

ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности

Д.К. Нургалиев

« _____ » _____ 201 г.

Программа кандидатского экзамена по специальности

Отрасль науки Физико-математические науки
Группа специальностей 01.01.00- Математика, специальности:
01.01.03- Математическая физика

Казань
2012

1. Вопросы программы кандидатского экзамена по специальности

01.01.03

(шифр)

«Математическая физика»

(наименование)

1. Математические разделы

1.1. Математический и функциональный анализ

Мера и измеримые функции. Интеграл Лебега и его сравнение с интегралом Римана. Теорема Егорова. Теорема Фубини. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла.

Пространства L_p . Разложения по ортогональным системам функций в L_2 . Ряды и преобразования Фурье. Теорема Планшереля.

Метрические и топологические пространства. Компактность. Непрерывные функции на компакте. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Связность.

Линейные топологические и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы.

Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера о представлении линейных функционалов.

Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Ограниченные операторы. Понятие о спектре оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Спектральное представление линейного оператора.

Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический вид матрицы симметрического, унитарного и кососимметрического оператора.

Обобщенные функции и операции над ними. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Соболевские пространства H_s . Теорема вложения Соболева.

1.2. Комплексный анализ

Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Лемма Шварца и принцип максимума модуля.

Разложение голоморфных функций в ряды Тейлора и Лорана. Характеристика изолированных особых точек в терминах ряда Лорана.

Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Принцип аргумента и теорема Руше.

Теорема Коши о вычетах. Целые функции. Теорема Лиувилля.

Принцип сохранения области и теорема Гурвица. Принцип соответствия границ. Теорема Римана.

Аналитическое продолжение. Теорема о монодромии. Точки ветвления аналитических функций. Римановы поверхности.

Принцип симметрии. Теорема Пикара.

1.3. Дифференциальные уравнения

Линейные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальные системы решений. Метод вариации постоянных.

Дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Квазиполиномы. Общие и частные решения. Функция Грина.

Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Асимптотическая устойчивость.

Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера—Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона.

Принцип максимума Понтрягина.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Теорема Гильберта—Шмидта.

Характеристики уравнений в частных производных. Задача Коши и теорема Коши—Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных. Метод разделения переменных.

Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения. Гармонические функции. Принцип максимума. Фундаментальное решение. Задачи на собственные значения и разложения по собственным функциям.

Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Принцип максимума и теорема единственности.

Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши.

1.4. Алгебра и топология

Группы, алгебры и кольца. Свободные группы и соотношения.

Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.

Поля и их алгебраические расширения. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.

Группы и алгебры Ли. Основные типы алгебр Ли.

Линейные представления групп и их характеры. Лемма Шура. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса.

Фундаментальная группа. Односвязность. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие.

Гомологии и когомологии симплициальных комплексов. Их гомотопическая инвариантность. Группы гомологий и фундаментальная группа компактных двумерных поверхностей, их классификация.

Локально тривиальные и векторные расслоения. Пространства путей и петель. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную.

Степень отображения и индекс особой точки векторного поля. Индекс пересечения и коэффициент зацепления. Эйлера характеристика.

1.5. Геометрия

Гладкие многообразия и их отображения. Дифференциал гладкого отображения и его якобиан. Теорема Сарда. Касательные векторы и касательное расслоение.

Примеры гладких многообразий: проективные пространства, матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля.

Тензоры и тензорные поля. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование. Когомологии де Рама. Тензоры и дифференциальные формы на комплексных многообразиях.

Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса. Ее связь с формулами Грина и Гаусса—Остроградского. Двойственность Пуанкаре.

Римановы многообразия и метрики. Геодезические. Связности, их тензоры кривизны и кручения. Параллельный перенос.

Гладкие кривые, их кривизна и кручение. Формулы Френе.

Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Теорема Менье и формула Эйлера. Главные направления и кривизны. Формула Гаусса—Бонне.

2. Физические разделы

2.1. Механика

Уравнения движения. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Теорема Нетер и законы сохранения.

Одномерное движение. Движение в центральном поле.

Свободные и вынужденные колебания. Колебания при наличии трения.

Движение твердого тела. Угловая скорость, моменты инерции и количества движения. Уравнения Эйлера.

Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона—Якоби.

2.2. Теория поля

Принцип относительности. Преобразования Лоренца. Интервал.

Релятивистская механика. Принцип наименьшего действия. Энергия и импульс.

Заряд в электромагнитном поле. Четырехмерный потенциал. Калибровочные преобразования. Уравнения движения заряда. Тензор электромагнитного поля.

Уравнения электромагнитного поля. Действие электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса.

Постоянное электромагнитное поле. Закон Кулона. Электростатическая энергия заряда. Диполь. Магнитный момент. Теорема Лармора. Система зарядов в электромагнитном поле.

Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Плоские и монохроматические волны. Спектральное разложение.

Распространение электромагнитных волн. Отражение и преломление. Принцип взаимности.

Поле движущегося заряда. Запаздывающие потенциалы и потенциалы Лиенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн.

Поле системы зарядов на далеких расстояниях.

Вариационные принципы релятивистской теории гравитации. Уравнения Эйнштейна и законы сохранения. Связь законов сохранения с симметриями пространства-времени. Скалярные и векторные поля в релятивистской теории гравитации.

2.3. Механика и электродинамика сплошных сред

Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения непрерывности, уравнение Эйлера).

Уравнения движения вязкой жидкости. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье—Стокса.

Звук и звуковые волны.

Электростатика проводников.

Электростатика диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость.

Постоянный ток. Плотность тока и проводимость.

Постоянное магнитное поле. Магнитное поле постоянного тока.

2.4. Релятивистская астрофизика и космология

Основные принципы теории эволюции звезд. Основные этапы эволюции звезд. Красные гиганты, нейтронные звезды, черные дыры. Движение тел в релятивистских полях тяготения.

Основные принципы современной космологии. Космологические модели Фридмана и их основные законы. Горячая и холодная модели вселенной.

Теория реликтовых частиц в горячей модели вселенной. Энтропия в горячей модели. Законы сохранения в горячей модели.

Основные представления о систематике элементарных частиц. Релятивистские кинетические уравнения и макроскопические характеристики космологической плазмы.

Теория крупномасштабной структуры вселенной.

2.5. Квантовая механика.

Основные положения квантовой механики. Принцип неопределенности и принцип суперпозиции. Квантово-механическое описание системы.

Квантование. Представление Фока. Координатное и импульсное представления.

Операторы энергии и импульса. Гамильтониан. Уравнение Гейзенберга. Соотношение неопределенности.

Уравнение Шредингера. Одномерное движение и одномерный осциллятор. Потенциальная яма. Прохождение через барьер.

Движение в центральном поле. Атом водорода. Разложение плоской волны.

Уравнение Дирака. Спин

Тожественность частиц и принцип неразличимости. Связь спина со статистикой. Бозоны и фермионы.

Атом. Состояния электронов и уровни энергии. Тонкая структура атомных уровней. Периодическая система Менделеева.

Квазиклассическое приближение. Модель Томаса—Ферми.

Движение в магнитном поле. Уравнение Шредингера в электрическом и магнитном полях. Плотность потока.

Квантовая теория рассеяния. Матрица рассеяния. Формула Бора. Резонансное рассеяние. Упругое рассеяние. Формула Брейта-Вигнера.

2.6. Статистическая физика

Основные принципы статистики. Статистическое распределение и статистическая независимость. Теория Лиувилля. Энтропия. Закон возрастания энтропии.

Термодинамические величины: температура, давление. Адиабатический процесс. Работа и количество теплоты, термодинамический потенциал. Принцип ле Шателье, теорема Нернста.

Распределение Гиббса. Свободная энергия. Термодинамические соотношения.

Термодинамика идеальных газов. Распределение Больцмана. Неравновесный идеальный газ. Свободная энергия и уравнение состояния. Закон равнораспределения. Одноатомный идеальный газ.

Распределения Бозе и Ферми.

Равновесие фаз. Формула Клапейрона—Клаузиуса. Критическая точка.

Флуктуации. Распределение Гиббса. Формула Пуассона.

Фазовые переходы второго рода.

2.7. Математическое моделирование в системах компьютерной математики

Решение и исследование нелинейных динамических систем в пакетах компьютерной математики.

Принципы построения математических моделей в системах компьютерной математики.

Создание математических моделей фундаментальных физических явлений и процессов для компьютерного моделирования.

2. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена по специальности

051318 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
(шифр) (наименование)

Основная литература

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1977.

Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.

Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.

Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.

Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.

Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1980.

Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.

Дополнительная литература

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. М.: Наука, 1973—1986.

Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

Уиттекер Э. Аналитическая динамика. М.: УРСС, 1999.

Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.

Березин Ф.А., Шубин М.А. Лекции по квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1972.

Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.

Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М.: Наука, 1988.

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 2001.

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. М.: Наука, 1998.

Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.

Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.: Солон-Пресс, 2006.

Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Перербург, 2001.

Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004.

Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 2003.

Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Строение и эволюция вселенной. М.: Наука, 20023.

Ю.Г. Игнатьев. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. – Казань: Изд-во «Фолиантъ». – 2010. – 508 с.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики
и механики им. Н.И. Лобачевского

..... КФУ от г., протокол №

СОГЛАСОВАНО

Директор института/декан факультета

(подпись)

Чугунов В.А.
(Ф.И.О.)

Зав. кафедрой высшей математики
и математического моделирования

(подпись)

Игнатъев Ю.Г.
(Ф.И.О.)

Зав.отд.аспирантуры и докторантуры

(подпись)

Е.М.Нуриева