

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики

им. Н.И. Лобачевского

Кафедра аэрогидромеханики

Р.Ф. Марданов

**ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ
МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И
ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

Учебное пособие к курсу

*Численная реализация методов решения прямых и
обратных краевых задач аэрогидродинамики*

КАЗАНЬ – 2013

УДК 517.9

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
Протокол № 3 от 21 февраля 2013 г.

Рецензенты
профессор Н.Б. Ильинский,
профессор Н.Д. Якимов

Марданов Р.Ф.

**Особенности численной реализации методов решения
прямых и обратных краевых задач аэрогидродинамики.**
Учебное пособие к курсу “Численная реализация методов решения
прямых и обратных краевых задач аэрогидродинамики”. – Казань:
КФУ, 2013 г. – 61 с.

В учебном пособии описаны теоретические методы решения прямых и обратных краевых задач аэрогидродинамики, указаны основные сложности, возникающие при их численной реализации, и изложены способы их преодоления. Предназначено студентам-механикам старших курсов Института математики и механики.

©Казанский (Приволжский)
федеральный университет, 2013

Содержание

1	Введение	4
1.1	Основные геометрические и аэродинамические характеристики крылового профиля	5
2	Обратная краевая задача аэрогидродинамики	8
2.1	Постановка задачи	8
2.2	Основные формулы метода Тумашева решения ОКЗА ..	9
2.3	Особенности численной реализации решения ОКЗА	16
2.4	Решение ОКЗА с учетом вязкости по модели ПС	26
3	Прямая краевая задача аэрогидродинамики	32
3.1	Постановка задачи	32
3.2	Комплексные потенциалы простейших течений	33
3.3	Суть панельного метода	35
3.4	Особенности численной реализации панельного метода ..	41
3.5	Обобщение на многоэлементные крыловые профили	46
3.6	Случай экраноплана	47
3.7	Обобщение на проницаемые крыловые профили	51
4	Приложение	55
4.1	Расчет аэродинамических характеристик проницаемого крылового профиля	55
4.2	Построение картины обтекания	58
	Литература	61

1 Введение

В настоящем курсе рассмотрены проблемы и особенности численной реализации решения прямой и обратной краевой задачи аэрогидродинамики для крылового профиля. Даже в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ) решение этих задач довольно сложно, а при их численной реализации возникают существенные вычислительные трудности, которые обычно не отражены в литературе.

В обратной краевой задаче аэрогидродинамики (ОКЗА) по заданному распределению скорости $V(s)$ (или давления $p(s)$) вдоль контура крылового профиля как функции дуговой абсциссы s требуется определить форму контура крылового профиля и его геометрические и аэродинамические характеристики. В первом разделе приведены формулы численно-аналитического метода Тумашева решения основной ОКЗА для непроницаемого крылового профиля, рассмотрены особенности численной реализации и дано обобщение на случай учета вязкости по модели пограничного слоя (ПС).

В прямой краевой задаче аэрогидродинамики (ПКЗА) необходимо выполнить расчет обтекания потоком ИНЖ крылового профиля заданной формы. Одним из наиболее эффективных способов решения этой задачи является так называемый панельный метод. Во втором разделе изложены теоретические основы этого метода и при-

ведены числовые формулы с пояснением основных вычислительных трудностей и путей их преодоления, дано обобщение на случаи многоэлементного крылового профиля, профиля крыла экраноплана и проницаемого крылового профиля.

В приложении рассмотрены общие вопросы для прямых и обратных задач: расчет аэродинамических характеристик проницаемых и непроницаемых крыловых профилей и методика построения картины обтекания крылового профиля.

1.1 Основные геометрические и аэродинамические характеристики крылового профиля

Крыловой профиль характеризуется следующими геометрическими характеристиками:

b – хорда – расстояние от острой задней кромки до наиболее удаленной точки на носике профиля. В атласах координаты профиля приводятся чаще всего для случая, когда хорда $b = 1$ и совпадает с отрезком $(0; 1)$ оси x . Систему координат Oxy будем называть связанной с профилем (рис. 1). Обозначим $y_t(x)$ и $y_b(x)$ координаты верхней и нижней поверхностей крылового профиля;

$$t(x) = y_t(x) - y_b(x) - \text{распределение толщины};$$

$$t_{max} = \max_{0 < x < 1} t(x) - \text{толщина профиля};$$

$$y_c(x) = (y_t(x) + y_b(x))/2 - \text{средняя линия профиля};$$

$k = \max_{0 < x < 1} y_c(x)/b$ – относительная вогнутость или кривизна профиля.

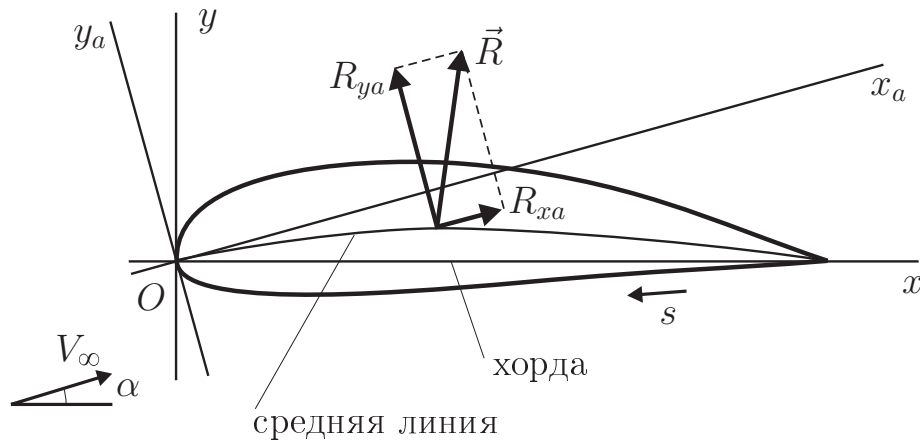


Рис. 1

Аэродинамические характеристики подразделяются на распределенные и интегральные. Распределенные характеристики определяют относительно дуговой абсциссы s , которые называют распределениями, и относительно координаты x (в системе координат, связанной с профилем), которые называют хордовыми диаграммами. К основным распределенным аэродинамическим характеристикам крылового профиля относят:

$V(s)$ – распределение скорости;

$p(s)$ – распределение давления;

$c_p(x)$ – хордовая диаграмма коэффициента давления.

Коэффициент давления по определению $c_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho V_\infty^2}$. С учетом интеграла Бернулли

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p_0 \quad (1)$$

выражение для c_p можно переписать в более простом виде

$$c_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}. \quad (2)$$

Интегральные аэродинамические характеристики крылового профиля следующие:

R_{ya} – подъемная сила;

R_{xa} – сила сопротивления;

$C_{ya} = \frac{2R_{ya}}{\rho V_{\infty}^2 b}$ – коэффициент подъемной силы;

$C_{xa} = \frac{2R_{xa}}{\rho V_{\infty}^2 b}$ – коэффициент сопротивления;

$K = C_{ya}/C_{xa}$ – аэродинамическое качество.

Здесь ρ – плотность, V_{∞} – скорость набегающего потока, а величина $\rho V_{\infty}^2/2$, используемая при обезразмеривании, называется скоростным напором. Индексом “ a ” помечают аэродинамические характеристики, вычисленные в системе координат $Ox_a y_a$ (см. рис. 1), связанной с направлением набегающего потока. Для интегральных характеристик также строят зависимости $C_{ya}(\alpha)$, $C_{xa}(\alpha)$, $K(\alpha)$ от угла атаки α и аэродинамическую поляру $C_{ya}(C_{xa})$. Углом атаки α называют угол между направлением набегающего потока и хордой профиля.

2 Обратная краевая задача аэрогидродинамики

Для решения основной ОКЗА используем метод Тумашева. Подробное изложение этого метода дано в [1]. Ниже приведены основные математические формулы этого метода, изложен алгоритм численной реализации и рассмотрены особенности вычислительных процедур. Приведено обобщение на случай проектирования крылового профиля с учета вязкости по модели ПС.

2.1 Постановка задачи

В физической плоскости $z = x + iy$ рассмотрим обтекание искомого крылового профиля AB потоком ИНЖ с заданной скоростью V_∞ на бесконечности (рис. 2,а). Начало координат выберем совпадаю-

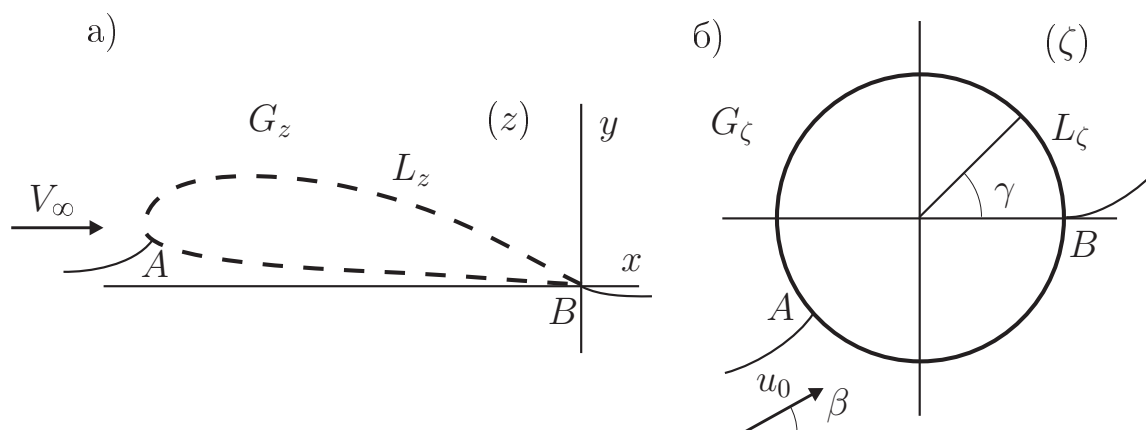


Рис. 2

щим с задней кромкой B крылового профиля, ось x направим параллельно скорости набегающего потока. Вдоль контура крылового профиля задано распределение скорости $V(s)$ (или распределение давления $p(s)$) как функция дуговой абсциссы $0 \leq s \leq l$, где l – периметр. Дуговая абсцисса отсчитывается от задней кромки B так, чтобы область течения оставалась слева. Заднюю кромку полагаем острой, то есть внутренний к области течения G_z угол в точке B равен 2π .

Требуется определить форму контура L_z крылового профиля и его геометрические и аэродинамические характеристики.

2.2 Основные формулы метода Тумашева решения ОКЗА

При сделанных предположениях существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$, будем полагать $w = 0$ в точке A разветвления потока. Если в качестве исходного задано распределение давления $p(s)$, то выразим распределение скорости $V(s)$ из интеграла Бернулли (1)

$$V(s) = \pm \sqrt{2(p_0 - p(s))/\rho}.$$

Здесь знак “+” нужно брать для верхней поверхности крылового профиля, где направление скорости потока совпадает с направлением обхода контура L_z , знак “–” – для нижней.

Из распределения скорости определим дуговую абсциссу s_a точки A разветвления потока как точку, в которой функция $V(s)$ меняет

знак. Тогда потенциал скорости на поверхности крылового профиля вычислим по формуле

$$\varphi(s) = \int_{s_a}^s V(s) ds. \quad (3)$$

Обозначим $\varphi_0 = \varphi(0)$ и $\varphi_1 = \varphi(l)$, следовательно, циркуляция скорости $\Gamma = \varphi_1 - \varphi_0$.

Введем в рассмотрение каноническую плоскость $\zeta = re^{i\gamma}$ (рис. 2,б), в которой области G_z будет соответствовать область G_ζ – внешность круга единичного радиуса, а контуру L_z крылового профиля – контур L_ζ : единичная окружность $|\zeta| = 1$. Для взаимно однозначного отображения областей G_z и G_ζ предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей z и ζ и переход точки $\zeta = 1$ в точку $z = 0$.

Комплексный потенциал циркуляционного обтекания единичной окружности задается формулой

$$w(\zeta) = u_0 \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + C, \quad (4)$$

где u_0 и β – модуль и аргумент скорости набегающего потока в канонической плоскости, а комплексная константа $C = C_1 + iC_2$. Подставив в (4) $\zeta = e^{i\gamma}$ и выделив реальную и мнимую части, найдем потенциал скорости и функцию тока на окружности:

$$\varphi(\gamma) = 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + C_1, \quad (5)$$

$$\psi(\gamma) \equiv C_2. \quad (6)$$

Отметим, что из соотношения (6) следует, что для течения, определенного комплексным потенциалом (4), окружность действительно является линией тока.

В соотношения (5), (6) входят четыре неизвестные: u_0 , β , C_1 , C_2 , добавим к ним угловую координату γ_a точки A разветвления потока. Для их определения служат следующие пять уравнений:

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma_a) &= 0, & \varphi(0) &= \varphi_1, & \psi(\gamma_a) &= 0, \\ \varphi'(\gamma_a) &= 0, & \varphi'(0) &= 0.\end{aligned}$$

Разрешая эту систему, выразим все неизвестные через угол β :

$$\begin{aligned}C_2 &= 0, & \gamma_a &= \pi + 2\beta, & u_0 &= \frac{\Gamma}{4\pi \sin \beta}, \\ C_1 &= \varphi_1 - 2u_0 \cos \beta = \varphi_1 - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{ctg} \beta.\end{aligned}\tag{7}$$

Для определения β имеем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{ctg} \beta = a - \beta, \quad a = \frac{\pi}{\Gamma} \varphi_1 - \frac{\pi}{2}.\tag{8}$$

Зависимость $s(\gamma)$ найдем, сопоставив функции $\varphi(s)$ и $\varphi(\gamma)$, определенные формулами (3) и (5) соответственно.

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi - \chi_0 = \tilde{S} + i\tilde{\theta}\tag{9}$$

без особенностей в области G_ζ , где

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = \ln |V| - i\theta = S - i\theta$$

– функция Жуковского – Мичела, а

$$\chi_0(\zeta) = \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta} \right) = S_0 + i\theta_0$$

– функция, включающая особенность $\chi(\zeta)$ в точке A с координатой $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$. Тогда комплексно сопряженная скорость течения в физической плоскости определится по формуле

$$\frac{dw}{dz} = \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) e^{\tilde{\chi}(\zeta)}. \quad (10)$$

Выделив в (9) реальную часть на окружности, запишем

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln |V(\gamma)| - \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \right|.$$

Так как $V(\gamma) = V(s(\gamma))$, то $\tilde{S}(\gamma)$ – известна. Мнимую часть $\tilde{\theta}(\gamma)$ на окружности восстановим с использованием интеграла Гильберта

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma, \quad (11)$$

а саму функцию $\tilde{\chi}(\zeta)$ оператором Шварца

$$\tilde{\chi}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma. \quad (12)$$

Тогда форму контура L_z крылового профиля найдем по формуле

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} d\zeta. \quad (13)$$

Условия разрешимости. Условие совпадения скорости V_∞ , определяемой в ходе решения, с заданной имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln V_\infty = A_1. \quad (14)$$

Условия замкнутости искомого контура крылового профиля будут:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = -\pi = A_2, \quad \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0 = A_3. \quad (15)$$

Для удовлетворения условий разрешимости существуют два метода: метод квазирешений и метод свободных параметров. В методе квазирешений вводится в рассмотрение функция

$$\tilde{S}_1(\gamma) = \tilde{S}(\gamma) - (\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma),$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma - A_1 \right], & \mu_2 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma - A_2 \right], \\ \mu_3 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma - A_3 \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Контур замкнутого крылового профиля восстанавливается по формулам (11), (13), где вместо $\tilde{S}(\gamma)$ используется $\tilde{S}_1(\gamma)$. Распределение скорости $V_1(\gamma)$ по замкнутому крыловому профилю определяется по формуле

$$V_1(\gamma) = -2 \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} e^{\tilde{S}_1(\gamma)}.$$

Распределение скорости $V(s)$ по замкнутому крыловому профилю как функцию дуговой абсциссы найдем как сложную функцию $V(s) = \{V_1(\gamma); s(\gamma)\}$.

Второй подход к удовлетворению условий разрешимости заключается в применении метода свободных параметров. В этом случае исходное распределение скорости $V(s)$ задается в параметрическом виде, например, в виде гидродинамически целесообразного распределения скорости (ГЦРС) [1] (рис. 3). Тогда для удовлетворения

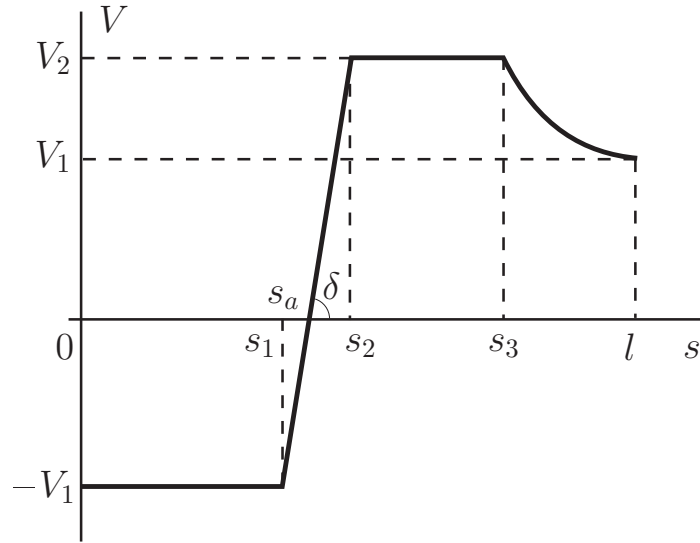


Рис. 3

условий разрешимости выберем следующие параметры: скорость V_1 – для условия на V_∞ ; абсциссы s_1 и s_2 (или абсциссу s_a и угол δ) – для условий замкнутости. Соотношения (14), (15) представляют собой систему из трех нелинейных уравнений для трех параметров в распределении скорости, которая решается численно, например, методом Ньютона.

Аэродинамические характеристики крылового профиля.

Полный вывод формул аэродинамических характеристик для проницаемого крылового профиля приведен в параграфе 4.1 приложения. Ниже приведем запись этих формул для частного случая, именно, непроницаемого крылового профиля, который рассматривается в настоящем параграфе. Подъемная сила определяется по формуле Жуковского (первая формула (44) из приложения), а сила сопротивления $R_{xa} = 0$ согласно парадоксу Даламбера. Тогда коэффициент подъемной силы $C_{ya} = \frac{2\Gamma}{V_\infty b}$, а $C_{xa} = 0$.

С другой стороны, аэродинамические коэффициенты можно вычислить по формулам

$$C_{ya} = -\frac{1}{b} \int_{L_z} c_p dx, \quad C_{xa} = \frac{1}{b} \int_{L_z} c_p dy, \quad (17)$$

полученным из формул (46) приложения после обезразмеривания. Так как переменные x и y , по которым ведется интегрирование в последних формулах, не являются однозначными вдоль контура крылового профиля, то от интегрирования по этим переменным лучше перейти к интегрированию по дуговой абсциссе s . Для этого найдем зависимость $\theta_p(\gamma)$ угла наклона касательной к контуру профиля от переменной γ . Взяв мнимую часть в формуле (9) и разрешив получившееся соотношение относительно θ , запишем

$$\theta(\gamma) = -\tilde{\theta}(\gamma) - \frac{\gamma_a + \pi \operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_a) - \gamma}{2}.$$

Угол θ_p совпадает с аргументом θ вектора скорости на верхней поверхности крылового профиля ($\gamma < \gamma_a$) и $\theta_p = \theta + \pi$ на нижней поверхности крылового профиля ($\gamma > \gamma_a$). Следовательно, формулу для определения угла наклона касательной к крыловому профилю можно записать в следующем виде

$$\theta_p(\gamma) = \theta(\gamma) + \frac{\pi \operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_a) + \pi}{2} = -\tilde{\theta}(\gamma) + \frac{\gamma - \gamma_a + \pi}{2}.$$

Тогда в формулах (17) легко перейти к интегрированию по переменной s , сделав замену $dx = \cos \theta_p ds$, $dy = \sin \theta_p ds$:

$$C_{ya} = -\frac{1}{b} \int_{L_z} c_p \cos \theta_p ds, \quad C_{xa} = \frac{1}{b} \int_{L_z} c_p \sin \theta_p ds. \quad (18)$$

Аэродинамические коэффициенты, вычисленные двумя способами, должны совпадать с достаточной степенью точности, что является критерием достоверности полученных числовых результатов.

2.3 Особенности численной реализации решения ОКЗА

Алгоритм численного решения ОКЗА методом Тумашева включает в себя следующие шаги (условие разрешимости будем учитывать методом квазирешений).

1. Ввод исходных данных.
2. Определение s_a .
3. Вычисление $\varphi(s)$, φ_0 , φ_1 , Γ .
4. Определение параметров β , u_0 , γ_a , C .
5. Нахождение $s(\gamma)$.
6. Определение $V(\gamma)$, $S(\gamma)$ и $\tilde{S}(\gamma)$.
7. Переход от $\tilde{S}(\gamma)$ к $\tilde{S}_1(\gamma)$ при учете условий разрешимости методом квазирешений.
8. Вычисление $\tilde{\theta}(\gamma)$ интегралом Гильберта.
9. Нахождение координат крылового профиля.
10. Определение геометрических и аэродинамических характеристик.

Отметим, что все функции в реализации этого алгоритма будут представлены в табулированном виде как массивы их значений на некотором разбиении их аргумента. В целях достижения компромисса между точностью и скоростью вычислений будем использовать

кубические сплайны. Теперь разберем подробно особенности численной реализации каждого шага этого алгоритма.

1. Исходное распределение скорости $V(s)$ загрузим в виде массивов $\{s^{(k)}; V^{(k)}; k = \overline{0, N}\}$ из файла с данными. Здесь и далее верхний индекс, взятый в круглые скобки, будет означать индекс элемента массива. Другой способ – это задание распределения скорости в параметрическом виде ГЦРС, представленном на рис. 3. Это распределение скорости зависит от шести параметров: V_1, V_2, s_1, s_2, s_3 и κ . На линейном участке разгона распределение скорости определяется выражением

$$V(s) = \frac{V_2 + V_1}{s_2 - s_1}(s - s_1) - V_1, \quad s_1 < s < s_2.$$

Форма диффузорного участка распределения скорости зависит от параметра κ , который при проведении расчетов обычно берут равным $\kappa = -0.25$.

$$V(s) = V_2 (1 + D(s - s_3))^\kappa, \quad s_3 < s < l.$$

Разбиение дуговой абсциссы можно сделать равномерным $s^{(k)} = lk/N$, $k = \overline{0, N}$, а массив распределения скорости $V^{(k)}$ вычислять по приведенным выше формулам.

2. Чаще всего точка разветвления потока не совпадает с какой-либо точкой разбиения дуговой абсциссы $s^{(k)}$. Для определения s_a найдем отрезок $[s^{(k)}; s^{(k+1)}]$, где распределение скорости меняет знак. Предполагая функцию $V(s)$ близкой к линейной на этом участке запишем

$$s_a = s^{(k)} - \frac{V^{(k)}}{V^{(k+1)} - V^{(k)}}(s^{(k+1)} - s^{(k)}).$$

3. Нахождение $\varphi(s)$ будем проводить по формуле (3) с использованием сплайна для вычисления интеграла. По массивам $\{s^{(k)}; V^{(k)}\}$ построим сплайн функции $V(s)$. Найдем первый элемент массива с учетом условия $\varphi(s_a) = 0$ по формуле

$$\varphi^{(0)} = - \int_0^{s_a} V(s) ds$$

и затем остальные элементы массива по рекуррентной формуле

$$\varphi^{(k+1)} = \varphi^{(k)} + \int_{s^{(k)}}^{s^{(k+1)}} V(s) ds, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда $\varphi_0 = \varphi^{(0)}$, $\varphi_1 = \varphi^{(N)}$, $\Gamma = \varphi_1 - \varphi_0$.

4. Так как параметры u_0 , γ_a и C зависят от β , то сначала найдем β , решив нелинейное уравнение (8) любым численным методом, например, методом Ньютона. Отметим следующую особенность: так как циркуляция Γ входит в вы-

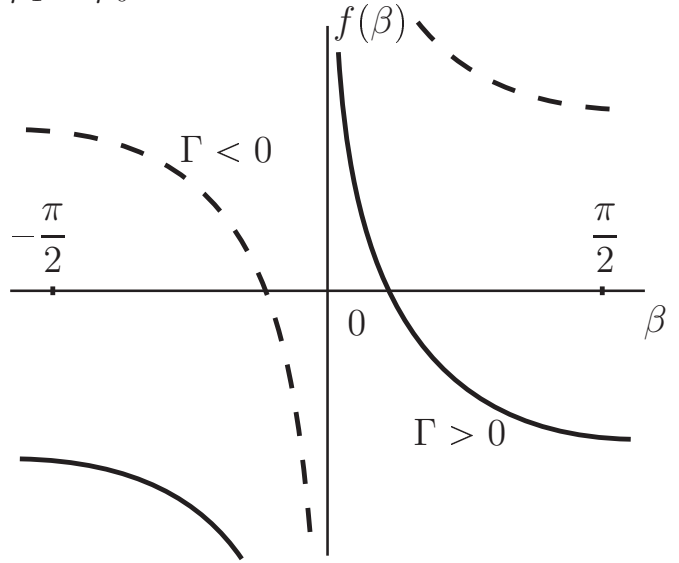


Рис. 4

ражение для параметра a в (8) в знаменателе, то случай $\Gamma = 0$ необходимо учесть отдельно. При $\Gamma = 0$ имеем безциркуляционное обтекание окружности и очевидно, что $\beta = 0$. При $\Gamma \neq 0$ угол β отыскивается как решение нелинейного уравнения $f(\beta) = \text{ctg } \beta - a + \beta = 0$. Вид функции $f(\beta)$ схематично представлен на рис. 4 сплошной линией в случае $\Gamma > 0$ (в этом случае корень $\beta \in (0; \pi/2]$) и штриховой

линией в случае $\Gamma < 0$ (в этом случае корень $\beta \in [-\pi/2; 0)$). Как видно из рисунка, в зависимости от знака циркуляции Γ необходимо правильно задать начальное приближение для метода Ньютона. В итоге при $\Gamma > 0$, начальное приближение выберем в виде $\beta_0 = \varepsilon$, а для $\Gamma < 0$ – в виде $\beta_0 = -\varepsilon$, где ε – малое положительное число.

После определения β остальные параметры найдем по формулам (7). Как видно из этих формул, здесь также возникают трудности вычислений в случае $\beta = 0$ (неопределенности вида $\frac{0}{0}$ в формуле для u_0 и вида $0 \cdot \infty$ в формуле для C_1). Перепишем формулу (5) с учетом того, что $\beta = \Gamma = 0$, в виде $\varphi(\gamma) = 2u_0 \cos \gamma + C_1$. Из условий $\varphi(0) = \varphi_1$ и $\varphi(\pi) = 0$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2u_0 + C_1 = \varphi_1, \\ -2u_0 + C_1 = 0, \end{cases}$$

откуда для случая $\beta = 0$ найдем $C_1 = \varphi_1/2$ и $u_0 = \varphi_1/4$.

5. На рис. 5,а,б представлено схематичное изображение функций $\varphi(s)$ и $\varphi(\gamma)$, из сопоставления которых определяется зависимость $s(\gamma)$ (рис. 5,в). Из рисунка видно, что $\varphi(s)$ и $\varphi(\gamma)$ имеют по

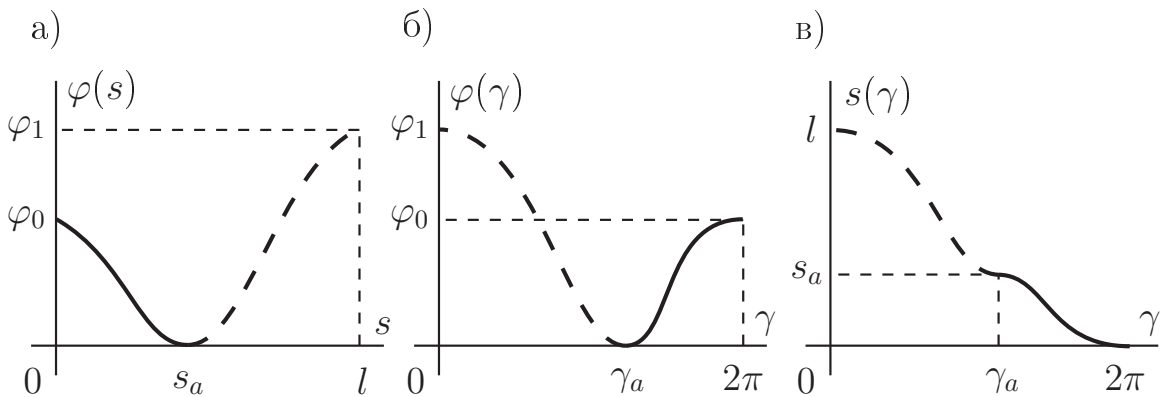


Рис. 5

два участка монотонности. Причем участку $s \in [0; s_a]$ функции $\varphi(s)$ соответствует участок $\gamma \in [\gamma_a; 2\pi]$ функции $\varphi(\gamma)$ (на рисунке изображены сплошной линией), а участку $s \in [s_a; l]$ соответствует участок $\gamma \in [0; \gamma_a]$ (штриховая линия). Сопоставление функций $\varphi(s)$ и $\varphi(\gamma)$ на каждом участке монотонности необходимо производить по отдельности. Отметим, что если при проведении вычислений предыдущего шага набор параметров определен верно, то для функций $\varphi(s)$ и $\varphi(\gamma)$ будут выполняться условия $\varphi(s = 0) = \varphi(\gamma = 2\pi) = \varphi_0$, $\varphi(s = s_a) = \varphi(\gamma = \gamma_a) = 0$ и $\varphi(s = l) = \varphi(\gamma = 0) = \varphi_1$, что необходимо для численного метода нахождения $s(\gamma)$.

Введем равномерное разбиение $\gamma^{(j)} = 2\pi j/n$, $j = \overline{0, n}$ точек на окружности (число n точек на окружности вообще говоря может не совпадать с числом N в исходном разбиении для распределения скорости $V(s)$). В точках этого разбиения вычислим массив значений $\varphi^{(j)} = \varphi(\gamma^{(j)})$. Нахождению функции $s(\gamma)$ соответствует задача вычисления элементов массива дуговых абсцисс $s^{(j)}$ искомого контура, соответствующих точкам $\gamma^{(j)}$ разбиения на окружности. Для решения этой задачи предлагаются два способа.

I способ. На первом участке монотонности строим сплайн для функции $s(\varphi)$ по набору значений $\{\varphi^{(k)}; s^{(k)}\}$ с этого участка, найденных на шагах 1 и 3. Отметим, что к этому набору точек необходимо дополнительно добавить точку $\{\varphi = 0; s = s_a\}$, если точка разветвления потока не попала в одну из точек разбиения $s^{(k)}$. Тогда искомые $s^{(j)}$ найдем, подставив в сплайн $s(\varphi)$ значения $\varphi^{(j)}$, то есть $s^{(j)} = s(\varphi^{(j)})$. Таким образом определим функцию $s(\gamma)$, соот-

ветствующую первому участку монотонности, которая изображена на рис. 5, в сплошной линией. Аналогичным образом, рассмотрев второй участок монотонности, определим вторую половину $s(\gamma)$, изображенную штриховой линией.

Отметим, что в окрестности точки A разветвления потока $ds/d\varphi \rightarrow \infty$, но такое поведение функции $s(\varphi)$ не может быть обеспечено кубическим сплайном. Это приводит к незначительным погрешностям вычисления функции $s(\gamma)$ в окрестности этой точки, что является небольшим недостатком первого способа. К преимуществам можно отнести относительную простоту численной реализации этого метода и быстроту его работы.

II способ. Сначала найдем массив точек $\gamma^{(k)}$, соответствующих значениям исходного разбиения $s^{(k)}$, полученным на шаге 1, решая для каждой точки исходного разбиения $s^{(k)}$ нелинейное уравнение $\varphi(\gamma) = \varphi(s^{(k)}) = \varphi^{(k)}$. Так как $\varphi(\gamma)$ задана в аналитическом виде (5), то нелинейное уравнение

$$f(\gamma) = 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + C_1 - \varphi^{(k)} = 0$$

можно решить любым численным методом, например, методом Ньютона. Отметим, что здесь так же нужно по отдельности рассматривать сначала первый, а потом второй участки монотонности. Для ускорения вычислений начальное приближение для численного метода решения нелинейного уравнения можно подобрать достаточно близко к корню, определив отрезок $[\gamma^{(j)}; \gamma^{(j+1)}]$ (с учетом соответствующего участка монотонности), содержащий искомое значение $\gamma^{(k)}$, из

условия $\varphi^{(j)} \leq \varphi^{(k)} \leq \varphi^{(j+1)}$. Таким образом, функция $\gamma(s)$ определяется с заданной точностью, определяемой в процедуре численного решения нелинейного уравнения.

В итоге функцию $s(\gamma)$ найдем следующим образом: по набору значений $\{\gamma^{(k)}; s^{(k)}\}$ построим сплайн функции $s(\gamma)$ и затем вычислим искомые $s^{(j)}$, подставив в этот сплайн значения $\gamma^{(j)}$, то есть $s^{(j)} = s(\gamma^{(j)})$.

Реализация второго способа более трудоемкая, а проведение расчета занимает больше времени по сравнению с первым способом, что можно отнести к его недостаткам (впрочем это не сильно заметно при проведении расчетов на современных ЭВМ). В качестве преимущества отметим более высокую точность второго способа.

6. Для определения $V(\gamma) = V(s(\gamma))$ построим сплайн для функции $V(s)$ по набору точек $\{s^{(k)}; V^{(k)}\}$ и с его использованием вычислим массив значений $V^{(j)} = V(s^{(j)})$. Нахождение $S(\gamma) = \ln |V(\gamma)|$ равносильно вычислению массива $S^{(j)} = \ln |V^{(j)}|$, а определение $\tilde{S}(\gamma) = S(\gamma) - S_0(\gamma)$ – вычислению $\tilde{S}^{(j)} = S^{(j)} - S_0(\gamma^{(j)})$. Если γ_a совпадает с некоторой точкой разбиения $\gamma^{(j)}$, то для этой точки $\tilde{S}^{(j)} = (\tilde{S}^{(j+1)} + \tilde{S}^{(j-1)})/2$.

7. При построении квазирешения вычисление интегралов в формулах (16) необходимо произвести, построив сплайны подынтегральных функций на точках равномерного разбиения окружности $\gamma^{(j)}$. После вычисления коэффициентов μ_1 , μ_2 и μ_3 нахождение функции $\tilde{S}_1(\gamma)$ равнозначно определению массива $\tilde{S}_1^{(j)} = \tilde{S}^{(j)} - (\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma^{(j)} + \mu_3 \sin \gamma^{(j)})$.

8. Для простоты изложения приведем формулы вычисления интеграла Гильберта в общем случае. Пусть $f(\zeta) = u + iv$ – аналитическая функция во внешности круга, причем ее реальная часть $u(\gamma)$ на границе известна. Тогда мнимая часть $v(\gamma)$ на границе определяется интегралом Гильберта

$$v(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma.$$

Этот интеграл является сингулярным и его подсчет стандартными квадратурными формулами невозможен. Ниже приведем два подхода к его вычислению.

I подход. Для вычисления применим специальную квадратурную формулу. Пусть функция $u(\gamma)$ задана массивом точек $\{\gamma^{(j)}; u^{(j)}\}$, $j = \overline{0, n}$. тогда значения функции $v(\gamma)$ на точках разбиения $\gamma^{(j)}$ определим по формуле

$$v^{(j)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k,j)} + F^{(k+1,j)}}{2} \left(\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)} \right), \quad j = \overline{0, n-1}.$$

С учетом периодичности $v^{(n)} = v^{(0)}$. Здесь

$$F^{(k,j)} = \begin{cases} (u^{(k)} - u^{(j)}) \operatorname{ctg} \frac{\gamma^{(j)} - \gamma^{(k)}}{2}, & k \neq j, \\ -2u^{(k)}, & k = j, \end{cases} \quad k = \overline{0, n-1}$$

и с учетом периодичности $F^{(n,j)} = F^{(0,j)}$. Для вычисления производной $u'(\gamma) = du/d\gamma$ используем формулы

$$u^{(j)} = \frac{u^{(j+1)} - u^{(j-1)}}{\gamma^{(j+1)} - \gamma^{(j-1)}}, \quad j = 1, n-1,$$

$$u^{(0)} = u^{(n)} = \frac{u^{(1)} - u^{(n-1)}}{\gamma^{(1)} - \gamma^{(n-1)} + 2\pi}.$$

При $n = 200$ погрешность этого подхода к вычислению интеграла Гильберта составляет порядка 10^{-4} .

II подход основан на быстром дискретном преобразовании Фурье.

Пусть функция $f(\zeta)$ представлена рядом Лорана

$$f(\zeta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta^k}.$$

Обозначив $c_k = a_k + ib_k$, на границе запишем

$$f(e^{i\gamma}) = \frac{a_0 + ib_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + ib_k)(\cos k\gamma - i \sin k\gamma)].$$

Тогда, разделяя реальную и мнимую части, найдем:

$$u(\gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma],$$

$$v(\gamma) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos k\gamma - a_k \sin k\gamma].$$

Основываясь на этих формулах, приведем подход к вычислению интеграла Гильберта или, точнее, к определению мнимой части аналитической функции на границе канонической области по известной реальной. Применив прямое дискретное преобразование Фурье по значениям $u^{(j)}$, определим коэффициенты $\{a_k; b_k\}$, $k = \overline{0, n}$ усеченного ряда Лорана. Затем вычислим $v^{(j)}$, применив обратное дискретное преобразование Фурье по набору коэффициентов $\{b_k; -a_k\}$. Этот подход удобно применять, если имеются готовые процедуры дискретного преобразования Фурье, которые входят в состав многих вычислительных библиотек программ. Преимуществами этого подхода являются большая скорость вычислений и высокая точность, например, при $n = 200$ сопоставимая с точностью представления числа типа `double`.

Отметим, что второй подход работает только для равномерного разбиения $\gamma^{(j)}$, а первый – и на неравномерном.

9. Для вычисления координат крылового профиля преобразуем формулу (13), подставив в нее $\zeta = e^{i\gamma}$, с учетом выражения

$$d\zeta = de^{i\gamma} = ie^{i\gamma}d\gamma = i\zeta d\gamma$$

к виду

$$z(\gamma) = \int_0^\gamma f_1(e^{i\gamma})d\gamma, \quad f_1(\zeta) = iu_0e^{-i\beta} (\zeta - 1) e^{-\tilde{\chi}_1(\zeta)}.$$

Учтем, что $\tilde{\chi}_1(e^{i\gamma}) = \tilde{S}_1(\gamma) + i\tilde{\theta}_1(\gamma)$, где $\tilde{\theta}_1(\gamma)$ восстанавливается интегралом Гильберта по функции $\tilde{S}_1(\gamma)$. Тогда, перейдя от одного комплексного интеграла к двум вещественным, координаты крылового профиля определим по формулам:

$$\begin{aligned} x^{(j+1)} &= x^{(j)} + \int_{\gamma^{(j+1)}}^{\gamma^{(j+1)}} \operatorname{Re} [f_1(e^{i\gamma})] d\gamma, \\ y^{(j+1)} &= y^{(j)} + \int_{\gamma^{(j)}}^{\gamma^{(j+1)}} \operatorname{Im} [f_1(e^{i\gamma})] d\gamma, \end{aligned} \quad j = \overline{0, n-1},$$

учтя $x^{(0)} = y^{(0)} = 0$. Интегралы вычислим, найдя сплайны от подынтегральных функций.

10. При использовании квазирешения для выполнения условий разрешимости ОКЗА массив дуговых абсцисс $s^{(j)}$, определяемый в ходе решения на шаге 5, не соответствует дуговой абсциссе замкнутого крылового профиля. Поэтому определим ее по найденным координатам замкнутого крылового профиля

$$s^{(j+1)} = s^{(j)} + \sqrt{(x^{(j+1)} - x^{(j)})^2 + (y^{(j+1)} - y^{(j)})^2}$$

с учетом $s^{(0)} = 0$.

Хорду профиля найдем по формуле

$$b = \sqrt{(x^{(ib)})^2 + (y^{(ib)})^2},$$

где (ib) – индекс самой удаленной от задней кромки точки. Угол атаки определим по формуле

$$\alpha = \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg} \frac{y^{(ib)}}{x^{(ib)}}, & y^{(ib)} \geq 0, \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{y^{(ib)}}{x^{(ib)}}, & y^{(ib)} < 0, \end{cases}$$

причем при проведении вычислений необходимо использовать функцию $\operatorname{atan2}(y, x)$, которая вычисляет угол в диапазоне $[-\pi; \pi]$ с учетом четверти.

Нахождение аэродинамических характеристик будем проводить по формулам (18). Интегралы вычислим так же построив сплайны от подынтегральных функций.

2.4 Решение ОКЗА с учетом вязкости по модели ПС

Расчет турбулентного ПС. Для расчета ПС воспользуемся одним из простейших полуэмпирических методов – методом Кочина – Лойцянского. В расчетных формулах присутствуют следующие константы: $a = 1.17$, $b = 4.75$, $m = 6$, $A = 6.55 \cdot 10^{-3}$, $f_0 = -1.86$. Расчет ПС заключается в вычислении следующих функций: формпараметра

$$f(s) = \frac{aV'(s)}{|V(s)|^b} \left| \int_{s_a}^s |V(s)|^{b-1} ds \right|; \quad (19)$$

толщины потери импульса

$$\delta_2(s) = \left[\left(A \frac{|V(s)|}{V'(s)} f(s) \right)^m \frac{\nu}{|V(s)|} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad (20)$$

здесь ν – кинематический коэффициент вязкости, входящий в выражение для числа Рейнольдса $Re = V_\infty b / \nu$, для сухого воздуха при температуре 20°C: $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; толщины вытеснения

$$\delta_1(s) = H_{12}(s) \delta_2(s),$$

где $H_{12}(s)$ определяется по формуле Каменецкого в зависимости от текущего значения формпараметра

$$H_{12}(f) = 1.35 - 0.0701f + 0.02913f^2 + 0.01083f^3 + 0.001606f^4.$$

Критерий безотрывности обтекания записывается в виде

$$f(s) \geq f_0, \quad s \in [0, l].$$

Известно, что теория ПС не работает вблизи точки разветвления потока. Формулы метода Кочина – Лойцянского дают там погрешности. Поэтому в окрестности этой точки на участке $s \in (s_a; s_*)$, где $\{s_* : V(s_*) = V_* = 0.3V_\infty\}$ параметры ПС будем рассчитывать по следующим формулам. Полагаем, что $V(s)$ линейна на этом участке, то есть $V(s) = k(s - s_a)$, $V'(s) \equiv k$, тогда

$$f(s) = \frac{ak}{|k(s - s_a)|^b} \int_{s_a}^s |k(s - s_a)|^{b-1} ds = \frac{ak}{(k(s - s_a))^b} \frac{k^{b-1}(s - s_a)^b}{b} = \frac{a}{b},$$

следовательно можно считать, что $f(s) \equiv \frac{a}{b}$, $s \in (s_a; s_*)$. Так как толщина $\delta_2(s)$ очень мала в окрестности критической точки, то будем

полагать $\delta_2(s) \equiv \delta_2(s_*)$, $s \in (s_a; s_*)$. Для $s > s_*$ функции $f(s)$ и $\delta_2(s)$ вычисляются по формулам (19) и (20). При проведении расчетов в качестве s_* можно выбрать первую точку разбиения $s^{(k)}$, для которой $V^{(k)} > V_*$.

Обобщение решения ОКЗА. Так как влияние вязкости при больших числах Рейнольдса существенно только в тонком слое вблизи крылового профиля, называемом пограничным слоем, и в следе за профилем, то в рамках модели, предложенной для решения ОКЗА с учетом вязкости, область течения в физической плоскости разбивается на две: область внешнего течения, в которой жидкость считается идеальной и несжимаемой, и область пограничного слоя и следа, в которой учитывается влияние вязкости. В качестве линии, разделяющей эти две области вблизи крылового профиля берется граница полутела вытеснения, получаемая наращиванием на контур крылового профиля толщины вытеснения (рис. 6,а, сплошная линия). При конформном отображении области внешнего течения в плоскости z на внешность единичного круга в канонической плоскости ζ граница

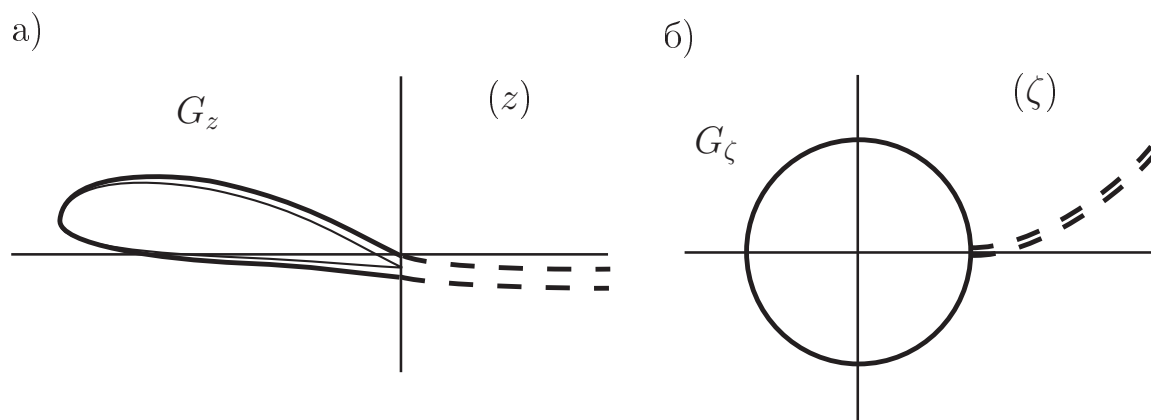


Рис. 6

полутела вытеснения перейдет в единичную окружность (рис. 6,б). Вязкий след за задней кромкой крылового профиля моделируется двумя конгруэнтными линиями тока, являющимися образами линии схода потока в канонической плоскости (рис. 6,а,б, штриховые линии).

Таким образом, главное отличие от основной ОКЗА для крылового профиля, обтекаемого потоком ИНЖ, в том, что искомый контур L_z полутела вытеснения должен быть разомкнут на величину

$$\Delta z = -i(\delta_{1_6} + \delta_{1_n})e^{i\theta_b},$$

где δ_{1_6} и δ_{1_n} – соответственно толщины вытеснения в задней кромке B сверху и снизу, $\theta_b = \theta_p(0)$ – угол наклона касательной к L_z в этой точке. То есть в расчетных формулах основной ОКЗА, приведенных в параграфе 2.2, изменятся лишь константы в условиях замкнутости (15), которые в компактной форме можно записать в виде

$$A_2 + iA_3 = -\pi + i\frac{V_\infty e^{i\beta}}{2u_0}\Delta z.$$

Выполнение условий разрешимости достигается методом квазирешений.

Сложность решения задачи в следующем: квазирешение меняет распределение скорости $V(s)$, что влечет за собой изменение толщины вытеснения $\delta_1(s)$, то есть изменится и величина разомкнутости Δz , что в свою очередь требует заново выполнить условия разрешимости. Эта трудность преодолевается путем организации итерационного процесса. Исходными данными для него будут функции

$s(\gamma)$ и $V(\gamma)$, получаемые на первой стадии решения ОКЗА по исходной $V(s)$. Итерационный процесс содержит следующие шаги:

1. выполняем расчет ПС и определяем разомкнутость Δz ;
2. применяем квазирешение для полутела вытеснения;
3. находим угол $\theta_p(\gamma)$ наклона касательной и распределение скорости $V_1(\gamma)$ на границе полутела вытеснения;
4. строим контур L_z и определяем новую зависимость $s(\gamma)$;
5. проверяем условие выхода из итерационного процесса

$$\|V(\gamma) - V_1(\gamma)\| < \varepsilon,$$

где ε – малое положительное число;

6. если условие не выполнено, то полагаем $V(\gamma) = V_1(\gamma)$ и переходим на шаг 1, иначе выходим из итерационного процесса.

Наконец получим формулу для построения контура профиля L_{zp} по контуру полутела вытеснения L_z . Пусть найденный контур L_z задан координатами $z(\gamma)$, $\gamma \in [0, 2\pi]$. Тогда координаты контура крылового профиля определим, отступая по нормали внутрь L_z на расстояние δ_1 , по формуле

$$z_p(\gamma) = z(\gamma) - i\delta_1(\gamma)e^{i\theta_p(\gamma)}. \quad (21)$$

Определение аэродинамических характеристик. Коэффициент сопротивления вычислим по приближенной формуле Сквайра – Юнга

$$C_{xa} = C_{x\varepsilon} + C_{xn}, \quad C_{x(\varepsilon/n)} = 2 \frac{\delta_{2(\varepsilon/n)}}{b} \left(\frac{V_b}{V_\infty} \right)^{\frac{5+H_{12(\varepsilon/n)}}{2}},$$

где V_b – скорость в задней кромке B профиля, $\delta_{2(\varepsilon/n)}$ и $H_{12(\varepsilon/n)}$ – значение $\delta_2(s)$ и $H_{12}(s)$ в задней кромке для верхней и нижней поверхности крылового профиля соответственно. Отметим, что формулу Сквайра – Юнга можно использовать и при решении ОКЗА по модели ИНЖ для приближенного вычисления C_{xa} и аэродинамического качества $K = C_{ya}/C_{xa}$ без построения полутела вытеснения. Коэффициент подъемной силы C_{ya} будем находить по первой формуле (18), так как влияние вязкости здесь незначительно.

Для вычисления C_{ya} необходимо знать угол наклона касательной θ_{p1} к контуру крылового профиля, который нужно подставить в формулу (18) вместо θ_p . Для контуров L_z и L_{zp} имеем:

$$dz = ds e^{i\theta_p}, \quad dz_p = ds_p e^{i\theta_{p1}}.$$

Продифференцировав выражение (21) по γ с учетом предыдущего соотношения запишем

$$\begin{aligned} \frac{ds_p}{d\gamma} e^{i\theta_{p1}} &= \frac{ds}{d\gamma} e^{i\theta_p} - i \frac{d\delta_1}{d\gamma} e^{i\theta_p} - i\delta_1 e^{i\theta_p} i \frac{d\theta_p}{d\gamma} = \\ &= \left(\frac{ds}{d\gamma} - i \frac{d\delta_1}{d\gamma} + \delta_1 \frac{d\theta_p}{d\gamma} \right) e^{i\theta_p} = A e^{i\theta_p}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\theta_{p1} = \theta_p + \arg A$, где

$$\arg A = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A} = \operatorname{arctg} \frac{-\frac{d\delta_1}{d\gamma}}{\frac{ds}{d\gamma} + \delta_1 \frac{d\theta_p}{d\gamma}}.$$

Учтя, что δ_1 и $\frac{d\delta_1}{d\gamma}$ малы, вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь, а значение функции arctg считать приближенно равным ее аргументу. Тогда получим

$$\theta_{p1} \approx \theta_p - \frac{d\delta_1}{d\gamma} \Big/ \frac{ds}{d\gamma}.$$

3 Прямая краевая задача аэрогидродинамики

В настоящем разделе рассмотрено решение ПКЗА, то есть задачи расчета обтекания известного крылового профиля потоком ИНЖ так называемым панельным методом (см., напр., [2]) или, как его еще называют в литературе, методом граничных элементов. Ниже пояснена суть панельного метода с выводом расчетных формул для функции комплексного потенциала, приведены особенности численной реализации и дано обобщение этого метода на случай многоэлементного крылового профиля, профиля крыла вблизи твердого экрана и пронцаемого крылового профиля.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим обтекание заданного крылового профиля L_z потоком ИНЖ со скоростью V_∞ на бесконечности, направленным под углом α (рис. 7). Требуется определить распределение скорости $V(s)$ или коэффициента давления $c_p(s)$ как функции дуговой абсциссы s , а также интегральные аэродинамические характеристики профиля.

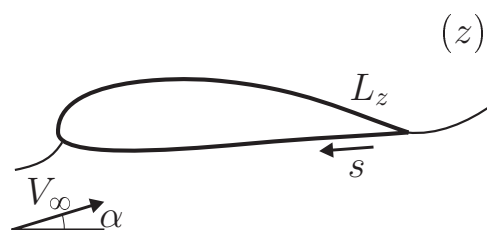


Рис. 7

3.2 Комплексные потенциалы простейших течений

Прежде чем перейти к изложению сути панельного метода рассмотрим комплексные потенциалы простейших течений.

Плоскопараллельное течение. Комплексный потенциал плоскопараллельного течения со скоростью набегающего потока V_∞ на бесконечности определяется формулой $w(z) = V_\infty z$, а комплексно сопряженная скорость формулой $\frac{dw}{dz} = V_\infty$. В случае, если набегающий поток направлен под углом α , то

$$w(z) = V_\infty e^{-i\alpha} z, \quad \frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-i\alpha}. \quad (22)$$

Точечные особенности. Комплексный потенциал и комплексно сопряженная скорость точечного источника (стока) расхода Q , расположенного в точке z_0 , записываются в виде

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi(z - z_0)}. \quad (23)$$

Случай $Q > 0$ соответствует источнику, случай $Q < 0$ – стоку.

Аналогичные формулы для точечного вихря циркуляции Γ , закрученного против часовой стрелки, имеют вид

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0), \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i(z - z_0)}. \quad (24)$$

Распределенные особенности. Получим формулы для комплексного потенциала особенностей, распределенных вдоль некоторой линии ℓ . Рассмотрим набор точечных источников (стоков) с интенсивностью q_k , $k = \overline{1, n}$, расположенных вдоль линии ℓ в точках

с координатами z_k . Тогда по свойству суперпозиции комплексный потенциал течения, индуцированного этими особенностями, с учетом (23) будет

$$w(z) = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \ln(z - z_k).$$

Для того, чтобы перейти к случаю источников, распределенных вдоль ℓ , устремим в последней формуле n к бесконечности и от суммы перейдем к интегралу, заменив q_k на $q(s)ds$, а z_k на $\xi(s)$. Функция $q(s)$ называется плотностью интенсивности распределенных источников (стоков), а $\xi(s)$ есть комплексная координата текущей точки интегрирования на линии ℓ с дуговой абсциссой s . Тогда комплексный потенциал течения от распределенных источников имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\ell} q(s) \ln(z - \xi(s)) ds.$$

Продифференцировав последнее выражение, запишем комплексно сопряженную скорость

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi} \int_{\ell} \frac{q(s)}{z - \xi(s)} ds.$$

Если $q(s) \equiv q - \text{const}$, то

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \int_{\ell} \ln(z - \xi(s)) ds, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{q}{2\pi} \int_{\ell} \frac{ds}{z - \xi(s)}. \quad (25)$$

В случае распределенных вихрей формулы выводятся аналогично. Комплексный потенциал и комплексно сопряженная скорость для вихрей с плотностью интенсивности $\gamma(s)$, распределенных вдоль ℓ ,

ИМЕЮТ ВИД

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \gamma(s) \ln(z - \xi(s)) ds, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\gamma(s)}{z - \xi(s)} ds. \quad (26)$$

Если $\gamma(s) \equiv \gamma - \text{const}$, то

$$w(z) = \frac{\gamma}{2\pi i} \int_{\ell} \ln(z - \xi(s)) ds, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\gamma}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{ds}{z - \xi(s)}. \quad (27)$$

3.3 Суть панельного метода

Для того, чтобы найти распределенные и интегральные аэродинамические характеристики обтекаемого крылового профиля, необходимо найти функцию комплексного потенциала соответствующего течения ИНЖ. В ПКЗА в отличие от ОКЗА методы конформных отображений не эффективны, так как сводятся к итерационному процессу. Используем другой подход. Будем отыскивать функцию $w(z)$ как суперпозицию простейших течений ИНЖ.

Впишем в L_z n -угольник, то есть разобьем L_z на панели l_k , $k = \overline{1, n}$, где каждая панель – прямолинейный отрезок (рис. 8). Вдоль каждой панели

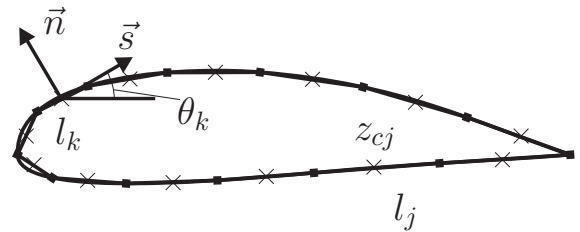


Рис. 8

распределим источники (стоки) с постоянной плотностью интенсивности q_k , но своей для каждой панели. Тогда будем отыскивать комплексный потенциал в виде

$$w(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^n w_k(z), \quad (28)$$

где w_0 – комплексный потенциал плоскопараллельного потока (22), а $w_k(z)$ – комплексный потенциал потока, индуцированного источниками, распределенными вдоль l_k , с учетом (25) запишем в виде

$$w_k(z) = \frac{q_k}{2\pi} \int_{l_k} \ln(z - \xi(s)) ds.$$

Формула (28) позволяет провести расчет безциркуляционного обтекания крылового профиля, однако для реальных течений в силу условия Жуковского – Кутты гладкого схода потока с задней кромки обтекание крылового профиля является циркуляционным, то есть к $w(z)$ необходимо добавить циркуляционный член

$$w(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^n w_k(z) + \omega(z). \quad (29)$$

В простейшем случае циркуляционный член $\omega(z)$ имеет вид (24) – комплексный потенциал точечного вихря, помещенного внутрь контура L_z в точке с координатой z_0 . Такая формула неплохо работает для расчета обтекания очень толстых крыловых профилей и гладких тел, но для крыловых профилей, толщина которых обычно не превышает 20% длины хорды, дает существенные погрешности в найденном распределении скорости.

Поэтому целесообразно рассматривать вихри, распределенные вдоль некоторой линии l' , в качестве которой обычно берут или среднюю линию профиля или сам контур L_z , то есть с учетом (26)

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l'} \gamma(s) \ln(z - \xi'(s)) ds,$$

где $\gamma(s)$ – плотность интенсивности распределенных вихрей, а $\xi'(s)$ – координата текущей точки интегрирования на линии l' .

Числовые эксперименты показали, что если брать $\gamma(s) \equiv \gamma - \text{const}$, то это также приводит к погрешностям расчета (существенные погрешности появляются вблизи тонкой задней кромки профиля, где велико взаимное влияния близко расположенных друг к другу панелей). Поэтому будем полагать $\gamma(s) = \gamma \eta(s)$, где $\eta(s)$ – некоторая весовая функция. Естественным оказывается выбрать ее в виде функции распределения толщины профиля: $\eta(s) \equiv t(s)$, тогда искомым будет коэффициент пропорциональности γ .

Для однозначности дальнейшего изложения будем считать, что вихри распределены вдоль L_z , причем будем полагать, что $t(s) \equiv t_k - \text{const}$ на каждой l_k , тогда с учетом (27)

$$\omega(z) = \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \int_{l_k} \ln(z - \xi(s)) ds.$$

Таким образом, для определения $w(z)$ по формуле (29) необходимо найти $(n + 1)$ неизвестную: q_k , $k = \overline{1, n}$ и γ . Для их определения служит условие непротекания контура L_z : $V_n(s) = 0$, где V_n – нормальная к контуру L_z составляющая скорости. Потребуем выполнения этого условия в контрольных точках z_{cj} : серединах панелей l_j (на рис. 8 изображены крестиками), тогда получим систему n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$V_n(s_{cj}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (30)$$

где s_{cj} – дуговые абсциссы контрольных точек. Замкнем полученную систему уравнений условием гладкого схода в задней кромке, которое

имеет вид $V_s(s_{c1}) = -V_s(s_{cn})$ или

$$V_s(s_{c1}) + V_s(s_{cn}) = 0, \quad (31)$$

где V_s – касательная к контуру L_z составляющая скорости.

Обозначим θ_j – угол наклона касательной к панели l_j (см. рис. 8). Для определения нормальной и касательной составляющих скорости по отношению к панели l_j необходимо вычислить проекцию вектора скорости \vec{V} на направление нормали и касательной к l_j . По определению проекции $V_s = (\vec{V}, \vec{s})$, $V_n = (\vec{V}, \vec{n})$ где \vec{s} и \vec{n} – орты касательного и нормального векторов. В нашем случае $\vec{V} = \frac{dw}{dz}$, $\vec{s} = e^{i\theta_j}$, $\vec{n} = e^{i(\theta_j + \frac{\pi}{2})}$.

Если

$$\vec{a} = a_x + ia_y, \quad \vec{b} = b_x + ib_y, \quad (32)$$

то легко проверить, что

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y = \operatorname{Re}(\bar{a}b), \quad (33)$$

где в последней скобке черта означает комплексное сопряжение и выполняется комплексное умножение двух комплексных чисел. Следовательно, касательная составляющая скорости в контрольной точке j -й панели будет

$$V_s(s_{cj}) = \operatorname{Re} \left(\frac{dw}{dz} e^{i\theta_j} \right). \quad (34)$$

Аналогично получим выражение для нормальной составляющей скорости

$$V_n(s_{cj}) = \operatorname{Re} \left(\frac{dw}{dz} e^{i(\theta_j + \frac{\pi}{2})} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{dw}{dz} i e^{i\theta_j} \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{dw}{dz} e^{i\theta_j} \right).$$

(35)

Вычислим комплексно сопряженную скорость, продифференцировав (29) с учетом (22), (25) и (27):

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw_0}{dz} + \sum_{k=0}^n \frac{dw_k}{dz} + \frac{d\omega}{dz} = \\ &= V_\infty e^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)} + \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\Omega_k(z) = \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)}, \quad (36)$$

перепишем последнюю формулу в виде

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \Omega_k(z) + \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \Omega_k(z). \quad (37)$$

Подставив (37) в (34) и (35), будем иметь

$$\begin{aligned} V_s(s_{cj}) &= \operatorname{Re} \left(\frac{dw}{dz}(z_{cj}) e^{i\theta_j} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(V_\infty e^{i(\theta_j - \alpha)} + \sum_{k=1}^n \frac{q_k e^{i\theta_j}}{2\pi} \Omega_k(z_{cj}) + \frac{\gamma e^{i\theta_j}}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \Omega_k(z_{cj}) \right) = \\ &= V_\infty \cos(\theta_j - \alpha) + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \operatorname{Re} (e^{i\theta_j} \Omega_k(z_{cj})) + \\ &\quad + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^n t_k \operatorname{Im} (e^{i\theta_j} \Omega_k(z_{cj})), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
V_n(s_{cj}) &= -\operatorname{Im} \left(\frac{dw}{dz}(z_{cj}) e^{i\theta_j} \right) = \\
&= -\operatorname{Im} \left(V_\infty e^{i(\theta_j - \alpha)} + \sum_{k=1}^n \frac{q_k e^{i\theta_j}}{2\pi} \Omega_k(z_{cj}) + \frac{\gamma e^{i\theta_j}}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \Omega_k(z_{cj}) \right) = \\
&= -V_\infty \sin(\theta_j - \alpha) - \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \operatorname{Im} (e^{i\theta_j} \Omega_k(z_{cj})) + \\
&\quad + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^n t_k \operatorname{Re} (e^{i\theta_j} \Omega_k(z_{cj})) .
\end{aligned} \tag{39}$$

В итоге получим СЛАУ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, которую в матричной форме можно представить в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & & \\ & \mathbf{x} & \\ & & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & q_1 & \\ & \vdots & \\ & q_n & \\ \hline & \gamma & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 5) \\ & & \\ \hline & & 6) \end{pmatrix}$$

Введем обозначение $e^{i\theta_j} \Omega_k(z_{cj}) = T_{jk} + i\Lambda_{jk}$, тогда коэффициенты a_{jk} матрицы \mathbf{A} и элементы b_j столбца свободных членов \mathbf{b} после подстановки (38) и (39) в (30) и (31) будут определяться по формулам:

- 1) $a_{jk} = -\frac{1}{2\pi} \Lambda_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n},$
- 2) $a_{j(n+1)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n t_k T_{jk}, \quad j = \overline{1, n},$
- 3) $a_{(n+1)k} = \frac{1}{2\pi} (T_{1k} + T_{nk}), \quad k = \overline{1, n},$
- 4) $a_{(n+1)(n+1)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n t_k (\Lambda_{1k} + \Lambda_{nk}),$
- 5) $b_j = V_\infty \sin(\theta_j - \alpha), \quad j = \overline{1, n},$

$$6) b_{(n+1)} = -V_\infty (\cos(\theta_1 - \alpha) + \cos(\theta_n - \alpha)).$$

После определения всех неизвестных любым численным методом решения СЛАУ (например, методом Гаусса) распределение скорости $V_s(s)$ найдем по формуле (34) с учетом (37). При необходимости коэффициент давления затем вычислим по формуле (2).

3.4 Особенности численной реализации панельно-го метода

Основная трудность численной реализации панельного метода – вычисление особого интеграла (36). Для этого перейдем от интегрирования по дуговой абсциссе к интегрированию по комплексной координате (см. рис. 9):

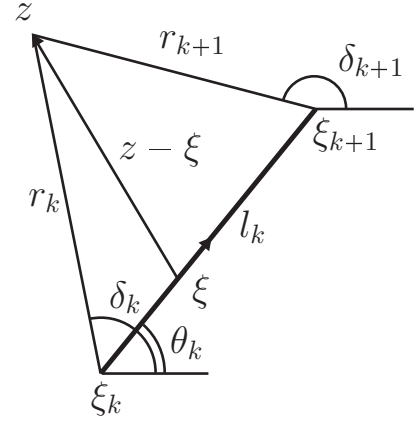


Рис. 9

$$\begin{aligned} \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi} &= [d\xi = e^{i\theta_k} ds \Rightarrow ds = e^{-i\theta_k} d\xi] = \\ &= e^{-i\theta_k} \int_{l_k} \frac{d\xi}{z - \xi} = -e^{-i\theta_k} \ln(\xi - z)|_{l_k} = -e^{-i\theta_k} \ln \frac{\xi_{k+1} - z}{\xi_k - z}. \end{aligned}$$

Сложность использования полученной формулы заключается в многозначности комплексной функции $\ln(z)$. Выделив действительную и мнимую части, запишем

$$\ln \frac{z - \xi_{k+1}}{z - \xi_k} = [z - \xi = r e^{i\delta}] = \ln \frac{r_{k+1} e^{i\delta_{k+1}}}{r_k e^{i\delta_k}} = \ln \frac{r_{k+1}}{r_k} + i \underbrace{(\delta_{k+1} - \delta_k)}_{\Delta\delta}.$$

Реальная часть $\ln \frac{r_{k+1}}{r_k}$ находится однозначно, а сложность содержится в вычислении мнимой части $\Delta\delta$ – приращения аргумента $(z - \xi)$ при пробегании точки интегрирования по l_k .

Рассмотрим три случая: 1) z слева от l_k ; 2) z справа от l_k ; 3) z на одной линии с l_k .

1. Этот случай изображен на рис. 9. Угол δ возрастает, следовательно $\Delta\delta > 0$ или $0 < \Delta\delta < \pi$.

2. Угол δ убывает, то есть $\Delta\delta < 0$ или $-\pi < \Delta\delta < 0$.

3. Здесь необходимо дополнительно рассмотреть три подслучая:

а) $z \notin l_k \Rightarrow \Delta\delta = 0$ (не важно, с какой стороны от панели находится z);

б) $z \in l_k$, тогда $\Delta\delta = \pm\pi$; будем считать, что z подходит к l_k слева (так как область течения всегда слева от L_z), тогда $\Delta\delta > 0 \Rightarrow \Delta\delta = \pi$;

в) $z = \xi_k$ или $z = \xi_{k+1}$ – в этом случае интеграл $\Omega_k(z)$ не существует (то есть $\Omega_k(z) \rightarrow \infty$).

Добавим следующее замечание, касающееся определения

$$\Delta\delta = \delta_{k+1} - \delta_k = \arg(z - \xi_{k+1}) - \arg(z - \xi_k)$$

в случаях 1) и 2). Для вычисления многозначной функции $\arg(z)$ обычно используется функция `atan2` (реализации функции $\arg(z)$ в библиотеках для работы с комплексными числами также построены с использованием этой функции). Контроль правильного выбора ветвей этой функции необходимо производить вручную, то есть:

1. случай z слева от l_k : если получилось $\Delta\delta < 0$, то к найденному значению $\Delta\delta$ необходимо прибавить 2π ;
2. случай z справа от l_k : если получилось $\Delta\delta > 0$, то от найденного значения $\Delta\delta$ необходимо отнять 2π .

Определение, с какой стороны находится точка z относительно панели l_k . Введем обозначения $a = z - \xi_k$, $b = \xi_{k+1} - \xi_k$ (см. рис. 9). Рассмотрим векторное произведение $v = [\vec{a}, \vec{b}]$. Если $v > 0$, то z находится слева от l_k , если $v < 0$ – справа от l_k и, наконец, если $v = 0$ – на одной линии с l_k . Введя обозначения (32), легко проверить, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x = \text{Im}(\bar{a}b). \quad (40)$$

То есть, используя соотношения (33) и (40), можно записать общую формулу, объединяющую скалярное и векторное произведения

$$\bar{a}b = (\vec{a}, \vec{b}) + i[\vec{a}, \vec{b}].$$

При проведении расчетов сначала необходимо провести сравнение значения v с машинным нулем по формуле

$$\frac{|\text{Im}(\bar{a}b)|}{|a||b|} = |\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))| < \varepsilon,$$

где ε – малое положительно число (так как $|a|$ или $|b|$ сам по себе может оказаться малым), а затем выполнить проверку $v > 0$ и $v < 0$.

Теперь разберем, как определить принадлежит ли z панели l_k или нет, если $v = 0$. Введем дополнительное обозначение $c = z - \xi_{k+1}$ и рассмотрим три случая, приведенные на рис. 10.

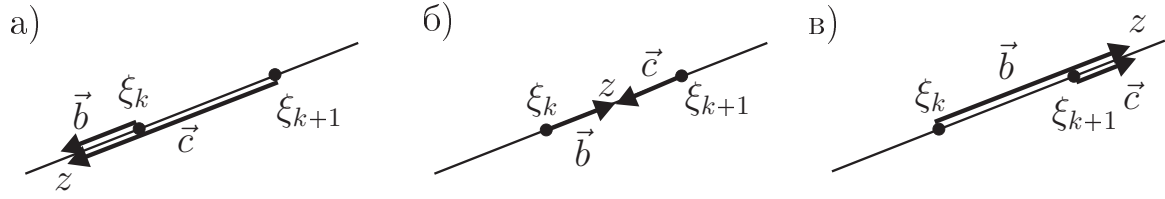
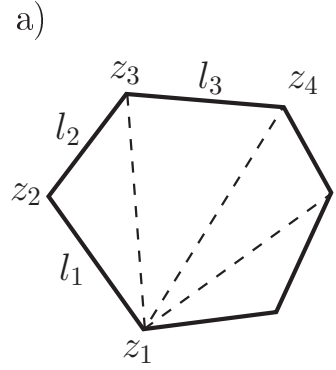


Рис. 10

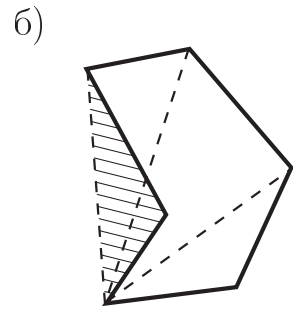
Из рисунка видно, что если $z \notin l_k$, то вектора \vec{b} и \vec{c} сонаправлены, то есть $(\vec{b}, \vec{c}) > 0$. Следовательно, если $z \in l_k$, то $(\vec{b}, \vec{c}) < 0$. Скалярное произведение нужно вычислять по формуле (33).

Нахождение направления обхода контура.

Приведенные выше формулы реализации панельного метода годятся лишь тогда, когда контур L_z обходится так, что область течения остается слева от него (по часовой стрелке). Для проверки правильности обхода воспользуемся методом, основанном на вычислении площади фигуры, ограниченной контуром, с учетом знака. Для выпуклого полигона очевидно, что его площадь есть сумма площадей треугольников (см. рис. 11,а).



Площадь треугольника, образованного векторами $\vec{v}_k = z_k - z_1$ и $\vec{v}_{k+1} = z_{k+1} - z_1$ определим



по формуле $S_k = \frac{1}{2}[\vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}]$, где для вычисления векторного произведения используем формулу (40). Площадь фигуры, ограниченной контуром L_z , тогда

Рис. 11

$$S = \sum_k S_k. \quad (41)$$

В случае обхода контура по часовой стрелке $S < 0$. Если при вычислении получим $S > 0$, то точки контура необходимо перенумеровать.

Указанный выше способ годится и для определения площади невыпуклой фигуры (рис. 11,б). Площадь треугольников, находящейся за пределами контура, ограничивающего фигуру (заштрихованная на рисунке), будет входить в сумму (41) дважды с разными знаками и в итоге сократится.

Определение распределения толщины. Для правильного определения распределения толщины важно, чтобы хорда профиля была параллельна оси x . Если это не так, то необходимо ввести

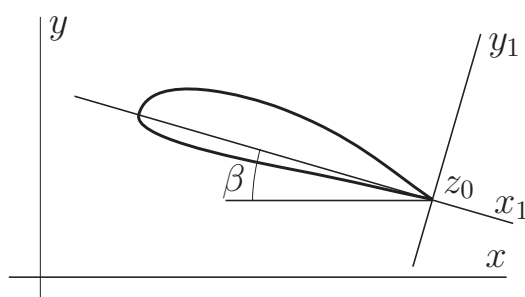


Рис. 12

локальную систему координат $z_1 = x_1 + iy_1 = (z - z_0)e^{i\beta}$ так, чтобы хорда была параллельна оси x_1 (рис. 12), где z_0 – координата задней кромки крылового профиля, β – угол отклонения хорды профиля от оси x . Тогда распределение толщины определим по формуле $t(x_1) = y_{1t}(x_1) - y_{1b}(x_1)$, где $y_{1t}(x_1)$ и $y_{1b}(x_1)$ – координаты верхней и нижней поверхности крылового профиля в новой системе координат соответственно. Так как число точек на верхней и нижней поверхности крылового профиля обычно не совпадает, то для вычисления распределения толщины нужно построить сплайны функций $y_{1t}(x_1)$ и $y_{1b}(x_1)$.

Определение угла $\theta(s)$ наклона касательной к крыловому профилю. При численной реализации панельного метода эта

задача равносильна задаче определения углов θ_k , $k = \overline{1, n}$ наклона касательной к панелям l_k . В результате у найденной в табулярном виде функции $\theta(s)$ возможно наличие скачков, что связано с тем, что функция `atan2`, которую обычно используют для определения углов, возвращает результат в диапазоне $[-\pi; \pi]$, а функция $\theta(s)$ для гладкого профиля должна быть непрерывной. Поэтому необходимо написать процедуру, которая исключает скачки, то есть если в некоторой точке $|\theta_{k+1} - \theta_k| > \pi$, то ко всем θ_j , $j > k$ необходимо прибавить (отнять) 2π . Следует учесть, что в зависимости от формы исходного крылового профиля, точек разрыва у $\theta(s)$ может получиться несколько.

3.5 Обобщение на многоэлементные крыловые профили

В отличие от методов теории ОКЗА, панельный метод очень легко обобщается на случай многоэлементного крылового профиля. Причем число элементов крылового профиля может быть произвольным, в то время как в теории ОКЗА хорошо разработаны лишь методы для двухэлементных крыловых профилей (случай двусвязной области течения) с использованием аппарата эллиптических функций, причем сам метод решения значительно усложняется.

Панельный метод для многоэлементного крылового профиля не усложняется, увеличивается лишь число неизвестных и число уравнений. При этом каждый элемент крылового профиля заменяется

своим набором панелей со своими интенсивностями q_{km} , где m – индекс элемента профиля (аналогично тому, как это делалось для обычного крылового профиля). Также для каждого элемента крылового профиля своя интенсивность γ_m распределенных вихрей. Система уравнений образуется условиями непротекания в контрольных точках каждого элемента крылового профиля и замыкается условиями Жуковского – Кутты для задних кромок каждого элемента.

Особенности численной реализации. Здесь стоит упомянуть лишь о наиболее распространенной ошибке. Обычно координаты концов панелей всех элементов крылового профиля помещают в один массив. Неправильно потом просто использовать этот массив, подставив его в процедуры для одноэлементного профиля, так как конец последней панели первого элемента крылового профиля не совпадает с началом первой панели второго элемента и т.д. Необходимо учитывать разрывы между этими точками.

3.6 Случай экраноплана

Существенное упрощение (сокращение в два раза числа неизвестных) можно получить для частного случая двухэлементного крылового профиля – профиля крыла экраноплана. Экран в этом случае моделируется добавлением симметрично расположенного относительно него фиктивного крылового профиля. Прежде чем записать формулы для случая экраноплана рассмотрим частные случаи для простейших течений вблизи экрана.

Случай источника (стока) над экраном. Рассмотрим течение от точечного источника интенсивности Q , расположенного в точке с координатой z_0 , вблизи экрана. Главное требование при построении комплексного потенциала течения: экран (в данном случае ось x) должен быть линией тока. Для его удовлетворения добавим второй источник той же интенсивности Q симметрично относительно экрана в точку с координатой \bar{z}_0 . Комплексный потенциал течения от двух источников будет

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0).$$

Продифференцировав последнее соотношение, запишем выражение для комплексно сопряженной скорости

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{Q}{2\pi(z - z_0)} + \frac{Q}{2\pi(z - \bar{z}_0)} = \frac{Q}{2\pi} \frac{2z - z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \frac{2z - (z_0 + \bar{z}_0)}{z^2 - z(z_0 + \bar{z}_0) + |z_0|^2}. \end{aligned}$$

Подставив в эту формулу координату $z = x$ точки с экрана, с учетом обозначений $z_0 = x_0 + iy_0$ и $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ найдем, что комплексно сопряженная скорость

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=x} = \frac{Q}{2\pi} \frac{2x - 2x_0}{x^2 - 2xx_0 + |z_0|^2}$$

принимает вещественные значения на экране, то есть $\vec{V} \parallel Ox$, следовательно, экран является линией тока.

В случае вихря над экраном для того, чтобы экран оставался линией тока, также необходимо добавить точечный вихрь расположенный в симметричной относительно экрана точке, но с противоположной циркуляцией. Комплексный потенциал течения и комплексно

сопряженная скорость в этом случае будут

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \bar{z}_0),$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\Gamma}{2\pi i(z - z_0)} - \frac{\Gamma}{2\pi i(z - \bar{z}_0)} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{z^2 - z(z_0 + \bar{z}_0) + |z_0|^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрев последнюю формулу на экране для $z = x$, запишем

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-2y_0}{x^2 - 2xx_0 + |z_0|^2}.$$

Видно, что dw/dz принимает вещественное значение на экране, то есть экран в этом случае также является линией тока.

Обобщение панельного метода на случай экраноплана. Как уже было сказано ранее в случае экраноплана под экраном необходимо добавить фиктивный крыловой про-

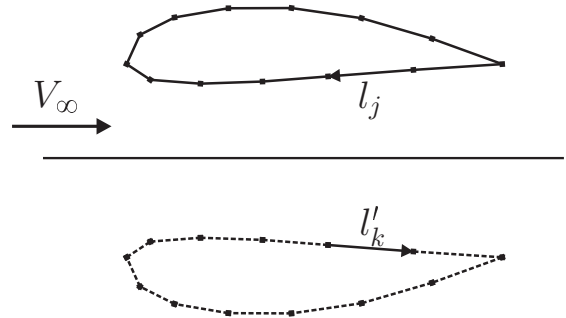


Рис. 13

филь, симметричный заданному относительно экрана (рис. 13). Тогда из рассмотренных выше частных случаев следует, что для того, чтобы экран оставался линией тока, на симметрично расположенных панелях двух профилей нужно распределять источники (стоки) одинаковой интенсивности, а вихри – противоположной. В этом случае комплексно сопряженная скорость при обтекании крылового профи-

ля вблизи экрана запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = V_\infty &+ \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)} + \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{q'_k}{2\pi} \int_{l'_k} \frac{ds}{z - \xi'(s)} + \frac{\gamma'}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t'_k \int_{l'_k} \frac{ds}{z - \xi'(s)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Штрихами помечены параметры, относящиеся к фиктивному профилю. Отметим, что скорость набегающего потока здесь направлена параллельно оси x , а угол атаки необходимо задавать непосредственным поворотом контура крылового профиля относительно его задней кромки.

Из симметрии следует, что панели l'_k будет соответствовать симметричная ей панель l_j , $j = n - k + 1$, так как для работы панельного метода обход обоих контуров необходимо проводить по часовой стрелке (см. рис. 13). Тогда имеем: $q'_k = q_j$, $\gamma' = -\gamma$, $t'_k = t_j$, $\xi'(s)|_{l'_k} = \overline{\xi(s)}|_{l_j}$. Следовательно, для членов, связанных с распределенными источниками (стоками) на фиктивном профиле, справедливо преобразование

$$\frac{q'_k}{2\pi} \int_{l'_k} \frac{ds}{z - \xi'(s)} = \frac{q_j}{2\pi} \int_{l_j} \frac{ds}{z - \overline{\xi(s)}} = \frac{q_j}{2\pi} \int_{l_j} \frac{\overline{ds}}{z - \overline{\xi(s)}} = \frac{q_j}{2\pi} \int_{l_j} \frac{ds}{\overline{z} - \xi(s)}.$$

Аналогично для циркуляционных членов

$$t'_k \int_{l'_k} \frac{ds}{z - \xi'(s)} = t_j \int_{l_j} \frac{\overline{ds}}{\overline{z} - \xi(s)}.$$

С учетом приведенных преобразований, переставив местами сла-

гаемые, перепишем формулу (42) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = V_\infty &+ \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)} + \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \int_{l_j} \overline{\frac{ds}{z - \xi(s)}} + \\ &+ \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \int_{l_k} \frac{ds}{z - \xi(s)} - \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{j=1}^n t_j \int_{l_j} \overline{\frac{ds}{z - \xi(s)}}. \end{aligned}$$

Заменяя индекс суммирования j на k и объединяя попарно суммы в первой и второй строках, с учетом обозначения (36), имеем

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \left[\Omega_k(z) + \overline{\Omega_k(\bar{z})} \right] + \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \left[\Omega_k(z) - \overline{\Omega_k(\bar{z})} \right].$$

Введя обозначения

$$\Omega'_k(z) = \Omega_k(z) + \overline{\Omega_k(\bar{z})}, \quad \Omega''_k(z) = \Omega_k(z) - \overline{\Omega_k(\bar{z})},$$

окончательно запишем

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{2\pi} \Omega'_k(z) + \frac{\gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^n t_k \Omega''_k(z). \quad (43)$$

Полученная формула для комплексно сопряженной скорости в случае экраноплана аналогична по записи формуле (37) в случае профиля в неограниченном потоке. То есть в случае профиля крыла вблизи экрана число неизвестных осталось неизменным, но несколько усложнились формулы для проведения вычислений.

3.7 Обобщение на проницаемые крыловые профили

Пусть $L_z = L_1 \cup L_2$, где L_1 – непроницаемый участок поверхности крылового профиля, L_2 – проницаемый участок, через который осуществляется отбор или выдув потока (выдуваемая жидкость имеет

те же параметры, что и внешний поток, то есть выдуваемая струя не реактивная). Рассмотрим два случая.

Первый случай, когда задано распределение $V_n = u(s)$ на L_2 , причем $u(s) > 0$ соответствует выдуву,

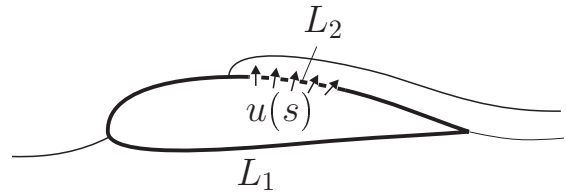


Рис. 14

$u(s) < 0$ – отбору (рис. 14). Обобщение панельного метода проводится элементарно. На панелях $l_k \in L_2$ условия непротекания (30) заменяются на условия $V_n(s_{sk}) = u(s_{ck}) \neq 0$. В этом случае матрица системы уравнений не меняется, меняется лишь столбец свободных членов. Заметим, что в итоге получается $V_s(s) \neq 0$ на L_2 , то есть осуществляется выдув (отбор) не по нормали. Также отметим, что на профиле появляется дополнительная критическая точка.

Второй случай, когда $V_n(s)$ на проницаемом участке не задана, а определяется из дополнительных условий. Это случай расчета обтекания крыловых профилей с каналами отбора и выдува (рис. 15). Для однозначности изложения рассмотрим случай выдува струи. За участок L_2 обычно принимают некоторую линию поперек канала выдува, перпендикулярную стенкам. Будем полагать, что осуществляется нормальный выдув: $V_s(s_{ck}) = 0$ на $l_k \in L_2$. Это условие используем на панелях $l_k \in L_2$ вместо условий непротекания (30).

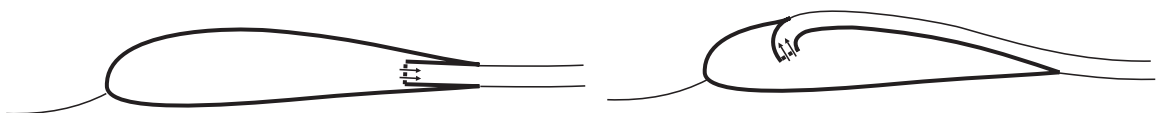


Рис. 15

Дополнительная сложность – наличие у таких профилей второй острой кромки. Если задавать распределение скорости выдува, то есть фактически задавать расход, то дополнительная точка схода потока может не совпасть со второй острой кромкой. Необходимо добавить дополнительное уравнение для удовлетворения условия Жуковского – Кутты на второй острой кромке. В итоге получим переопределенную СЛАУ (уравнений на одно больше, чем неизвестных). Существуют различные способы решения переопределенных и недоопределенных СЛАУ, которые чаще всего основаны на методе наименьших квадратов. Их описание можно найти в литературе или использовать готовые процедуры из математических библиотек программ.

После решения на участке L_1 определим распределение скорости $V_s(s)$ на поверхности крылового профиля, на L_2 – скорость выдува $V_n(s)$. Для частного случая прямолинейного канала профиль скорости выдува получается $V_n(s) \equiv Q/h - \text{const}$, где Q – расход выдуваемой струи, а h – ширина канала (рис. 16, а). Для частного случая кольцевого канала $V_n(r) = \frac{Q}{r \ln(r_1/r_2)}$, где r – радиус текущей точки на L_2 , r_1 и r_2 – радиусы закруглений стенок канала (рис. 16, б).

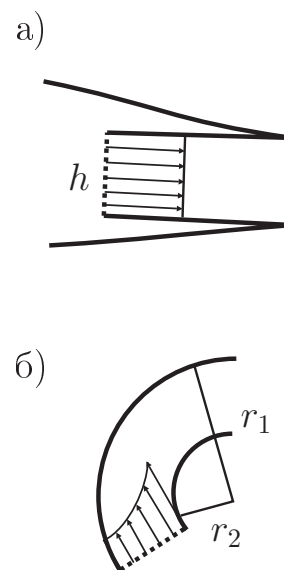


Рис. 16

Расчет аэродинамических характеристик. Полный вывод формул для аэродинамических сил, действующих на пронизаемый

профиль, дан в параграфе 4.1 приложения. Отметим, что в панельном методе (в том числе и для случая непроницаемого крылового профиля) для использования аналитических формул (44) циркуляцию и расход можно определить по следующим формулам

$$\Gamma = \int_{L_z} \gamma(s) ds = \gamma \sum_{k=1}^n t_k d_k, \quad Q = \int_{L_z} q(s) ds = \sum_{k=1}^n q_k d_k,$$

где d_k – длины панелей l_k . При вычисления R_{xa} и R_{ya} по численным формулам (47) с учетом (45) необходимо построить сплайны от подынтегральных функций и воспользоваться функциями вычисления интеграла от сплайна.

4 Приложение

В приложении рассмотрим несколько общих вопросов, касающихся как прямых, так и обратных краевых задач. Это вывод формул расчета интегральных аэродинамических характеристик для проницаемых крыловых профилей и построение картины обтекания крылового профиля.

4.1 Расчет аэродинамических характеристик проницаемого крылового профиля

Пусть крыловой профиль L_z , контур которого состоит из непроницаемого участка L_1 и проницаемого участка L_2 , обтекается безотрывно потоком ИНЖ и известны распределения касательной $V_s(s)$ и нормальной $V_n(s)$ составляющих скорости. Тогда подъемную силу и силу сопротивления (тяги) можно вычислить по аналитическим формулам

$$R_{ya} = \rho V_\infty \Gamma, \quad R_{xa} = \rho V_\infty Q, \quad (44)$$

где

$$\Gamma = \int_{L_z} V_s(s) ds, \quad Q = \int_{L_2} V_n(s) ds$$

– циркуляция скорости и расход жидкости через проницаемый участок соответственно. Из второй формулы (44) видно, что в случае

выдува ($Q > 0$) сила $R_{xa} > 0$ является силой тяги, в случае отбора ($Q < 0$) сила $R_{xa} < 0$ является силой сопротивления.

С другой стороны, формулы для аэродинамических сил можно найти путем непосредственного интегрирования по поверхности крылового профиля. Предварительно найдем распределение давления, выразив его из интеграла Бернулли (1)

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}(V_\infty^2 - V^2),$$

причем можно положить $p_\infty = 0$, так как давление всегда определяется с точностью до константы. Так же учтем, что $V^2 = V_s^2 + V_n^2$.

Рассмотрим элементарный участок поверхности профиля длины ds с нормалью \vec{n} (рис. 17). Сила, действующая на этот участок, складывается из двух слагаемых

$$d\vec{R} = d\vec{R}_1 + d\vec{R}_2,$$

где

$$d\vec{R}_1 = -p\vec{n}ds$$

– сила давления, а

$$d\vec{R}_2 = -\rho(\vec{V}, \vec{n})\vec{V}ds$$

– реактивная сила (импульс со знаком “–” объема истекающей жидкости за единицу времени). Тогда

$$\vec{R} = - \int_{L_z} [p\vec{n} + \rho(\vec{V}, \vec{n})\vec{V}] ds$$

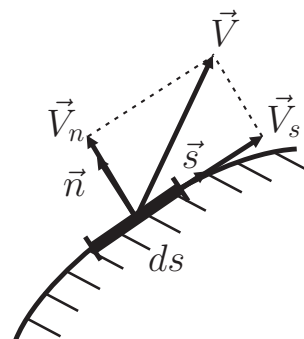


Рис. 17

– сила, действующая на крыловой профиль. Будем вычислять ее как интеграл от комплексной функции с учетом следующих замен:

$$\vec{s} = e^{i\theta}, \quad \vec{n} = ie^{i\theta}, \quad \vec{V} = V_s \vec{s} + V_n \vec{n} = (V_s + iV_n)e^{i\theta},$$

где θ – угол наклона касательной к контуру крылового профиля.

Тогда

$$R = - \int_{L_z} [ip + \rho V_n (V_s + iV_n)] e^{i\theta} ds.$$

Выделяя действительную и мнимую части, запишем

$$R_x = \operatorname{Re} R = - \int_{L_z} [\rho V_n V_s \cos \theta - (p + \rho V_n^2) \sin \theta] ds,$$

$$R_y = \operatorname{Im} R = - \int_{L_z} [\rho V_n V_s \sin \theta + (p + \rho V_n^2) \cos \theta] ds$$

или

$$\begin{aligned} R_x &= \int_{L_z} p \sin \theta ds - \int_{L_z} \rho V_n [V_s \cos \theta - V_n \sin \theta] ds = R_{x1} + R_{x2}, \\ R_y &= - \int_{L_z} p \cos \theta ds - \int_{L_z} \rho V_n [V_s \sin \theta + V_n \cos \theta] ds = R_{y1} + R_{y2}. \end{aligned} \tag{45}$$

В случае непроницаемого крылового профиля, когда $V_n = 0$, имеем

$R_{x2} = R_{y2} = 0$ и эти формулы переходят в известные

$$\begin{aligned} R_x &= \int_{L_z} p \sin \theta ds = \int_{L_z} p dy, \\ R_y &= - \int_{L_z} p \cos \theta ds = - \int_{L_z} p dx. \end{aligned} \tag{46}$$

Силы R_x и R_y – это проекции результирующей силы на оси координат x и y . Для определения аэродинамических сил найдем проекции результирующей силы на оси x_a и y_a системы координат, связанной с направлением набегающего потока (рис. 18):

$$\begin{aligned} R_{xa} &= R_x \cos \alpha + R_y \sin \alpha, \\ R_{ya} &= -R_x \sin \alpha + R_y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (47)$$

Аэродинамические силы, вычисленные по аналитическим формулам (44) и по численным формулам (47) с учетом (45) должны совпадать. Этот факт можно использовать для оценки достоверности полученных числовых результатов. Аэродинамические коэффициенты получим обезразмериванием аэродинамических сил

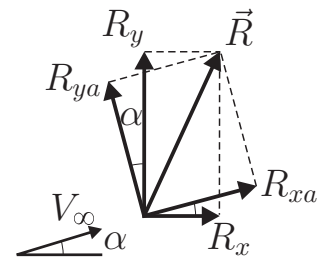


Рис. 18

$$C_{ya} = \frac{2R_{ya}}{\rho V_{\infty}^2 b}, \quad C_{xa} = \frac{2R_{xa}}{\rho V_{\infty}^2 b},$$

где b – характерный линейный размер крылового профиля (чаще всего его хорда).

4.2 Построение картины обтекания

Под построением картины обтекания будем подразумевать построение набора линий тока. Для этого проинтегрируем дифференциальное уравнение линий тока, которое имеет вид

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = e^{i\delta(\sigma)}, \quad (48)$$

где $\xi(\sigma)$ – координата текущей точки на линии тока с дуговой абсциссой σ , а

$$\delta(\sigma) = -\arg \frac{dw}{dz}$$

– угол наклона касательной к линии тока, совпадающий с направлением скорости потока в этой точке. Для вычисления комплексно сопряженной скорости при решении ОКЗА используем формулу (10) с учетом (12), а в случае решения ПКЗА – формулы (37) или (43).

Для численного интегрирования уравнения (48) можно воспользоваться простейшим методом Эйлера I-го порядка, суть которого состоит в том, что линия тока строится как набор отрезков малой длины $\Delta\sigma$ и каждый следующий шаг делается в направлении вектора скорости в текущей точке интегрирования:

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \Delta\sigma e^{i\delta_k}, \quad \delta_k = -\arg \frac{dw}{dz}(\xi_k). \quad (49)$$

Однако этот метод обладает значительной погрешностью и при проведении расчетов для получения точных результатов необходимо брать очень малый шаг интегрирования $\Delta\sigma$.

Поэтому целесообразнее использовать методы более высокого порядка точности. Одним из простых таких методов является модифицированный метод Эйлера II-го порядка, формулы для которого имеют вид

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \Delta\sigma e^{i\delta_{k+\frac{1}{2}}}, \quad \delta_{k+\frac{1}{2}} = -\arg \frac{dw}{dz}(\xi_{k+\frac{1}{2}}),$$

где для вычисления $\xi_{k+\frac{1}{2}}$ используется формула из метода Эйлера

первого порядка

$$\xi_{k+\frac{1}{2}} = \xi_k + \frac{\Delta\sigma}{2} e^{i\delta_k},$$

а δ_k определяется по второй формуле (49). Для построения набора линий тока необходимо провести интегрирование уравнения (48), используя в качестве начального условия набор различных начальных точек, которые обычно располагают вдоль некоторой линии, проведенной поперек потока на некотором расстоянии перед профилем.

Литература

1. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 436 с.
2. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т.2: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 552 с.