ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности

______________________ Д.К Нургалиев

«____»_________________ 201 г.

Программа кандидатского экзамена по специальности

Отрасль науки Физико-математические науки

Группа специальностей 01.01.00- Математика, специальности:

01.01.04 –Геометрия и топология

Казань

2012

I. Вопросы программы кандидатского экзамена по специальности

01.01.04 – Геометрия и топология

1. Общая топология

Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории [7, 12, 24]. Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (отрыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и C^k-топология в пространстве гладких отображений) [7, 12, 24, 26]. Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций [7, 12, 24].

Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха – Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве [7, 12, 24, 26]. Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами [7]. Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности [7]. Хаусдорфова размерность, ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность [31].

2. Алгебраическая топология

Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для k меньших или равных n [1, 3, 4]. Пространства Эйленберга – Маклейна. H-пространства и группа гомотопических классов отображений в H-пространство. Коммутативность фундаментальной группы H-пространства [1, 3, 4]. Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Двойственность Пуанкаре для многообразий [1, 3, 4, 19]. Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга – Маклейна [1, 3, 4]. Кольцо когомологий H-пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел [1, 3, 4].

Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана [8, 3]. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей [1, 3, 4]. Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения) [3]. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара – Лефшеца [6]. Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях [1, 3, 4, 8].

Характеристические классы векторных расслоений [8]. Понятие о группе K(X) и периодичности Ботта. Группа K(X) как когомологический функтор [3, 4, 28].

3. Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина – Тома. Понятие бордизма многообразий [1, 13]. Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса – Бонне. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа [1, 3, 21]. Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера-Пуанкаре [1]. Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления. [3, 4]. Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции [6].

4. Топология малых размерностей

Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий [3, 9, 21].

5. Дифференциальная геометрия

Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы [1, 11, 21, 22].

Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия [1, 11, 21].

Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли [1, 2, 21].

Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы.

Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства). Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре [1, 15, 21].

Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами [1, 2, 21].

Параллельный перенос и геодезические. Формула Эйлера – Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической [1, 21].

Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки [1, 2, 13].

Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя – Вейля характеристических классов. Характеристические числа [8, 15].

Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма [1, 2, 8].

Проективная двойственность и преобразования Лежандра [5, 11].

6. Геометрические структуры на гладких многообразиях

Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур [15].

Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем [5, 1]. Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса [4, 5].

7. Геометрия групп Ли и однородных пространств

Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и неодносвязные группы Ли. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы U(n)/O(n) и U(n)/SO(n). Компактные группы Ли и биинвариантная метрика [14, 1, 22, 25]. Кольцо когомологий компактной группы Ли [1]. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли [27].

8. Дискретная и комбинаторная геометрия

Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне [16]. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости [10].

Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней [11, 30, 29].

2. ***Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена по специальности***

01.01.04 – Геометрия и топология

Основная литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Части 1 (Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей), 2 (Геометрия и топология многообразий) и 3 (Методы теории гомологий). – М.: Наука, 1986, 1984 (Части 1 и 2 переизданы в М.: Эдиториал УРСС, 1998.)

2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. – М.: МЦНМО, 2003.

3. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989.

4. Новиков С.П. Топология. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.

6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1982, 1984.

7. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973.

8. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. – М.: Мир, 1979.

9. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. – М.: Изд-во МЦНМО, 1997.

10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

11. Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.

Дополнительная литература

1. Келли Дж. Общая топология. – М.: Наука, 1981.

2. Милнор Дж. Теория Морса. – М.: Мир, 1965.

3. Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. – М.: Наука, 1988.

4. Чжень Ш.-Ш. Комплексные многообразия. – М.: Иностранная Литература, 1961.

5. Роджерс К. Укладки и покрытия. – М.: Мир, 1968.

6. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. – М.: Наука, 1980.

7. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972.

8. Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. – М.: Мир, 1969.

9. Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979.

10. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000.

11. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

12. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1,2. – М.: Наука, 1981.

13. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. – М.: Изд-во МГУ, 1988.

14. Голод П.И., Климык А.У. Математические основы теории симметрий. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

15.Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии, Геометрические главы. – М.: Наука, 1977.

16. Пресли А., Сигал Г. Группы петель. – М.: Мир, 1990.

17. Атья М. Лекции по K-теории. – М.: Мир, 1967.

18. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. – М., Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1950.

19. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. – М., Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956.

20. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ от 21 декабря 2011 г., протокол № 5.

С О Г Л А С О В А Н О

Директор Институтаматематики
и механики им. Н.И. Лобачевского ____________ В.А. Чугунов
(подпись)

Зав. отд. аспирантуры и докторантуры ______________ Е.М. Нуриева
(подпись)