Казанский федеральный университет

А.И. Егоров, Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Методическое пособие

Казань - 2013

УДК 517.91

Печатается по решению

Редакционно-издательского совета Института физики

Казанского федерального университета

Рецензенты:

Кандидат физ.-мат. наук, доцент КФУ Сочнева В.А.,

Кандидат физ.-мат. наук, доцент КФУ Даишев Р.А.

А.И. Егоров, Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

Дифференциальные уравнения для инженерных направлений. – Казань: КФУ, 2013. - 52 с.

В сборнике представлены задачи по основным темам курса "Дифференциальные уравнения", читаемого в Институте физики КФУ.

Содержание

1. Уравнения с разделяющимися переменными **6**

2. Однородные уравнения (тип I) **8**

3. Однородные уравнения (тип II) **10**

4. Линейные уравнения первого порядка **12**

5. Уравнения, приводящиеся к линейным **14**

6. Уравнения в полных дифференциалах **17**

7. Уравнения, не разрешённые относительно производной **19**

8. Уравнения, допускающие понижение порядка **21**

9. Неоднородные линейные уравнения (тип I) **24**

10. Неоднородные линейные уравнения (тип II) **28**

11. Неоднородные линейные уравнения (тип III) **29**

12. Неоднородные линейные уравнения (тип IV) **31**

13. Линейная зависимость функций ($x \in \mathbb{R}$) **32**

14. Метод вариации постоянных **34**

15. Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами **37**

16. Линейные однородные системы первого порядка с постоянными коэффициентами. Фазовые портреты **39**

17. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами **45**

18. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Задача Коши **48**

Введение.

Предлагаемый сборник задач содержит 18 типовых заданий (по 25 вариантов в каждом) и полностью адаптирован к потребностям курса "Дифференциальные уравнения", читаемого студентам инженерных направлений в Институте физики КФУ. Каждый раздел предваряется кратким теоретическим вступлением и разбором типовых примеров.

Рекомендуемая литература:

1. Р.А. Даишев, А.Ю. Даньшин. Дифференциальные уравнения. Казань: Изд. КГУ, 2009.

2. Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Казань: Изд. КГУ, 2009.

3. Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Казань: Изд. КГУ, 2009.

4. Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Казань: Изд. КФУ, 2013.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд. РХД, 2000.

6. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

1. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в любом из следующих видов:

$$y' = f(x)g(y),\ \ M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0.$$

Перегруппировав должным образом слагаемые и множители, можно добиться того, что в одну часть уравнения будет входить только переменная y, во вторую часть – только переменная x. После этого уравнение интегрируется.

Пример. Решить уравнение $xydx + (x+1)dy = 0$.

Решение. Разделяя переменные, мы приходим к уравнению

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1},$$

которое легко интегрируется: $y = C(x+1)e^{-x}$ – общее решение.

При делении обеих частей уравнения на $y(x+1)$ могли быть потеряны корни $y = 0$ и $x = -1$. Очевидно, что $y = 0$ – решение, получаемое из общего решения при $C = 0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение можно убедиться, что $x = -1$ есть дополнительное решение.

Ответ: $y = C(x+1)e^{-x}$, $x = -1$.

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0;$

2. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx;$

3. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0;$

4. $y\sin xdx + \cos xdy = 0;$

5. $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0;$

6. $y'\sqrt{4-x^2} + xy^2 + x = 0;$

7. $2dx - 2ydy = xydy - 2y^2dx;$

8. $x^2dy + \sin^2 y dx = 0;$

9. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0;$

10. $2xdx - 3y^2dy = 6x^2y^2dy - 2xy^3dx;$

11. $y\ln y + xy' = 0;$

12. $(1+e^x)y' = ye^x;$

13. $y'\sqrt{1-x^2} + xy^2 + x = 0;$

14. $2x^2dx - y^2dy = 2x^3y^2dy - x^2y^3dx;$

15. $y(1+\ln y) + xy' = 0;$

16. $(3+e^x)y'y = e^x;$

17. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0;$

18. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx;$

19. $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y+y)dy = 0;$

20. $10^y dx = 10^{2x} dy;$

21. $3(x^2y+y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0;$

22. $dx - 4ydy = 2xydy - y^2dx;$

23. $y'e^x \sin y = 1$;

24. $xdx + y^2dy = 3x^2y^2dy - 2xy^3dx$;

25. $x\sqrt{3+y^2}dx + (2+x^2)dy = 0$.

2. Однородные уравнения (тип I).

Однородные уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одной и той же степени. Чтобы решить такое уравнение, необходимо сделать замену $y = x \cdot t(x)$, после чего мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

Решение. Положим $y = x \cdot t(x)$. Тогда $y' = t'x + t$. Подставляя y, y' в уравнение, получим $x^2t' = x \operatorname{tg} t$. Разделяя переменные и интегрируя, приходим к общему решению $\sin t = Cx$. Делаем обратную замену: $\sin \dfrac{y}{x} = Cx$.

В процессе нахождения общего решения было произведено деление на $x \operatorname{tg} t$, то есть могли быть потеряны корни $y = k\pi x$ ($k \in \mathbb{Z}$) и $x = 0$. Первое решение получается из общего решения при $C = 0$, второе – не является решением исходного уравнения.

Ответ: $\sin \dfrac{y}{x} = Cx$.

1. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$;

2. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y;$

3. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10;$

4. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2};$

5. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y;$

6. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy};$

7. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y;$

8. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12;$

9. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2};$

10. $xy' = x\cos^2\dfrac{y}{x} + y;$

11. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy};$

12. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y;$

13. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6;$

14. $xy' = \dfrac{8yx^2 + 3y^3}{2y^2 + 4x^2};$

15. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x} + y;$

16. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy};$

17. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y;$

18. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8;$

19. $xy' = \dfrac{10x^2y + 3y^3}{2y^2 + 5x^2}$;

20. $xy' = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x} + y$;

21. $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$;

22. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

23. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$;

24. $xy' = \dfrac{12x^2y + 3y^3}{2y^2 + 6x^2}$;

25. $xy' = \sqrt{yx} + y$.

3. Однородные уравнения (тип II).

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

может быть приведено к однородному переносом начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$ и уравнение преобретает вид $y' = \widetilde{f}(ax + by)$. Замена $ax + by = t(x)$ (или $ax + by + c = t(x)$) позволяет переменные разделить и уравнение проинтегрировать.

Пример. Решить уравнение

$$y' = \frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}.$$

Решение. Нетрудно установить, что точка $O_1(1; 2)$ есть точка пересечения прямых $2x - 4y + 6 = 0$, $x + y - 3 = 0$. После перехода к новым переменным $X = x - 1$, $Y = y - 2$, где $Y = Y(X)$, уравнение становится однородным,

$$Y' = \frac{2X - 4Y}{X + Y},$$

и может быть решено способом, описанным в предыдущем разделе.

1. $y' = \dfrac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$;
2. $y' = \dfrac{x + 3y + 4}{3x - 6}$;
3. $y' = \dfrac{3y + 3}{2x + y - 1}$;
4. $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$;
5. $y' = \dfrac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$;
6. $y' = \dfrac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$;
7. $y' = \dfrac{2x + 3y - 5}{5x - 5}$;
8. $y' = \dfrac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$;
9. $y' = \dfrac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$;
10. $y' = \dfrac{y - 2x + 3}{x - 1}$;
11. $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{x - 1}$;
12. $y' = \dfrac{3x + 2y - 1}{x + 1}$;
13. $y' = \dfrac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$;

14. $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}$;

15. $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}$;

16. $y' = \dfrac{2x+y-3}{2x-4}$;

17. $y' = \dfrac{y}{2x+2y-2}$;

18. $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$;

19. $y' = \dfrac{x+y-4}{x-2}$;

20. $y' = \dfrac{2x+y-1}{2x-2}$;

21. $y' = \dfrac{3y-2x+1}{3x+3}$;

22. $y' = \dfrac{3y-3}{3x+2y-5}$;

23. $y' = \dfrac{2x+y+2}{4x+2y-1}$;

24. $y' = \dfrac{x-y+1}{2x-2y-3}$;

25. $y' = \dfrac{3x+2y+2}{6x+4y-2}$.

4. Линейные уравнения первого порядка.

Уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)$$

называется линейным. Его решение может быть получено методом вариации постоянной.

Пример. Решить уравнение $y' - \dfrac{2}{x} \cdot y = 2x^3$.

Решение. Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения $y' - \dfrac{2}{x} \cdot y = 0$. Переменные здесь легко разделяются, и после интегрирования получаем общее решение $y = C \cdot x^2$. Заменим в этом решении C на $C(x)$ и подставим $y = C(x) \cdot x^2$ в исходное уравнение:

$$C\,'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x - \frac{2}{x}C(x) \cdot x^2 = 2x^3,\ C\,'(x) = 2x,\ C(x) = x^2 + \widetilde{C}.$$

Ответ: $y = (x^2 + \widetilde{C})x^2$.

1. $y' + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1;$
2. $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3;$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2},\ y(0) = -1;$
4. $xy' + y = \ln x,\ y(1) = 1;$
5. $y' - 3x^2y = 3x^2,\ y(0) = 1;$
6. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1;$
7. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos x,\ y(0) = 1;$
8. $y' - xy = x^3,\ y(0) = 1;$
9. $xy' + y = \sin x,\ y(\pi) = 1/\pi;$
10. $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2e^{1/x},\ y(1) = e;$
11. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x,\ y(-1) = 1;$
12. $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x,\ y(\pi/2) = 1;$

13. $y' + 4xy = e^{-2x^2}\sin x,\ y(0) = -1;$

14. $xy' + y = e^x,\ y(0) = 1;$

15. $(x^2+1)y' - 2xy = (x^2+1)^2,\ y(1) = 3;$

16. $y' + \dfrac{4y}{x} = \dfrac{1}{x^4},\ y(1) = 2;$

17. $y' + y\sin x = \sin 2x,\ y(\pi/2) = 2;$

18. $y' - 2xy = e^{x^2+x},\ y(1) = e^2;$

19. $xy' + y = \cos x,\ y(\pi) = 1/\pi;$

20. $(x+1)y' - 2y = e^x(x+1)^3,\ y(0) = 1;$

21. $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2,\ y(1) = -1;$

22. $y' + 2y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,\ y(0) = -1;$

23. $y' + 2xy = \cos x e^{-x^2},\ y(0) = 2;$

24. $xy' - y = x^2\ln x,\ y(1) = 1;$

25. $y' + \dfrac{2y}{x^2} = 3x^2e^{2/x},\ y(1) = e^2.$

5. Уравнения, приводящиеся к линейным.

К таким уравнениям относится уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n\ (n \neq 1).$$

Замена $z(x) = y^{1-n}$ приводит это уравнение к линейному, которое решается способом, изложенным в предыдущем разделе.

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.

Решение. Разделив обе части на y^2 ($y = 0$ – дополнительное решение) и сделав замену $z = 1/y$, получим $z' - 2z = -e^x$. Методом вариации постоянной приходим к решению $z(x) = e^x(1 + Ce^x)$, $y = 1/(e^x(1 + Ce^x))$.

Ответ: $y = 1/(e^x(1 + Ce^x))$, $y = 0$.

Некоторые уравнения приводятся к линейным, если поменять местами искомую функцию и её аргумент.

Пример 2. Решить уравнение $(x + y^2)y' = y$.

Решение. Перепишем его в виде $(x + y^2)dy = ydx$. Разделив обе части уравнения на ydy ($y = 0$ – дополнительное решение), мы получим линейное уравнение $x'_y - x/y = y$, решением которого является функция $x(y) = y^2 + Cy$.

Ответ: $x = y^2 + Cy$, $y = 0$.

1. $e^{-y^2}(1 - 2xyy') = y'$;
2. $xe^y y' - e^y = 2x^2$;
3. $xy' + y = xy^2$;
4. $x^3 dy = y^2(x^2 + 2e^{-1/y})dx$;
5. $xy' + 2y = 2\sqrt{y}\cos x$;
6. $y + (2x - 4y^2)y' = 0$;
7. $y' \cos y + 3x^2 \sin y = e^{-x^3}$;
8. $y' - y \operatorname{tg} x = -\dfrac{2}{3} y^4 \sin x$;
9. $2yxdy = (1 - e^{y^2} \sin x)dx$;

10. $dy = yx(e^{-x^2} - 2\ln y)dx;$

11. $2(x + y^4)y' = y;$

12. $xy' \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = 4x^3;$

13. $y' + 2xy = 2xy^3;$

14. $dy = y^2x(1 + x^2e^{1/y})dx;$

15. $2yx\cos y^2 dy = (\ln x - \sin y^2)dx;$

16. $y = (2y^3 + x)y';$

17. $3y'\sqrt{y+1} - 4x(y+1)^{3/2} = 2xe^{x^2};$

18. $2y' + 3y\cos x = y^{-1}e^{-3\sin x};$

19. $2xdy + y^3(1 + x^2e^{-1/y^2})dx = 0;$

20. $dy = (y^2 \operatorname{ch} x - 2y \operatorname{cth} x)dx;$

21. $y(xy' - y) = 2y';$

22. $y' \operatorname{tg} y + \ln\cos y = e^x;$

23. $xy' - y = y^2\ln x;$

24. $2y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0;$

25. $(xy + \sqrt{y})y' + y^2 = 0.$

6. Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$: $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Это имеет место при

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

во всех точках $(x;y)$, в которых

$$P^2(x,y) + Q^2(x,y) \neq 0. \ (*)$$

Функция $U(x,y)$ находится по формуле

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy,$$

где точка $M(x_0,y_0)$ также удовлетворяет условию $(*)$.

Решение имеет неявный вид $U(x,y) = C$.

Пример. Решить уравнение $xy^2dx + (x^2y+1)dy = 0$.

Решение. Очевидно, $\dfrac{\partial(xy^2)}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2y+1)}{\partial x}$. Находим функцию

$$U(x,y) = \int_0^x xy^2dx + \int_0^y dy = x^2y^2/2 + y.$$

Ответ: $x^2y^2/2 + y = C$.

1. $(2x+y^2)dx + (2yx+y^2)dy = 0$;

2. $(e^xy+y^2)dx + (e^x+2yx)dy = 0$;

3. $\left(y^2 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(2yx + \frac{1}{x}\right) dy = 0;$

4. $(\sin y + 2xy)dx + (x\cos y + x^2)dy = 0;$

5. $(y^2 + \ln x)dx + (2yx - \ln y)dy = 0;$

6. $(3x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0;$

7. $(e^x y^2 + 3x^2 y)dx + (2ye^x + x^3)dy = 0;$

8. $\left(y - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \left(x + \frac{2y}{x}\right) dy = 0;$

9. $\left(y^2 - \frac{\sin y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{\cos y}{x} + 2yx\right) dy = 0;$

10. $(y^3 + \cos x)dx + (3y^2 x + e^y)dy = 0;$

11. $(2x + 3x^2 y^2)dx + (2yx^3 + 1)dy = 0;$

12. $(2xy + 3x^2)dx + (e^y + x^2)dy = 0;$

13. $2xy^2 dx + \left(2yx^2 - \frac{1}{y^2}\right) dy = 0;$

14. $(y^2 - y\sin x)dx + (\cos x + 2yx)dy = 0;$

15. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0;$

16. $(y + 2xy^3)dx + (x + 3y^2 x^2 + 2y)dy = 0;$

17. $(e^y + 2xy^2)dx + (e^y x + 2yx^2)dy = 0;$

18. $\left(y^3 + \frac{2x}{y}\right) dx + \left(3y^2 x - \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0;$

19. $\left(y - \frac{\sin x}{y}\right) dx + \left(x - \frac{\cos x}{y^2}\right) dy = 0;$

20. $(e^y - y\sin x)dx + (e^y x + \cos x)dy = 0$;

21. $(3x^2 + y)dx + (3y^2 + x)dy = 0$;

22. $(e^y + y)dx + (xe^y + x + 2y)dy = 0$;

23. $\left(y - \dfrac{1}{x^2 y}\right) dx + \left(x - \dfrac{1}{xy^2}\right) dy = 0$;

24. $(y^2 \cos x + y)dx + (2y\sin x + x)dy = 0$;

25. $(e^x y + y^2 \cos x)dx + (e^x + 2y\sin x)dy = 0$.

7. Уравнения, не разрешённые относительно производной.

Уравнения $F(x, y, y') = 0$ решаются различными способами:

1. Разрешив уравнение относительно y', мы получим одно или несколько уравнений $y' = f(x, y)$, которые будем решать известными нам методами;

2. Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ удаётся представить в виде $y = f(x, y')$, то вводя параметр $p = \dfrac{dy}{dx} = y'$, получим $y = f(x, p)$. Взяв от обеих частей этого равенства полный дифференциал, $dy = f'_x dx + f'_p dp = pdx$, мы приходим к уравнению $P(x, p)dx + Q(x, p)dp = 0$. Решение этого уравнения можно получить либо в виде $x = x(p, C)$, и тогда общее решение исходного уравнения записывается в параметрической форме: $y = f(x(p, C), p)$, $x = x(p, C)$, либо в виде $p = p(x, C)$ с общим решением $y = f(x, p(x, C))$;

3. Уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются аналогичным образом.

Пример. Решить уравнение $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$.

Решение. Положим $y' = p \geq 0$. Тогда $y = -xp + 4\sqrt{p}$, $dy = -pdx - xdp + 2p^{-1/2}dp = pdx$, $x'_p + \dfrac{x}{2p} = p^{-3/2}$ - линейное уравнение. Методом вариации постоянной получаем $x = (\ln p + C)p^{-1/2}$. При делении на p может быть потеряно решение $y = 0$.

Ответ: $x = (\ln p + C)p^{-1/2}$, $y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$; $y = 0$.

1. $x = y'^2 + y'$;
2. $y = (y' - 1)e^{y'}$;
3. $2y'^2(y - xy') = 1$;
4. $(y'^2 - 2y')x^2 = y^2 - x^2$;
5. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$;
6. $y = \ln(1 + y'^2)$;
7. $xy' - y = \ln y'$;
8. $\cos(xy' - x) = 1$;
9. $x(2y'^2 - 1) = y'$;
10. $y = 2y'^2 + y'^3$;
11. $xy' - 2y = y'^2$;
12. $y'^2 - 2xy' = 1 - x^2$;
13. $y'(x - \ln y') = 1$;
14. $y = -y'\cos y' + \sin y'$;

15. $2xy' - y = y'^3$;

16. $\arcsin\sqrt{1 - y'^2} = x$;

17. $x = y'^3 + 2y'$;

18. $y = \dfrac{2}{3}(y' + 1)^{3/2} - 2(y' + 1)^{1/2}$;

19. $y'^2 = 3(xy' - y)$;

20. $x^2y'^2 - 2xy' = y^2 - 1$;

21. $y = xy'^2 - 2y'^3$;

22. $2x - y/y' = (\ln y + \ln y')$;

23. $xy'(y' + 2) = y$;

24. $4x^2y'^2 - 4xyy' + y^2 = 4$;

25. $y = xy' + e^{y'}$.

8. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим 3 типа таких уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, то его порядок можно понизить, вводя новую переменную $z(x) = y^{(k)}$;

2. Если уравнение имеет вид $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, то его порядок понижается заменой $y'_x = z(y)$. Тогда, $y''_{xx} = z'_y \cdot z$ и так далее;

3. Если уравнение не меняется при замене $y \to ky,\ y' \to ky', ..., y^{(n)} \to ky^{(n)}$, то есть является однородным, то его порядок понижается подстановкой $y' = y \cdot z(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2y'' = y'^2$.

Решение. Положим $y' = z(x)$. Тогда уравнение примет вид $x^2z' = z^2$, $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x^2}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + C_1$, $z = y' = \dfrac{x}{1+C_1x}$, $y = \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{1}{C_1^2}\ln|C_1x+1| + C_2$, $C_1 \neq 0$. Если же $C_1 = 0$, то $z = y' = x$, $y = x^2/2 + C$.

В процессе разделения переменных произошло деление обеих частей уравнения на x^2z^2. Дополнительное решение возникает при $z = 0$, $y = C$.

Ответ: $y = \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{1}{C_1^2}\ln|C_1x+1| + C_2$, $C_1 \neq 0$; $y = x^2/2 + C$; $y = C$.

Пример 2. Решить уравнение $yy'' + 1 = y'^2$.

Решение. В уравнение не входит x, поэтому, положив $y'_x = z(y)$, $y''_{xx} = z'_y \cdot z$, получим $y \cdot z'_y z + 1 = z^2$. Разделим переменные $\dfrac{dz^2}{z^2-1} = \dfrac{2dy}{y}$ и проинтегрируем первый раз: $\ln|z^2-1| = \ln|C_1y^2|$, $z = \pm\sqrt{C_1y^2+1} = y'_x$. Снова разделим переменные: $\pm dx = \dfrac{dy}{\sqrt{C_1y^2+1}}$. Интегрируя при $C_1 > 0$, получим $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{sh}(\sqrt{C_1}x + C_2)$. В случае $C_1 < 0$ решение имеет вид $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|C_1|}}\sin(\sqrt{|C_1|}x + C_2)$.

При разделении переменных могли быть потеряны решения $z = \pm 1$, $y'_x = \pm 1$, $y = \pm x + C$.

Ответ: $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{sh}(\sqrt{C_1}x + C_2)$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|C_1|}}\sin(\sqrt{|C_1|}x + C_2)$, $y = \pm x + C$.

Пример 3. Решить уравнение $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

Решение. Нетрудно видеть, что это – однородное уравнение. Замена $y' = yz$ приводит его к виду $xz' = z$. Решение последнего уравнения есть $z = C_1x = y'/y$, откуда $y = C_2e^{C_1x^2}$.

Ответ: $y = C_2e^{C_1x^2}$.

1. $xy''' = y'',\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 0;$

2. $y^3y'' + 1 = 0,\ y(1) = -1,\ y'(1) = -1;$

3. $xy''y = xy'^2 + yy',\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1;$

4. $y''' = y'' \operatorname{ctg} x,\ y(\pi/2) = -1,\ y'(\pi/2) = 0,\ y''(\pi/2) = 1;$

5. $y'' = 2\sin^3 y \cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 1;$

6. $y''y = 3y'^2x^2,\ y(2) = -6,\ y'(2) = 1;$

7. $x^3y''' + x^2y'' = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -1;$

8. $y^3y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2};$

9. $(y''y - y'^2)x^2 = y'^2,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 2;$

10. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y'',\ y(1) = 0,\ y'(1) = 7 \operatorname{ch} 7,\ y''(1) = 49 \operatorname{sh} 7;$

11. $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5;$

12. $y''y + y'^2 \operatorname{tg}^2 x = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ y'(\pi/4) = 1;$

13. $xy''' + y'' + 2x = 0,\ y(1) = -1,\ y'(1) = -1,\ y''(1) = -1;$

14. $y'' = 18y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3;$

15. $y''y - y'^2 = y^2e^x + y'y,\ y(1) = 1,\ y'(1) = e;$

16. $y'''(\sin x + 1) = y'' \cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$

17. $y'' = -2y'^2 \operatorname{tg} y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

18. $x^2y''y = y'^2,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1;$

19. $xy''' + y'' = \sqrt{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 1;$

20. $y^3 y'' + 4 = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2;$

21. $y''y - y'^2 = -3x^2 y'^2,\ y(2) = 8,\ y'(2) = 1;$

22. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1,\ y(\pi/6) = 3/2,\ y'(\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + \pi/6,\ y''(\pi/6) = 1;$

23. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2};$

24. $y''y + y'^2 \operatorname{ctg}^2 x = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ y'(\pi/4) = -1;$

25. $x(y''y - y'^2) = 2xy^2 - y'y,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 2.$

9. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (тип I).

Решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами $L[y] = f(x)$, где $L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y$ (a_i – const, $i = \overline{1, n}$), есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ и частного решения неоднородного уравнения.

Если искать решение однородного уравнения в виде $y = e^{\lambda x}$, то мы придём к характеристическому уравнению $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$, и в случае простых его корней общее решение $L[y] = 0$ есть линейная комбинация частных решений: $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$ $(C_i - const, i = \overline{1, n})$.

Если действительный корень λ_s имеет кратность $m_s \geq 1$, то ему в общем решении отвечает m_s частных решений $e^{\lambda_s x},\ x e^{\lambda_s x}, ..., x^{m_s - 1} e^{\lambda_s x}$.

Комплексно сопряжённой паре $\lambda_s = \alpha + i\beta$, $\lambda_s = \alpha - i\beta$ кратности $m_s \geq 1$ в общем решении отвечают $2m_s$ частных решений такого вида

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{m_s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{m_s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Частное решение уравнения $L[y] = f(x)$ в предлагаемых примерах находится в зависимости от структуры функции $f(x)$.

Если $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x) = b_0x^m + ... + b_{m-1}x + b_m$, то частное решение ищется в виде $y(x) = x^r Q_m(x)e^{\alpha x}$, где $r \geq 0$ – кратность числа α среди корней характеристического уравнения, $Q_m(x)$ – многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами, которые находятся после подстановки частного решения в исходное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x.

Если $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_k(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right]$, то частное решение ищется в виде $y(x) = x^r e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$, где $m = max(k; s)$, r – кратность корня характеристического уравнения, совпадающего с $\alpha + i\beta$. Многочлены $P_m(x)$, $Q_m(x)$ входят в $y(x)$ с неопределёнными коэффициентами, которые находятся после подстановки $y(x)$ в $L[y] = f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 2y' - 3y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, так что общее решение однородного уравнения есть $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^x$. Частное решение для $L[y] = xe^x$ выбирается в виде $y = x(ax + b)e^x$. После подстановки его в исходное уравнение, находим $a = 1/8$, $b = -1/16$.

Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^x$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}\sin 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ имеет два комплексно сопряжённых корня: $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$, и, следовательно, общее решение $L[y] = 0$ таково: $y(x) = C_1e^{3x}\cos 2x + C_2e^{3x}\sin 2x$. Частное решение для $L[y] = e^{3x}\sin 2x$ выбирается в виде $y = xe^{3x}[a\cos 2x + b\sin 2x]$, и после необходимых вычислений, получим $a = -1/4$, $b = 0$.

Ответ: $y = C_1e^{3x}\cos 2x + C_2e^{3x}\sin 2x - \frac{1}{4}xe^{3x}\cos 2x$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$, так что общее решение однородного уравнения можно записать так: $y(x) = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\sin 2x$. Правая часть исходного уравнения - смешанного типа, поэтому его частное решение есть сумма частных решений уравнений $L[y] = e^{2x}$, $y_1 = \frac{1}{4}e^{2x}$, и $L[y] = \sin 2x$, $y_2 = \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$.

Ответ: $y = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$.

1. $y''' - 3y'' + 2y' = x^2$;
2. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = x + 1$;
3. $y''' + y'' = 12x^2 + x - 1$;
4. $y^{(4)} - 4y'' = x - 2$;
5. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + x$;
6. $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = x - 1$;

7. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$

8. $y^{(4)} + y''' = x;$

9. $y''' - 5y'' + 6y' = x^2 + x + 1;$

10. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3;$

11. $y''' - y'' = 6x + 5;$

12. $y^{(4)} - 9y'' = x + 1;$

13. $y''' - 13y'' + 12y' = x^2 - 1;$

14. $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1;$

15. $y''' - 4y' = x^2 + x;$

16. $y^{(4)} + 3y''' = 6x + 1;$

17. $y''' - 4y'' + 4y' = x^2;$

18. $y^{(4)} + 5y''' + 4y'' = x + 1;$

19. $y''' + 2y'' = x^2 - x;$

20. $y^{(4)} - y'' = 2x - 3;$

21. $y''' + y'' - 2y' = x^2 - x;$

22. $y^{(4)} - y''' - 6y'' = x + 1;$

23. $y''' - 16y' = x^2 - 2x - 1;$

24. $y^{(4)} + 5y''' = 6x - 1;$

25. $y''' - 5y'' + 4y' = x^2 - x - 2.$

10. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (тип II).

1. $y'' - y' - 2y = (6x - 11)e^{-x}$;
2. $y'' + 9y' + 20y = (5x + 1)e^{-5x}$;
3. $y'' + 2y' - 3y = (4x + 3)e^{x}$;
4. $y'' + 6y' + 9y = (8x + 12)e^{x}$;
5. $y'' - 7y' + 12y = (3x + 6)e^{3x}$;
6. $y'' + y' - 6y = (4x + 2)e^{2x}$;
7. $y'' - 13y' + 12y = (12x + 4)e^{x}$;
8. $y'' - 7y' + 6y = (5x + 2)e^{x}$;
9. $y'' + 5y' + 4y = (8x - 2)e^{-x}$;
10. $y'' + 4y' + 3y = 4(1 - x)e^{-x}$;
11. $y'' + 2y' - 15y = (6 - 3x)e^{3x}$;
12. $y'' + 3y' + 2y = (1 - 2x)e^{-x}$;
13. $y'' - 2y' - 3y = (4x - 7)e^{-x}$;
14. $y'' - 6y' + 9y = 4xe^{x}$;
15. $y'' + y' - 12y = (4x + 2)e^{-4x}$;
16. $y'' - 4y' + 3y = -3xe^{x}$;

17. $y'' + 4y' + 4y = (8x + 12)e^{x}$;

18. $y'' + y' - 2y = (6x + 5)e^{x}$;

19. $y'' + 7y' + 12y = (8x + 4)e^{-4x}$;

20. $y'' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$;

21. $y'' - 3y' - 4y = 2xe^{-x}$;

22. $y'' + 2y' + y = (4x + 6)e^{2x}$;

23. $y'' + 7y' + 6y = (36x + 6)e^{-6x}$;

24. $y'' - 4y' + 4y = (x - 1)e^{x}$;

25. $y'' - 2y' - 15y = (10 - 5x)e^{5x}$.

11. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (тип III).

1. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\sin 2x$;

2. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos 3x$;

3. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(4\cos x - 3\sin x)$;

4. $y'' + 6y' + 10y = 3e^{-3x}\cos 2x$;

5. $y'' + 2y' + 5y = -2e^{-x}\sin x$;

6. $y'' + y = 2\cos x - 3\sin x$;

7. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$;

8. $y'' - 4y' + 20y = 4e^{2x} \sin 3x$;

9. $y'' + 2y' + 10y = e^{-x} \cos 2x$;

10. $y'' + 6y' + 34y = 2e^{-3x} \sin 2x$;

11. $y'' + 4y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x$;

12. $y'' - 4y' + 5y = 4e^{2x} \sin x$;

13. $y'' - 2y' + 10y = e^{x} \sin 2x$;

14. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \cos x$;

15. $y'' + 9y = 18 \cos 6x$;

16. $y'' + 4y' + 13y = 2e^{-2x} \sin x$;

17. $y'' + 2y' + 17y = e^{-x} \cos 3x$;

18. $y'' + 4y' + 20y = 6e^{-2x} \cos 3x$;

19. $y'' + 16y = 4 \sin 2x$;

20. $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(2 \cos 2x + \sin 2x)$;

21. $y'' + 4y' + 8y = 2e^{-2x} \cos x$;

22. $y'' - 2y' + 17y = e^{x} \sin 2x$;

23. $y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x} \sin x$;

24. $y'' - 6y' + 34y = 4e^{3x} \cos 2x$;

25. $y'' + 25y = 5 \sin 4x$.

12. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (тип IV).

1. $y'' - y = 4e^{x} + 6\cos x + 10\sin x$;
2. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$;
3. $y'' - 4y = 12e^{2x} - 2\cos 2x + 4\sin 2x$;
4. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$;
5. $y'' - 9y = 3e^{3x} + \cos 3x + \sin 3x$;
6. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$;
7. $y'' - 16y = 12e^{4x} + 16\cos 4x - 16\sin 4x$;
8. $y'' + 49y = -98e^{7x} + 7(\cos 7x + 2\sin 7x)$;
9. $y'' - 25y = -50e^{5x} + 25(\cos 5x + \sin 5x)$;
10. $y'' + 36y = 36e^{6x} - 12\cos 6x + 24\sin 6x$;
11. $y'' - 36y = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$;
12. $y'' + 25y = 50e^{5x} + 20\cos 5x - 10\sin 5x$;
13. $y'' - 49y = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$;
14. $y'' + 16y = -16e^{4x} + 16\cos 4x$;
15. $y'' - 64y = 128\cos 8x - 64e^{8x}$;
16. $y'' + 9y = -18e^{3x} + 9\cos 3x - 18\sin 3x$;

17. $y'' - 81y = 162e^{9x} + 81\sin 9x$;

18. $y'' + 4y = 4e^{2x} + 32\cos 2x - 8\sin 2x$;

19. $y'' - 100y = 20e^{10x} + 100\cos 10x$;

20. $y'' + y = 2e^{x} + 2\sin x - 6\cos x$;

21. $y'' - y = -4e^{-x} + 12\cos x - 10\sin x$;

22. $y'' - 4y = 6e^{-2x} + 12\cos 2x - 4\sin 2x$;

23. $y'' - 16y = -24e^{-4x} - 16\cos 4x + 16\sin 4x$;

24. $y'' - 25y = 50e^{-5x} + 25(\cos 5x - \sin 5x)$;

25. $y'' - 36y = 36e^{-6x} + 36(\cos 6x + \sin 6x)$.

13. Линейная зависимость функций ($x \in \mathbb{R}$).

Рассмотрим систему гладких функций $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$. Имеют место следующие утверждения: 1) если функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, $x \in [a;b]$ линейно зависимы, то на отрезке $[a;b]$ определитель Вронского

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю; 2) если определитель Вронского отличен от нуля на $[a;b]$, то система функций $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ линейно независима на этом отрезке.

Пример. Установить, являются ли функции $\{x, e^x, xe^x\}$ линейно зависимыми на $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Вычислим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} x & e^x & xe^x \\ 1 & e^x & (1+x)e^x \\ 0 & e^x & (2+x)e^x \end{vmatrix} = (x-2)e^{2x} \not\equiv 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: Функции $\{x, e^x, xe^x\}$ – линейно независимы на $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos 2x,\ \sin^2 x,\ 1;$
2. $1,\ x^2+2x,\ 3x^2-1,\ x+4;$
3. $x,\ e^x,\ xe^x;$
4. $2\ln x,\ \ln 5x,\ 1;$
5. $1,\ \sin x,\ \cos x;$
6. $1,\ x,\ x^2;$
7. $2^x,\ 3^x,\ 6^x;$
8. $\ln x^2,\ \ln 2x,\ 7;$
9. $\sin x,\ \sin(2+x),\ \cos(x-5);$
10. $x,\ |x^3|,\ x^3;$
11. $e^{3x},\ e^{2x},\ e^x;$
12. $\ln 2x^2,\ \ln 6x,\ 1;$

13. $1,\ \cos^2 x,\ \sin 2x$;

14. $1,\ x^2 - x + 3,\ 2x^2 + x,\ 2x - 4$;

15. $3^x,\ 4^x,\ 6^x$;

16. $\ln 2x^3,\ \ln x^2,\ 4$;

17. $\cos x,\ \cos(3 + x),\ \sin(x - 2)$;

18. $x,\ |x|,\ 2x + |x|$;

19. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ 2 + e^x$;

20. $\ln(x + 1),\ \ln(x + 1)^2,\ 2$;

21. $1,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$;

22. $\sqrt{x},\ \sqrt{x + 1},\ \sqrt{x + 2}$;

23. $1 + x,\ x,\ x^2 - 1$;

24. $e^{x+1},\ e^{x+2},\ e^{x+3}$;

25. $e^x + \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ e^{-x} + e^x$.

14. Метод вариации постоянных.

Решить неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами $L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),\ x \in [a; b]$ можно методом вариации постоянных, суть которого состоит в следующем: находим общее решение соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$:

$y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$, где $\{y_i(x)\}_{i=\overline{1,n}}$ – линейно независимая система частных решений (фундаментальная система решений). Общее решение исходного уравнения ищем в виде $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$, налагая на C_i следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0,\ \ldots, \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x)\ (*)$$

Неоднородная алгебраическая система $(*)$ с определителем $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ имеет единственное решение $\{C_1'(x), \ldots, C_n'(x)\}$, из которого следует $C_i(x) = \int C_i'(x)dx + \overline{C}_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = e^x/x$.

Решение. Общее решение однородного уравнения получается обычным способом $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Положим $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ и составим систему $(*)$:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2'(1+x)e^x = e^x/x. \end{cases}$$

Её решение есть $C_1' = -1$, $C_2' = 1/x$. Следовательно, $C_1 = -x + \overline{C}_1$, $C_2 = \ln|x| + \overline{C}_2$.

Ответ: $y = \overline{C}_1 e^x + \overline{C}_2 x e^x - x e^x + x e^x \ln|x|$.

1. $y'' + \pi^2 y = \pi^2 \cos^{-1} \pi x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

2. $y'' - 3y' + 2y = e^x(1 + e^{-x})^{-1}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

3. $y'' + 16y = 32 \cos^{-3} 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

4. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}\sqrt{x+1}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

5. $y'' - 3y' + 2y = \ln(e^{-x} + 1),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

6. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x,\ y(\pi/4) = 3,\ y'(\pi/4) = 2;$

7. $y'' - 6y' + 8y = 4(2 + e^{-2x})^{-1},\ y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3;$

8. $y'' + y = 2\cos^{-3} x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

9. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x + 1)^{-1/2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

10. $y'' + 6y' + 8y = \ln(e^{2x} + 1),\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0;$

11. $y'' + y = \sin^{-1} x,\ y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2;$

12. $y'' + 2y' - 3y = -4e^{3x}(1 + e^{2x})^{-1},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$

13. $y'' + 25y = 50\sin^{-3} 5x,\ y(\pi/10) = 1,\ y'(\pi/10) = 0.$

14. $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}\sqrt{2x + 1},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$

15. $y'' + 3y' + 2y = \ln(e^{x} + 1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

16. $y'' + 9y = 9\cos^{-1} 3x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

17. $y'' - y' = e^{-x}(2 + e^{-x})^{-1},\ y(0) = \ln 27,\ y'(0) = \ln 9 - 1;$

18. $y'' + y = 2\sin^{-3} x,\ y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2;$

19. $y'' - 2y' + y = 3e^{x}(x + 2)^{-1/2},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0;$

20. $y'' - 6y' + 8y = \ln(e^{-2x} + 1),\ y(0) = \ln 2,\ y'(0) = 0;$

21. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos^{-1} x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$

22. $y'' - 2y' + y = e^{x}/x^2,\ y(1) = 0,\ y'(1) = -e;$

23. $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}(e^{2x} + 9)^{-1},\ y(0) = -\ln 10/18,\ y'(0) = -\ln 10/9;$

24. $y'' + 2y' + 10y = 3e^{-x}\sin^{-1} 3x,\ y(\pi/6) = 0,\ y'(\pi/6) = 1;$

25. $y'' + 10y' + 25y = e^{-5x}(x^2 - 2x + 4)^{-1},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

15. Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальные уравнения второго порядка вида $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$.

Если известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения, то его порядок может быть понижен либо заменой $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$, либо с помощью формулы Остроградского-Лиувилля

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx},\ \text{где } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\ .$$

Пример. Решить уравнение $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$, если известно частное решение $y_1 = x$.

Решение. 1) Подстановка $y(x) = x \cdot z(x)$ приводит к уравнению $x(x-1)z'' + (x-2)z' = 0$, порядок которого понижается заменой $z' = u(x)$: $x(x-1)u' + (x-2)u = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получим $u = \dfrac{C_1(x-1)}{x^2} = z'$, откуда $z = C_1(\ln|x| + 1/x) + C_2$, а $y = xz = C_1(x\ln|x| + 1) + C_2 x$.

2) Воспользуемся формулой Остроградского-Лиувилля:

$$W = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{\int \frac{dx}{x-1}}.$$

Раскрывая определитель, мы приходим к уравнению $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{C_1(x-1)}{x}$, интегрирование которого даёт тот же результат: $y = C_1(x\ln|x| + 1) + C_2 x$.

Ответ: $y = C_1(\ln|x| + 1/x) + C_2 x$.

1. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0,\ y_1 = x^2;$

2. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0,\ y_1 = e^{2x};$

3. $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0,\ y_1 = \sin x;$

4. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0,\ y_1 = e^x - 1;$

5. $x(x-1)y'' - xy' + y = 0,\ y_1 = x;$

6. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,\ y_1 = e^x;$

7. $2x(x+2)y'' + (2-x)y' + y = 0,\ y_1 = x - 2;$

8. $(x^2+1)y'' - 2y = 0,\ y_1 = x^2 + 1;$

9. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0,\ y_1 = x^3;$

10. $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0,\ y_1 = x + 1;$

11. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0,\ y_1 = e^{2x};$

12. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y_1 = x;$

13. $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0,\ y_1 = e^{-x^2};$

14. $y''x^2 \ln x - xy' + y = 0,\ y_1 = x;$

15. $xy'' + 2y' - xy = 0,\ y_1 = x^{-1}e^x;$

16. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0,\ y_1 = 1 + x^{-1};$

17. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0,\ y_1 = x;$

18. $(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0,\ y_1 = x - 3;$

19. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0,\ y_1 = x^2 + 1/4;$

20. $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0,\ y_1 = x + 2;$

21. $(2x^2+3x)y'' - 6(x+1)y' + 6y = 0,\ y_1 = x + 1;$

22. $(2x^2+x)y'' + 2(1-2x^2)y' - 4(x+1)y = 0,\ y_1 = e^{2x};$

23. $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0,\ y_1 = x;$

24. $xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = 0,\ y_1 = e^x;$

25. $x^2y'' - 2y = 0,\ y_1 = x^2.$

16. Линейные однородные системы первого порядка с постоянными коэффициентами. Фазовые портреты.

Рассмотрим системы обыкновенных дифференциальных уравнений простейшего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a; b]$, a_{ij} – const $(i, j = 1; 2)$.

Частным решением системы называется столбец $Z = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, состоящий из функций $x(t)$, $y(t)$, обращающих систему в тождество. Общее решение системы есть линейная комбинация двух линейно независимых частных решений (ФСР): $Z = C_1 Z_1 + C_2 Z_2$.

Частные решения системы ищутся в виде $Z = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$, где γ_1, γ_2 - константы, подлежащие определению. Подставив Z в исходную систему, мы приходим к алгебраической системе

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0 \\ a_{11}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

определитель которой $\triangle(\lambda) = 0$ (характеристическое уравнение системы).

После нахождения корней характеристического уравнения, вычисляются соответствующие каждому корню коэффициенты γ_1, γ_2.

Возможны следующие случаи:

1) Все корни характеристического уравнения вещественны и просты. Тогда общее решение системы есть

$$Z = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t};$$

2) Кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$Z = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \cdot t \\ \gamma_{22} \cdot t \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

В данном случае, частное решение надо сразу искать в виде

$$Z = \begin{bmatrix} \gamma_1 \cdot t \\ \gamma_2 \cdot t \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

Подставляя его в систему дифференциальных уравнений и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, мы найдём оба решения ФСР;

3) Пара комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = a \pm ib$.

Этой паре отвечает (как и в пункте 1)) решение

$$Z = \begin{bmatrix} \gamma_{11} + i\gamma_{12} \\ \gamma_{21} + i\gamma_{22} \end{bmatrix} e^{(a+ib)t} = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} e^{at} \cos bt - \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} e^{at} \sin bt \right\} +$$

$$+i \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} e^{at} \cos bt + \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} e^{at} \sin bt \right\},$$

вещественная и мнимая часть которого и образует ФСР.

Далее, системы дифференциальных уравнений, рассматриваемые в данном разделе, допускают нулевое решение, устойчивость которого по Ляпунову при $t \to \infty$ иллюстрируется фазовым портретом (рис. 1-7). Стрелки на рисунках указывают направление движения точек по траектории при возрастании t.

В зависимости от набора характеристических корней, фазовые портреты бывают следующих типов:

1) вещественные $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ – устойчивый узел (рис. 1);

2) вещественные $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ – неустойчивый узел (аналогично рис. 1, но стрелки направлены от начала координат);

3) вещественные λ_1 и λ_2, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ – седло (рис. 2);

4) комплексная пара $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ $(b \neq 0)$:

α) $a = 0$ – центр (рис. 3);

β) $a < 0$ – устойчивый фокус (рис. 4);

γ) $a > 0$ – неустойчивый фокус (рис. 4, стрелки в другую сторону);

5) вещественный кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2$:

α) $\lambda_1 < 0$ – устойчивый узел (возможны два случая: дикритический и вырожденный узел, рис. 5 и 6, соответственно);

β) $\lambda_1 > 0$ – неустойчивый узел (рис. 5 и 6, стрелки направлены от начала координат);

6) Если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то $\lambda_1 = 0$. При $\lambda_2 \neq 0$ фазовый портрет представляет собой семейства параллельных прямых $(\lambda_2 > 0,\ \lambda_2 < 0)$ и нулевое решение является неустойчивым (рис. 7).

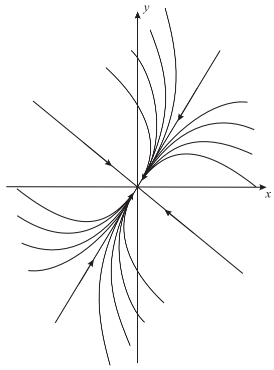

Рис. 1: **Устойчивый узел.**

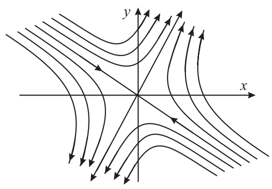

Рис. 2: **Седло.**

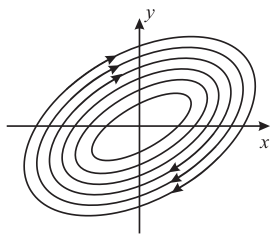

Рис. 3: **Центр.**

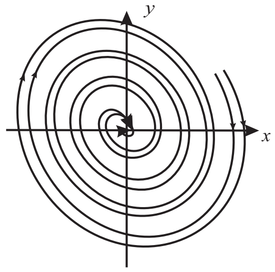

Рис. 4: **Фокус.**

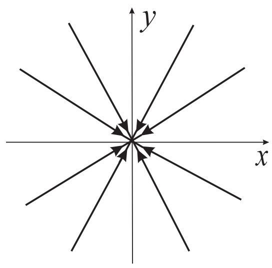

Рис. 5: **Дикритический узел.**

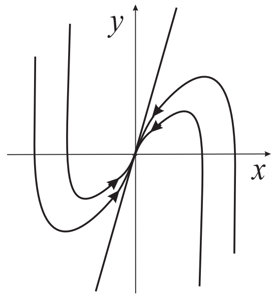

Рис. 6: **Вырожденный узел.**

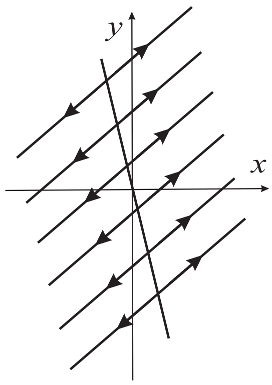

Рис. 7: **Семейство параллельных прямых.**

Пример. Решить систему уравнений и указать её фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 3$ кратности два. В этом случае решение системы ищем в виде $Z = \begin{bmatrix} \gamma_{11} + \gamma_{12}t \\ \gamma_{21} + \gamma_{22}t \end{bmatrix} e^{3t}$. Подставляя это решение в систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим: $\gamma_{21} = \gamma_{11},\ \gamma_{22} = \gamma_{12}$. Полагая $\gamma_{11} = 1, \gamma_{12} = 0$, затем $\gamma_{11} = 0, \gamma_{12} = 1$, мы приходим к решению.

Ответ: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1+t \end{bmatrix} e^{3t}$. Фазовый портрет – неустойчивый вырожденный узел.

1. $\dot{x} = -5x + 2y,\ \dot{y} = -4x + y;$
2. $\dot{x} = x + 2y,\ \dot{y} = -x + 4y;$
3. $\dot{x} = x - 5y,\ \dot{y} = x - y;$
4. $\dot{x} = -2x + y,\ \dot{y} = -x - 2y;$
5. $\dot{x} = -2x + 2y,\ \dot{y} = 2x + y;$
6. $\dot{x} = -3x + y,\ \dot{y} = -2x - y;$
7. $\dot{x} = x + 4y,\ \dot{y} = -2x - 5y;$
8. $\dot{x} = 2x + 4y,\ \dot{y} = -2x - 2y;$
9. $\dot{x} = x + y,\ \dot{y} = -2x + 3y;$
10. $\dot{x} = 4x - 2y,\ \dot{y} = x + y;$
11. $\dot{x} = 3x + 13y,\ \dot{y} = -x - 3y;$
12. $\dot{x} = -5x + 5y,\ \dot{y} = -2x + y;$
13. $\dot{x} = -5x + 4y,\ \dot{y} = -2x + y;$
14. $\dot{x} = x - 2y,\ \dot{y} = x + 3y;$
15. $\dot{x} = x + 4y,\ \dot{y} = x - 2y;$
16. $\dot{x} = 4x + 4y,\ \dot{y} = -5x - 4y;$

17. $\dot{x} = 2x + y,\ \dot{y} = -x + 2y;$

18. $\dot{x} = -x + y,\ \dot{y} = -2x - 3y;$

19. $\dot{x} = -x - 2y,\ \dot{y} = -x - 3y;$

20. $\dot{x} = -x + 4y,\ \dot{y} = -3x + 6y;$

21. $\dot{x} = 4x + 10y,\ \dot{y} = -2x - 4y;$

22. $\dot{x} = x - y,\ \dot{y} = x + y;$

23. $\dot{x} = x + y,\ \dot{y} = 4x - 2y;$

24. $\dot{x} = x + 5y,\ \dot{y} = -2x - 5y;$

25. $\dot{x} = -5x - 2y,\ \dot{y} = 4x + y.$

17. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение неоднородных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases}$$

есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы, которое строится, исходя из конкретного вида функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) пусть $f_1 = P_k(t)e^{\gamma t}$, $f_2 = Q_s(t)e^{\gamma t}$, где $P_k(t)$, $Q_s(t)$ – многочлены соответствующих степеней. Тогда частное решение ищется в виде $x(t) = M_{m+r}(t)e^{\gamma t}$, $y(t) = N_{m+r}(t)e^{\gamma t}$, где $M_{m+r}(t)$, $N_{m+r}(t)$ – многочлены степени $m + r$ с неопределёнными коэффициентами, которые находятся после подстановки этого решения в исходную систему, $m = max(k; s)$, r – кратность числа γ среди корней характеристического уравнения;
2) если $f_1(t) = P_{1,m_1}(t)e^{at}\cos bt + P_{2,m_2}(t)e^{at}\sin bt$, $f_2(t) = P_{3,m_3}(t)e^{at}\cos bt + P_{4,m_4}(t)e^{at}\sin bt$, то частное решение ищем в виде

$$x(t) = Q_{1,m+r}(t)e^{at}\cos bt + Q_{2,m+r}(t)e^{at}\sin bt,$$

$$y(t) = Q_{3,m+r}(t)e^{at}\cos bt + Q_{4,m+r}(t)e^{at}\sin bt.$$

Здесь $Q_{k,m+r}(t)$ $(k = \overline{1,4})$ – многочлены степени $m + r$ с коэффициентами, подлежащими определению, $m = max(m_1; m_2; m_3; m_4)$, r – кратность числа $a + ib$ среди корней характеристического уравнения;
3) если функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ разнородны (в них реализуются пункты 1) и 2) одновременно), то частное решение системы есть сумма частных решений, отвечающих каждому из соответствующих пунктов.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

Решение. Общее решение соответствующей однородной системы, полученное известным способом, есть

$$x = C_1e^{-2t} + 4C_2e^t,\ y = C_1e^{-2t} + C_2e^t.$$

Частное решение ищем в виде $x = (at + b)e^t$, $y = (ct + d)e^t$.

Подставляя его в исходную систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим $a = -4$, $b = 0$, $d = 1$, $c = -1$.

Ответ: $x = C_1e^{-2t} + 4C_2e^t - 4te^t$, $y = C_1e^{-2t} + C_2e^t - (t-1)e^t$.

1. $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = -x + 2y + 5\sin t$.

2. $\dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t}$, $\dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}$.

3. $\dot{x} = x - y + 8t$, $\dot{y} = 5x - y$.

4. $\dot{x} = 4x - 3y + \sin t$, $\dot{y} = 2x - y - 2\cos t$.

5. $\dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}$, $\dot{y} = x + y - 5e^{3t}$.

6. $\dot{x} = x + 2y + 16te^t$, $\dot{y} = 2x - 2y$.

7. $\dot{x} = 2x - 3y$, $\dot{y} = x - 2y + 2\sin t$.

8. $\dot{x} = 2x + y + 2e^t$, $\dot{y} = x + 2y$.

9. $\dot{x} = 2x + 3y + 5t$, $\dot{y} = 3x + 2y$.

10. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = x - 5\cos t$.

11. $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = x + 2e^t$.

12. $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = -2x + y + 18t$.

13. $\dot{x} = -2x - y + 3\sin t$, $\dot{y} = -4x - 5y$.

14. $\dot{x} = 2x - 4y$, $\dot{y} = x - 3y + 3e^t$.

15. $\dot{x} = 2x + 4y - 8t$, $\dot{y} = 3x + 6y$.

16. $\dot{x} = y - 10\sin t,\ \dot{y} = 2x + y.$

17. $\dot{x} = x + y + e^t,\ \dot{y} = 3x - y.$

18. $\dot{x} = y + 2e^t,\ \dot{y} = x + t.$

19. $\dot{x} = 2x + 4y + \sin t,\ \dot{y} = 3x + 6y + \cos t.$

20. $\dot{x} = 4x + y - e^{2t},\ \dot{y} = -2x + y.$

21. $\dot{x} = 3x - 5y + t,\ \dot{y} = x - y.$

22. $\dot{x} = 3x + 2y + \cos t,\ \dot{y} = x + 2y.$

23. $\dot{x} = x + y,\ \dot{y} = -2x + 3y - 2(t+1)e^t.$

24. $\dot{x} = 6x + 6y + 2t,\ \dot{y} = -4x - 4y.$

25. $\dot{x} = -3x + y - e^{-t},\ \dot{y} = -4x + y.$

18. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Задача Коши.

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y,z)\ (*)$$

Его решением называется дифференцируемая функция $z = z(x,y)$, обращающая уравнение в тождество.

Чтобы решить уравнение, надо записать соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме $\dfrac{dx}{a_1} =$

$\dfrac{dy}{a_2} = \dfrac{dz}{b}$ и найти два независимых первых интеграла $\varphi_1(x, y, z) = C_1$, $\varphi_2(x, y, z) = C_2$. Тогда решение нашего уравнения записывается в неявной форме $F(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$, где F – произвольная дифференцируемая функция, зависящая от левых частей первых интегралов.

Чтобы решить задачу Коши, то есть найти поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $(*)$ и переходящую через линию $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, необходимо в оба первых интеграла подставить $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\varphi_1(x(t),\, y(t),\, z(t)) \equiv \Phi_1(t) = C_1,\ \varphi_2(x(t),\, y(t),\, z(t)) \equiv \Phi_2(t) = C_2,$$

затем исключить t из соотношений $\Phi_1(t) = C_1$, $\Phi_2(t) = C_2$, получив при этом $\Phi(C_1, C_2) = 0$, и, наконец, заменить в последнем выражении C_1 и C_2 левыми частями наших первых интегралов. Искомое решение получается в неявном виде $\Phi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $\operatorname{tg} x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, $y = x$, $z = x^3$.

Решение. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, $\dfrac{dx}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$, даёт два первых интеграла $\dfrac{\sin x}{y} = C_1$, $\dfrac{z}{y} = C_2$, так что общее решение уравнения можно записать в неявном виде $F\left(\dfrac{\sin x}{y},\ \dfrac{z}{y}\right) = 0$.

Переходя к задаче Коши, представим линию, через которую должна пройти искомая поверхность, в параметрической форме: $x = t$, $y = t$, $z = t^3$. Подставляя эти выражения в первые интегралы, получим: $\sin t/t = C_1$, $t^2 = C_2$. После исключения t, мы приходим к соотношению $C_1\sqrt{C_2} = \sin\sqrt{C_2}$, которое и даёт искомое решение $\sqrt{\dfrac{z}{y^3}}\sin x = \sin\sqrt{\dfrac{z}{y}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{z}{y^3}}\sin x = \sin\sqrt{\dfrac{z}{y}}$.

1. $xz'_x + yz'_y = z - xy,\ x = 2,\ z = y^2 + 1;$
2. $xz'_x - yz'_y = 2z,\ x = 3,\ z = y;$
3. $y^2z'_x + xyz'_y = x,\ x = 0,\ z = y^2;$
4. $yzz'_x + xzz'_y = xy,\ x = 1,\ y^2 + z^2 = 1;$
5. $(y + 2z^2)z'_x - 2x^2zz'_y = x^2,\ y = x^2,\ x = z;$
6. $yz'_x - xz'_y = y^2 - x^2,\ y = 1,\ z = x^2 - 1;$
7. $xz'_x + (y + x^2)z'_y = z,\ x = 2,\ z = y - 4;$
8. $z'_x \operatorname{ctg} x + yz'_y = z,\ y = 3x,\ z = x^3;$
9. $xz'_x + yz'_y = z - x^2 - y^2,\ y = -2,\ z = x - x^2;$
10. $y^2z'_x + yzz'_y = -z^2,\ x - y = 0,\ x - yz = 2;$
11. $zz'_x - xyz'_y = 2zx,\ x + y = 2,\ yz = 1;$
12. $(x - z)z'_x + (y - z)z'_y = 2z,\ x - y = 2,\ z + 2x = 1;$
13. $yz'_x + xz'_y = y^2 + x^2,\ x = 2,\ z = 1 + 2y + 3y^2;$
14. $z'_x \cos^2 x + yz'_y = z,\ y = x,\ z = x^2;$
15. $xz'_x + yz'_y = 2xy,\ y = x,\ z = x^2;$
16. $xy^3z'_x + x^2z^2z'_y = y^3z,\ x = -z^3,\ y = z^2;$

17. $zz'_x + (z^2 - x^2)z'_y = -x,\ y = x^2,\ z = 2x;$

18. $(y - z)z'_x + (z - x)z'_y = x - y,\ y = z,\ z = -x;$

19. $xz'_x - yz'_y = z^2(x - 3y),\ x = 1,\ zy + 1 = 0;$

20. $y^2 z'_x - x^2 z'_y = x^2 + y^2,\ y = 1,\ z = x^2;$

21. $xz'_x + yz'_y = 2z,\ x = 1,\ z = y;$

22. $z'_x \operatorname{tg} x + yz'_y = z,\ y = x,\ z = x^3;$

23. $xz'_x + (xz + y)z'_y = z,\ x + y = 2z,\ xz = 1;$

24. $xz'_x - yz'_y = x - y,\ x = 2,\ z = y^2 + 4;$

25. $xz'_x + zz'_y = y,\ y = 2z,\ x + 2y = z^2.$