

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

ХУТОРОВА О.Г. СТЕНИН Ю.М. ФАХРТДИНОВ Р.Х.
МОРОЗОВА Л.В. ЖУРАВЛЕВ А.А. ТЕПЛОВ В.Ю. ЗЫКОВ Е.Ю.

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

методическое пособие

**Казань
2001**

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета

УДК 519.95

**Хуторова О.Г., Стенин Ю.М., Фахртдинов Р.Х., Морозова Л.В.,
Журавлев А.А., Теплов В.Ю., Зыков Е.Ю.**
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРО-
ЦЕССОВ. Методическое пособие.- Казань.-2001, 50 с.

Учебное пособие предназначено для использования при решении практических работ по курсам информатики и математического моделирования студентами, аспирантами и слушателями ФПК. В пособии даны задачи и краткая теория построения математических моделей различных физических процессов.

Рецензент: Насыров И.А., асс.каф. радиоэлектроники Казанского госуниверситета.

1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Любое тело, способное вращаться вокруг некоторой оси, называется физическим маятником. Из опыта известно, что, кроме вращения, возможны сжатие и растяжение тела, закручивание, изгиб и др. Каждый тип движения независим и количественно описывается своими параметрами или, как говорят в механике, координатами. При этом число степеней свободы равно числу независимых координат, которые полностью описывают движение системы. Чем больше степеней свободы, тем ближе конструируемые модели к реальной системе, но тем сложнее их количественное описание.

МАЯТНИК

Для физического маятника основным видом движения является вращение. Чтобы исключить другие виды движения, достаточно принять, что тело несжимаемо. Упрощая описание, считаем, что вся масса тела m считается сосредоточенной в точке, расположенной в центре тяжести, и эта точка соединена с осью вращения невесомым и несжимаемым стержнем длины l . И последняя идеализация - отсутствие потерь.

Получили описание физического маятника - математический маятник. В положении покоя под действием силы тяжести маятник расположен вертикально. Отклонение от вертикали измеряется углом φ в радианах. В каждой точке траектории движение груза происходит под действием тангенциальной составляющей силы тяжести, равной $m \cdot g \cdot \sin \varphi$, скорость его движения

$$v = l \frac{d\varphi}{dt}, \text{ тангенциальное ускорение } a = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Из второго закона Ньютона получаем уравнение движения

$$f = ma = ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi \quad \text{или}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi = -\omega_0^2 \sin \varphi. \quad (1)$$

Отметим, что уравнение (1) описывает, в общем, все возможные движения маятника. Любое же конкретное движение может быть определено, если известны начальные условия этого движения, т. е. если известны положение груза и его скорость в начальный момент времени: $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ (φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ могут быть любыми).

Полная энергия маятника определяется суммой кинетической и потенциальной энергий, т. е.

$$E = \frac{mv^2}{2} + mg(1 - \cos \varphi) = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Преобразуем это соотношение, сделав все его члены безразмерными:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2E}{m\omega_0^2 l^2} = \frac{E}{E_0}, \quad (2)$$

где E_0 - кинетическая энергия точки с массой, равномерно вращающейся по окружности радиусом l с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, E - полная энергия системы.

Эффективным методом исследования колебательных систем является метод фазовой плоскости. Понятие фазовой плоскости заимствовано теорией колебаний из механики. Если механическая система состоит из N тел или, в общем случае, имеет N степеней свободы, то состояние системы в момент t или, что то же самое, фаза системы описывается совокупностью N координат $x_n(t)$ и N импульсов $p_n(t)$. Пространство координат и импульсов называется фазовым пространством. Если система описывается одной координатой и одним импульсом, то пространство вырождается в плоскость, которая и называется фазовой плоскостью.

В теории колебаний принято называть фазовой плоскостью плоскость координаты и скорости, в нашем случае $(\varphi, \dot{\varphi})$. Такое определение не меняет смысла фазовой плоскости, так как импульс и скорость связаны линейно: $p = m\dot{\varphi}$.

Состояние системы в фиксированный момент времени t_0 описывается ее координатой φ_0 и скоростью $\dot{\varphi}$, что соответствует точке на фазовой плоскости. С течением времени координата $\varphi(t)$ и скорость $\dot{\varphi}(t)$ изменяются, соответственно изображающая точка движется на фазовой плоскости по некоторой траектории. Получить такую фазовую траекторию можно, решая уравнение (1), или из соотношения (2), которое, вообще говоря, может быть получено из (1) путем интегрирования.

Некоторый качественный анализ можно произвести с помощью соотношения (2) по величине отношения полной энергии к кинетической $\frac{E}{E_0}$:

1) если $\frac{E}{E_0} < 4$, то угол отклонения φ не может превышать π , так как должно выполняться неравенство $\frac{E}{E_0} - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} > 0$. При этом маятник колеблется от некоторого $-\varphi_m$ до $+\varphi_m$, т. е. $-\pi < -\varphi_m < \varphi < \varphi_m < \pi$.

2) если $\frac{E}{E_0} > 4$, то даже при максимальном значении потенциальной энергии (при $\varphi = \pi$) кинетическая энергия в верхней точке $\neq 0$ и поэтому маятник совершает не колебательное, а вращательное движение.

3) в случае, если $E = 4E_0$, из соотношения (2) получаем

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} = 4 \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad (3)$$

а) когда маятник находится в верхнем положении, т. е. $\varphi = \pm\pi$, его скорость $\dot{\varphi} = 0$, следовательно, он находится в состоянии покоя (равновесия). Из этого состояния небольшим изменением E его можно перевести как в колебательное, так и во вращательное состояние.

б) возможно и другое движение маятника. Допустим, что при $t = 0$ из состояния покоя маятнику придана скорость $\dot{\varphi} = 2\omega_0$, т. е. он получит энергию $E = 4E_0$ и будет двигаться к верхней точке равновесия так, что скорость при этом для любого φ будет определяться из соотношения (3). Чем ближе φ к π , тем меньше скорость, которая стремится к нулю, т. е. маятник ни за какое конечное время не придет в верхнее положение равновесия. Фазовые траектории для этого случая, отделяющие траектории колебательных движений от траекторий вращательных движений, называются сепаратриссами.

Для того, чтобы определить фазовую траекторию маятника, необходимо произвести численное решение уравнения (1). Это можно осуществить путём перехода от дифференциального уравнения (1) к разностному, заменив производные отношением конечных разностей. Заметим, что такая замена приводит к некоторой погрешности, которую необходимо учесть.

Дифференциальное уравнение второго порядка (1) сведем к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка (полагаем $m = 1$):

$$\dot{p} = -\omega_0^2 \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = p. \quad (4)$$

При переходе к конечным разностям в методе Эйлера эта система заменяется системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} &= -\omega_0^2 \sin \varphi, \\ \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} &= p_{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Шаг по времени Δt должен быть достаточно мал, чтобы разностные уравнения (5) правильно описывали поведение системы (1).

Одним из методов контроля является проверка постоянства полной энергии системы по условию (2). Другим, более универсальным, методом является метод повторного счета с уменьшением шага Δt . Если при этом решение остается прежним, можно считать Δt достаточно малым.

ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТУР КАК МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО КОНТУРА

Реальный контур состоит из катушки индуктивности и конденсатора. Реальная катушка не может считаться только индуктивностью, которая накапливает магнитную энергию. Во-первых, провод обладает конечной проводимостью, во-вторых, между витками накапливается электрическая энергия, т. е. имеет место межвитковая емкость.

Эквивалентная схема контура представлена на рис.1, где L_B , R_B - соответственно индуктивность и сопротивление одного витка, C' - межвитковая емкость.

Реальный конденсатор C также не может считаться идеальной емкостью. Выводы конденсатора обладают позитивной индуктивностью, а среда между пластинами обладает потерями, что отражает проводимость G . Таким образом, число контурных токов (т. е. степеней свободы) равно 5. Однако в низкочастотном диапазоне нет необходимости анализировать эту сложную схему. Межвитковые емкости C' и паразитная индуктивность L' практически роли не играют и ими можно пренебречь.

Если не учитывать потери, то получаем модель, известную как идеальный контур. Его работа описывается одной переменной, в качестве которой возьмем заряд на емкости.

Уравнение для электрических цепей составляется на основе правил Кирхгофа. Используем второе правило: сумма падений напряжений на элементах контура равна алгебраической сумме внешних ЭДС, включенных в этот контур. В нашем случае ЭДС равна нулю, и получим

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделим все слагаемые на L и обозначим $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Уравнение для идеального контура примет вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{6}$$

Простое сравнение уравнений (1) и (6) показывает, что маятник при малых отклонениях $\sin \varphi \approx \varphi$ и идеальный контур описываются одним и тем же уравнением, известным как уравнение гармонического осциллятора, которое в стандартном виде имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{7}$$

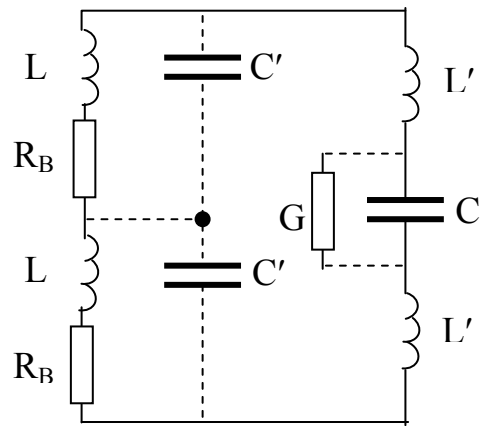


Рис. 1

В электрических системах роль координаты фазовой плоскости может играть заряд q , тогда скорость есть ни что иное как ток $\dot{q} = I(t)$. Если цепь содержит емкость, то заряд и напряжение U_C на емкости связаны линейно $\left(U_C = \frac{q}{C} \right)$. Таким образом, плоскость - напряжение на емкости, ток через емкость - также может рассматриваться как фазовая плоскость электрической системы. Аналогичный вывод можно сделать относительно напряжения на индуктивности U_L и и тока через индуктивность I_L , так как $U_L = L \frac{dI_L}{dt}$.

Обобщая вышесказанное, можно утверждать, что плоскость электрических цепей - это плоскость (U, I) . Следовательно, колебательные системы обладают одинаковыми свойствами, и можно дать некоторую классификацию динамических систем по разным признакам. В зависимости от типа уравнений, которыми описываются системы, они подразделяются на линейные (2,3) и нелинейные (1). Относительно изменения энергии колебательного движения системы делятся на консервативные (энергия неизменна) и неконсервативные (энергия меняется со временем).

Динамическая система может подвергаться или не подвергаться внешнему воздействию. В зависимости от этого различают следующие типы движения: собственные, или свободные, колебания системы (система получает от внешнего источника конечный запас энергии, и источник отключается); вынужденные колебания (система находится под действием внешнего периодического источника); параметрические колебания (в системе периодически во времени изменяется какой-либо параметр, например, емкость в контуре); автоколебания (в системе происходит преобразование энергии некоторого источника в энергию периодических колебаний).

ЗАДАНИЯ

1. Построить модель движения маятника. Определить фазовую траекторию маятника для $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $l = 0,10$ м, $g = 9,8$ м / с².

2. С помощью уравнения сепаратрисы (3) найти соответствующие начальные условия и построить ее на экране. Исследовать влияние увеличения шага по времени Δt на решение вблизи сепаратрисы, используя для контроля закон сохранения энергии.

3. Рассмотреть действие внешней возмущающей гармонической силы в режиме колебаний, близких к сепаратрисе. В этом неустойчивом случае возникают случайные колебания. Уравнение движения имеет вид $\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi = f_0 \sin \Omega t$, где f_0 , Ω - соответственно амплитуда и частота внешнего источника.

4. Построить модель идеального контура. Определить фазовую траекторию контура для $q(0) = 10^{-5}$ К, $\dot{q}(0) = 0$, $L = 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф.

2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является изучение законов движения тел в поле центральной системы.

Центральной силой называется сила, линия действия которой всё время проходит через некоторую определенную точку - центр силового поля. Сила, действующая на материальную точку в таком поле, зависит лишь от расстояния r до центра и направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} . Потенциальная энергия также зависит только от r . Частный случай поля центральных сил - гравитационное поле. Рассмотрим, например, движение спутника (в данном случае его можно принять за материальную точку) в гравитационном поле массивного тела (звезды). Уравнение движения спутника имеет вид:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M \cdot m}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1)$$

где M - масса звезды, m - масса спутника, \mathbf{r} - радиус-вектор, соединяющий центры тяжести звезды и спутника, γ - гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$.

Движение в поле центральных сил всегда происходит в какой-либо фиксированной плоскости. Уравнение (1) при заданных начальных условиях описывает кривую, которая в полярных координатах r, φ имеет вид:

$$r = \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (2)$$

Здесь $P = \frac{L^2}{\gamma \cdot m^2 \cdot M}$ - параметр орбиты, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L^2}{m(\gamma \cdot m \cdot M)^2}}$ - эксцентриситет, $L = m \cdot v \cdot r$ - момент импульса спутника, $E_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{m \cdot \gamma \cdot M}{r}$ - полная

механическая энергия системы.

Выражение (2) представляет собой уравнение кривой второго порядка в полярных координатах. Из аналитической геометрии известно, что функции такого вида описывают гиперболу (при $\varepsilon > 1$), параболу ($\varepsilon = 1$), эллипс ($\varepsilon < 1$) или окружность ($\varepsilon = 0$). Таким образом, траектория спутника в центральном поле может быть:

$$\text{гиперболой, если } E_0 > 0, \quad (3a)$$

$$\text{параболой, если } E_0 = 0, \quad (3б)$$

$$\text{эллипсом, если } -\frac{m(\gamma \cdot m \cdot M)^2}{2L^2} < E_0 < 0, \quad (3в)$$

$$\text{окружностью, если } E_0 = -\frac{m(\gamma \cdot m \cdot M)^2}{2L^2}. \quad (3г)$$

В данной работе изучаются только замкнутые траектории (случаи 3в и 3г). Напомним основные свойства эллипса (рис.1). Эллипсом называется множество точек $M(x, y)$, для которых сумма расстояний до двух заданных фиксированных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (фокусов) постоянна и равна большой оси эллипса $2a$, т. е.

$$r_1 + r_2 = \text{const} = 2a. \quad (4)$$

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a}$, а площадь эллипса

$$S = \pi \cdot a \cdot b. \quad (5)$$

Наблюдая движения планет, Кеплер эмпирически установил три закона:

1. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус-вектор, соединяющий планету с Солнцем, описывает за равные промежутки времени одинаковые площади (т. е. $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$).

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T^2}{\tilde{T}^2} = \frac{a^3}{\tilde{a}^3}. \quad (6)$$

В данной работе Вам предстоит убедиться в справедливости законов Кеплера и определить массу звезды, используя компьютерное моделирование.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

ЭВМ на экране дисплея моделирует следующую ситуацию. В точке пересечения координатных осей (рис.2) находится звезда массой M - источник гравитационного поля. С места старта (точка А), находящегося на расстоянии r_0 от центра звезды, вылетает спутник массой m со скоростью v_0 в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей центр звезды и место старта. r_0 называется прицельным параметром. Диапазон возможных скоростей v_0 выбирается таким образом, чтобы траектории движения были замкнутыми.

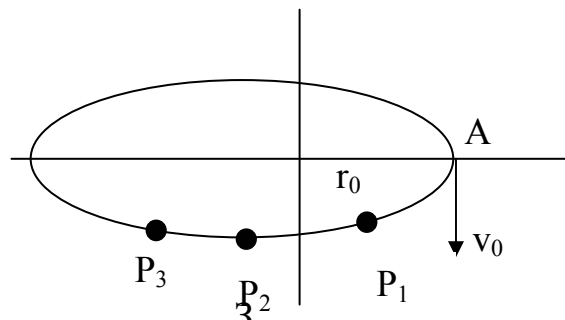


Рис.2

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ

Назначение программы: по заданным значениям массы центрального тела (звезды) M , прицельного параметра r_0 , массы спутника M_0 и его скорости v_0 рассчитать параметры орбиты спутника и смоделировать движение спутника на экране дисплея.

Основные этапы алгоритма программы:

- 1) ввод исходных значений массы центрального тела M , массы спутника M_0 , прицельного параметра r_0 и постоянной гравитации γ ;
- 2) вычисление значений скорости v спутника, соответствующих круговой ($v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{r_0}}$) и параболической ($v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1$) орбитам;
- 3) вывод значений v_1, v_2 ;
- 4) ввод значения начальной скорости v_0 в пределах $v_1 < v_0 < v_2$;
- 5) расчёт параметров орбиты: начальной энергии системы “звезда-спутник” E_0 , момента импульса L , параметра орбиты P , эксцентриситета ε , большой A и малой B полуосей;
- 6) вывод значений E_0, L, ε, A и B ;
- 7) графика траектории;
- 8) вычисление приращения центрального угла φ ;
- 9) вычисление текущего значения центрального угла φ ;
- 10) вычисление текущих значений радиуса R и координат X, Y спутника;
- 11) проверка замкнутости траектории (т. е. $\varphi > 2\pi$), завершение расчетов.

ЗАДАНИЯ

1. Моделирование движение спутника в поле Земли:

а) смоделировать траекторию спутника массой $m = 5000$ кг в поле центрального тела (Земли) с $M = 10^{25}$ кг при $r_0 = 7000$ км и $v_0 > v_1$;

б) проверить I закон Кеплера. Получив несколько траекторий движения спутника (изменяя v_0), необходимо убедиться, что каждая из них является эллипсом. Для этого нужно выбрать не менее 10 точек на кривой (P_1, P_2, P_3, \dots на рис. 2) и определить сумму расстояний до фокусов (в одном фокусе находится центральное тело, другой фокус определяется из соображений симметрии). Составьте таблицу:

№ точки	r1	r2	r1 + r2

и убедитесь в выполнении условия (4) для каждой траектории;

в) проверить III закон Кеплера. На основании II закона Кеплера и соотношения (5) определите период обращения T спутника вокруг звезды для различных орбит. Составьте таблицу:

№ орбиты	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>T</u>	T^2 / A^3

и убедитесь в справедливости III закона Кеплера, т. е. соотношения (6);

г) определение массы центрального тела M . Из закона сохранения энергии и момента импульса можно получить выражение для M :

$$M = \frac{1}{G} \frac{r_0 v_0^2}{1 \pm \varepsilon}. \quad (7)$$

По этому соотношению определите массу центрального тела, используя траектории с различными эксцентриситетами. В формуле (7) знак "+" используется в случае, если звезда находится в ближнем к месту старта фокусе эллипса. В противном случае берется знак "-".

2. Повторить моделирование и проверку законов Кеплера для системы "Земля – Солнце" ($m = 10^{25}$ кг, $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $r_0 = 149\,000\,000$ км).

3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Движение заряженной частицы в магнитном поле описывается вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где m - масса частицы, $\mathbf{F} = e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ - сила Лоренца (\mathbf{B} - вектор магнитной индукции, e - заряд частицы). Наиболее простой вид имеет движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, т. е. в поле, направление и величина которого одинаковы во всех точках пространства. Заряженная частица движется по поверхности воображаемого цилиндра с радиусом, равным ларморовскому радиусу $r_0 = \frac{mv_0}{eB}$. Ось цилиндра направлена вдоль вектора индукции магнитного поля. Частица вращается вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \frac{eB}{m}$, которая называется циклотронной частотой.

Зависимость напряженности магнитного поля от пространственных координат резко усложняет решение уравнений движения. Рассмотрим здесь решение двух задач: 1) о движении положительно заряженной частицы в магнитном поле прямолинейного бесконечного проводника с постоянным током и 2) о движении взаимодействующих по закону Кулона разноименно заряженных частиц при наличии однородного постоянного магнитного поля.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТОКА

Пусть в магнитном поле бесконечного прямолинейного проводника, по которому течет ток I , движется частица с положительным зарядом e и массой m . Начальная скорость частицы v_0 направлена вдоль тока в проводнике. В начальный момент времени частица расположена относительно проводника на расстоянии, равном локальному значению ларморовского радиуса, рассчитанного по величине магнитного поля в точке расположения частицы:

$$r_0 = \frac{mv_0}{eB(r_0)}. \quad (2)$$

Рассмотрим плоскость, проходящую через проводник и частицу, и введем декартовы координаты с осью X , проходящей через частицу перпендикулярно проводнику, осью Y с положительным направлением вдоль тока и осью Z , перпендикулярной плоскости. В каждой точке плоскости магнитное поле линейного проводника перпендикулярно этой плоскости и равно $B = B_z = \frac{\mu I}{2\pi x}$, и сила Лоренца не имеет составляющей вдоль оси Z . Поэтому

если частица имела в начальный момент времени равную нулю z -компоненту скорости, то ее траектория во все последующие моменты времени будет лежать и рассматриваемой плоскости. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x, & m \frac{dv_x}{dt} &= ev_y B_z(x), \\ \frac{dy}{dt} &= v_y, & m \frac{dv_y}{dt} &= -ev_x B_z(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия, определяющие траекторию, имеют вид

$$x(0) = r_0, \quad y(0) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad v_y(0) = v_0. \quad (4)$$

Математически уравнения движения (3) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для четырех функций: $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ и $v_y(t)$. Начальные условия (4) определяют задачу Коши для этой системы уравнений.

При выполнении расчетов часто неудобно использовать размерные значения величин. В рассматриваемой задаче характерным временем, за которое происходят типичные изменения траектории, является величина τ_0 , обратная циклотронной частоте ω , рассчитанной по величине индукции магнитного поля в какой-либо точке траектории (например, в начальной). Характерным размером траектории частицы является значение ларморовского радиуса r_0 , рассчитанного по магнитной индукции и скорости в этой же точке. Характерные размерные величины связаны соотношением $r_0 = v_0 \cdot \tau_0$. Для решения задачи целесообразно ввести следующие безразмерные переменные:

$$t' = \frac{t}{\tau_0}, \quad x' = \frac{x}{r_0}, \quad y' = \frac{y}{r_0}, \quad v'_x = \frac{v_x}{v_0}, \quad v'_y = \frac{v_y}{v_0}. \quad (5)$$

В новых переменных уравнения движения и начальные значения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= v'_x, & \frac{dy'}{dt'} &= v'_y, & \frac{dv'_x}{dt'} &= \frac{v'_y}{x'}, & \frac{dv'_y}{dt'} &= -\frac{v'_x}{x'}, \\ x'(0) &= 1, & y'(0) &= 0, & v'_x(0) &= 0, & v'_y(0) &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

ВОЗМУЩЕНИЕ ОРБИТЫ ЭЛЕКТРОНА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ДВИЖУЩИМСЯ ПРОТОНОМ

Пусть движение электрона в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{B} , направленном вдоль оси Z , возмущается движущимся мимо него протоном. В начальный момент времени частицы расположены в одной плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и расстояние между ними равно диаметру ларморовской орбиты электрона, рассчитанному по его начальной

скорости v_0 . Частицы имеют одинаковые по направлению и величине начальные скорости, перпендикулярные прямой, проходящей через частицы, и расположенные в указанной плоскости.

Система уравнений движения электрона и протона имеет вид:

$$\begin{aligned} m_e \frac{d^2 \mathbf{r}_e}{dt^2} &= e^2 \frac{\mathbf{R}}{R^3} - e[\mathbf{v}_e \mathbf{B}], \\ m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} &= -e^2 \frac{\mathbf{R}}{R^3} + e[\mathbf{v}_i \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь m_e и m_i - массы соответственно электрона и протона, e - абсолютная величина заряда частиц, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_e$ - расстояние между частицами. Используя характерные для электрона величины τ_0 , r_0 и v_0 , удовлетворяющие соотношениям

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}, \quad r_0 = v_0 \tau_0, \quad m_e \frac{v_0}{\tau_0} = \frac{e^2}{r_0^2}, \quad (8)$$

введем безразмерные переменные

$$t' = \frac{t}{\tau_0}, \quad \mathbf{r}'_e = \frac{\mathbf{r}_e}{r_0}, \quad \mathbf{v}'_e = \frac{\mathbf{v}_e}{v_0}, \quad \mathbf{r}'_i = \frac{\mathbf{r}_i}{r_0}, \quad \mathbf{v}'_i = \frac{\mathbf{v}_i}{v_0}. \quad (9)$$

Учитывая, что движение частиц происходит в координатной плоскости XY, запишем уравнения движения в безразмерных переменных в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (штрихи для упрощения записи опустим):

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{dt} &= v_{ex}, \quad \frac{dy_e}{dt} = v_{ey}, \\ \frac{dv_{ex}}{dt} &= -v_{ey} + \frac{(x_i - x_e)}{R^3}, \quad \frac{dv_{ey}}{dt} = v_{ex} + \frac{(y_i - y_e)}{R^3}, \\ \frac{dx_i}{dt} &= v_{ix}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{iy}, \\ \frac{dv_{ix}}{dt} &= \beta \left[v_{iy} - \frac{(x_i - x_e)}{R^3} \right], \quad \frac{dv_{iy}}{dt} = \beta \left[-v_{ix} - \frac{(y_i - y_e)}{R^3} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\beta = \frac{m_e}{m_i} = \frac{1}{1836}$. Начальные значения, определяющие траектории электрона и протона, примем в виде:

$$x_e(0) = 0, \quad y_e(0) = -1, \quad v_{ex}(0) = 1, \quad v_{ey}(0) = 0, \quad (11)$$

$$x_i(0) = 0, \quad y_i(0) = 1, \quad v_{ix}(0) = 1, \quad v_{iy}(0) = 0.$$

Расположение координатных осей и траектории частиц схематично изображены на рис. 1. Начальная траектория электрона изображена сплошной линией. Уже через несколько оборотов электрона по ларморовской окружности его траектория будет мало отличаться от предельной окружности, изображённой штрихпунктирной. Траектория протона (штриховая линия) мало отличается от прямой, поскольку его ларморовская окружность и время оборота в $\frac{m_i}{m_e}$ раз больше, чем у электрона.

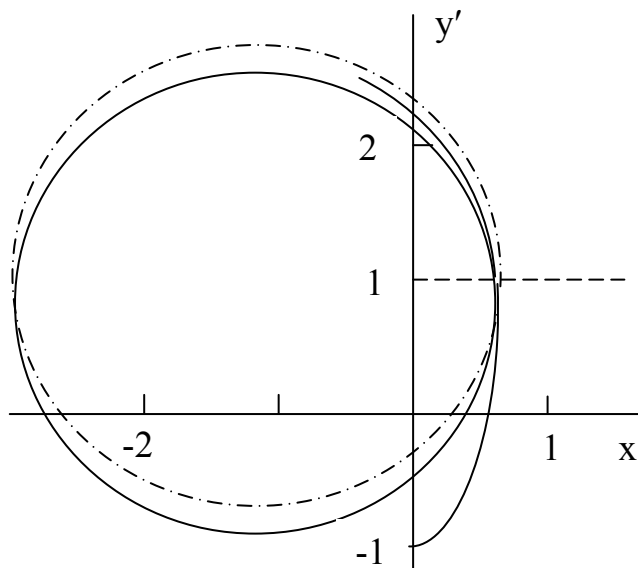


Рис. 1

ЗАДАНИЯ

1. Построить модель движения заряженной частицы в поле прямолинейного тока. Рассчитать и нарисовать траекторию частицы, по рисунку определить скорость дрейфа частицы вдоль проводника и минимальное расстояние, на которое частица подходит к проводнику. Исследовать и объяснить зависимость параметров траектории от величины и направления начальной скорости частицы.

2. Построить модель движения электрона в однородном магнитном поле при возмущении его орбиты движущимся протоном. Рассчитать и построить траектории электрона и протона (по графику легко найти радиус новой ларморовской окружности и её центр). Исследовать и объяснить зависимость параметров траекторий от величины и направления начальных скоростей частиц, соотношения их масс и зарядов.

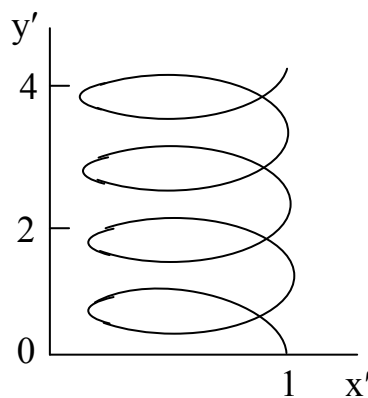


Рис.2

4. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

Дисперсией света называют явление зависимости абсолютного показателя преломления вещества n от частоты ν света или от длины волны в вакууме $\lambda = c/\nu$. Для построения дисперсионной кривой $n = f(\lambda)$ стеклянной призмы используют метод измерения угла наименьшего отклонения, с помощью которого вычисляют показатель преломления вещества по формуле

$$n = \frac{\sin(0.5 \cdot (\theta + \delta_{\min}))}{\sin(0.5 \cdot \theta)}, \quad (1)$$

где δ_{\min} - угол наименьшего отклонения луча, претерпевшего преломление в трехгранной призме (измеряется на гониометре); θ - преломляющий угол призмы. Углы δ_{\min} находят для всех видимых линий спектра.

Дисперсионная кривая позволяет определить дисперсию вещества как производную $dn/d\lambda$, фазовую V_{ϕ} и групповую $V_{гр}$ скорости света в веществе:

$$V_{\phi} = \frac{c}{n}, \quad (2)$$

где c - скорость света в вакууме

$$v_{гр} = v_{\phi} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right). \quad (3)$$

Для определения $dn/d\lambda$ необходимо найти аналитический вид функции $n = f(\lambda)$. В электронной теории дисперсии света эта зависимость описывается формулой

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2 \lambda^2 \lambda_{рез}^2}{2\pi^2 c^2 m \epsilon_0 (\lambda^2 - \lambda_{рез}^2)}}, \quad (4)$$

где N - концентрация осцилляторов; e и m - заряд и масса электрона соответственно; ϵ_0 - электрическая постоянная; $\lambda_{рез}$ - длина волны, соответствующая резонансному поглощению света атомом (молекулой) вещества.

Формула (4) применима при таких допущениях:

- ◆ атом (молекула) вещества обладает лишь одной резонансной частотой $\omega_{рез}$ ($\lambda_{рез}$ соответственно), что справедливо для областей длин волн, далеких от края поглощения.
- ◆ затухание колебаний электронов в атомах пренебрежимо мало, что вполне приемлемо для веществ, прозрачных в вакуумной области спектра (стекло, кварц), не имеющих полос поглощения в данной области.

Отметим, что формулу (4) можно линеаризировать к виду

$$Y = A + B \cdot X, \quad \text{где} \quad (5)$$

$$A = \frac{4\pi^2 c^2 m \epsilon_0}{Ne^2 \lambda_{рез}}, \quad B = \frac{4\pi^2 c^2 m \epsilon_0}{Ne^2},$$

$$Y = \frac{1}{n^2 - 1}, \quad X = -\frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, исходная теоретическая зависимость может быть представлена формулой

$$n = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 - B}}. \quad (6)$$

ЗАДАНИЕ

Построить модель дисперсионных свойств стеклянной призмы. Определить дисперсию вещества $dn/d\lambda$ в различных областях спектра излучения ртутной лампы; рассчитать фазовую и групповую скорости света в различных областях спектра; определить концентрацию осцилляторов и резонансную длину волны для вещества призмы.

Исходные данные. Предполагается, что в спектре, состоящем из четырех линий, наблюдаются два дублета, причем первый дублет образуют вторая и третья линии, а второй - третья и четвертая. Массив углов наименьшего отклонения, соответствующих линиям данного спектра σ_{\min} : $28^\circ 59'$; $58^\circ 59'$; $88^\circ 59'$; $88^\circ 59'$. Соответствующий массив длин волн λ_i : 0,80; 0,50; 0,45; 0,42 мкм. Преломляющий угол призмы $\theta = 31^\circ 01' 00''$.

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ А}\cdot\text{с (В м)}^{-1};$$

$$c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1};$$

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ А}\cdot\text{с};$$

$$m = 9.1096 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

5. ПРОХОЖДЕНИЕ НЕЙТРОНОВ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНКУ

Рассмотрим простейший вариант задачи о прохождении потока нейтронов через однородную пластинку. Физические законы взаимодействия отдельной элементарной частицы с веществом хорошо известны. Требуется найти макроскопические характеристики процессов, в которых участвует огромное число таких частиц. Пусть на бесконечную пластинку толщиной d ($0 \leq x \leq d$) падает перпендикулярно поток нейтронов с энергией E . При столкновении с атомами вещества, из которого состоит пластинка, нейтроны могут упруго рассеиваться или поглощаться. В действительности, взаимодействие нейтронов с ядрами может приводить к различным результатам - упругому рассеянию, неупругому рассеянию, захвату нейтрона ядром, делению ядра на осколки. Однако для простоты мы будем считать, что происходят только два указанных процесса и, более того, предположим, что энергия нейтрона при рассеянии на ядре не меняется (как при абсолютно упругом ударе шарика о стенку) и любое направление "отскока" нейтрона от атома одинаково вероятно.

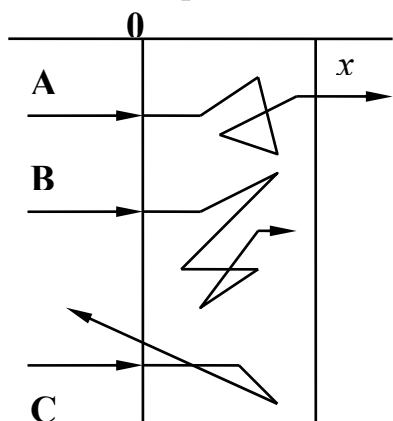


Рис.1

На рис.1 изображены различные возможные исходы взаимодействия нейтрона с пластинкой в рассматриваемой простой модели: нейтрон А, испытав несколько столкновений с ядрами, проходит сквозь пластинку. Нейтрон В поглощается в ней, нейтрон С отражается пластинкой.

Не претендуя на математическую строгость, дадим определение вероятности, обычно используемое в статистической физике. Пусть мы проводим последовательно q измерений над системой, причем каждый раз измеряем одну и ту же определенную физическую величину A . Обозначим через $n(a_j)$ число измерений, при которых измеряемая величина A имеет значение a_j . Тогда вероятность $P(a_j)$ обнаружения системы в состоянии, когда измеряемая величина A имеет значение a_j , определяется следующим образом

$$P(a_j) = \frac{n(a_j)}{q}. \quad (1)$$

Из определения вероятности $P(a_j)$ следует, что $P(a_j) > 0$ и

$$\sum_l P(a_l) = 1, \quad (2)$$

где суммирование по l эквивалентно перебору всех возможных значений a_j измеряемой физической величины A . Это равенство показывает, что сум-

марная вероятность того, что измеряемая величина имеет какое-либо из своих возможных значений, равна единице,

Чтобы задать случайную величину, нужно указать, какие значения она может принимать и каковы их вероятности.

В рассматриваемой простейшей модели взаимодействие нейтронов с веществом характеризуется двумя постоянными σ_c и σ_s , которые называются соответственно сечением поглощения (capture) и сечением рассеяния (scattering). Сумма $\sigma = \sigma_c + \sigma_s$ называется полным сечением. Физический смысл сечения таков: при столкновении нейтрона с атомом вещества вероятность поглощения равна $\frac{\sigma_c}{\sigma}$, а вероятность рассеяния равна $\frac{\sigma_s}{\sigma}$.

Между двумя последовательными столкновениями с ядрами атомов вещества пластинки нейтрон проходит некоторый путь, называемый "длиной свободного пробега" и обозначаемый λ . Длина свободного пробега - это случайная величина, которая может принимать любые положительные значения. Простейшая форма для плотности вероятности задается экспоненциальным распределением:

$$p(x) = \sigma \cdot e^{-\sigma x}, \quad (1a)$$

Для него выполнимо условие нормировки

$$\sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} dx = 1.$$

Выражение для среднего значения λ будет равно

$$\langle \lambda \rangle = \int_0^{\infty} x \cdot p(x) dx = \sigma \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\sigma x} dx; \quad (2)$$

после интегрирования по частям ($U = x$, $V = -e^{-\sigma x}$) получим

$$\langle \lambda \rangle = \left[-x \cdot e^{-\sigma x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} dx = \frac{1}{\sigma}. \quad (3)$$

Выберем определенный способ моделирования случайной величины λ . В методе Монте-Карло значение любой случайной величины можно получить путем преобразования случайной величины γ , равномерно распределенной в интервале (0, 1).

При разыгрывании непрерывной случайной величины x , распределенной в интервале (a, b) с плотностью $p(x)$, можно исходить из уравнения

$$\int_a^{\xi} p(x) dx = \gamma \quad \text{или} \quad \int_{\xi}^b p(x) dx = \gamma. \quad (4)$$

Выбрав очередное значение γ , нужно решить уравнение (4) и найти очередное значение ξ величины X . Для рассматриваемого случая (I) имеем

$$\sigma \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\sigma x} dx = \left[-e^{-\sigma x} \right]_{\lambda}^{\infty} = e^{-\sigma \lambda},$$

и второе уравнение (4) дает формулу для разыгрывания λ :

$$\lambda = -\frac{1}{\sigma} \ln \gamma_1, \quad (5)$$

где γ_1 - случайная величина, равномерно распределенная в интервале (0,1).

Теперь остается выяснить, как выбирать случайное направление движения нейтрона после рассеяния. Поскольку в рассматриваемой модели есть симметрия относительно оси x , то это направление вполне определяется одним углом φ между направлением скорости нейтрона и осью x , т. е. необходимо, чтобы угол φ был равномерно распределен в интервале (0, π) (рис.2)

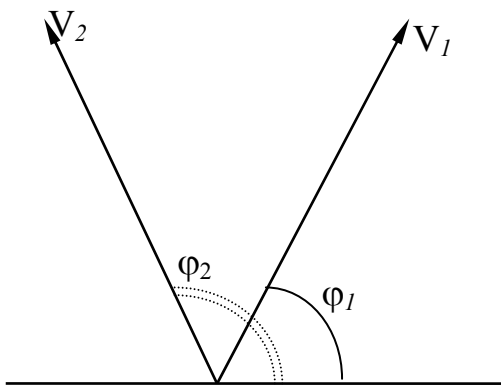


Рис. 2

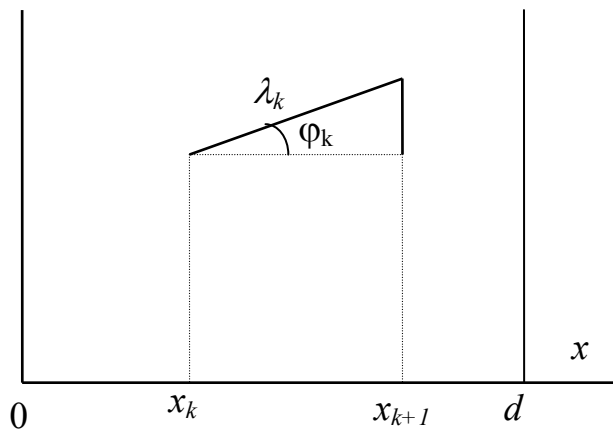


Рис. 3

Другими словами, плотность вероятности случайной величины $p(x)=c$. С помощью условия нормировки сразу находим - $c = \frac{1}{b-a}$, а тогда первое уравнение (4) принимает вид

$$\int_a^{\varphi} \frac{dx}{b-a} = \gamma_2,$$

Интеграл легко вычисляется и дает уравнение для ξ :

$$\frac{\varphi - a}{b - a} = \gamma_2,$$

откуда $\varphi = a + \gamma_2(b - a)$. Поскольку $a=0$, $b=\pi$, то формула для разыгрывания угла φ принимает вид

$$\varphi = \pi \cdot \gamma_2, \quad (6)$$

где γ_2 - случайная величина, равномерно распределенная в интервале (0, 1).

Каждая траектория нейтрона характеризуется начальными значениями $x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Предположим, что нейтрон испытал k -е рассеяние внутри пластинки в точке с абсциссой x_k , после чего начал двигаться в направлении ξ_k . Разыграв длину свободного пробега нейтрона, можно вычислить абсциссу следующего столкновения нейтрона с ядром (рис.3)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \xi_k, (\xi_k = \cos \varphi_k). \quad (7)$$

Необходимо постоянно наблюдать за "судьбой" нейтрона: выход его из пластинки произойдет или назад, если $x_{k+1} < 0$, или вперед, если $x_{k+1} > 0$. Так как мы рассматриваем упрощенную задачу и не контролируем энергию нейтрона при столкновении с ядрами, то будем считать, что поглощение нейтрона происходит после n столкновений (условие столкновения $k + 1 = n$).

ЗАДАНИЯ

1. Построить модель прохождения потока нейтронов через однородную пластинку. Вычислить вероятность прохождения нейтронов через пластинку P_p , вероятность поглощения нейтронов в пластинке P_s и вероятность их отражения P_o . Создать поясняющий мультфильм.

Исходные данные: полное сечение $\sigma = 0,8$ отн. Ед.;

ширина пластинки $d = 1,8$ отн, ед, ;

число столкновений нейтрона до поглощения $n = 3$.

2. Построить модель прохождения потока нейтронов через однородную пластинку. Исследовать изменение вероятности прохождения нейтронов через пластинку P_p вероятности поглощения нейтронов в пластинке P_s и вероятности их отражения P_o в зависимости от толщины пластинки и числа столкновений нейтрона до поглощения и построить соответствующие графики.

Исходные данные: полное сечение $\sigma = 0,8$ отн. ед.

6. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Хаотическое движение частиц в жидкости или газе - броуновское движение - объясняется ударами, которые испытывает броуновская частица со стороны молекул. Теория броуновского движения была создана А.Эйнштейном и М.Смолуховским.

Задача о случайных движениях является одной из широко используемых задач теории вероятности и находит множество различных приложений.

1. Закономерности движения броуновских частиц можно понять, используя следующую простую модель. Пусть N частиц, которые в начальный момент для удобства наблюдения равномерно распределены по оси Oy (рис. 1), смещаются последовательными шагами вдоль оси Ox . Каждый шаг отдельной частицы выбирается случайным образом и не зависит от других шагов. Однако распределение вероятностей при выборе каждого шага одно и то же. Пусть смещения в противоположные стороны равновероятны, т. е. среднее значение смещения Δx

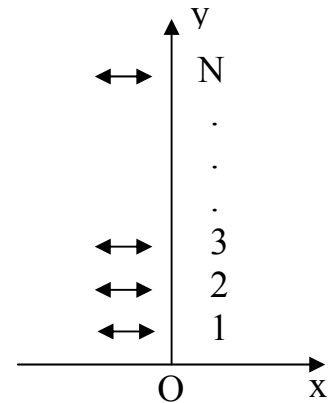


Рис.1

$$\langle \Delta x \rangle = 0. \quad (1)$$

Смысл (1) состоит в том, что среднее арифметическое большого числа смещений Δx стремится к нулю.

После каждого шага частицы будут как бы "расползаться" от оси Oy . Пусть $x(k)$ - координата некоторой частицы после k шагов. Тогда

$$x(k+1) = x(k) + \Delta x. \quad (2)$$

Усредняя равенство (2) по ансамблю частиц, получаем

$$\langle x(k+1) \rangle = \langle x(k) \rangle + \langle \Delta x \rangle = \langle x(k) \rangle,$$

т. е. среднее значение $x(k)$ не изменяется от шага к шагу и, следовательно, равно $x(0)$.

Очевидно, что для реального, пусть и большого, числа частиц значение

$$\langle x \rangle_{\text{набл}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (3)$$

(x_i - координата i -й частицы) окажется лишь близким к нулю.

Ширину полосы распределения частиц вдоль Ox после k -го шага, удобно характеризовать величиной $\langle x^2(k) \rangle$. Чтобы определить зависимость этой величины от числа шагов, возведем равенство (2) в квадрат и усредним:

$$\langle x^2(k+1) \rangle = \langle x^2(k) \rangle + 2\langle x(k)\Delta x \rangle + \langle (\Delta x)^2 \rangle. \quad (4)$$

Из независимости $x(k)$ и Δx следует, что $\langle x(k)\Delta x \rangle = \langle x(k) \rangle \langle \Delta x \rangle = 0$. Обозначив $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ как s^2 , из (4) получаем, что $\langle x^2(k+1) \rangle = \langle x^2(k) \rangle + s^2$, т. е. средний квадрат координаты растет с каждым шагом на s^2 . Следовательно,

$$\langle x^2(k) \rangle = ks^2. \quad (5)$$

Если укрупнить шаги во времени в l раз, средний квадрат смещения за один шаг s^2 следует изменить на $s'^2 = ls^2$. Число же шагов уменьшится в $k' = k/l$ раз. Тогда, согласно (5), $\langle x^2(k) \rangle = (k/l)ls^2 = k's'^2$, т. е. форма зависимости (5) при укрупнении шагов не изменится.

Таким образом, наблюдаемое значение

$$\langle x^2 \rangle_{\text{набл}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} \quad (6)$$

должно изменяться примерно пропорционально числу шагов k .

Распределение частиц в занятой ими полосе более детально характеризуется функцией распределения $f(x)$, определяющей концентрацию частиц. Вероятность того, что координата i -й частицы после k -го шага окажется в интервале $x \leq x_i \leq x + dx$, определяется как $dw = f(x)dx$. Теоретически для достаточно большого числа шагов $f(x)$ соответствует распределению случайной величины по нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x^2(k) \rangle}} e^{-\frac{x^2}{2\langle x^2(k) \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi ks^2}} e^{-\frac{x^2}{2ks^2}}. \quad (7)$$

Наблюдаемую функцию распределения можно получить, разбив ось Ox на конечные интервалы и подсчитав число частиц в каждом из них.

2. Оценки для реального броуновского движения. Средняя величина тепловой (хаотической) скорости v_T движения броуновской частицы определяется тем же выражением, что и скорость молекулы:

$$m v_T^2 \sim k_B T,$$

где m - масса частицы. k_B - постоянная Больцмана, T - температура среды. Если скорость частицы $v \gg v_T$, её движение определяется уравнением

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (8)$$

где $|\mathbf{F}| = |\alpha v|$ - сила трения. В результате трения частица тормозится, и время τ , за которое ее скорость резко уменьшится, можно оценить, подставив в (8) $a \sim v/\tau$:

$$m \frac{v}{\tau} \sim \alpha v, \quad \text{откуда } \tau \sim \frac{m}{\alpha}. \quad (9)$$

Если же скорость частицы близка к средней тепловой v_T , то сила \mathbf{F} , естественно, значительно меньше, и отклонения ее от среднего значения $-\alpha v$ весьма существенны. Эти отклонения и ответственны за хаотическое движение частицы. Что касается (9), то эта оценка определяет время, спустя которое частица "забывает" первоначальное направление движения, и время, в

течение которого частица движется примерно в одном направлении. За это время частица проходит путь

$$s \sim v_T \tau. \quad (10)$$

Движение частицы за время t можно разбить на $k \sim t/\tau$ шагов. Смещение за каждый шаг имеет случайное направление и величину $\sim s$. Оценка смещения частицы за время t по аналогии с (5)

$$r^2(t) \sim ks^2 \sim \frac{t}{\tau} (v_T \tau)^2 = v_T^2 \tau t. \quad (11)$$

Обычно этот результат представляют в виде

$$r^2(t) = 2Dt, \quad (12)$$

где D называют коэффициентом диффузии. С учетом (6), (9) и (11)

$$D \sim k_6 \frac{T}{\alpha}. \quad (13)$$

Если в начальный момент частицы были сосредоточены в каком-то малом объеме, то со временем они расходятся все дальше, занимая область размером $r(t)$.

Соотношения (12), (13), полученные Эйнштейном и Смолуховским, легли в основу экспериментов Ж. Перрена, позволивших впервые определить массу атомов.

Если частицы находятся в поле тяготения, то кроме случайных блужданий они совершают движение, направленное вниз. Скорость такого дрейфа v_d (без учета архимедовых сил) определяется из условия

$$mg \sim \alpha v_d, \quad (14)$$

т. е. сила трения компенсирует силу тяжести. Если частицы еще и отскакивают от дна сосуда, в котором они находятся, то в результате конкуренции этих движений устанавливается распределение Больцмана:

$$n(y) = n(0) e^{-\frac{mgy}{k_6 T}}, \quad (15)$$

где $n(y)$ – концентрация частиц на высоте y над уровнем дна. Подобное распределение концентрации с высотой можно получить и в компьютерной модели.

Описанные выше закономерности относятся к наблюдению бесконечного числа частиц. Реализация модели броуновского движения с помощью конечного числа частиц может продемонстрировать лишь приближенное выполнение полученных соотношений.

ЗАДАНИЯ

1. Получите на экране в виде гистограммы функцию распределения частиц вдоль оси Ox . Выведите на экран кроме гистограммы "теоретическую" функцию (7). При этом следует выбрать масштаб так, чтобы на экране площадь под этой кривой была равна площади под гистограммой. Для этого с хорошей точностью для достаточно большого x можно принять

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx \cong \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx .$$

Ниже приведена программа, реализующая одномерные случайные блуждания. В качестве закона распределения для смещения Δx выбрано равномерное распределение на интервале $-1 \leq \Delta x \leq 1$, получаемое с помощью генератора псевдослучайных чисел. Для такого распределения $s^2 = 1/3$, что можно получить самостоятельно.

Турбо-Паскаль

```

CONST
NN = 100;
TYPE
M = ARRAY[1..NN] OF REAL;
VAR
x,y: M;
n, i, j, k: INTEGER;
BEGIN
  Write('Введите кол-во частиц:');
  ReadLn(n);
  FOR i:=1 TO n DO
  BEGIN
    x[i]:=0;
    y[i]:=i
  END;
  Write('Введите число шагов:');
  ReadLn(k);
  FOR i:=1 TO k DO
  FOR j:=1 TO n DO
    x[j]:=x[j]+2*RANDOM - 1;
```

Бейсик

```

10 INPUT N (N - количество частиц)
20 DIM X(N), Y(N)
30 INPUT N1 (N1 - число шагов)
40 REM (РАЗМЕЩЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО
ОСИ Ox)
50 FOR I=1 TO N
60 X(I)=0
70 Y(I)=I
80 NEXT I
90 REM МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕ-
ДЕЛЕНИЯ ВДОЛЬ Ox
100 FOR I=1 TO N1
110 FOR J=1 TO N
120 X(J)=X(J)+2*RND(1)-1
130 NEXT J
140 NEXT I
```

2. Получите на экране графики $\langle x \rangle_{\text{набл}}$ и $\langle x^2 \rangle_{\text{набл}}$ в зависимости от числа шагов k при различных значениях числа частиц. С помощью метода наименьших квадратов постройте прямые, наилучшим образом аппроксимирующие эти зависимости,

Обратите внимание на то, что при небольшом числе частиц наблюдаются существенные отклонения от вида закона (5). Попробуйте сделать соответствующие оценки и проверить их в компьютерном эксперименте.

3. Получите на экране двумерную картину случайных движений частиц, вышедших из одной точки. Отметим, что предложенный закон хаотических движений обладает анизотропией. Например, после первого шага частицы заполняют квадрат, а не круг, как было бы при изотропных движениях. Однако, спустя несколько шагов, облако частиц становится изотропным. Это легко обнаружить, опираясь на формулу (7).

Используя (7), получите и выведите на экран теоретическую функцию распределения по координате $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Получите на экране распределение частиц в поле тяжести и соответствующую функцию распределения. Для этого нужно в исходной компьютерной модели ввести на каждом шаге кроме случайного смещения еще и постоянную величину h , направленную вниз, а также обеспечить упругое отражение частиц от "дна". В итоге устанавливается распределение

$$n(y) = n(0)e^{-\lambda y}. \quad (16)$$

Зависимость величины λ от h и s^2 легко установить, сопоставив (15) и (16) и воспользовавшись оценкой λ для броуновского движения:

$$\lambda \sim \frac{h}{s^2}. \quad (17)$$

Найдите с помощью компьютерного эксперимента коэффициент пропорциональности к формуле (17). Для этого можно рассмотреть зависимость $\ln(n(y))$, которая должна быть линейной, и воспользоваться методом наименьших квадратов.

7. МОДЕЛЬ ГАЗА

Исследуется компьютерная модель "газа", образованного шарами, которые двигаются без трения по плоской квадратной поверхности, испытывая упругие столкновения друг с другом и со стенками ("газ дисков"). Уже при нескольких шарах можно видеть возникновение "молекулярного хаоса", получать функции распределения по скоростям и т.д.

Используя уравнения движения, удастся рассчитать с высокой точностью движение планет на тысячи лет вперед. Доказаны теоремы единственности, утверждающие, что движение механической системы, описываемой уравнениями движения, полностью определяется значениями координат и скоростей всех ее точек в некоторый момент времени. Казалось бы, движение системы 5 ÷ 10 шаров тоже можно

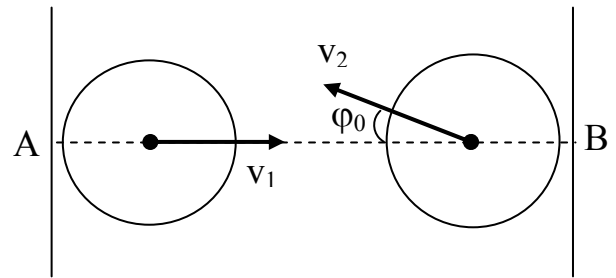


Рис. 1

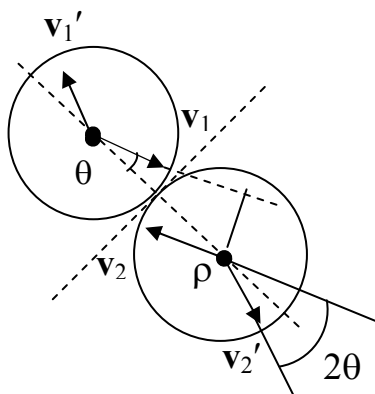


Рис.2

рассчитать хотя бы на сотни "периодов" их движения (от стенки до стенки), тем более, что законы их движения и соударений очень просты. Оказывается, однако, что рассчитать движение сталкивающихся шаров на сколько-нибудь длительное время практически невозможно.

Чтобы понять почему, рассмотрим подробнее движение двух шаров. Если шары движутся вдоль прямой АВ, перпендикулярной стенкам (рис.1), то такое движение будет, очевидно, продолжаться неограниченно долго. Но такие условия - исключительный случай. Если же вектор скорости одного из шаров до первого столкновения составляет хотя бы очень малый угол φ_0 с прямой АВ, то после соударения этот угол возрастает, после следующего - возрастает еще больше и т. д.

Оценим, как именно возрастает угол φ . Рис. 2 демонстрирует, что при соударении с прицельным параметром ρ (и $v_2 = -v_1$) направление скорости изменится на угол $\pi - 2\theta$ (а после столкновения и со стенкой - на 2θ), где

$$\sin \theta = \frac{\rho}{2r}.$$

Рис. 3 позволяет дать оценку прицельного параметра $\rho \sim l\varphi_0$, где l - начальное расстояние между центрами шаров. Таким образом, (для ма-

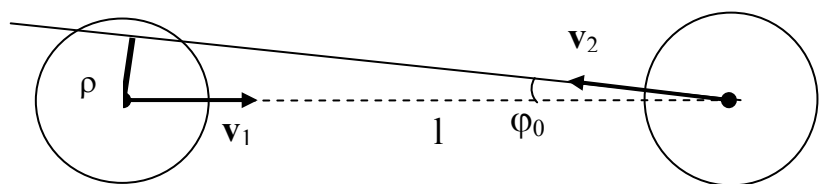


Рис. 3

лых φ) при столкновении угол φ заменяется на $\varphi_0 + 2\theta \sim \varphi_0 + \frac{\rho}{l} \sim \left(1 + \frac{1}{r}\right)\varphi_0$,

то есть $\varphi \rightarrow k\varphi_0$, где $k \sim 1 + \frac{1}{r}$. В нашем случае логично принять за l расстояние между стенками, так что при $r = 20$, $l = 200$, $k \sim 10$. После n соударений

$\varphi \rightarrow k^n \varphi_0$. Угол φ достигает значения $\varphi \sim 1$ через $n \sim \frac{\ln \frac{1}{\varphi_0}}{\ln k}$ столкновений шаров. Для $\varphi_0 \sim 10^{-7}$, $k \sim 10$ получаем $n \sim 7$.

Представим теперь, что начальное значение φ_0 задано с некоторой неточностью $\delta\varphi_0$. Через n соударений угол оценивается как $\varphi + \delta\varphi \sim k^n(\varphi + \delta\varphi)$, то есть неточность тоже возрастает в k^n раз. Если начальные значения скоростей и координат были заданы с относительной точностью $\sim 10^{-7}$, то менее чем через десяток соударений они станут совершенно неопределенными.

После какого-то столкновения угол φ возрастет настолько, что шары в следующий раз пролетят мимо друг друга. Вновь столкнутся они после нескольких ударов о стенки. Угол между направлениями скоростей и прицельный параметр ρ будут изменяться от столкновения к столкновению нерегулярно: то возрастая, то убывая. Неточность же направления скорости $\delta\varphi$ каждый раз возрастает примерно в k раз. Появляется и возрастает неточность в направлении и величине скорости и другого шара.

Чтобы предвидеть движение шаров спустя 100 соударений, согласно этой оценке, нужно было бы задать их начальные скорости с точностью порядка 100 знаков. Легко понять, что вывод о катастрофическом росте неопределенностей координат относится и к системе большого числа шаров. Относится он и к движению молекул настоящего газа. Только для молекул неопределенности возникают из-за всяческих возмущений, которыми во всех других отношениях можно пренебречь, а для нашего газа шаров - из-за ограниченной точности расчетов. Таким образом, движение шаров (и молекул) является вполне закономерным за относительно малые интервалы времени и случайным за долгий промежуток. Отметим, что эта случайность реализуется в рамках закона сохранения энергии.

В общем случае будем считать, что система соударяющихся тел является замкнутой, т. е. в ней выполняются законы сохранения количества движения и момента количества движения. Рассматривая соударяющиеся тела как систему, состоящую из материальных точек, получаем:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i m_i \mathbf{u}_i, \quad (2)$$

где \mathbf{v}_i и \mathbf{u}_i - скорости материальной точки с массой m_i до и после удара, соответственно, \mathbf{r}_i - радиус-вектор этой точки. При прямом центральном ударе двух тел, движущихся поступательно, скорости тел до удара $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ и после него $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ направлены вдоль одной прямой - оси Ox , проходящей через центры инерции тел. Проекции этих скоростей на ось Ox при упругом ударе связаны соотношениями:

$$u_1 = \frac{(m_1 + m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

где величины v_1, v_2, u_1, u_2 положительны или отрицательны в зависимости от того, как направлен соответствующий вектор скорости.

При косом центральном ударе двух поступательно движущихся тел изменяются только нормальные составляющие скоростей тел, параллельные линии удара и рассчитываемые аналогично (3), (4).

Более пригодными, чем зависимости $\mathbf{r}_i(t)$ для описания движения частиц газа - как настоящих молекул, так и наших "шаров" - являются средние величины и функции распределения. Будем отмечать на плоскости с координатами (v_x, v_y) точки, соответствующие скоростям шаров в разные моменты времени. Эти точки образуют "облако", концентрация точек в котором постепенно убывает к краям. Концентрация $f_0(\mathbf{v})$ становится величиной хорошо определенной, если число N_0 отмеченных точек достаточно велико. Обычно функцией распределения по скорости \mathbf{v} называют функцию $f(\mathbf{v}) = \frac{1}{N_0} f_0(\mathbf{v})$.

Такая функция распределения в нашем случае удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}) dv_x dv_y = 1.$$

Вероятность того, что скорость шара окажется в элементе пространства скоростей $dv_x dv_y$ вблизи точки \mathbf{v} , равна

$$dw = f(\mathbf{v}) dv_x dv_y. \quad (5)$$

Теоретический анализ показывает, что

$$f(\mathbf{v}) = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{N-1}{E} \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^{N-2}, \quad (6)$$

где $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ - энергия отдельного шара, E - суммарная энергия всех N шаров.

Если $\varepsilon \ll E$, то $\exp\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right) \approx 1 - \frac{\varepsilon}{E}$, так что

$$f = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{N-1}{E} \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon(N-2)}{E}\right].$$

Если ещё и $N \gg 1$, можно ввести температуру двумерного газа с помощью выражения для средней кинетической энергии движения одной частицы $\frac{E}{N} = \kappa_6 T$, где κ_6 - постоянная Больцмана. (Для трехмерного газа было бы $\frac{E}{N} = \frac{3}{2} \kappa_6 T$). Тогда (6) сводится к распределению Максвелла:

$$f(v_x, v_y) = \frac{m}{2\pi\kappa_6 T} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2\kappa_6 T}\right]. \quad (7)$$

Если разбить плоскость (v_x, v_y) на узкие кольца одинаковой ширины Δv и подсчитать число точек ΔN в каждом из колец, то можно получить наблюдаемую функцию распределения скоростей $\frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v}$ (рис. 4). Соответствующая теоретическая зависимость получается из (5) заменой $dv_x dv_y$ на $2\pi v dv$.

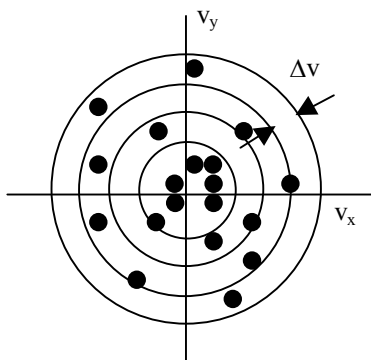


Рис. 4

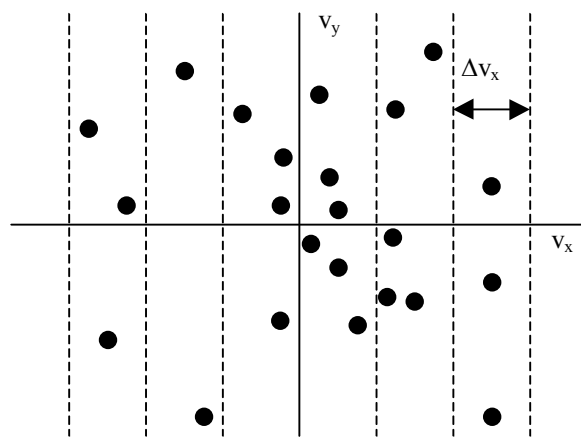


Рис. 5

Подобным же образом можно получить распределение по энергии. Для получения наблюдаемой функции $\frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta \varepsilon}$ нужно разбить плоскость (v_x, v_y) на кольца равной площади; теоретическая зависимость получается заменой $2\pi v dv$ на $\frac{2\pi}{m} d\varepsilon$.

Функция распределения по компоненте скорости v_x определяется с помощью разбиения плоскости (v_x, v_y) на полосы толщины dv_x (рис. 5). Теоретическая формула задается выражением

$$\frac{dw}{dv_x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y) dv_y. \quad (8)$$

Используя в правой части (8) замену переменной $v_y = x\sqrt{1 - \frac{mv_x^2}{2E}}$, приходим к виду

$$\frac{dw}{dv_x} = \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{2(N-1)}{\pi} \left(1 - \frac{mv_x^2}{2E}\right)^{N-\frac{3}{2}} \int_0^1 (1-x^2)^{N-2} dx, \quad (9)$$

где $\int_0^1 (1-x^2)^{N-2} dx = \frac{(2N-2)!!}{(2N-1)!!}$. При $N \gg 1$ последнее выражение $\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{N}}$.

ЗАДАНИЯ

1. Смоделируйте движение шаров одинаковой массы и радиусом, равным 10, в поле с размером 200×200 . Наблюдайте "почти лобовые" соударения двух шаров. Получите зависимость от времени компоненты скорости, поперечной по отношению к начальному направлению движения (приведенные выше оценки показывают, что для скорости следует выбрать логарифмический масштаб, т. к. $\ln v_y \sim \ln(\varphi v) \sim \ln(\varphi_0 v) + n \ln k$ – линейная функция n , а значит, и t ; правда, это – весьма грубая оценка).

Проведите два последовательных запуска шаров с почти одинаковыми начальными условиями, изменив лишь начальную координату или скорость одного шара на величину $\sim 10^{-7}$ или менее (на пределе «чувствительности» компьютера) от первоначальной. Наблюдайте нарастание расхождений в движении шаров.

2. Предусмотрите в программе возможность в некоторый момент изменить скорости всех частиц на противоположные ($v_i \rightarrow -v_i$) и проследить, будут ли шары возвращаться по "проложенным" ранее траекториям.

3. Смоделируйте движение шаров одинаковой массы и радиусом, равным 10, в поле с размером 200×200 . Получите на экране картину распределения частиц в плоскости (v_x, v_y). Получите "наблюдаемые функции распределения" (гистограммы) шаров: а) по компоненте скорости v_x , б) по абсолютной величине скорости v , в) по энергии. Выведите для сравнения также теоретические функции распределения соответствующих величин, получаемые на основании формулы (6).

8. РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Уравнение состояния идеального газа $P \cdot V = R \cdot T$ для реальных газов точно не выполняется. Для них используется полуэмпирическое уравнение Редгиха-Куонга:

$$P = \frac{R \cdot T}{V - b} - \frac{a}{T^{1/2} \cdot V \cdot (V + b)}$$

Здесь:

P - давление в атм.,

V - молярный объем в (см³/град·моль),

T - температура в °К,

$R=82,06$ атм·см³/ град ·моль,

K - универсальная газовая постоянная,

a, b - коэффициенты, определяемые из эксперимента.

ЗАДАНИЕ

В результате измерений получена следующая выборка характеристик реального газа.

№/№	P , атм.	V , см ³ / град ·моль	T , °К
1	33	500	273
2	43	500	323
3	45	600	373
4	26	700	273
5	37	600	323
6	39	700	373
7	38	400	273
8	63,6	400	373

Требуется построить модель реального газа, соответствующую измерениям. Для построения можно воспользоваться методом наименьших квадратов.

9. ВЕРХНЯЯ АТМОСФЕРА ЗЕМЛИ

Термин "верхняя атмосфера Земли" применяется к области высот более 60 км. С ростом высоты верхняя атмосфера становится все более разреженной, переходя постепенно в межпланетный газ. Она занимает объем, в несколько тысяч раз превышающий объем Земли, но содержит меньше одной тысячной массы всей атмосферы.

Общую структуру атмосферы можно описать несколькими разными способами, каждый из которых дает свою классификацию распределения по высоте различных областей, соответствующих определенным физическим процессам.

Классификация, связанная с особенностями распределения температуры нейтральной атмосферы с высотой. По мере подъема вверх от земной поверхности температура вначале падает в тропосфере до тех пор, пока не достигнет минимума в тропопаузе, располагающейся обычно в интервале высот 7-17 км. Затем температура повышается в стратосфере, пока не достигнет стратопаузы на высоте 45-55 км, после чего она снова падает с высотой до минимального значения в мезопаузе (около 80-85 км). В вышележащей термосфере происходит рост температуры с высотой, вначале быстрый, затем более медленный, после чего достигается относительно постоянная величина, не изменяющаяся с дальнейшим ростом высоты. Эти температурные области указана на рис. 1.

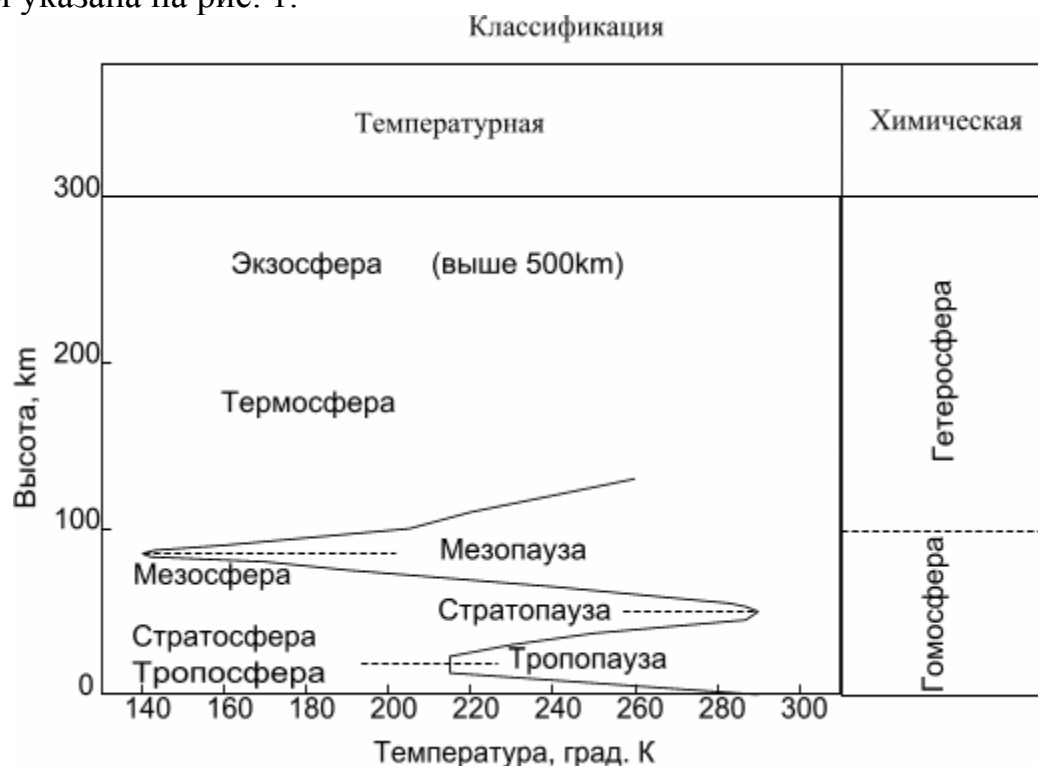


Рис. 1

Классификация верхней атмосферы, учитывающая химический состав. Уменьшение плотности газа с ростом высоты подчиняется уравнению гидростатического равновесия между градиентом давления и силой тяжести:

$$0 = \rho g + \frac{dp}{dh}, \quad (1)$$

где ρ - плотность газа, g - ускорение силы тяжести, p - давление газа, h - высота (например, над уровнем земной поверхности). Давление связано с плотностью уравнением состояния идеального газа

$$p = N \cdot kT = \rho \cdot \frac{kT}{M}, \quad (2)$$

где N - концентрация молекул, k - постоянная Больцмана, равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ дж/град, T - температура в градусах Кельвина, M - средняя молекулярная масса воздуха. Плотность можно исключить из уравнения (1) путем использования уравнения (2). После интегрирования получим

$$p = p_0 \cdot e^{\left(-\int_0^h \frac{dh}{H}\right)}, \quad (3)$$

где p_0 - давление на поверхности Земли,

$$H = \frac{kT}{Mg}, \quad (4)$$

Если $\frac{T}{M}$ не зависит от высоты, то, объединив (2) и (3), получим

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{\left(-\int_0^h \frac{dh}{H}\right)}$$

в общем случае

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{M \cdot T_0}{M_0 \cdot T}\right) \cdot e^{\left(-\int_0^h \frac{dh}{H}\right)},$$

где нулевые индексы указывают на то, что величины относятся к приземному уровню.

Параметр H часто используется в исследованиях атмосферы и называется приведенной высотой однородной атмосферы. Когда параметр H постоянен, он представляет собой либо интервал высот, на котором давление или плотность уменьшается на величину e , либо полную высоту, до которой простиралась бы атмосфера, если бы она вся была сжата до давления p_0 . На высотах вблизи поверхности Земли H приблизительно равен 3,5 км, выше H уменьшается.

Вышеприведенный анализ применим к атмосфере с постоянной средней молекулярной массой M , т. е. к такой атмосфере, в которой преобладающие атмосферные составляющие полностью перемешаны. Эта область

называется гомосферой, что указывает на однородный состав (в основном из молекул азота и кислорода), хотя в малых количествах присутствуют и другие составляющие.

Химический состав изменяется с высотой за счет того, что плотность тяжелых газов падает с ростом высоты быстрее, чем легких. Ситуация еще более усложняется из-за присутствия химических и фотохимических реакций, при которых одни молекулы уничтожаются, а другие образуются. В реальных условиях над атмосферой, состоящей в основном из молекулярного азота, находится атмосфера, состоящая из атомов кислорода, а еще выше - из атомов водорода. В некоторые периоды между уровнями, где преобладает кислород и водород, появляется гелий. Из-за своего переменного состава эта область называется гетеросферой.

К высотам 500 - 600 км плотность газа уменьшается до таких низких значений, что понятия гидродинамики становятся неприменимыми к нейтральным частицам. Эта область атмосферы называется экзосферой (см. рис.1).

Американским Советом по ракетным исследованиям верхней атмосферы в 1952 г. была принята условная модель атмосферы, объединяющая к тому времени все имеющиеся ракетные данные. Для гомосферы они представлены в таблице 1.

Таблица 1

Высота, (km)	Температура, (°K)	Давление, (мм рт. ст)	Концентрация (см ⁻³)	Плотность, (г/см ³)
50	274	$6,7 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-16}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
55	274	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-16}$	$6,1 \cdot 10^{-7}$
60	253	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-15}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$
65	232	$9,6 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-15}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$
70	210	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-15}$	$9,9 \cdot 10^{-8}$
75	183	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-14}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$
80	156	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-14}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$
85	130	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-14}$	$9,0 \cdot 10^{-9}$
90	156	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$7,6 \cdot 10^{-13}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$
95	183	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-13}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$
100	210	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-13}$	$6,6 \cdot 10^{-10}$

Анализ наблюдений с третьего советского искусственного спутника Земли (1958) и американского спутника Авангард (1958) позволил определить распределение плотности атмосферы на высотах свыше 200 км (табл.2).

Таблица 2

Высота, (км)	Плотность, (г/см ⁻³)	Высота, (км)	Плотность, (г/см ⁻³)	Высота, (км)	Плотность, (г/см ⁻³)
200	$6 \cdot 10^{-13}$	350	$2 \cdot 10^{-14}$	600	$6 \cdot 10^{-16}$
250	$2 \cdot 10^{-13}$	420	$6 \cdot 10^{-15}$	700	$2 \cdot 10^{-16}$
300	$6 \cdot 10^{-14}$	500	$2 \cdot 10^{-15}$	800	$6 \cdot 10^{-17}$

ЗАДАНИЯ

1. Построить модель изменения температуры с высотой в ионосфере, используя полиномиальную аппроксимацию по набору заданных значений из таблицы 1 методом наименьших квадратов.
2. Построить модель изменения концентрации молекул с высотой в гомосфере, используя кубический сплайн.
3. Построить аналитическую модель изменения давления с высотой в гомосфере методом наименьших квадратов.
4. Построить аналитическую модель изменения плотности газа в высотном интервале от 50 до 800 км методом наименьших квадратов.

10. ИОНОСФЕРА

Ионосферой принято называть частично ионизированную область земной атмосферы, возникающую под действием коротковолнового и корпускулярного излучения Солнца. Степень ионизации в ионосфере достаточна, чтобы влиять на распространение радиоволн. С этой точки зрения, нижняя граница ионосферы располагается примерно на высоте 50 км, верхняя граница ионосферы находится на высоте ~ 2000 км,

Степень ионизации ионосферы, электронная концентрация N_e , зависит от энергии ионизирующего излучения Солнца, коэффициента поглощения этой энергии газом и исходной плотности «атмосферного газа». Поскольку плотность атмосферы убывает с высотой, а падающее извне в атмосферу излучение Солнца, ионизируя ее, убывает с уменьшением высоты, то на некоторой высоте степень ионизации должна быть максимальной. Такой процесс должен приводить к появлению максимума на кривой зависимости электронной концентрации от высоты $N_e(h)$. Так как состав атмосферы сложен, различные ее составляющие по-разному ионизируются различными участками солнечного спектра, то в ионосфере образуется несколько максимумов на кривой $N_e(h)$, особенно четко проявляющихся в дневное время. Обычно эти максимумы отождествляют с положением отдельных "областей" ионосферы. В порядке возрастания высоты эти слои называются D, E, F1, F2.

Параметры ионосферы измеряются различными методами, но наибольшее распространение получили методы импульсного радиозондирования, а также непосредственные измерения при ракетных пусках.

При импульсном зондировании передатчик, находящийся на поверхности Земли, излучает на разных рабочих частотах короткие импульсы, длительностью $10^{-4} - 10^{-5}$ сек. От поверхности Земли до начала ионизированной области импульс распространяется по прямой со скоростью c . Так как ионизированный газ для радиоволны является диспергирующим диэлектриком, далее траектория импульса искривляется, а его скорость замедляется. В точке, где несущая частота волны f и электронная концентрация N_e будут связаны следующим соотношением:

$$f = \sqrt{\frac{N_e}{80.8}},$$

произойдет отражение радиоволны.

По измеренному интервалу времени $\Delta t_{\text{гр}}$ между моментами времени излучения импульса передатчиком и приема отраженного импульса приемником можно определить кажущуюся высоту точки отражения

$$h' = \frac{c \cdot \Delta t_{\text{гр}}}{2}.$$

Если изменять частоту излучения передатчика, то импульсы будут отражаться от областей с разной электронной плотностью. Поскольку элек-

тронная плотность меняется с высотой, то эти импульсы испытывают различное по величине групповое запаздывание. Чем глубже в слое лежит точка отражения, тем больший путь приходится проходить импульсу в ионизированной среде. Следовательно, время $\Delta t_{гр}$ будет возрастать как за счет проникновения вглубь слоя, так и за счет уменьшения групповой скорости в связи с изменением значения показателя преломления. При подходе к предельной электронной концентрации слоя кажущаяся высота точки отражения должна резко увеличиваться, устремляясь к бесконечности.

Непосредственно в результате эксперимента, можно получить ионограмму или, так называемую высотно-частотную характеристику (ВЧХ) - зависимость кажущейся высоты отражения радиоимпульса от его несущей частоты. На основании анализа конфигурации $h'(f)$ этой ионограммы можно сделать выводы о наличии в данный момент времени нескольких слоев ионизации. Нижний след ($h \sim 100 - 120$ км) принадлежит отражению от слоя E, верхний след с двойным лучепреломлением ($h \sim 340 - 500$ км) - отражению от слоя F2 и след между ними ($h \sim 200 - 360$ км) - отражению от слоя F1.

ЗАДАНИЯ

1. При запуске геофизической ракеты на полигоне г. Волгограда осенью 1981 г. в 11^h измерены следующие значения электронной концентрации при изменении высоты:

Высота, км	Ne	Примечание:
50	6,00 (1)	1,00 (1) = $1,00 \cdot 10^1 \text{ см}^{-3}$
55	1,2 (2)	1,00 (2) = $1,00 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$
60	1,25 (2)	
65	1,13 (2)	
70	1,00 (2)	
75	4,17 (2)	
80	6,20 (2)	
85	7,31 (2)	
90	2,00 (3)	1,00 (3) = $1,00 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$
95	6,00 (3)	
100	9,00 (4)	1,00 (4) = $1,00 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$
105	1,18 (5)	1,00 (5) = $1,00 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$
110	1,26 (5)	
115	1,26 (5)	
120	1,26 (5)	
125	1,26 (5)	
130	1,26 (5)	
135	1,30 (5)	
140	1,48 (5)	
150	2,00 (5)	

160	2,25 (5)	
170	2,50 (5)	
180	2,78 (5)	
190	3,25 (5)	$1,00 (5) = 1,00 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$
200	3,63 (5)	
210	4,14 (5)	
220	4,56 (5)	
230	5,00 (5)	
240	4,56 (5)	
250	4,30 (5)	
260	4,05 (5)	
270	3,63 (5)	

Построить модельный профиль $N_e(h)$, используя полиномиальную аппроксимацию по набору заданных точек методом наименьших квадратов,

2. При вертикальном зондировании ионосферы на ионосферной станции Казань 15 июля 1990 г, в 13^h 20^m получена ионограмма. Изменения высоты отражения с частотой зондирования для слоя E и F2 для данной ионограммы следующие:

Слой E		Слой F2	
h, км	f, МГц	h, км	f, МГц
108	2,10	385	5,70
108	2,45	335	6,25
108	2,80	345	6,80
110	3,15	368	7,35
118	3,50	418	7,90
128	3,85	545	8,45

Построить модельные изменения $f(h)$ используя аппроксимацию кубическим сплайном:

- а) для слоя E,
 б) для слоя F2.

11. ВАКУУМНЫЙ ДИОД

Вакуумный диод – электронная лампа с двумя электродами – анодом и катодом представляет собой откачанный металлический или стеклянный баллон. Аноду диода чаще всего придают форму цилиндра, внутри которого расположен накаливаемый катод. Действие вакуумного диода основано на явлении термоэлектронной эмиссии с поверхности катода. Нагрев катода осуществляется электрическим током.

Если на анод диода подается положительный потенциал относительно катода, то электроны, испущенные катодом, движутся к аноду, и возникает анодный ток. При достаточно большом напряжении на аноде анодный ток становится равным току эмиссии катода, т. е. все электроны, вылетевшие с катода, достигают анода. Такой режим работы называется режимом насыщения, а ток в этом режиме – током насыщения диода. Ток насыщения почти не зависит от анодного напряжения.

Зависимость силы тока i_a в диоде от анодного напряжения U_a (вольт-амперная характеристика) изображена на рис. 1.

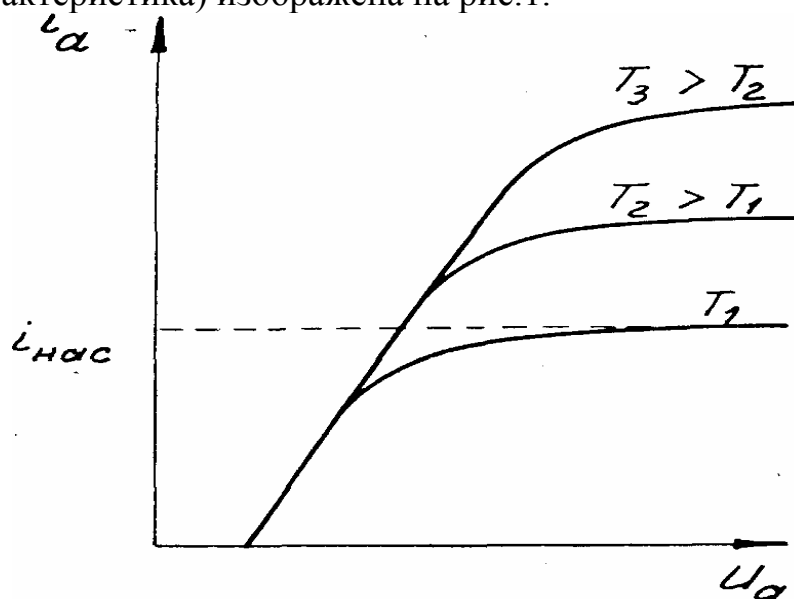


Рис. 1

В области, далекой от насыщения, зависимость анодного тока от напряжения довольно хорошо следует полученному теоретически Богуславским и Ленгмюром закону «трех-вторых»:

$$I_a = k \cdot U_a^{3/2},$$

где k – постоянный коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов и от удельного заряда электрона.

При экстраполяции на начало координат линия отсечет на оси X отрезок, равный контактной разности потенциалов U_k . Для коаксиальных цилиндрических электродов;

$$k = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{9} \cdot \frac{1}{\beta^2 \cdot r} \sqrt{\frac{e}{m}}$$

где e/m - удельный заряд электрона. l - длина катода, r - радиус анода, β^2 - коэффициент, зависящий от отношения радиусов анода и катода; при отношении радиусов больше десяти β^2 близок к единице, c - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения, в системе СИ $c = 4\pi\epsilon_0 = 1/(9 \cdot 10^9)$ Ф/м.

Плотность тока насыщения, т. е. сила тока насыщения на каждую единицу поверхности катода, характеризует эмиссионную способность катода, которая зависит от природы катода и от его температуры. Расчет показывает, что эта зависимость выражается формулой Ричардсона - Дешмана:

$$j = A \cdot T^2 e^{-\frac{w}{k \cdot T}}, \quad (3)$$

где A - постоянная, которая для всех металлов с совершенно чистой поверхностью должна иметь одно и тоже значение ($A = 12,0 \cdot 10^5$ А/(м² град²)), $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж - постоянная Больцмана, w - величина, имеющая размерность энергии, которая называется термоэлектронной работой выхода данного металла. В соответствии с определением $J_{\text{нас}}$

$$i_{\text{нас}} = J_{\text{нас}}/S, \quad \text{где } S - \text{площадь поверхности катода.}$$

ЗАДАНИЕ

Построить модель вакуумного диода по экспериментальным вольт-амперным характеристикам для различных токов канала катода. Определить удельный заряд электрона e/m , контактную разность потенциалов U_k и работу выхода для вольфрама.

Ток накала, мА	1,00		2,00		3,00	
Температура катода, °К	1000		1100		1200	
Номер измерения	U (В)	I (мА)	U (В)	I (мА)	U (В)	I (мА)
1	2	1	2	0,6	2	0,3
2	6	5	6	4	6	3
3	10	9	10	8,2	10	6,4
4	14	13	14	12,1	14	9,2
5	18	17	18	15,9	18	10,0
6	22	21	22	18,8	22	10,2
7	26	25	26	20,8	26	10,0
8	30	29	30	21,8	30	10,0

Для определения начала линейного участка $i_{\text{нас}}$ необходимо применять алгоритм режима автоматического поиска прямолинейного участка. С помощью метода наименьших квадратов рассчитывается среднеквадратичное отклонение (СКО) для первой и последующих групп элементов массива $J_i^{3/2}$ (для первой $l = 1-8$, для второй $l = 2-8$ и т. д.) до тех пор, пока СКО последующей группы не окажется больше предыдущей. Таким образом, определим нижнюю точку линейного участка. Подобным образом определяем $i_{\text{нас}}$.

Исходные данные:

диаметр катода $d = 0,0001$ м,

длина катода $l = 0,009$ м,

$\beta^2 = 0,98$,

радиус анода $r = 0,096$ м.

12. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Под моделированием электрической цепи постоянного тока будем понимать нахождение значений токов, протекающих в каждой ветви этой цепи.

Основными законами, на базе которых разработаны методы расчета цепей, являются законы Ома и Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа вытекает из принципа непрерывности тока. В узле электрической цепи А, где сходятся n проводов (рис.1), заряды накапливаться не могут. Поэтому сумма зарядов, притекающих в любой момент времени к узлу А, равна сумме зарядов, уходящих от узла.

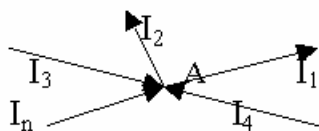


Рис. 1

На основании этого формулируется первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в проводах, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю: $\sum_{k=1}^n J_k = 0$.

При этом токи, вытекающие из узла цепи, следует брать с одним знаком, а токи, текущие к узлу - с другим знаком.

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между результирующей ЭДС, действующей в замкнутой электрической цепи, и падением напряжения в этой цепи.

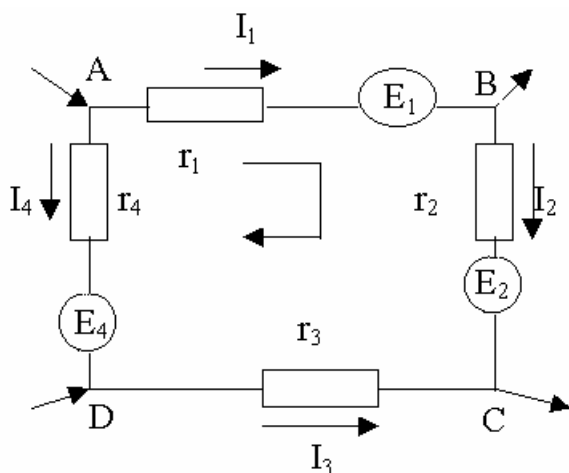


Рис.2

В замкнутой электрической цепи, представленной на рис. 2, действуют три ЭДС: E_1 , E_2 , E_4 . Две из них, E_1 и E_2 , действуют в одном направлении, а третья, E_4 – в противоположном. Следовательно, выбирая направление обхода контура ABCD, показанное внутри стрелкой, и считая ЭДС, действующие в направлении обхода, положительными, а ЭДС, действующие в обратном направлении, отрицательными, определим результирующую ЭДС:

$$E = E_1 + E_2 - E_4$$

Эта результирующая ЭДС будет затрачиваться на проведение тока в ветвях цепи и, в соответствии с законом Ома, будет равна сумме произведений токов на сопротивления ветвей. Для цепи на рис.2:

$$E_1 + E_2 - E_4 = J_1(r_1 + r_{b1}) + J_2(r_2 + r_{b2}) - J_3 r_3 - J_4(r_4 + r_{b4})$$

В правой части равенства произведение токов I_3 и I_4 на соответствующие сопротивления взяты со знаком минус, т. к. эти токи протекают против направления обхода.

Обобщая вышесказанное на любое число ветвей в контуре замкнутой электрической цепи, получим второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС, действующих в любом замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения в ветвях этого контура.

Для цепи, имеющей n ветвей, получим равенство

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n J_k r_k.$$

Для линейных цепей, т. е. цепей, составленных из линейных элементов, справедлив принцип наложения (суперпозиции). В соответствии с этим принципом, токи в отдельных ветвях можно считать состоящими из токов, вызываемых каждой из ЭДС, действующих в цепи.

Рассмотрим метод расчета линейных электрических цепей постоянного тока, наиболее часто применяемый в линейных цепях и известный как метод контурных токов.

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ (МКТ)

В соответствии с МКТ, вся сложная электрическая цепь разбивается на ряд контуров, которые должны быть независимыми, т. е. отличаться друг от друга хотя бы одним элементом, и для каждого контура составляются уравнения по II закону Кирхгофа. В каждом контуре предполагается наличие контурного тока, положительное направление которого выбирается произвольно.

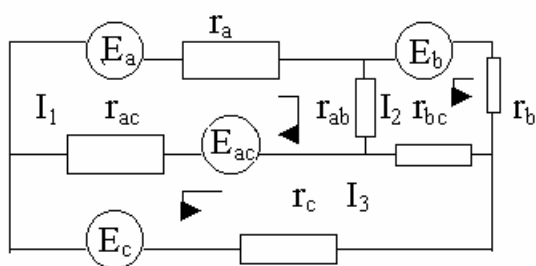


Рис.3

К примеру, на рис. 3 показана сложная схема, имеющая шесть ветвей, токи в которых подлежат определению.

Разбиваем схему на три независимых контура (как показано на рисунке) и считаем, что в каждом контуре протекает свой контурный ток: I_1 , I_2 , I_3 . Токи же в отдельных ветвях будут суперпозицией контурных токов.

Составляем уравнение для первого контура, обходя его в направлении собственного контурного тока и учитывая падение напряжения от всех контурных токов, протекающих в различных резисторах первого контура. От тока I_1 будем иметь суммарное падение напряжений, равное $(r_a + r_{ab} + r_{ac}) I_1$. По резистору r_{ab} кроме тока I_1 проходит контурный ток I_2 второго контура, создающий падение напряжения $I_2 r_{ab}$, направленное в ту же сторону, что и падение в первом контуре. По резистору r_{ac} протекает ток третьего контура I_3 в том же направлении, что и ток I_1 . Поэтому создаваемое им падение напряжения $r_{ac} I_3$ будет совпадать по

этому создаваемое им падение напряжения $r_{ac} I_3$ будет совпадать по знаку с $r_{ac} I_1$. Общее уравнение для первого контура имеет вид:

$$(r_a + r_{ab} + r_{ac}) J_1 + r_{ab} \cdot J_2 + r_{ac} \cdot J_3 = E_a - E_{ac}.$$

Аналогично составляются уравнения для второго и третьего контуров

$$r_{ab} \cdot J_1 + (r_{ab} + r_{bc} + r_b) \cdot J_2 - r_{bc} \cdot J_3 = E_b,$$

$$r_{ac} \cdot J_1 - r_{bc} \cdot J_2 + (r_c + r_{bc} + r_{ac}) \cdot J_3 = E_c - E_{ac}.$$

Отрицательные знаки в этих уравнениях указывают на несовпадение направлений токов в смежных контурах основному току.

Условимся сумму всех сопротивлений какого-либо контура называть собственным сопротивлением этого контура. В нашем случае собственные сопротивления первого, второго и третьего контуров равны

$$r_{11} = r_a + r_{ab} + r_{ac},$$

$$r_{22} = r_b + r_{ab} + r_{bc},$$

$$r_{33} = r_c + r_{ac} + r_{bc}.$$

Сопротивления резисторов, которые одновременно входят в состав двух контуров, будем называть взаимными и считать их положительными, когда направления контурных токов в них совпадают, и отрицательными, когда направления этих токов противоположны:

$$r_{12} = r_{21} = r_{ab} - \text{направления токов } I_1 \text{ и } I_2 \text{ совпадают};$$

$$r_{23} = r_{32} = -r_{bc} - \text{токи } I_2 \text{ и } I_3 \text{ в резисторе } r_{bc} \text{ направлены противоположно};$$

$$r_{13} = r_{31} = r_{ac} - \text{токи } I_1 \text{ и } I_3 \text{ в резисторе } r_{ac} \text{ направлены одинаково}.$$

Алгебраическую сумму всех ЭДС, действующих в каком-либо контуре, будем называть контурной ЭДС:

$$E_1 = E_a - E_{ac}, E_2 = E_b, E_3 = E_c - E_{ac}.$$

В результате, система уравнений для схемы рис.3 примет вид

$$\begin{cases} r_{11} \cdot J_1 + r_{12} \cdot J_2 + r_{13} \cdot J_3 = E_1, \\ r_{11} \cdot J_1 + r_{12} \cdot J_2 + r_{13} \cdot J_3 = E_2, \\ r_{31} \cdot J_1 + r_{32} \cdot J_2 + r_{33} \cdot J_3 = E_3. \end{cases}$$

В общем случае для сложной цепи из n контуров может быть написана система из n уравнений

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} \cdot J_k = E_i, \quad (i = 1, n).$$

Для решения этой системы линейных алгебраических уравнений можно применить любой из хорошо известных методов решения - метод Гаусса, метод итераций (метод Гаусса-Зайделя), метод Крамера.

Если два первых метода хорошо изложены в учебных пособиях, то метод Крамера встречается значительно реже. Приведем поэтому, в качестве примера, решение по методу Крамера. Этот метод дает следующее выражение для любого контурного тока:

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_{ik} E_k,$$

где Δ - главный определитель матрицы сопротивлений для системы уравнений, Δ_{ik} - алгебраическое дополнение, получаемое при вычеркивании в главном определителе i -й строки и k -го столбца и умножении полученного определителя на $(-1)^{i+k}$.

Ток в каком-либо резисторе равен алгебраической сумме контурных токов. При этом положительным считается такой контурный ток, который в данном резисторе совпадает по направлению с результирующим током. Так, для схемы на рис.3 имеем $I_a = I_1$, $I_{ab} = I_1 + I_2$ и т. д.

ЗАДАНИЕ

Построить модель линейной электрической цепи постоянного тока. Для этого в соответствии с вариантом задания выбрать соответствующую электрическую цепь (см. рис.4) и методом контурных токов рассчитать ток в отдельных ветвях.

Отчет о выполнении задания должен содержать принципиальную электрическую схему, блок-схему метода решения системы линейных уравнений, программу и результаты расчетов.

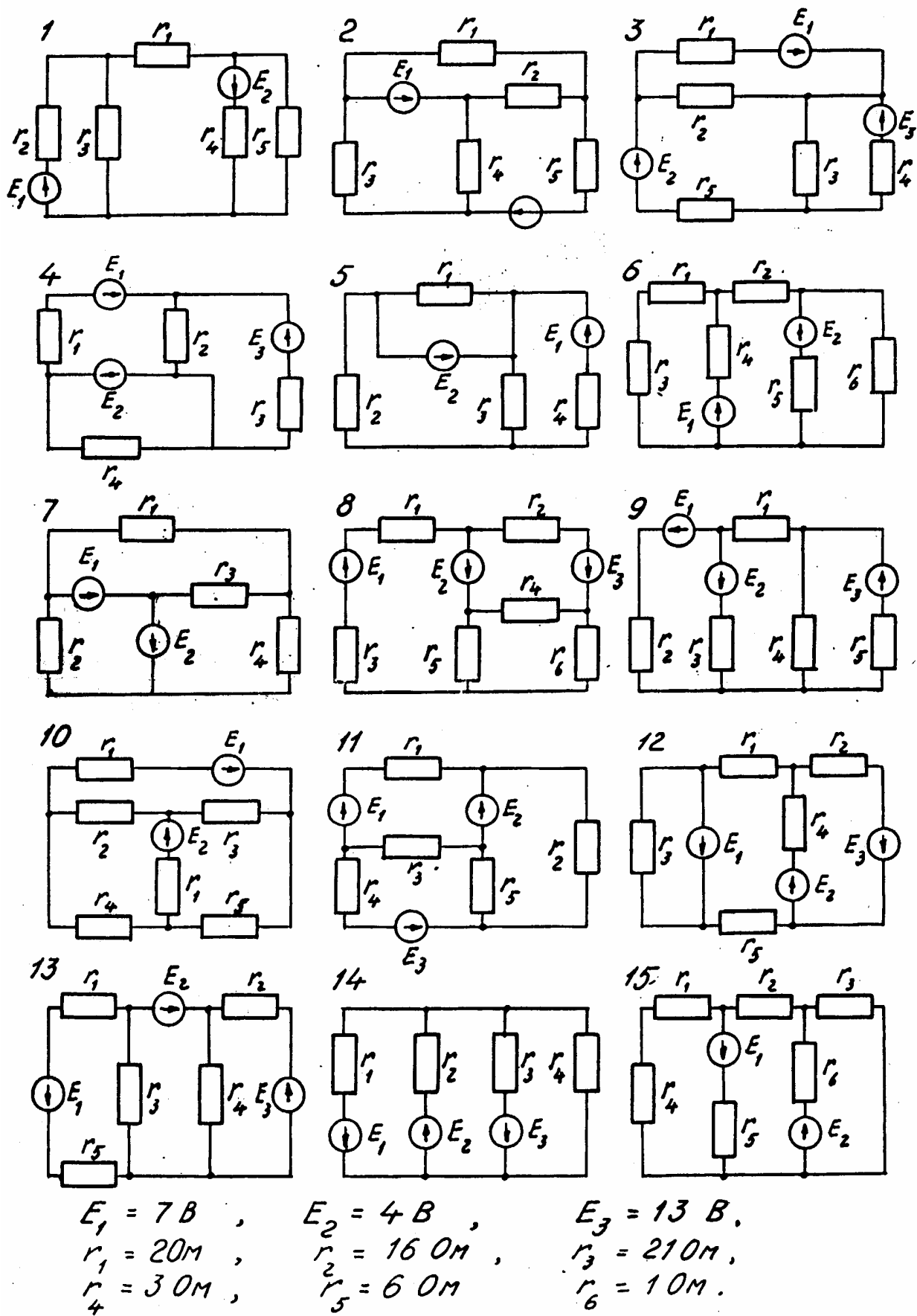
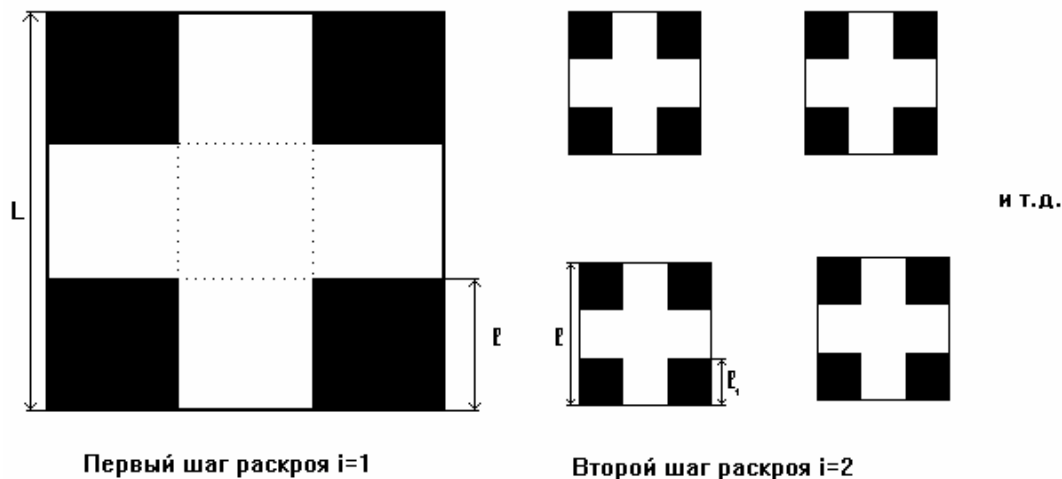


Рис. 4

ОПТИМИЗИЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

13. ЗАДАЧА О КОРОБКАХ



У квадратной заготовки со стороной L по углам вырезаются четыре квадрата со сторонами l . У полученной крестовины стороны загибаются вверх. Получается коробка без крышки, объем которой нужно максимизировать.

ЗАДАНИЯ

1. Найти отношение l/L , при котором достигается максимум.
2. Из обрезков можно сделать еще четыре коробки (второй шаг раскроя), для чего в заготовках со стороной l вырезаются квадраты со стороной l_1 . Найти отношение l/L и l_1/l - при котором достигается максимум суммарного объема коробок.
3. Решить аналогичную задачу для раскроя 21 коробки (третий шаг раскроя).

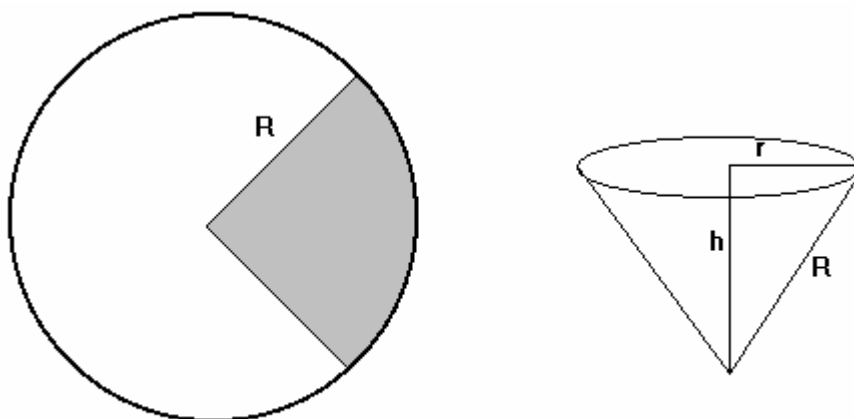
14. ОПТИМАЛЬНЫЙ КОНТЕЙНЕР

Необходимо переправить 400 м^3 сыпучего материала (песка, цемента, шлака) через реку шириной L км в закрытом контейнере. Известно, что стоимость одного рейса переправы контейнера составляет 4,2 руб/км. Известно, что стоимость материала для изготовления дна и крышки контейнера составляет 20 руб/м², а стоимость материала для изготовления боковых стенок контейнера - 5 руб/м².

ЗАДАНИЯ

1. Требуется создать контейнер, обеспечивающий минимальные затраты на перевозку 400 м сыпучего материала через реку шириной 5 км.
2. Рассчитать затраты на перевозку 400 м сыпучего материала за 1 рейс.

15. ПОЖАРНЫЕ ВЕДРА



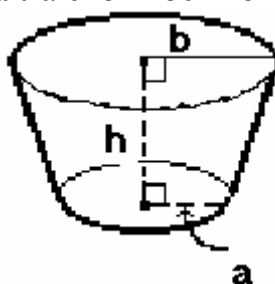
Из круглой заготовки радиуса R вырезается сектор с углом α , из которого сворачивается пожарное ведро (конус с радиусом основания r). Из оставшейся части кроится еще несколько ведер так, чтобы не было отходов металла.

ЗАДАНИЯ

1. Найти угол сектора, при котором объем ведра максимален.
2. Найти углы секторов, на которые разрезается заготовка при раскрое двух ведер так, чтобы суммарный объем был максимален.
3. Решить задачу для трех ведер.
4. Решить задачу для четырех ведер.

16. БУНКЕР ДЛЯ ХРАНЕНИЯ ЗЕРНА

Бункер для хранения зерна, для его лучшей сохранности, должен иметь форму усеченного конуса. Основание бункера изготавливается из деревянных плит стоимостью 1 руб/м^2 , а остальная часть (боковые стенки) изготавливается из листового металла стоимостью $1,5 \text{ руб/м}^2$.



ЗАДАНИЕ

Требуется дать модель оптимальной конструкции бункера для хранения 10 м^3 зерна, обеспечивающую минимальную стоимость его изготовления.

17. ПАРОМНАЯ ПЕРЕПРАВА

Механизированный паром должен перевозить M тонн груза в течение суток через реку шириной K км. Стоимость парома без двигателя пропорциональна его грузоподъемности L и равна $a_1 \cdot L$, а стоимость механического двигателя пропорциональна произведению грузоподъемности на куб скорости его движения V и равна $a_2 \cdot L \cdot V^3$.

ЗАДАНИЯ

Необходимо предложить вариант механизированного парома (его грузоподъемность, мощность двигателя), обеспечивающего перевоз M тонн груза в сутки через реку шириной K км при минимальной стоимости перевозок.

1. $M = 1000$ тонн, $K = 3$ км, $a_1 = 2000$ руб/тонну, $a_2 = 5000$ руб·м⁻³с³/тонну.
2. $M = 2500$ тонн, $K = 1,8$ км, $a_1 = 1000$ руб/тонну, $a_2 = 5800$ руб·м⁻³с³/тонну.

18. СИСТЕМА ВОСПОЛНЯЕМЫХ ЗАПАСОВ СЫРЬЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ТОВАРОВ

Задан постоянный спрос товаров - L единиц в год. Частое пополнение сырья нецелесообразно, так как стоимость одного заказа сырья - K рублей независимо от размера заказа.

Первоначальная стоимость единицы товара $\sim C$ рублей. Хранение излишков запасов сырья также нецелесообразно, так как за хранение единицы сырья предприятие вынуждено оплачивать D рублей в год. Если в момент времени t_A (рис. 1) предприятие имеет объем запасов сырья V_C , уменьшающийся со скоростью, определяемой производством единиц товара в год, то в момент времени t_B запас сырья предприятия сводится до нуля, и необходимо его пополнение. АСВ есть цикл управления запасами.

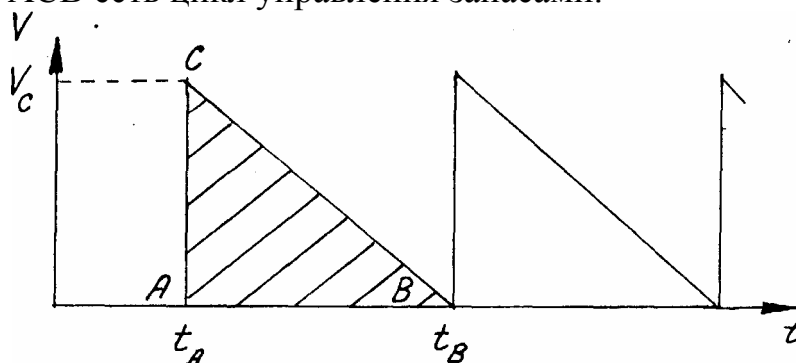


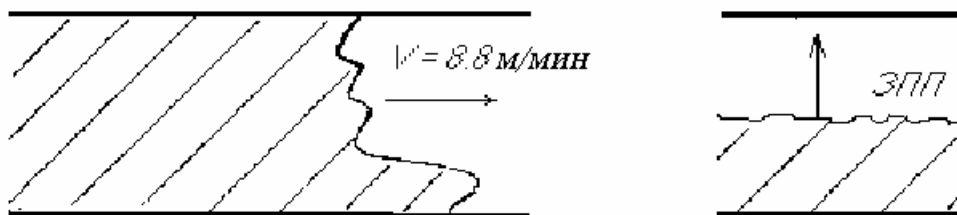
Рис. 1

ЗАДАНИЕ

Требуется предложить модель системы пополняемых запасов сырья (цикл управления запасами), обеспечивающую минимум затрат предприятия на пополнение сырья при заданном спросе на выпускаемые товары.

19. ТУШЕНИЕ ЛЕСНОГО ПОЖАРА

Лесной пожар распространяется в долине шириной 2 км со скоростью 8,8 м/мин.



Для задержания огня необходимо построить поперек долины заградительную противопожарную перегородку (ЗПП). Известно, что один рабочий строит 0,2 погонных метра перегородки в минуту при затратах на его командировку к месту работы 200 руб. и стоимости его работы (оплате) 16 руб/час.

Известна стоимость одного квадратного километра леса - 2000 руб/км².

ЗАДАНИЕ

Необходимо создать модель тушения лесного пожара, при которой общие издержки были бы минимальными.

20. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БУНКЕР

Отходы металлообрабатывающих станков хранятся в прямоугольных бункерах без крышки, изготавливаемых из листового железа стоимостью 3 руб/м².

ЗАДАНИЕ

Создать модель прямоугольного железного контейнера минимальной стоимости, обеспечивающую хранение алюминиевой стружки объемом $V = 10 \text{ м}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЭВМ в курсе общей физики / Под ред. А.Н. Матвеева., Москва, Изд. МГУ: 1982. – 230 с.
2. Моделирование физических явлений. Новосибирск, 1986. – 56 с.
3. А.С. Кондратьев, В.В. Лаптев. Физика и компьютер. Л.: Изд. ЛГУ. 1989. – 325 с.
4. В.Г. Карманов. Математическое программирование. М: 1986. – 276 с.
5. К. Жоблон, Ж.К. Симон. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике. 1983. – 320 с.
6. Т.Е. Шуп. Прикладные численные методы в физике и технике. М: 1990.
7. Р.А. Курганов, О.Н. Шерстюков. Математическое моделирование.- Изд-во Казанского университета. Казань: 1992. – 50 с.
8. Г.И. Васин, Н.И. Вершинина, А.В. Машуков, А.Е. Машукова. ЭВМ в физическом практикуме. Учебное пособие, Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1988. – 184 с.
9. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966. – 320 с.
10. Общая электротехника: Учеб.пособие для вузов / Под ред. А.Т. Блажкина. Л.: Энергоатомиздат. 1986. – 592 с.
11. М.Ю. Анвельм, В.Г. Герасимов, В.С. Пантюшин и др. Электротехника / Под ред. В.С. Пантюшина. М.: Высшая школа, 1976. – 481 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ	3
2.	ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ	8
3.	ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ	12
4.	ДИСПЕРСИЯ СВЕТА.....	16
5.	ПРОХОЖДЕНИЕ НЕЙТРОНОВ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНКУ	18
6.	БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ.....	22
7.	МОДЕЛЬ ГАЗА.....	27
8.	РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ.....	32
9.	ВЕРХНЯЯ АТМОСФЕРА ЗЕМЛИ	33
10.	ИОНОСФЕРА	37
11.	ВАКУУМНЫЙ ДИОД	40
12.	ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА	43
ОПТИМИЗИЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ		
13.	ЗАДАЧА О КОРОБКАХ	48
14.	ОПТИМАЛЬНЫЙ КОНТЕЙНЕР	48
15.	ПОЖАРНЫЕ ВЕДРА.....	49
16.	БУНКЕР ДЛЯ ХРАНЕНИЯ ЗЕРНА	49
17.	ПАРОМНАЯ ПЕРЕПРАВА	50
18.	СИСТЕМА ВОСПОЛНЯЕМЫХ ЗАПАСОВ СЫРЬЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ТОВАРОВ	50
19.	ТУШЕНИЕ ЛЕСНОГО ПОЖАРА	51
20.	ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БУНКЕР	51
	ЛИТЕРАТУРА.....	52