -в. п. степени. По шагам строим в. п. множество A и d -в. п. множества D_1, \dots, D_n , удовлетворяя для всех e, i, j требованиям

$$N_{i,e} : W_e = \Phi_e^{D_i \oplus A} \rightarrow W_e = \Gamma_{i,e}^A$$

(по данным в. п. множеству W_e и частично-вычислимому функционалу Φ_e строим частично-вычислимый функционал $\Gamma_{i,e}$),

$$R_{i,j} : D_i \neq \Theta_i^{D_j \oplus A}.$$

Построенные к концу конструкции в. п. множество A и d -в. п. множества $A \oplus D_1, \dots, A \oplus D_n$ образуют, как легко проверить, искомые множества.

Покажем, как удовлетворяется каждое из требований по отдельности. Для удовлетворения N -требования для каждого x ждем установления равенства $W(x) = \Phi^{D_i \oplus A}(x)$ определяем $W(x) = \Gamma_i^A(x)$ с $\gamma_i(x) = \varphi_i(x)$ и запрещаем с соответствующим приоритетом интервал $A \lceil \varphi_i(x)$. Если позднее $W(x)$ изменится и равенство $W(x) = \Phi^{D_i \oplus A}(x)$ снова установится без изменения $A \lceil \varphi_i(x)$ (в противном случае просто переопределяем значение функционала $\Gamma_i^A(x)$), то это может произойти только из-за изменения $B \lceil \varphi_i(x)$. Можно предположить, что изменения значения $B \lceil \varphi_i(x)$ означает перечисление элементов в $B \lceil \varphi_i(x)$. Изымаем эти элементы из B и диагонализируем W против $\Phi^{D_i \oplus A}$, удовлетворив требование N . (Если бы изменение значения $B \lceil \varphi_i(x)$ произошло из-за того, что какие-то элементы из B изымались, то это означало бы диагонализацию некоторого требования с большим приоритетом. В этом случае процесс удовлетворения N -требования начинаем сначала.)

Для удовлетворения R -требования выбираем некоторое число x , ждем, пока $\Theta^{D_j \oplus A}(x) = 0$ и перечисляем x в D_i , запретив интервал $D_j \lceil \theta(x)$.

Таким образом, как N -требования, так и R -требования удовлетворяются примерно по той же схеме, как и соответствующие требования из доказательства Купера и Ий [9] о существовании изолированной d -в. п.

степени, создавая при этом такие же запреты. Поэтому дальнейшее доказательство незначительно отличается от их доказательства, и мы ее не приводим. ■

Заметим, что такое же доказательство с очевидными изменениями позволяет установить существование $\{*, 1\}$ -степени, содержащей бесконечное семейство попарно не Т-сравнимых d -в. п. степеней.

Одной из наиболее интересных проблем, связанных с введенными определениями, является вопрос о плотности упорядочения $\{*, 1\}$ -степеней, в частности вопрос о существовании максимальных $\{*, 1\}$ -степеней. Ниже мы докажем, что максимальных $\{*, 1\}$ -степеней нет среди 2-низких и что 2-низкие d -в. п. $\{*, 1\}$ -степени плотны.

Теорема 102 *Пусть D такое d -в. п. множество, что $D'' \equiv_T \emptyset''$. Тогда существует вычислимо перечислимое множество A , что $D <^{\{*, 1\}} A <^{\{*, 1\}} \emptyset'$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда Т-степень D не вычислимо перечислена, так как в противном случае утверждение вытекает из теоремы плотности Сакса и из того, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \leq^{\{*, 1\}} \mathbf{b}$.

Нам для дальнейшего понадобится следующее утверждение, которое можно найти, например, в книге Соара [12, теорема XII.5.1)].

Лемма 103 (Арсланов [1]) *Для любой функции ψ , вычислимой относительно \emptyset'' , существует такая вычислимая функция g , что $W_{g(e)} \equiv_T W_{\psi(e)}$ для всех e .*

Рассмотрим множество $S = \{\langle i, j \rangle \mid W_i = \Phi_j^D\}$. Легко проверить, что $S \in \Pi_2^D$, поэтому S вычислимо относительно $D'' \equiv_T \emptyset''$, то есть $D \leq_T \emptyset''$. Определим функцию $g \leq_T \emptyset''$:

$$W_{g(\langle i, j \rangle)} = \begin{cases} W_i, & \text{если } \langle i, j \rangle \in S, \\ \emptyset, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как функция g всюду определена и $g \leq_T \emptyset''$, то по лемме 103 существует такая вычислимая функция f , что $W_{f(\langle i, j \rangle)} \equiv_T W_{g(\langle i, j \rangle)}$. Пусть $E = \bigoplus_{1 \leq k < \infty} W_{f(k)}$. Множество E вычислимо перечислимо и $\forall n \{D \not\leq_T$

$E^{<n]} \equiv_T \bigoplus_{1 \leq k \leq n} W_{f(k)}\}$, так как все $W_{f(k)} \leq_T D$, а Т-степень D не содержит вычислимого перечислимых множеств.

По лемме о густоте Шенфилда (см. Соар [12, лемма VIII.1.1]) существует такое вычислимо перечислимое множество $A \leq_T E$, что $A <_{\text{густое подмножество}} E$ (и. е. $A \subseteq E$ и $A^{[e]} =^* E^{[e]}$) и $D \not\leq_T A$. Здесь для произвольных множеств X и Y , $X =^* Y$, если множество $(X - Y) \cup (Y - X)$ конечно, и $X^{[e]} = \{\langle x, e \rangle : \langle x, e \rangle \in X\}$ – e -я секция X .

Мы имеем $W_i = \Phi_j^D \rightarrow W_i \equiv_T E^{[\langle i, j \rangle]} =^* A^{[\langle i, j \rangle]}$, т. е. $W_i \leq_T D \rightarrow W_i \leq_T A$.

Рассмотрим две возможности:

Если $A \leq_T D$, то A изолирует D . Взяв произвольное вычислимо перечислимое множество B такое, что $A <_T B <_T \emptyset'$, получим $D <^{\{*,1\}} B <^{\{*,1\}} \emptyset'$.

Если же $A \not\leq_T D$, тогда, очевидно, $D <^{\{*,1\}} A <^{\{*,1\}} \emptyset'$.

Замечание. Анализируя приведенное выше доказательство можно заметить, что в ней доказано несколько более общее утверждение. Например, пусть D – такое d -в. п. множество, что Т-степень D не в. п. и для которого существует вычислимая функция f со следующими свойствами:

- a) $W_{f(e)} \leq_T D$ для любого $e \in \omega$;
- b) $(\forall e \in \omega)[W_e \leq_T D \rightarrow (\exists x \in \omega)[W_e \leq_T W_{f(x)}]]$.

Тогда, определив множество E снова как $\bigoplus_{1 \leq k \leq \infty} W_{f(k)}$ и повторив конструкцию множества A , получим $D <^{\{*,1\}} A <^{\{*,1\}} \emptyset'$. Более того, если d -в. п. множества D_1 и D_2 таковы, что $D_1 <^{\{*,1\}} D_2$ и для множества D_1 существует вычислимая функция f со свойствами a), b) и с дополнительным свойством $E \leq_T D_2$, тогда, снова повторив все эти рассуждения, получим $D_1 <^{\{*,1\}} A <^{\{*,1\}} D_2$ для некоторого в. п. множества A .

Используем это замечание для доказательства плотности относительно сводимости $<^{\{*,1\}}$ всех 2-низких d -в. п. степеней. Сначала докажем следующую теорему, представляющую самостоятельный интерес.

Теорема 104 Пусть A – такое в. п. множество, что $A'' \equiv_T \emptyset''$. Тогда существует такая вычислимая функция f , что семейство $\{W_{f(e)}\}_{e \in \omega}$ равномерно A -вычислимо (в частности $\bigoplus_{e \in \omega} W_{f(e)} \leq_T A$) и для любого в.

п. множества $W_x \leq_T A$ существует такое число e , что $W_{f(e)} \equiv_T W_x$. Другими словами, для любого 2-низкого в. п. множества A семейство всех вычислимых относительно A степеней равномерно A -вычислимо.

Доказательство. Пусть $S = \{\langle i, j \rangle \mid W_i = \Phi_j^A\}$. Тогда $S \in \Sigma_3^0$ и, следовательно, существует такая всюду определенная функция $\alpha \leq_T \emptyset''$, что $S = \{\alpha(e) \mid e \in \omega\}$. Для всех e имеем $W_{l(\alpha(e))} = \Phi_{r(\alpha(e))}^A$, где $l(\alpha(e))$ и $r(\alpha(e))$ обе вычислимы относительно \emptyset'' . Обозначим функции $l(\alpha(e))$ и $r(\alpha(e))$ соответственно через p и q . Таким образом, $W_{p(e)} = \Phi_{q(e)}^A$ для любого e , и совокупность $\{W_{p(e)}\}_{e \in \omega}$ состоит из всех в. п. множеств, связанных с множеством A . Докажем, что существуют такие вычислимые функции f и g , что $W_{f(e)} \equiv_T W_{p(e)}$ и $W_{f(e)} =^* \Phi_{g(e)}^A$ для любого e . Ясно, что этого достаточно для завершения доказательства теоремы.

Выше приводилась лемма 103, где утверждалось, что для любой вычислимой относительно \emptyset'' функции ψ существует такая вычислимая функция g , что $W_{g(e)} \equiv_T W_{\psi(e)}$ для всех e . Позднее автор (см. Арсланов [2]) усилил этот результат, заменив здесь Т-эквивалентность множеств на их т-эквивалентность. Именно, справедлива следующая

Лемма 105 1) Для любой функции ψ , вычислимой относительно \emptyset'' , существует такая вычислимая функция g , что $W_{g(e)} \equiv_m W_{\psi(e)}$ для всех e .

2) Для любого множества X и для любой функции ψ , вычислимой относительно \emptyset'' , существует такая вычислимая функция g , что $W_{g(e)}^A \equiv_m W_{\psi(e)}^A$ для всех e .

Пункт 1 этой леммы - это теорема ... из [2], а пункт 2 – релятивизация этого результата относительно множества X . Как видно из доказательства теоремы ... из [2], здесь получается именно вычислимая (а не вычислимая относительно множества X) функция g .

Продолжим доказательство теоремы. Так как $p \leq_T \emptyset''$, то по лемме 105 существуют такие вычислимые функции f и α , что для любого e $W_{f(e)} \equiv_m W_{p(e)}$ и $x \in W_{f(e)} \Leftrightarrow \alpha(x) \in W_{p(e)}$. Отсюда для любых e и x имеем

$x \in W_{f(e)} \Leftrightarrow \alpha(x) \in W_{p(e)} \Leftrightarrow \Phi_{q(e)}^A(\alpha(x)) = 1$ (ясно, что функция $\Phi_{q(e)}^A$ всюду определена).

Существуют такие вычислимые функции a и b , что для любого x $\Phi_{q(e)}^A(x) = 1 \Leftrightarrow \Phi_{a(e)}^A(x) \downarrow$ и $\Phi_{q(e)}^A(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{b(e)}^A(x) \downarrow$. По пункту 2

леммы 105 существуют вычислимые функции a' , b' , β_1 и β_2 , для которых $\Phi_{a(e)}^A(x) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{a'(e)}^A(\beta_1(x)) \downarrow$ и $\Phi_{b(e)}^A(x) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{b'(e)}^A(\beta_2(x)) \downarrow$. Теперь пусть g такая вычислимая функция, что $\Phi_{g(e)}^A(x) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{a'(e)}^A(\beta_1(x)) \downarrow \& \Phi_{b'(e)}^A(\beta_2(x)) \uparrow$. Имеем $x \in W_{f(e)} \Leftrightarrow \Phi_{g(e)}^A(x) \downarrow$.

Теорема 106 Пусть d -в. п. множества D_1 и D_2 таковы, что $D_1 <^{\{*,1\}} D_2$ и $D_2'' \equiv_T \emptyset''$. Тогда существует такое в. п. множество A , что $D_1 <^{\{*,1\}} A <^{\{*,1\}} D_2$.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 104 и предыдущего замечания.

Можно сформулировать большое число открытых вопросов по введенным сводимостям, изучение которых помогло бы лучше понять внутреннее устройство тьюринговых степеней, расположенных ниже $0'$. Выше упоминалась проблема плотности для $\{*,1\}$ -сводимости. К ней мы добавим еще две, на наш взгляд наиболее интересные проблемы.

Вопрос 107 Являются ли верхние полурешетки в. п. $\{*,1\}$ -степеней d -в. п. множеств и d -в. п. тьюринговых степеней элементарно эквивалентны?

Вопрос 108 Существуют ли такие натуральные числа $n \neq m$ и p, q , $p < n, q < m$, что $\{*,p\}$ -степени n -в. п. множеств элементарно эквивалентны $\{*,q\}$ -степеням m -в. п. множеств?

Глава 3

Относительная перечислимость

§1. СЕА операторы и иерархия Ершова.

Иерархия n -в. п. множеств тесно связана со следующей иерархией n -СЕА (n -computably enumerable and above) множеств, впервые определенных и изученных в работах Арсланова [1982] и Джокуша и Шора [1984].

Определение 25 *B. п. множества являются 1-СЕА множествами. Далее по индукции, множество A является $(n + 1)$ -СЕА множеством для некоторого $n \geq 1$, если оно в. п. относительно некоторого n -СЕА множества $B \leq_T A$.*

Кроме того, если множество A в. п. относительно некоторого множества B $\leq_T A$, то мы говорим, что A является B-СЕА множеством.

Степень a называется n-СЕА степенью для некоторого $n \geq 1$, если она содержит какое-нибудь n-СЕА множество.

Как показано в упражнении 2.1.2, каждое n -в. п. множество является и n -СЕА множеством. Обратное, очевидно, неверно: например, n -й скачок любого в. п. множества также является n -СЕА множеством. Докажем сначала, что иерархия n -СЕА степеней не совпадает с иерархией n -в. п. степеней, если даже ограничиться рассмотрением степеней,

расположенных ниже $\mathbf{0}'$. Далее, в теореме 110 установлено, что иерархия собственных n -в. п. степеней индуцирует иерархию n -СЕА степеней, расположенных ниже $\mathbf{0}'$. В теореме 111 доказывается, что n -СЕА степени расположены плотно среди n -в. п. степеней.

Теорема 109 *Существует 2-СЕА степень $\mathbf{a} < \mathbf{0}'$, которая не является ω -в. п. степенью.*

Доказательство. Ниже приводится доказательство, которое опирается на теорему 5.4 из главы 5 о существовании неполной d -в. п. степени, максимальной для совокупности всех ω -в. п. степеней. Для прямого доказательства этой теоремы см. упр. 3.1.

Пусть $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$ такая d -в. п. степень, что интервал $(\mathbf{d}, \mathbf{0}')$ не содержит ω -в. п. степеней (см. теорему 5.4). Ясно, что \mathbf{d} является СЕА(\mathbf{a}) степенью для некоторой в. п. степени $\mathbf{a} \leq \mathbf{d}$, и по теореме Сакса о плотности (релятивизированной относительно \mathbf{a}) существует в. п. относительно \mathbf{a} степень \mathbf{b} такая, что $\mathbf{d} < \mathbf{b} < \mathbf{0}'$. По выбору степени \mathbf{d} , степень \mathbf{b} не является ω -вычислимо перечислимой. ■

Следующая теорема устанавливает, что и наоборот, для произвольного $n > 1$ существуют n -в. п. степени, не являющиеся $(n - 1)$ -СЕА степенями.

Теорема 110 *Пусть $n > 1$. Существует такое n -в. п. множество D , что степень D не содержит $(n - 1)$ -СЕА множества.*

Доказательство. ■

Используя свойства множеств, ассоциированных с d -в. п. множествами, легко проверить, что 2-СЕА степени плотны среди d -в. п. степеней. Действительно, пусть d -в. п. множества A и B таковы, что $B <_T A$. Обозначим через \tilde{A} и \tilde{B} в. п. множества, ассоциированные соответственно с A и B . Таким образом, $\tilde{A} \leq_T A$, $\tilde{B} \leq_T B$, и множества A и B в. п. относительно \tilde{A} и \tilde{B} соответственно. Пусть $C = B \oplus \tilde{A}$. Ясно, что C в. п. относительно в. п. множества $\tilde{B} \leq_T C$, т. е. C является 2-СЕА множеством, и $B \leq_T C \leq_T A$. Если $B <_T C <_T A$, тогда C является искомым 2-СЕА множеством, расположенным по Т-сводимости между B и A . Если же C Т-эквивалентно одному из множеств A или B , то

утверждение следует из теоремы Сакса о плотности, релятивизованной в первом случае относительно множества \tilde{B} , во втором - относительно множества $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$. Обобщая это рассуждение для произвольного $n \geq 2$, Р. Шор (неопубликовано) доказал следующую теорему:

Теорема 111 *Пусть $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ - две n -в. п. степени, $n \geq 1$. Существует n -СЕА степень \mathbf{d} такая, что $\mathbf{b} < \mathbf{d} < \mathbf{a}$.*

Доказательство. Если $n = 1$, то утверждение непосредственно вытекает из теоремы плотности для в. п. степеней. Поэтому предположим, что $n > 1$. Тогда существуют такие степени (см. упр. 1.2)

$$\mathbf{a}_{n-1} \leq \mathbf{a}_{n-2} \leq \dots \leq \mathbf{a}_1 \leq \mathbf{a},$$

$$\mathbf{b}_{n-1} \leq \mathbf{b}_{n-2} \leq \dots \leq \mathbf{b}_1 \leq \mathbf{b},$$

что \mathbf{a}_{n-1} и \mathbf{b}_{n-1} в. п., для каждого i , $1 \leq i \leq n-2$, $\mathbf{a}_i = \text{СЕА}(\mathbf{a}_{i+1})$, $\mathbf{b}_i = \text{СЕА}(\mathbf{b}_{i+1})$, \mathbf{a} в. п. относительно \mathbf{a}_1 и \mathbf{b} в. п. относительно \mathbf{b}_1 .

Рассмотрим $\mathbf{u}_1 = \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1$, она является СЕА степенью относительно $(n-1)$ -в. п. степени $\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{a}_2$ (следовательно, является n -СЕА степенью). Ясно, что $\mathbf{b} \leq \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1 \leq \mathbf{a}$.

- Если $\mathbf{b} < \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1 < \mathbf{a}$, тогда $\mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1$ является искомой n -СЕА степенью.
- Если $\mathbf{b} = \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1$, тогда $(n-1)$ -в. п. степень $\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1 \leq \mathbf{b}$, и обе степени \mathbf{a} и \mathbf{b} являются СЕА($\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1$) степенями. Из теоремы Сакса о плотности (релятивизированной относительно $\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1$) теперь следует, что некоторая СЕА($\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1$) степень \mathbf{d} находится строго между степенями \mathbf{b} и \mathbf{a} .
- Если $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_1$ и $1 \neq n-1$, то рассматриваем $\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_2$ и повторяем предыдущее рассуждение.

Возможны два случая:

Случай 1. Существует такое число i , $1 \leq i < n-1$, что либо $\mathbf{b} < \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_i < \mathbf{a}$ (тогда $\mathbf{b} \cup \mathbf{a}_i$ является искомой n -СЕА степенью), либо $\mathbf{b} = \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_i$ (в этом случае искомую n -СЕА степень находим с помощью теоремы Сакса о плотности, релятивизированной относительно $\mathbf{a}_i \cup \mathbf{b}_1$).

Случай 2. $\mathbf{b} = \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_{n-1}$, где \mathbf{a}_{n-1} является в. п. степенью. Теперь $\mathbf{b} < \mathbf{b} \cup \mathbf{a}_{n-2} \leq \mathbf{a}$, \mathbf{b} и $\mathbf{b} \cup \mathbf{a}_{n-2}$ являются СЕА степенями относительно $(n-1)$ -в. п. степени $\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{a}_{n-1}$, и снова по теореме Сакса о плотности (релятивизированной относительно $\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{a}_{n-1}$) существует СЕА($\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{a}_{n-1}$) степень \mathbf{d} , расположенная строго между степенями \mathbf{b} и \mathbf{a} . Ясно, что \mathbf{d} является n -СЕА степенью. ■

Эту теорему нельзя усилить: между двумя n -в. п. степенями не всегда может находиться некоторая $(n-1)$ -СЕА степень. Ниже в теореме 112 мы докажем это утверждение для случая, когда $n = 3$; для общего случая см. упр. 1.2.

Теорема 112 *Существуют такие 3-в. п. множества $B <_T A$, что по тьюринговой сводимости между B и A нет 2-СЕА множеств.*

Доказательство. Ниже мы приводим доказательство, которое опирается на теорему 119 (см. также следствие 121 из неё). Для прямого доказательства см. упр. 1.3.

Пусть $\mathbf{u} < \mathbf{v}$ собственно 3-в. п. степени такие, что между степенями \mathbf{u} и \mathbf{v} не существует d -в. п. степени (см. теорему 64). Предположим, для получения противоречия, что существует такая 2-СЕА степень \mathbf{c} , что $\mathbf{u} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{v}$. По следствию 121 имеем $\mathbf{u} < \mathbf{c} < \mathbf{v}$. Теперь из теоремы 119 вытекает, что существует такая d -в. п. степень \mathbf{b} , что $\mathbf{u} < \mathbf{b} \leq \mathbf{c}$, противоречие. ■

Следствие 113 *2-СЕА степени не плотны в 3-в. п. степенях.*

Теорема 111 и следствие 113 обнаруживают следующее очевидное различие между структурами D_2 и D_3 .

Следствие 114 *Обозначим через Φ следующее предложение:*

$\forall x \forall y (x > y \Rightarrow \exists z \exists u (x > z > y \wedge z \geq u \wedge z \text{ в. п. относительно } u \wedge u \text{ в. п.}))$

Тогда $D_2 \models \Phi$ и $D_3 \not\models \Phi$.

Таким образом, структуры D_2 и D_3 не элементарно эквивалентны, если отношения “в. п.” и “в. п. относительно” равномерно определимы в обеих структурах. Из упр. 1.2 следует, что это так и для произвольных структур D_n и D_m при $n \neq m$.

Следующая теорема утверждает, что не в. п. Δ_2^0 -множества не могут быть в. п. относительно каждого из в. п. множеств, образующих минимальную пару степеней, а не в. п. d -в. п. множества не могут быть в. п. относительно множеств (не обязательно вычислимо перечислимых), которые также образуют минимальную пару степеней. Но, с другой стороны, существует такое 3-в. п. множество, которое в. п. относительно каждого из множеств, образующих минимальную пару. Наконец, пункт (iv) теоремы утверждает, что первые два утверждения не выполняются, если вместо множеств говорить о степенях.

Теорема 115 (i) *Не вычислимо перечислимые d -в. п. множества D не могут быть вычислимо перечислимыми относительно невычислимых множеств A и B таких, что $\deg(A) \cap \deg(B) = \mathbf{0}$.*

(ii) *Пусть Δ_2^0 -множество C не вычислимо перечислимо. Если невычислимые в. п. множества A и B такие, что $\deg(A) \cap \deg(B) = \mathbf{0}$, то C не может быть в. п. относительно каждого из них.*

(iii) (R. Coles, R. Downey, и T. Slaman [ta]) *Существуют такие не в. п. 3-в. п. множество C и невычислимые множества A и B , что C в. п. относительно A и B , и $\deg(A) \cap \deg(B) = \mathbf{0}$.*

(iv) *Существуют такие множества A, B и D , что D имеет собственную d -в. п. степень, A и B в. п. множества, D в. п. относительно A , \bar{D} в. п. относительно B , и $\deg(A) \cap \deg(B) = \mathbf{0}$.*

Доказательство. (i) Пусть $D = D_1 - D_2$ - не в. п. d -в. п. множество, а A и B такие в. п. множества, что D в. п. относительно A и B , и D в. п. относительно A и B . Из преддолжения 56 следует, что ассоциированное с D в. п. множество $A(D)$ невычислимо и Т-сводится к каждому из множеств A и B , противоречие

(ii) Пусть $C = \lim_s C_s$, и $C = \text{dom}\Phi^A = \text{dom}\Psi^B$, где A and B - некоторые в. п. множества. Определим такое в. п. множество $D \leq_T A, B$, что C окажется вычислимо перечислимым относительно множества D . Поэтому, если C не в. п. множество, тогда D будет невычислимым. Отсюда будет следовать, что степени множеств A и B не образуют минимальную пару степеней.

Пусть

$$D_v = \{\langle s, x \rangle : x \leq s \leq v \ \& \ x \notin C_v \ \& \ \forall t \leq v \forall \sigma \forall \tau (x \in C_t \ \& \ \Phi_t^\sigma(x) \downarrow \rightarrow \sigma \not\subseteq A_v) \ \& \ (x \in C_t \ \& \ \Psi_t^\tau(x) \downarrow \rightarrow \tau \not\subseteq B_v)\}.$$

Имеем

- a) $x \in C \leftrightarrow \exists s \geq x (\langle s, x \rangle \notin D)$, и
- b) $\langle s, x \rangle \notin D \leftrightarrow x > s \vee \exists v \exists \sigma \subset A (x \in C_v \ \& \ \Phi_v^\sigma(x) \downarrow \ \& \ x \notin \cup_{v' < v} D_{v'})$.

Из п. а) следует, что C в. п. относительно множества D . Из п. б) следует, что $\omega - D$ в. п. относительно множества A . Так как D в. п. множество, то $D \leq_T A$. Аналогично для $D \leq_T B$.

Теперь вкратце опишем доказательство утверждения п. (iv). Построим в. п. множества A, B и d -в. п. множество D , удовлетворяя следующим требованиям:

$$R_e : D \neq \Phi_e^{W_e} \vee W_e \neq \Psi_e^D,$$

$$N_e : \Phi_e^A = \Phi_e^B = \text{всюду определенная функция } f \rightarrow f \text{ вычислима},$$

где $\{(W_e, \Phi_e, \Psi_e)\}_{e \in \omega}$ некоторая нумерация всех троек, состоящих из в. п. множества W и частично вычислимых функционалов Φ и Ψ . Кроме того, следующим образом добиваемся того, что D в. п. относительно A , а \bar{D} в. п. относительно B . Когда некоторое число x на шаге s перечисляется в D (или в \bar{D}), тогда назначается некоторый маркер $\alpha(x)$ (соответственно, $\beta(x)$), и позднее на некотором шаге t числу x разрешается покинуть D (соответственно, \bar{D}), только если $A \lceil \alpha(x) \neq A_t \lceil \alpha(x)$ (соответственно $B \lceil \beta(x) \neq B_t \lceil \beta(x)$).

Ясно, что это позволит сделать D в. п. относительно A , а \bar{D} в. п. относительно B , а выполнение всех требований позволит установить (iv). В частности, имеем $A \not\leq_T B$ и $B \not\leq_T A$. (Если, например, $B \leq_T A$, тогда по N -требованиям имеем $B \equiv_T \emptyset$ и \bar{D} в. п. относительно B . Отсюда следует, что $\deg(D)$ в. п., что противоречит R -требованиям.)

Стратегии выполнения отдельных требований очевидны. Для выполнения N_e -требований используем обычный метод минимальной пары. Для выполнения R_e -требований выбираем какое-нибудь число x и достаточно большой маркер $\beta(x)$ (так как в начале конструкции $x \in \bar{D}$), и ждем такого шага s , на котором

$$D(x) = \Phi_e^{W_e}(x) \ \& \ W_e \lceil \varphi_e(x) = \Psi_e^D \lceil \psi_e \varphi_e(x) \lceil \varphi_e(x),$$

и $\beta(x)$ больше, чем все запреты N -требований большего приоритета. (Если первое условие никогда не выполнится, тогда требование R удовлетворено посредством x , если же окажется, что $\beta(x)$ входит в запрет какого-нибудь N -требования, имеющего больший приоритет, тогда выбираем новое число). Запрещаем интервал $D \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)$, перечисляем x в D , а $\beta(x)$ в B , определяем $\alpha(x)$ достаточно большим и ждем наступления такого шага t , на котором

$$D(x) = \Phi_e^{W_e}(x) \text{ & } W_e \lceil \varphi_e(x) = \Psi_e^{D \lceil \psi_e \varphi_e(x)} \lceil \varphi_e(x).$$

Тогда удаляем x из D , перечисляем $\alpha(x)$ в A , и запрещаем интервал $D \lceil \psi_{e,t} \varphi_{e,t}(x)$.

Обсуждение взаимодействия этих требований и подробная конструкция множеств A , B и D оставляем читателю в качестве упражнения.

■

Упражнения

1.1. Приведите прямое доказательство теоремы 109, построив 2-СЕА множество, степень которого ниже \emptyset' и не содержит ω -в. п. множества.

1.2. Пусть $n > 2$ - произвольное натуральное число. Обобщая доказательство теоремы 112 постройте такие n -в. п. множества $B <_T A$, что по тьюринговой сводимости между B и A нет $(n-1)$ -СЕА множеств.

1.3. Докажите, что существуют такие степени **a** и **b**, что **a** $<$ **b**, **a** в. п., **b** в. п. относительно **a**, но не существуют такие множества $B \in \mathbf{b}$, $A \in \mathbf{a}$, что A в. п. и B в. п. относительно A .

1.4.

§2. Новые свойства СЕА n -в. п. степеней.

В этом и последующих параграфах (см., напр., теорему 119) нам придется иметь дело с конструкциями, когда в оракуле находится некоторое 2-СЕА множество $A \oplus W_e^A$. Поэтому мы начнем изложение с обсуждения некоторых специальных способов конструкций с использованием 2-СЕА

оракулов, впервые примененных в работах Джокуша и Шора [1984] и Хинмана и Чолака [1994]. В результате мы сможем организовать вычисления с использованием 2-СЕА оракулов таким образом, как будто в оракуле находится только d -в. п. множества.

Предположим, что u - некоторое число, а D - какое-нибудь d -в. п. множество. Если существует такая последовательность шагов $s_0 < s_1 < s_2$ некоторого d -перечисления D , что $D_{s_0} \lceil u \neq D_{s_1} \lceil u$, но тем не менее $D_{s_0} \lceil u = D_{s_2} \lceil u$, тогда D никогда не совпадет с D_{s_1} на начальном отрезке длины u , так как описанная ситуация означает существование такого элемента $y \in (D_{s_1} - D_{s_0}) \lceil u$, что $y \notin D_{s_2}$. Но D является d -в. п. множеством, а значение $D(y)$ уже дважды изменилось к шагу s_2 , поэтому y позднее не сможет вернуться в D . Это значит, что если число u находится ниже значения use-функции некоторого вычисления, то мы не только сможем сказать, что вычисление, проделанное на шаге s_1 является неверным, но даже то, что после шага s_2 оно никогда не станет верным вычислением.

Ключевая идея имитации похожего поведения и для 2-СЕА множества, находящегося в оракуле, принадлежит Джокушу и Шору [1984] и заключается в следующем: мы увеличиваем значение соответствующей use-функции, определенное в процессе некоторого вычисления с использованием в оракуле 2-СЕА множества $D = A \oplus W^A$, с тем, чтобы соответствующий интервал включал и информацию о той части в. п. множества A , которая была использована в процессе этого вычисления для перечисления элементов в части W^A . Это нам позволит организовать вычисления с 2-СЕА оракулом подобно вышеописанному для 2-в. п. оракула.

Чтобы избежать дополнительных технических сложностей, ниже мы примем следующее соглашение. Если в оракуле находится множество вида $X \oplus Y$, то значением use-функции при некотором вычислении является большее из двух чисел вида $2u'$ и $2u'' + 1$, где u' и u'' - наибольшие элементы, о принадлежности которых соответственно к множествам X и Y спрашивалось в процессе вычисления. В дальнейшем в подобных ситуациях вместо $X \lceil u' \oplus Y \lceil u''$ мы пишем $(X \oplus Y) \lceil u$, и вместо $X \lceil u'$ и $Y \lceil u''$ пишем просто $X \lceil u$ и $Y \lceil u$.

Определение 26 Пусть $W_i \oplus W_j^{W_i}$ такое 2-СЕА множество, что $\Phi(W_i \oplus W_j^{W_i}; x) \downarrow [s]$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^+(W_i \oplus W_j^{W_i}; x, s) = & \max(\{\varphi(W_i \oplus W_j^{W_i}; x)[s]\} \cup \\ & \{\varphi_j(W_i; y)[s] : y \in W_j^{W_i}[s] \lceil \varphi(W_i \oplus W_j^{W_i}; x)[s]\}). \end{aligned}$$

Если $\Phi(W_i \oplus W_j^{W_i}; x) \downarrow$, то пусть

$$\begin{aligned} \varphi^+(W_i \oplus W_j^{W_i}; x) = & \max(\{\phi(W_i \oplus W_j^{W_i}; x)\} \cup \\ & \{\varphi_j(W_i; y) : y \in W_j^{W_i} \lceil \varphi(W_i \oplus W_j^{W_i}; x)\}). \end{aligned}$$

Если $A = W_i$, $W = W_j$ для некоторых i, j , то пишем $\varphi^+(A \oplus W^A; x, s)$.

Таким образом, мы пишем $W^A[s] \lceil \varphi^+(A \oplus W^A; x, s)$ вместо $W^A[s] \lceil \varphi(A \oplus W^A; x)[s]$, или, точнее, вместо $W^A[s]$, ограниченного наибольшим из u'' таких, что число $2u'' + 1$ использовалось при вычислении $\Phi(A \oplus W^A; x)[s]$.

Далее, для получения "хорошей аппроксимации" для 2-СЕА множества $A \oplus W^A$, находящегося в оракуле, мы используем *hat trick*. В данном контексте это будет означать, что существует такая возрастающая последовательность шагов $s_0 < s_1 < \dots$, на которых аппроксимация $A \oplus W^A[s_i]$ оракула ведет себя также, как и сам оракул $A \oplus W^A$.

Определение 27 Пусть множество W_e^A вычислимо перечислимо относительно некоторого в. п. множества A , и пусть $\{A_s\}_{s \in \omega}$ и $\{W_{e,s}^A\}_{s \in \omega}$ вычислимые аппроксимации соответственно для A и W_e^A . Определим $\hat{W}_e^A[s] = \{x : \hat{\Phi}_e(A; x)[s] \downarrow\}$.

Теперь *hat trick* следующим образом позволяет на A -истинных шагах конструкции получить хорошую аппроксимацию и для $A \oplus W_e^A$: на каждом A -истинном шаге s мы будем иметь $\hat{W}_e^A[s] \subset W^A$. Так как множество A и множество его истинных шагов очевидно имеют одинаковую тьюринговую степень, то мы можем заменить в. п. оператор W_e некоторым другим в. п. оператором $W_{f(e)}$, таким, что $W_{f(e)}^A = W_e^A$ и $W_{f(e)}^A[s] \subset W_e^A$ на каждом A -истинном шаге s . Очевидно, эта процедура замены проводится равномерно по (фиксированному) номеру множества A в нумерации в. п. множеств. Таким образом, по данным A и W мы под множеством $A \oplus W^A$ можем подразумевать множество $A \oplus \hat{W}^A$. Другими словами, без ограничения общности мы полагаем, что на каждом A -истинном шаге s имеет место соотношение $W^A[s] \subset W^A$. Отсюда, в частности, следует, что если функция $\Phi(A \oplus W^A)$ всюду определена, тогда для каждого $x \in \omega$ существует бесконечное множество таких шагов s , на которых $((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x))[s] = (A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x)$ (в силу того, что $W^A[s] \lceil \varphi(x)$

принимает свое истинное значение на каждом достаточно большом A -истинном шаге).

Ниже в предложении 116 доказывается, что если некоторое множество A одновременно и ω -в. п. и 2-СЕА, то его степень обязана быть d -в. п. степенью. Из теоремы 119 следует, что это верно не только для множеств, но и для степеней: если степень одновременно является и ω -в. п. степенью и 2-СЕА степенью, то она является d -в. п. степенью.

Предложение 116 *Пусть A в. п. множество, а ω -в. п. множество $C \geq_T A$ вычислимо перечислимо относительно A (т. е. C является A -СЕА множеством). Тогда существует такое d -в. п. множество D , что $C \equiv_T A$.*

Доказательство. Пусть $C = W_e^A$, где $W_e^A = \text{dom}(\Phi_e(A))$, и $A \leq_T W_e^A$. Так как C ω -в. п. множество, то существует такие вычислимые функции g и f , что для всех x ,

$$W^A(x) = \lim_s g(s, x) \text{ и } |s : g(x, s+1) \neq g(x, s)| \leq f(x).$$

Следующим образом определим d -в. п. множество V :

Для каждого $x \in \omega$ ждем наступления такого шага s_0 , что $\Phi_e(A; x) \downarrow [s]$ и $g(x, s) = 1$, и перечисляем $\langle x, 0 \rangle$ в V_{s_0} . Если позднее на некотором шаге $t_0 > s_0$ окажется, что

$$A_t \lceil \varphi_e(A; x)[s] \neq A_s \lceil \varphi_e(A; x)$$

и $g(x, t_0) = 0$, то $\langle x, 0 \rangle$ из V_{t_0} удаляем. Далее, ждем наступления нового шага s_1 такого, что снова $\Phi_e(A; x) \downarrow [s_1]$ (с новым значением use-функции $\varphi_e(A; x)[s_1]$) и $g(x, s_1) = 1$, тогда снова перечисляем $\langle x, 1 \rangle$ в V . Продолжаем этот процесс, перечисляя новые числа $\langle x, j \rangle$ на тех шагах s_j , когда $\Phi_e(A; x) \downarrow [s_j]$ с новым значением use-функции, $g(x, s_j) = 1$, и удаляя эти числа из V на тех шагах t_j , когда $\Phi_e(A; x)$, определенное на шаге s_j , становится неопределенным на шаге t_j , и $g(x, t_j) = 0$.

Ясно, что так построенное множество V является d -в. п. множеством. Ясно также, что $V \leq_T A \oplus W_e^A$, так как либо $\{\langle x, j \rangle : j \in \omega\} \cup V = \emptyset$, либо единственным элементом $V^{[x]}$ является $\langle x, j \rangle$, который соответствует истинному значению $\Phi_e(A; x)$.

Также легко проверяется, что $W_e^A \leq_T V$. Действительно, если $\langle x, i \rangle \in V$ для некоторого $i \leq f(x)$, то $x \in W_e^A$; если же такого i не существует, тогда $x \notin W_e^A$. Таким образом, $C \equiv_T A \oplus W_e^A \equiv_T A \oplus V$. ■

Перед тем, как перейти к теореме 119, в качестве следствия к предложению 116 получим следующие два утверждения.

Теорема 117 Для всех $n > 1$, если **a** является собственно $(n+1)$ -в. п. степенью, то существует такая n -в. п. степень **b** $<$ **a**, что в интервале между **b** и **a** нет в. п. степеней.

Доказательство. Пусть $n > 1$ и A является $(n+1)$ -в. п. множеством. Существует n -в. п. множество \tilde{A} , относительно которого A является \tilde{A} -СЕА множеством (см. упр. 1.1.) Ясно, что $\tilde{A} <_T A$. Предположим, что существует такое в. п. множество W , что $\tilde{A} \leq_T W <_T A$. Тогда A является W -СЕА множеством и, следовательно, 2-СЕА. Но тогда, по предложению 116, Т-степень A является d -в. п. степенью, что противоречит предположению теоремы. ■

Если степени **a** и **b** таковы, что **a** $<$ **b** и между степенями **a** и **b** нет степеней из некоторой совокупности степеней A , то говорят, что **a** изолирует **b** (или **b** изолирована **a**) относительно совокупности A . Таким образом, для каждого $n > 1$, каждая собственная $(n+1)$ -в. п. степень изолирована относительно совокупности в. п. степеней некоторой n -в. п. степенью, расположенной под ней. Что касается изолированности относительно других классов множеств, относящимся к более высоким уровням иерархии Ершова, Купер и Йе [1993, теорема 3.1] доказали, что если B является d -в. п. множеством, а в. п. множество $A <_T B$, то существует такое d -в. п. множество C , что $A <_T C <_T B$. Таким образом, никакое в. п. множество не может изолировать d -в. п. множества относительно совокупности d -в. п. степеней. Более того, из предложения 116 следует, что для каждого $n > 1$, относительно совокупности d -в. п. степеней никакое в. п. множество не может изолировать $(n+1)$ -в. п. множества.

Теорема 118 Пусть $n \geq 1$. Для произвольных n -в. п. множества B и в. п. множества A , если $A <_T B$, то существует такое d -в. п. множество C , что $A <_T C <_T B$.

Доказательство индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение следует из теоремы Сакса о плотности упорядочения в. п. степеней. Теперь пусть B является $(n + 1)$ -в. п. множеством, $n > 0$, и пусть $A <_T B$ некоторое в. п. множество. Существует n -в. п. множество $\tilde{B} \leq_T B$, относительно которого B вычислимо перечислимо. Ясно, что множество $A \oplus \tilde{B}$ также n -в. п. Если $A <_T A \oplus \tilde{B}$, тогда, по предположению индукции, существует такое d -в. п. множество C , что $A <_T C <_T A \oplus \tilde{B} \leq B$. Если же $A \equiv_T A \oplus \tilde{B}$, тогда $(n + 1)$ -в. п. множество B вычислимо перечислимо относительно в. п. множества $A <_T B$. Следовательно, по предложению 116 множество B имеет 2-в. п. степень. Теперь утверждение теоремы следует из упомянутого выше результата Купера и Йе. ■

Теорема 119 *Пусть C - ω -в. п. множество, а A - в. п. множество. Если $C \leq_T A \oplus W^A$, то существует такое d -в. п. множество D , что $C \leq_T D \leq_T A \oplus W^A$.*

Доказательство. Так как множество C является ω -в. п. множеством, то существуют такие вычислимые функции $f(s, x)$ и $g(x)$, что для каждого x ,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s, x) = C(x) \text{ и } |\{s : f(s + 1, x) \neq f(s, x)\}| < g(x).$$

Пусть $C = \Phi(A \oplus W^A)$. Ниже для краткости мы опускаем оракул $A \oplus W^A$ в записи Φ и φ . Для функционала Φ мы с помощью функции φ^+ следующим образом определяем модифицированную версию user-функции:

$$u(x, s) = \begin{cases} \uparrow, & \text{если } \Phi(A \oplus W^A; x) \neq f(x)[s], \\ u(x, t), & \text{если } \exists t < s(((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x))[t] \\ & = ((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x))[s]), \\ \max(\{\varphi^+(x)[t] + 1 : t \leq s\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что

$$u(x, s) = u(x, t) \iff ((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x))[t] = ((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x))[s],$$

Следующим образом строим искомое d -в. п. множество D : для каждого $x \in \omega$, ждем наступления такого шага s_0 , что $(\Phi(A \oplus W^A; x) = f(x))[s_0] = 1$, и тогда перечисляем $\langle x, 1, 0 \rangle$ в D_{s_0} . Далее, ждем наступления такого шага $t_0 > s_0$, что $(\Phi(A \oplus W^A; x) = f(x))[t_0] = 0$. Если такой

шаг найдется, то перечисляем $\langle x, 0, 0 \rangle$ в D_{t_0+1} . Если позднее наступит новый шаг s_1 такой, что $(\Phi(A \oplus W^A; x) \neq f(x))[s_1] = 1$, тогда мы перечисляем в множество D_{s_1} число $\langle x, 1, 1 \rangle$. Продолжаем этот процесс, на шагах $s_j < t_j$ попеременно добавляя во множество D либо маркер $\langle x, 1, j \rangle$ (на шаге s_j , на котором $(\Phi(A \oplus W^A; x) \neq f(x))[s_j] = 1$), либо маркер $\langle x, 0, j \rangle$ (на шаге t_j , на котором $(\Phi(A \oplus W^A; x) \neq f(x))[t_j] = 0$). При наличии двух шагов $s < s'$ таких, что $u(x, s) = u(x, s' + 1) \neq u(x, s')$, из множества D убираем все маркеры, перечисленные в него на шагах $t, s < t \leq s'$.

Ясно, что D является d -в. п. множеством. Кроме того, $C \leq_T D$, так как для каждого x мы с помощью оракула D можем найти наибольшее $j < g(x)$ такое, что либо $\langle x, 0, j \rangle \in D$ либо $\langle x, 1, j \rangle \in D$. Тогда $x \in C$ тогда и только тогда, когда $\langle x, 1, j \rangle \in D$. (Более того, очевидно, что $C \leq_{tt} D$, а если C является n -в. п. множеством для некоторого $n < \omega$, то $C \leq_{btt} D$.)

Докажем, что $D \leq_T A \oplus W^A$. Пусть $\langle x, i, j \rangle \in \omega$. Используя *hat trick* определим s как наименьший шаг такой, что

$$(A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x)) [s] = (A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x), \text{ и}$$

$$\Phi(A \oplus W^A; x)[s] = f(x)) [s] = C(x).$$

Так как $C \leq_T A \oplus W^A$, то s можно найти равномерно по x , зная $A \oplus W^A$.

Докажем, что $\langle x, i, j \rangle \in D$ тогда и только тогда, когда $\langle x, i, j \rangle \in D_s$. Существует бесконечное множество таких шагов $s' > s$, что $u(x, s) = u(x, s')$. Поэтому все маркеры для x , перечисленные в D после шага s , из него удаляются, поэтому $\langle x, i, j \rangle \in D$ влечет $\langle x, i, j \rangle \in D_s$.

С другой стороны, предположим, что существует такое $\langle x, i, j \rangle$, что $\langle x, i, j \rangle \in D_s$, но позднее, на некотором шаге $t > s$, $\langle x, i, j \rangle$ удаляется из D . Мы можем предположить, что $\langle x, i, j \rangle$ на самом деле было перечислено в D на шаге s . (В противном случае мы можем заменить s последним шагом таким, перед которым было совершено некоторое действие.) Ясно, что существует такой шаг $v < s$, что $u(x, t) = u(x, v)$ и, следовательно,

$$((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x)) [t] = ((A \oplus W^A) \lceil \varphi^+(x)) [v].$$

Заметим, что $u(x, s) \neq u(x, v)$, так как $\langle x, i, j \rangle$ не удаляется из D на шаге s . Если $u(x, v) < u(x, s)$, тогда, так как $(A[\phi^+(x)][v] = (A[\phi^+(x)][t]$, должен существовать некоторый $y \in W^A[s] - W^A[v]$. Так как y удаляется из W^A на шаге t , а A является в. п. множеством, то $A_s[\varphi^+(x)[s] \neq A_t[\varphi^+(x)[s]$, в противоречие с тем, что $A_s[\varphi^+(x)[s] = A[\varphi^+(x)[s]$. Если $u(x, s) < u(x, v)$, тогда должен существовать некоторый $w < v$ такой, что $((A \oplus W^A)[\varphi^+(x)][s] = ((A \oplus W^A)[\varphi^+(x)][w]$. (Иначе $u(x, v) + 1 \leq u(x, s)$, по определению u .) Аналогично, должен существовать такой $y \in W^A[v] - W^A[s]$, что $A_v[\varphi^+(x)[v] \neq A_s[\varphi^+(x)[v]$ и, следовательно, $A_v[\varphi^+(x)[v] \neq A_t[\varphi^+(x)[v]$, что противоречит тому, что $u(x, v) = u(x, s)$. Это завершает доказательство. ■

Нетрудно убедиться, что d -в. п. множество D , построенное в этой теореме, само вычислимо перечислимо относительно множества A , а не только имеет A -вычислимо перечислимую степень. Дело в том, что маркер, связанный с некоторым числом x , выбрасывается из D только тогда, когда существует какое-нибудь изменение ниже значения use-функции некоторого вычисления $\varphi^+(A \oplus W^A; x)[s]$, что вынуждает вернуться к тому состоянию $A \oplus W^A$, которое было в тот момент, когда этот маркер перечислялся в D . Но это может произойти только в результате какого-нибудь изменения в A , произошедшего ниже значения use-функции некоторого вычисления, определенного на шаге, когда этот элемент был перечислен в D . Таким образом, мы имеем следующий результат:

Следствие 120 *Пусть ω -в. п. множество C T -эквивалентно некоторому A -CEA множеству, где A - в. п. множество. Тогда существует такое d -в. п. множество D такое, что $C \equiv_T D$ и D в. п. относительно множества A .*

Доказательство. Достаточно в предыдущей теореме положить $C \equiv_T A \oplus W^A$. Тогда $D \leq_T C$, поэтому $C \equiv_T D$. ■

Из теоремы 119 непосредственно получаем следующее

Следствие 121 *Любая ω -вычислимо перечислимая 2-CEA степень является d -в. п. степенью.*

Упражнения

2.1. Докажите пункт 2 теоремы ???. Указание. Обобщите доказательство теоремы ?? Theorem 3.6.

2.2. Приведите новое доказательство теоремы 119 по следующей схеме: пусть множества A и C как в теореме 119, а B - Т-эквивалентное C A -СЕА множество. Сначала постройте ω -в. п. множество $D \equiv_T B$, которое также является A -СЕА множеством, а потом примените предложение 116.

§3. СЕА и d -в. п. степени

Теорема 122 Пусть A - такое невычислимое в. п. множество, что $A' \equiv_T \emptyset'$. Тогда существует множество $B \geq_T A$ такое, что B в. п. относительно A и Т-степень множества B не вычислимо перечислима.

Вопрос 123 Для каких в. п. степеней $\mathbf{a} < \mathbf{c}$ существует такая d -в. п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{a}$, что \mathbf{b} является СЕА степенью относительно степени \mathbf{a} и расположена ниже \mathbf{c} ?

Предложение 124 Пусть $\mathbf{c} < \mathbf{h}$ такие в. п. степени, что \mathbf{c} является низкой, а \mathbf{h} высокой. Тогда существует такая не в. п. степень $\mathbf{a} < \mathbf{h}$, что \mathbf{a} является СЕА степенью относительно \mathbf{c} .

Доказательство. Опишем изменения, которые нужно внести в доказательство Соара и Стоба [1982]. Заметим, прежде всего, что $\mathbf{c}'' = \mathbf{h}'$. Отсюда следует, что существует такая вычислимая относительно \mathbf{h} функция k , что k мажорирует все вычислимые относительно \mathbf{c} функции. Обозначим через H в. п. множество, степень которого есть \mathbf{h} , и пусть e такое число, что $\Phi_e^H = k$. Определим $g(x, s) = \Phi_e(H; x)[s]$, если последнее определено, и $g(x, s) = 0$, в противном случае (как обычно, мы предполагаем, что $\Phi_e(H; x)[s] < s$). Ясно, что g вычислена, $\lim_s g(x, s) = k(x)$, и этот предел достигается только после $k(x)$ (т. е. $\mu s(\forall t > s\{g(x, s) = g(x, t)\}) > k(x)$). С

помощью оракула H мы можем определить шаг s , после которого $g(x, s)$ не изменится. Теперь уточняем конструкцию следующим образом. Когда нам кажется, что наступила такая ситуация, когда мы должны положить x_{i-1}^s в $A(B)$ (напоминаем, что Соар и Стоб строят два множества, A и B , одно из которых имеет нужную степень \mathbf{a}) с некоторой ассоциированной аксиомой, мы запрещаем $A(B)$ на соответствующем интервале и ждем изменения $g(x_{i-1}^s, t)$. Если она изменится до того, как изменится C в запрещенном интервале, то кладем x_{i-1}^s в $A(B)$. В противном случае действуем в точности как у Соара и Стоба [1982].

Теорема 125 Для всех высоких в. п. степеней $\mathbf{h} < \mathbf{g}$ существует собственная d -в. п. степень \mathbf{a} такая, что $\mathbf{h} < \mathbf{a} < \mathbf{g}$ и \mathbf{a} в. п. относительно \mathbf{h} .

Доказательство. Пусть $H \in \mathbf{h}$ и $G \in \mathbf{g}$ - в. п. множества. Мы построим такое d -в. п. множество D , что $A = H \oplus D$ будет обладать всеми нужными свойствами, а именно, A в. п. относительно H , $A \leq_T G$ и степень A не вычислочно перечислима.

Для выполнения последнего условия, мы множество D строим, удовлетворяя для всех e требованиям

$$R_e : D \neq \Phi_e^{W_e} \vee W_e \neq \Psi_e^{H \oplus D},$$

где $\{(W_e, \Phi_e, \Psi_e)\}_{e \in \omega}$ есть некоторая эффективная нумерация всех возможных троек, состоящих в. п. множества W и частично вычислимых функционалов Φ и Ψ . Кроме того, условие $A \leq_T G$ мы выполняем с помощью метода разрешения.

Для удовлетворения этих требований мы используем стратегию, использованную в доказательстве теоремы ... с небольшими изменениями.

Основной стратегией для требования R_e без условия $A \leq_T G$ и при отсутствии H -изменений является стратегия теоремы 61: для удовлетворения требования R_e мы берем еще не использованного свидетеля x и ждем такого шага s , что

$$D_s(x) = \Phi_e^{W_e}[\varphi_e(x)[s] \wedge W_e[\varphi_e(x)[s]] = \Psi_e^{(H \oplus D)[\psi_e \varphi_e(x)]}[\varphi_e(x)[s]],$$

далее запрещаем интервал $D[\psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)]$, кладем x в D и ждем нового шага s' , на котором

$$D_{s'}(x) = \Phi_e^{W_e}[\varphi_e(x)[s']] \wedge W_e[\varphi_e(x)[s']] = \Psi_e^{(H \oplus D)[\psi_e \varphi_e(x)]}[\varphi_e(x)[s']].$$

Тогда удаляем x из D и запрещаем интервал $D[\psi_{e,s'} \varphi_{e,s'}(x)]$.

Если $H[\psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)]$ не изменится после шага s , тогда требование R_e удовлетворено посредством x . Теперь как в теореме ... налагаем “неявные” ограничения на H , пытаясь показать, что $G \leq_T H$ посредством функционала Γ_e . Делаем бесконечно много попыток удовлетворить R_e посредством ω -последовательности “циклов”, где каждый цикл действует следующим образом:

1. Выбираем еще не использованного свидетеля x_k , большего всех до сих пор упомянутых в процессе конструкции чисел.
2. Ждем наступления такого шага s , на котором

$$D(x_k) = \Phi_e^{W_e}[\varphi_e(x_k) \wedge W_e[\varphi_e(x_k)] = \Psi_e^{(H \oplus D)[\psi_e \varphi_e(x_k)]}[\varphi_e(x_k)].$$

(Если это никогда не случится, тогда требование R_e удовлетворено посредством x_k .)

3. Запрещаем интервал $D[\psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)]$.
4. Определяем $\Gamma_e^H(k) = G_s(k)$ со значением use -функции $\gamma_e(k) = \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$, и открываем цикл $k + 1$ для параллельной работы с циклом k .
5. Ждем изменения $G(k)$ на некотором шаге s' .
6. Останавливаем циклы $k' > k$, кладем x_k в D .
7. Ждем такого шага s'' , что

$$D(x_k) = \Phi_e^{W_e}[\varphi_e(x_k) \wedge W_e[\varphi_e(x_k)] = \Psi_e^{(H \oplus D)[\psi_e \varphi_e(x_k)]}[\varphi_e(x_k)].$$

8. Удаляем x_k из D и запрещаем $D[\psi_{e,s''} \varphi_{e,s''}(x_k)]$.

Как только на некотором цикле обнаружится $H[\psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)]$ -изменение после шага s , уничтожаем все циклы $k' > k$, оставляем их функционалы неопределенными и возвращаемся к этапу 2.

Этот модуль имеет следующие возможные выходы:

(A) В конечном итоге каждый цикл k либо находится на этапе 5 в бесконечном ожидании $G(k)$ -изменения, либо после этапа 6 получает $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$ -изменение. В этом случае $\Gamma_e^H = G$, что противоречит условию теоремы.

(B) Некоторый (наименьший) цикл k_0 бесконечно ожидает на этапе 2, 7, или 8. Тогда требование R_e удовлетворено на цикле k_0 .

(C) Некоторый (наименьший) цикл k_0 получает бесконечно много H -изменений после этапа 2. Тогда любо $\Phi_e^{W_e}$, либо $\Psi_e^{H \oplus D}$ не всюду определен, и снова требование R_e удовлетворено на цикле k_0 .

Следовательно, либо мы добились успеха в удовлетворении требования R_e через выходы (B) или (C), либо существуют бесконечно много циклов, на которых происходят такие G -изменения, что $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$ после этапа 6 не меняется. Имея это ввиду, перейдем к рассмотрению условия "A в. п. относительно H ".

С этой целью мы используем обычный подход, который заключается в следующем. Когда некоторый свидетель x_k на шаге s перечисляется в D , назначаем определенный маркер $\alpha(x_k)$. Теперь x_k разрешается покинуть A на шаге $t > s$ только если $H \lceil \alpha(x_k) \neq H_t \lceil \alpha(x_k)$.

Ясно, что это обеспечит вычислимую перечислимость A относительно H . Но теперь трудность заключается в том, что $H \lceil \alpha(x_k)$ -изменение может за собой повлечь $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$ -изменение после шага s' and so after step 6 (если $\alpha(x_k) \leq \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$), что разрушит нашу атаку R_e с помощью свидетеля x_k .

Выше мы видели, что если выходы (B) или (C) не имеют места, тогда существует бесконечно много таких циклов k , на которых $G(k)$ после шага s меняется, а $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$ после шага пункта 6 не меняется. Теперь характеристическое свойство высоких степеней позволяет определить частично вычислимую функцию α , которая, начиная с некоторого k_0 , каждый цикл $k > k_0$ получает $H \lceil \alpha(x_k)$ -изменение после шага $m = s''$ пункта 7.

Таким образом, для некоторого цикла $k > k_0$ мы получаем $G(k)$ -изменение в пункте 5, не имеем $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$ -изменений после пункта 6, и $H \lceil \alpha(x_k)$ -изменение после пункта 7. Этого будет достаточно для удовлетворения требования R_e в цикле k .

По теореме Робинсона [1968] мы можем выбрать такое в. п. множество

$H \in \mathbf{h}$ и такое перечисление $\{H_s\}_{s \in \omega}$ множества H , что функция

$$c_H(x) = (\mu s > x)[H_s \lceil x = H \lceil x]$$

доминирует все вычислимые функции.

Теперь следующим образом определим функции α и m : каждый цикл k выполняется как прежде, но со следующим пунктом 6 $\frac{1}{2}$, выполняемым после пункта 6:

- 6 $\frac{1}{2}$. а) Пусть $\alpha(x_k)$ означает число, большее всех упомянутых к данному шагу в процессе конструкции чисел. В частности, оно больше максимума всех действующих значений Ψ_e -use функций.
- б) Пусть p is такое наименьшее число, что $m(p)$ не определено. Определим $m(p)$ равным первому шагу $t > s$ (если такой шаг существует) такому, что либо

$$H_t \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k) \neq H_{t-1} \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k),$$

либо

$$D_t(x) = \Phi_e^{W_e \lceil \varphi_e(x)}(x)[t] \wedge W_e \lceil \varphi_e(x)[t] = \Psi_e^{(H \oplus D) \lceil \psi_e \varphi_e(x)} \lceil \varphi_e(x)[t].$$

(это - пункт 7 k -го цикла).

Ясно, что $\alpha(x_k) \geq p$. Заметим также, что если $m(p)$ не определено для некоторого (наименьшего) p , тогда требование R_e удовлетворено на цикле k , на котором было начато ожидание значения $m(p)$.

Если m всюду определена, тогда $c_H(p) > m(p)$ для всех $p \geq$ некоторого p_0 . Для каждого такого p имеем $H_{m(p)} \lceil p \neq H \lceil p$. Если $m(p)$ определено на цикле k , тогда $\alpha(x_k) \geq p$. Отсюда следует, что $H_{m(p)} \lceil \alpha(x_k) \neq H \lceil \alpha(x_k)$ for для $k \geq$ некоторого k_0 . Мы уже упоминали, что $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x_k)$ после пункта 6 для бесконечно многих k не изменится. Для любого такого k имеем $m(p) = s''$ (шаг пункта 7). Это значит, что все такие циклы после пункта 7 получают желанные $H \lceil \alpha(x_k)$ -изменения.

Теперь каждый цикл k действует как прежде, но с пунктом 6 $\frac{1}{2}$, вложенным между пунктами 6 и 7, а также со следующим пунктом, вложенным за пунктом 7:

7 $\frac{1}{2}$. Ждем изменения $H \lceil \alpha(x_k)$, и тогда действуем дальше.

Это нам позволит сделать A в. п. относительно H .

Теперь добьемся выполнения условия $A \leq_T G$ с помощью метода разрешения.

Мы нуждаемся в разрешении от G , чтобы положить x в D в пункте 7, а также изъять его из D в пункте 8. Первое разрешение уже дано благодаря $G(k)$ -изменению в пункте (6). Второго разрешения мы добываемся с помощью небольшого изменения в стратегии: просим разрешения для j многократно для всех больших и больших значений j .

Основной модуль для R_e -стратегии состоит из $(\omega \times \omega)$ -последовательности циклов (j, k) , $j, k \in \omega$. Первым запускается цикл $(0, 0)$, и каждый цикл (j, k) может запустить либо цикл $(j, k + 1)$, либо цикл $(j + 1, 0)$, а также остановить или полностью закрыть циклы (j', k') для $(j, k) < (j', k')$ (в лексикографическом порядке). Каждый цикл (j, k) может определить $\Gamma_j^H(k)$ и $\Delta^H(j)$. (Γ_j и Δ функционалы для вычисления G по H .) Кроме того, мы определяем функции t и α . Каждый цикл (j, k) может определить значения $\alpha(x)$ и $t(p)$ для текущего значения свидетеля x и наименьшего p такого, что $t(p)$ не определено, соответственно. Работа цикла происходит следующим образом:

1. Выбираем в качестве свидетеля еще не использованное число x , большее всех чисел, ранее упомянутых в процессе конструкции.
2. Ждем такого шага s , на котором

$$D(x) = \Phi_e^{W_e \lceil \varphi_e(x)}(x) \wedge W_{e,s} \lceil \varphi_e(x) = \Psi_e^{(H \oplus D) \lceil \psi_e \varphi_e(x)} \lceil \varphi_e(x).$$

(Если это никогда не произойдет, тогда требование R_e удовлетворено посредством свидетеля x .)

3. Запрещаем интервал $D \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)$ от воздействия остальных стратегий.
4. Определяем $\Gamma_j^H(k) = G_s(k)$ со значением *use*-ункции $\gamma_j(k) = \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)$, и, одновременно с циклом (j, k) запускаем и цикл $(j, k + 1)$.
5. Ждем изменений $H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)$ или $G(k)$ (скажем, на шаге s').

Если первым изменится H , тогда закрываем циклы $(j', k') > (j, k)$, убираем D -запреты цикла (j, k) , и возвращаемся к пункту 2. Если

же первым изменится G , тогда останавливаем циклы $(j', k') > (j, k)$ и переходим к пункту 6.

6. Кладем x в D .

7. Обозначим через $\alpha_s(x)$ первое число, большее всех ранее упомянутых в конструкции, в частности, $\alpha_s(x)$ больше всех действующих значений Ψ_e -use функций. Пусть p такое наименьшее число, для которого $m(p)$ еще не определено. Определим $m(p)$ как первый шаг $t > s$ (если он существует) такой, что либо $H_t \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x) \neq H_{t-1} \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)$, либо

$$D_t(x) = \Phi_e^{W_e \lceil \varphi_e(x)}(x)[t] \wedge W_e \lceil \varphi_e(x) = \Psi_e^{(H \oplus D) \lceil \psi_e \varphi_e(x)} \lceil \varphi_e(x)[t].$$

8. Ждем наступления такого шага s'' , на котором

$$D(x) = \Phi_e^{W_e \lceil \varphi_e(x)}(x) \wedge W_{e,s''} \lceil \varphi_e(x) = \Psi_e^{(H \oplus D) \lceil \psi_e \varphi_e(x)} \lceil \varphi_e(x).$$

9. Запрещаем $D \lceil \psi_{e,s''} \varphi_{e,s''}(x)$ от воздействия других стратегий.

10. Определим $\Delta^H(j) = G_{s''}(j)$ со значением use -функции $\delta(j) = \psi_e \varphi_e(x)$ м одновременно с циклом (j, k) запускаем цикл $(j+1, 0)$.

11. Ждем изменения $H \lceil \psi_{e,s''} \varphi_{e,s''}(x)$ or $G(j)$.

Если первым изменится H , то закрываем все циклы $(j', k') \geq (j+1, 0)$, опускаем D -запреты цикла (j, k) до $\psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x)$, и возвращаемся к пункту 8. Если же первым изменится G , тогда останавливаем циклы $(j', k') \geq (j+1, 0)$ и переходим к пункту 12.

12. Ждем изменения $H \lceil \alpha_s(x)$.

13. Удаляем x из D .

14. Ждем

$$H \lceil \psi_{e,s} \varphi_{e,s}(x) \neq H \lceil \psi_e \varphi_e(x)[s] \text{ или } H \lceil \psi_{e,s''} \varphi_{e,s''}(x) \neq H \lceil \psi_e \varphi_e(x)[s''].$$

Уходим к пунктам 15 или 16, соответственно.

15. Переопределяем $\Gamma_j^H(k) = G(k)$, убираем циклы $(j', k') > (j, k)$, запускаем цикл $(j, k+1)$, и останавливаем цикл (j, k) .

16. Переопределяем $\Delta^H(j) = G(j)$, уничтожаем циклы $(j', k') \geq (j + 1, 0)$, запускаем цикл $(j + 1, 0)$, и закрываем цикл (j, k) .

Когда цикл (j, k) запускается, его предыдущие действия аннулируются и его функционал становится неопределенным из-за H -изменений. Поэтому Γ_j и Δ определены корректно.

Конструкция и оставшиеся части доказательства теоремы 125, за исключением утверждения $A \leq_T G$, аналогичны доказательству теоремы 98 Купера, Лемппа и Ватсона с очевидными изменениями и поэтому здесь не приводятся. Приведем доказательства утверждения $A \leq_T G$.

Лемма 126 $D \leq_T G$.

Доказательство. Для того, чтобы с помощью оракула G определить, верно ли, что $x \in D$, сначала находим такой шаг s , что $G_s[x] = G[x]$. Если $\alpha_s(x)$ не определена, тогда $x \notin D$. В противном случае находим такой шаг t , что $H_t[\alpha_s(x)] = H[\alpha_s(x)]$. (Вспомним, что $H \leq_T G$.) Теперь $x \in D$ тогда и только тогда, когда $x \in D_t$.

§4. Неинтерполяционная теорема

Теорема 127 Существует такое в. п. множество A , что $\emptyset <_T A < \emptyset'$, и T -степень любого вычислимого перечислимого относительно A множества B , $A \leq_T B \leq_T \emptyset'$, является вычислимой перечислимой.

ЛИТЕРАТУРА

Аддисон (J.W. Addison)

- [1965] The method of alternating chains, In: Theory of Models, North Holland, Amsterdam, 1965, 1-16.

Амбос-Шпиис, Вайраух и Ценг (K. Ambos-Soies, K. Weihrauch and X. Zheng)

- [2000] Weakly computable real numbers, Journal of Complexity, 16(4)(2000), 676- 690.

Арсланов (М.М. Арсланов)

- [1979] Слабо рекурсивно перечислимые множества и предельная вычислимость, Вероятн. Методы и Киберн., 15 (1979), 3 - 9.
- [1981] О некоторых обобщениях теоремы о неподвижной точке, Изв. Вузов. Мат., 228 N5 (1981), 9 - 16.
- [1982] Об одной иерархии степеней неразрешимости, Вер. Методы и Киберн., 18 (1982), 10 - 18.
- [1985] Структурные свойства степеней ниже $0'$, Докл. АН СССР, 283(1985), 270 - 273.
- [1988] О верхней полурешетке степеней ниже $0'$, Изв. Вузов. Мат., 7(1988), 27 - 33.
- [1997] Degree structures in the Local degree theory, In:Complexity, Logic and Recursion Theory (A. Sorbi, ed.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 187, (1997), Marcel Dekker, New York, 49-74.
- [2000] Open questions about the n-c.e. degrees, Contemporary Mathematics, 257 (2000), 15 - 22.
- [2006] Generalized tabular reducibilities in infinite levels of the Ershov difference hierarchy, In: "Logical Approaches of Computational Barriers"(A. Beckmann, U. Berger, B. Lowe, J. Tucker, eds.), Swansea, UK, 2006), 15 - 23.

Арсланов, Калимуллин и Лемпп (M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin and S. Lempp)

[2010] On Downey’s conjecture, *J. Symb. Logic*, 75(2010), 401-441.

Арсланов, Купер и Ли (M.M. Arslanov, S.B. Cooper and A. Li)

[2000] There is no low maximal d.c.e. degree, *Math. Logic Quart.*, 46(2000), 409-416.

[2004] There is no low maximal d.c.e. degree, *Corrigendum, Math. Logic Quart.*, 50(2004), 628-636.

Арсланов, ЛаФорт и Сламан (M.M. Arslanov, G.L. LaForte and T.A. Slaman)

[1998] Relative recursive enumerability in the difference hierarchy, *J. Symb. Logic*, 63(1998), 411-420.

Арсланов, Лемпп и Шор (M.M. Arslanov, S. Lempp and R.A. Shore)

[1996a] On isolating r. e. and isolated d-r. e. degrees, *London Math. Soc. Lect. Note Series*, Cambridge University Press, 224 (1996), 41-80.

[1996b] Interpolating d-r.e. and REA degrees between r.e. degrees, *Ann. Pure Appl. Logic*, 78 (1996), 29-56.

Афшари, Бармпалиас, Купер и Штефан (B. Afshari, G. Barmpalias, S.B. Cooper and F. Stephan)

[2007] Post’s Programme for the Ershov hierarchy”, *Journal of Logic and Computation*, 17 (2007), 1025-1040.

Вайраух и Ценг (K. Weihrauch and X. Zheng)

[1998] A finite hierarchy of recursively enumerable real numbers, In: *Proceedings of MFCS’98*, Brno, Czech Republic, August 1998, vol. 1450 of LNCS, 798-806, Springer, 1998

Голд (E.M. Gold)

[1965] Limiting recursion, *J. Symb. Logic*, 30 (1965), 28 - 48.

Джиянг (Z. Jiang)

[1993] Diamond lattice embedded into d.r.e. degrees, *Science in China (Series A)*, 36 (1993), 803 - 811.

Джокуш (C.G. Jockusch, Jr.)

- [1968] Semirecursive sets and positive reducibility, Trans. Amer. Math. Soc., 131 (1968), 420 - 436.

Джокуш, Лерман, Соар и Соловей (C.G. Jockusch, Jr., M. Lerman, R.I. Soare and R. M. Solovay)

- [1989] Recursively enumerable sets modulo iterated jumps and extensions of Arslanov's completeness criterion, J. Symbolic Logic, 54 (1989), 1288 - 1323.

Джокуш и Оуингс (C.G. Jockusch, Jr., J.C. Owings, Jr.)

- [1990] Weakly semirecursive sets, J. Symb. Logic, 55 (1990), 637 - 644.

Джокуш и Шор (C.G. Jockusch, Jr. and R.A. Shore)

- [1983] Pseudo jump operators I: The R.E. case, Trans. Amer. Math. Soc., 275 (1983), 599 - 609.
- [1984] Pseudo jump operators. II: Transfinite iterations, hierarchies, and minimal covers, J. Symbolic Logic, 49 (1984), 1205 - 1236.
- [1985] REA operators, R.E. degrees, and minimal covers, In: Recursion Theory, Proceedings of AMS-ASL Summer Institute on Recursion Theory, held at Cornell University, Ithaca, New York, June 28 - July 16, 1982 (Nerode and Shore, eds.), Proc. Symp. Pure Math., 42, 1985, 3 - 11.

Доуни (R. G. Downey)

- [1989] D.r.e. degrees and the Nondiamond Theorem, Bull. London Math. Soc., 21 (1989), 43 - 50.

Доуни, Ву и Ценг (R. G. Downey, G. Wu and X. Zheng)

- [2003]

Доуни, Лафорт и Лемпп (R.G. Downey, G.L. LaForte and S. Lempp)

- [1999] A Δ_2^0 -set with barely Σ_2^0 -degree, J. Symbolic Logic, 64 (1999), 1700-1718.

Доуни и Стоб (R.G. Downey and M. Stob)

[1993] Splitting theorems in recursion theory, Ann. Pure Appl. Logic, 65 (1993), 1-106.

Доуни, Хиршвейлдт и Лафорте (R. Downey, D.R. Hirschfeldt, G.L. LaForte)
[2007]

Доуни и Ю (R.G. Downey and L. Yu)

[ta] There are no maximal low d.c.e. degrees, to appear.

Ершов (Ю.Л. Ершов)

[1968a] Об одной иерархии множеств I, Алгебра и Логика, 7 (1968),
47 - 73.

[1968b] Об одной иерархии множеств II, Алгебра и Логика, 7 (1968),
15 - 47.

[1970] Об одной иерархии множеств III, Алгебра и Логика, 9
(1970), 34 - 51.

Ершов и Палютин (Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.)

[1987] Математическая логика, Наука, Москва, 1987.

Ейтс (C.E.M. Yates)

[1998] On the degrees of index sets, II, Trans. Amer. Math. Soc., 135
(1969), 249-266.

Ишмухаметов (Ш.Т. Ишмухаметов)

[1986] On index sets of T-degrees of differences, Ul'janovsk, Preprint
VINICI 25.07.86, 1986.

Каддах (D. Kaddah)

[1993] Infima in the d.r.e. degrees, Ann. Pure Appl. Logic, 62 (1993),
207 - 263.

Калуда, Хертлинг, Хусаинов и Ванг (C.S. Calude, P.H. Hertling, B.
Khoussainov and Y. Wang)

- [2001] Recursively enumerable reals and Chaitin Ω -number, Theoretical Computer Science, 255 (2001), 125-149.

Кантор (G. Cantor)

- [1897] Beitrage zur Begrungung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann., 49 (1897), 207 - 246.

Карстенс (H.G. Carstens)

- [1978] Δ_2^0 -mengen, Arch.Math. Log. Grundlag., 18 (1978), 55 - 65.

Кей, Шор и Сламан (M.Cai, R.A. Shore and T. Slaman)

- [ta] The n-r.e. degrees: undecidability and Σ_1 substructures, to appear.

Клини (S.C. Kleene)

- [1938] On notation for ordinal numbers, J. Symb. Logic, 3 (1938), 150 - 155.

Купер (S.B. Cooper)

- [1971] Degrees of Unsolvability, Ph. D. Thesis, University of Leicester, 1971.
[1991] The density of the low₂ n-r. e. degrees, Arch. Math. Logic, 30 (1) (1991), 19-24.
[1992] A splitting theorem for the n-r. e. degrees, Proc. Am. Math. Soc., 115 (1992), 461-471.
[2004] Computability theory, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, New York, London, 2004.

Купер и Ий (S.B. Cooper and X. Yi)

- [1996] Isolated d-r.e. degrees, Preprint.

Купер, Лемпп и Ватсон (S.B. Cooper, S. Lempp and P.Watson)

- [1989] Weak density and cupping in the d-r.e. degrees, Israel J. Math., 67 (1989), 137-152.

Купер и Ли (S.B. Cooper and A. Li)

- [2002] Turing definability in the Ershov hierarchy, Journal of London Math. Soc. (2), 66 (2002), 513-526.
- [2000?] Splitting and cone avoidance in the d.c.e. degrees, Science in China (Series A), 45 (2000), 1135-1146.

Купер, Харрингтон, Лахлан, Лемпп и Соар (S.B. Cooper,
L. Harrington, A.H. Lachlan, S. Lempp and R.I. Soare)

- [1991] The d-r.e. degrees are not dense, Ann. Pure Appl. Logic, 55 (1991), 125-151.

ЛаФорт (G. L. LaForte)

- [1996] The isolated d.r.e. degrees are dense in the r.e. degrees, Math. Log. Quarterly, 42 (1996), 83-103.

Лахлан (A.H. Lachlan)

- [1966] Lower bounds for pairs of recursively enumerable degrees, Proc. Lond. Math. Soc., 16 (1966), 537 - 569.
- [1968] The elementary theory of recursively enumerable sets, Duke Math. Journal, 35 (1968), 123-146.
- [1975] A recursively enumerable degree which will not split over all lesser ones, Ann. Math. Logic, 9 (1975), 307 -365.

Лерман (M. Lerman)

- [1983] The degrees of unsolvability, Springer, Berlin, 1983.
- [1996] Embeddings into the recursively enumerable degrees, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 224 (1996), 184-204.

Лерман, Шор и Соар (M. Lerman, R.A. Shore and R.I. Soare)

- [1984] The elementary theory of the recursively enumerable degrees is not \aleph_0 -categorical, Adv. in Math., 53 (1984), 301-320.

Ли (A. Li)

- [1984] The low splitting theorem in the difference hierarchy, Lect. notes in Comp. Sci., 3526 (2005), 287-296.

Ли и Ий (A. Li and X. Yi)

[1999] Cupping the recursively enumerable degrees by d.r.e. degrees,
 Proc. London Math. Soc., 78 (3) (1999), 1 - 21.

Марквалд (W. Markwald)

[1954] Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen, Math.
 Annalen, 127 (1954), 135 - 149.

Мартин-Лёф (P. Martin-Lof)

[1966]

Миллер (D.P. Miller)

[1981] High recursively enumerable degrees and the anticupping
 property, Lecture Notes in Math., 859 (1981), 230-245.

Мучник (А.А. Мучник)

[1958] Solution of the Post's reducibility problem and of certain other
 problems in the theory of algorithms, Trudy Moscow Math.
 Obsch., 7, (1958), 391-405.

Путнам (H. Putnam)

[1965] Trial and error predicates and the solution to a problem of
 Mostowski, J. Symb. Logic, 30 (1965), 49 - 57.

Райчев (A. Raichev)

[2005]

Реттингер и Ценг (R. Rettinger and X. Zheng)

[2004]

Робинсон (R.W. Robinson)

[1971] Interpolation and embedding in the recursively enumerable
 degrees, Ann. of Math. (2), 93 (1971), 285-314.

Роджерс (H. Rogers,Jr.)

[1967] Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw-Hill, New York, 1967. [Русский перевод: Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир. Москва, 1972]

Сакс (G.E. Sacks)

[1963] Degrees of Unsolvability, Ann. of Math. Stud. 55, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Селиванов (В. Л. Селиванов)

[1985] Об иерархии Ершова, Сибирский мат. журнал, 26 (1985), 134 - 150.

Сенцер, Лафорт и Реммел (D. Cenzer, G.L. LaForte and J.B. Remmel)

[2009]

Сламан и Соар (T.A. Slaman and R.I. Soare)

[1995] Algebraic aspects of the computably enumerable degrees, Proc. Nat. Ac. Sci., 2 (1995), 617-621.

[2001] Extension of embeddings in the recursively enumerable degrees, Ann. of Math., 154 (2001), 1-43.

Сламан и Вудин (T.A. Slaman and W.H. Woodin)

[1995] Definability in the Turing degrees, Illinois J. of Math., 30 (1986), 320-334.

Соар (R.I. Soare)

[1969] Cohesive sets and recursively enumerable Dedekind cuts, Pacific J. Math., 31 (1969), 215 - 231.

[1987] Recursively Enumerable Sets and Degrees. Springer-Verlag, Berlin, 1987. [Русский перевод: Вычислимо перечислимые множества и степени, Казанское математическое общество, Казань, 2000]

Соловей (R. Solovay)

[1975]

Спектор (C. Spector)

[1955] Recursive well-orderings, J. Symb. Logic, 20 (1955), 151 - 163.

Уэлш (L. Welch)

[1981] A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a theorem on bounding minimal pairs, Ph. D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.

Файзрахманов (М.Х. Файзрахманов)

[2010] A splitting theorem for the low 2-c. e. degrees and the Turing jumps of the Ershov hierarchy, to appear in Russian Math.

Фейнер (L. Feiner)

[1970] Hierarchies of Boolean algebras, J. Symb. Logic, 35 (1970), 305-373.

Фокина, Калимуллин и Миллер (E.B. Fokina, I. Sh. Kalimullin and R. Miller)

[2010]

Фролов (А.Н. Фролов)

[2009]

Харизанова (V.S. Harizanov)

[1993]

Хиршвельдт (D.R. Hirschfeldt)

[2001]

Ходжес (W. Hodges)

[1977] A Shorter Model Theory, Cambridge University Press, 1977.

Хусаинов, Штефан и Янг (B. Khoussainov, F. Stephan and Y. Yang)

[2008]

Франклин и Нг (J.N.Y. Franklin and K.M. Ng)
[2010]

Хо (C.-K. Ho)
[1999] Complexity Theory of Real Functions. Progress in Theoretical Computer Science. Birkhäuser, Boston, 1991.

Ценг (X. Zheng)
[1999]

Чейтин, Соловей, Кучера и Сламан (G. Chaitin, R. Solovay, A. Kuchera and T.A. Slaman)

[...]

2Чёрч (A. Church)
[1938] The constructive second order number class, Bull. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 224 - 232.

Чёрч и Клини (A. Church and S.C. Kleene)
[1937] Formal definitions in the theory of ordinal numbers, Fundamenta Mathematicae, 28 (1937), 11 - 21.

Шёнфилд (J.R. Shoenfield)
[1959] On the degrees of unsolvability, Ann. of Math., 69 (1959), 644-653.

Шор (R.A. Shore)
[1982] Finitely generated codings and the degrees r.e. in a degree \mathbf{d} , Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 256-263.
[1999] The recursively enumerable degrees, In: Handbook of computability theory, E.R. Griffor, ed., Elsevier, Amsterdam, New York, Tokyo, 1999, 169-197.

Шор и Сламан (R.A. Shore and T.A. Slaman)

- [1990] Working below a low₂ recursively enumerable degree, Arch. Math. Logic, 29 (1990), 201-211.
- [1990] A splitting theorem for n-REA degrees, Proc. Amer. Math. Soc., 129 (2001), 3721-3728.

Эпштейн (R.L. Epstein)

- [1975] Minimal Degrees of Unsolvability and the Full Approximation Construction, Memoirs Amer. Math. Soc., 3 No. 162, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

Эпштейн, Хаас и Крамер (R.L. Epstein, R.L. Haas and R.L. Kramer)

- [1981] Hierarchies of sets and degrees below $0'$, In: Logic Year 1979-80 (Lerman, Schmerl and Soare, eds.), Lecture Notes in Mathematics, 859, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, New York, 1981, 32 - 48.

Эш и Найт (C.J. Ash and J.F. Knight)

- [1996]

Ямалеев (М.М. Ямалеев)

- [2009] Разложимость 2-вычислимо перечислимых степеней с избеганием конусов, Изв. Вузов. Матем., 6 (2009), 76-80.
- [2009a] n-low c.e. and n-low 2-c. e. degrees are not elementarily equivalent, Kazan State University, Preprint, 2009, 29 p.

Янг и Ю (Y. Yang and L. Yu)

- [2006] On Σ_1 -structural differences among Ershov hierarchies, J. Symb. Logic, 71 (2006), 1223 - 1236.