КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

В. А. Попов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 1. Элементарная теория вероятностей

Учебное пособие

Казань 2013

УДК 519.21
ББК 22.171я73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

методической комиссии Института физики
протокол № 4 от 17 июня 2013 г.

заседания кафедры теории относительности и гравитации
протокол № 6 от 14 июня 2013 г.

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор КФУ С. В. Сушков
канд. физ.-мат. наук, доцент КНИТУ-КАИ М. Х. Бренерман

Попов В. А.
Теория вероятностей. Часть 1. Элементарная теория вероятностей: Учебное пособие / В. А. Попов — Казань: Казанский университет, 2013. — 48 с. — Табл. 3. Ил. 8. Библиогр. 11 назв.

В учебном пособии представлены базовые понятия теории вероятностей и даны простейшие вероятностные модели, приведены примеры решения задач. Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям „Физика“, „Радиофизика“, „Астрономия“, „Геодезия и дистанционное зондирование“, „Информационная безопасность“, „Нанотехнологии и микросистемная техника“, „Техническая физика“.

Предисловие

Изучение курса теории вероятностей является важной составляющей подготовки специалистов, которым предстоит работать в различных научных и технических отраслях. Это связано, в первую очередь, с тем, что многие объекты, с которыми предстоит работать будущему специалисту, имеют статистическое поведение. Это — разнообразные многочастичные системы, турбулентные течения, популяции, транспортные потоки и т. д.

Во-вторых, многочисленные технологии и алгоритмы используют методы теории вероятностей. Это прежде всего, обработка результатов измерений и наблюдений. Их повсеместное использование в современном мире не нуждается в комментариях. В инженерном деле и производственных процессах применяются теория надежности и статистические методы контроля, улучшающие эффективность производства и качество продукции.

В-третьих, научные работники и инженеры строят свою работу на базе некоторых моделей. От умения выбрать «хорошую» модель зависят результаты их работы. С этой точки зрения, курс теории вероятностей как нельзя лучше подходит для того, чтобы научиться осознанно отбраковывать «плохие» модели и оставлять «хорошие».

Учебное пособие включает в себя изложение основ теории вероятностей, которые составляют первую часть курса «Теория вероятностей и математическая статистика», читаемого в Институте физики Казанского университета.

Для чтения этой части студенту будет достаточно знаний, полученных в школе (исключение составляют, пожалуй, разделы 4.2 и 4.3, изучение которых, требуют успешного освоения базовых математических курсов — математического анализа и линейной алгебры, а именно основных понятий из следующих разделов: пределы, ряды, матрицы и определители), что дает возможность сосредоточиться на восприятии базовых понятий и приемов. Этой же цели служит большое количество примеров, которые помогут студенту использовать теоретические знания для решения практических задач. В приложении приведены сведения из других разделов математики, связанных с теорией вероятностей. Понятия и термины, которые нужно знать, выделены *курсивом*. В конце книги приведен список использованной литературы. Его же можно рекомендовать для более подробного знакомства с предметом.

Для облегчения поиска по ссылкам используется двойная нумерация теорем, примеров и формул. Например, ссылка (2.5) означает, что имеется ввиду формула 5 из § 2, а ссылка (П.1) относится к формуле 1 из приложения. Значок ■ означает конец доказательства теоремы, а значок □ — завершение примера.

§ 1 Вероятностное пространство

1.1 События

Будем рассматривать некий объект, который характеризуется набором своих состояний. Над объектом производится эксперимент (опыт, испытание, измерение), в результате которого объект оказывается в одном из своих состояний. Рассматриваются только такие эксперименты, которые могут быть воспроизведены неограниченное количество раз, в одних и тех же условиях, и результат любого эксперимента невозможно однозначно предсказать.

Событием A (случайным событием, исходом) будем называть состояние объекта, полученное в результате однократного проведения эксперимента. *Элементарным событием* ω будем называть простейший, неделимый в рамках данного опыта, исход. Появление одного элементарного события исключает наступление любого другого. Все возможные элементарные события образуют *множество элементарных событий* Ω. Любое событие A рассматривается как некоторое подмножество из Ω: $A \subseteq \Omega$.

Если множество Ω конечно, то событием является любое его подмножество. Для произвольного множества Ω событием будем называть только подмножества из некоторого класса $\mathfrak{A}$ подмножеств Ω, речь о котором пойдет в разделе 1.2.

Достоверным называется событие Ω, которое в результате опыта непременно должно произойти. *Невозможным* называется событие (обозначается $\varnothing$), которое в результате опыта не может произойти.

Два события A и B называются *совместными*, если они могут появиться в результате одного эксперимента. Другими словами, совместные события — это подмножества Ω с непустым пересечением. Два события A и B называются *несовместными*, если наступление одного исключает наступление другого.

События называются *равновозможными*, если по условиям эксперимента нет оснований считать какое-либо более возможным, чем другое.

Над событиями вводятся следующие операции, совпадающие с операциями над множествами (рис. 1).

Суммой (объединением) событий A и B (обозначается $A + B$ или $A \bigcup B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в A или B.

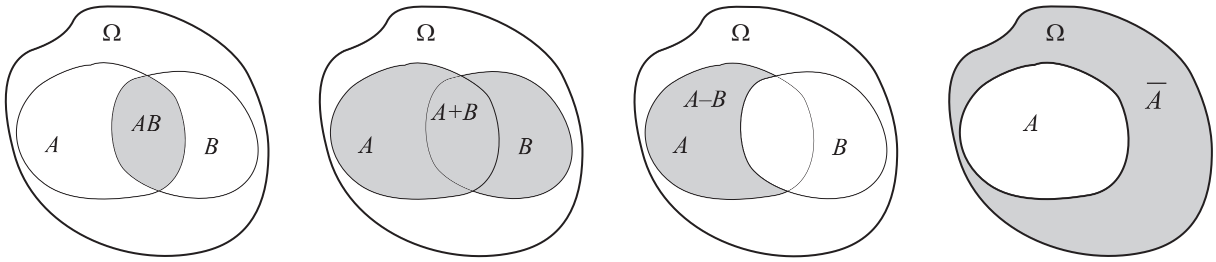

Рис. 1.

Другими словами, должно иметь место хотя бы одно из событий A или B.

Произведением (пересечением) событий A и B (обозначается AB или $A\bigcap B$) называется событие, состоящее из исходов, одновременно входящих в A и B. Другими словами, события A и B появляются совместно. Для несовместных событий A и B верно $AB=\varnothing$.

Разностью событий A и B (обозначается $A-B$ или $A\backslash B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в A, но не входящих в B.

Противоположным событием (дополнением) к событию A (обозначается $\overline{A}$) называется событие, наступающее всякий раз, когда не происходит событие A. Очевидно, что $\overline{A}=\Omega-A$, и события $\overline{A}$ и A несовместны.

События B_i образуют *полную группу несовместных событий* (или, короче, полную группу), если

1. $B_iB_j=\varnothing$ для любых $i\neq j$;
2. $\bigcup\limits_i B_i=\Omega$, где сумма берется по всем значениям i.

Проиллюстрируем базовые понятия на следующем примере.

Пример 1.1. Пусть объект — игральная кость, а опыт — бросание кости. Тогда в качестве элементарных событий ω_k можно рассматривать выпадение чисел k, где $k=1,2,\ldots 6$. Они образуют множество элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_6\}$. Событие образует, например, выпадение четного числа очков, достоверное событие — выпадение любого числа очков, невозможное событие — выпадение «0». Событие $A=\{$выпало четное число очков$\}$ и $B=\{$выпало нечетное число очков$\}$ являются несовместными и равновозможными. Кроме того, они образуют полную группу несовместных событий. Пусть $C=\{$выпало число очков, кратное трем$\}$. Тогда $A+C=\{2,3,4,6\}$, $AC=\{6\}$, $A-C=\{2,4\}$, $\overline{C}=\{1,2,4,5\}$. □

1.2 Алгебра событий

Алгеброй событий $\mathfrak{A}$ называется совокупность событий $A \subset \Omega$, таких, что

1. $\varnothing$ и $\Omega \in \mathfrak{A}$,
2. для любых событий $A, B \in \mathfrak{A}$, операции суммы, разности и произведения снова дают событие из $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ — система всех подмножеств Ω, то $\mathfrak{A}$ является алгеброй. Пусть Ω — конечное множество элементарных событий, содержащее N элементов. Тогда система всех подмножеств также будет конечным множеством, состоящим из 2^N событий. Действительно, между подмножествами Ω и последовательностями 0 и 1 длины N можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу: на i-й позиции последовательности ставится 1, если элементарное событие ω_i принадлежит подмножеству и 0, если не принадлежит. Число различных последовательностей 0 и 1 длины N равно 2^N. Например, для множества Ω из примера 1.1 алгебра событий будет состоять из 2^6 подмножеств, при этом событию D={выпало «3»} будет соответствовать последовательность 001000, а событию A — 010101.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *σ-алгеброй*, если она замкнута относительно счетных сумм и произведений. Переход от алгебры событий к σ-алгебре событий необходим, поскольку множество событий может быть бесконечным. Любая σ-алгебра событий обязательно является алгеброй событий. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В большинстве задач, с которыми мы будем сталкиваться в дальнейшем, можно будет ограничиться только алгеброй событий.

1.3 Вероятность

Числовая функция P, определенная на σ-алгебре событий $\mathfrak{A}$, называется *вероятностью*, если выполнены следующие условия (аксиомы вероятности):

1. (Аксиома неотрицательности) $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ для любого события $A \in \mathfrak{A}$.
2. (Аксиома нормированности) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. (1.1)
3. (Аксиома сложения) Для любых несовместных событий A и B из $\mathfrak{A}$ имеет место
$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B). \tag{1.2}$$

4. (Аксиома непрерывности) Для любой убывающей последовательности

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

событий из $\mathfrak{A}$ такой, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.

Из аксиом 1–4 вытекает ряд полезных свойств вероятности, использование которых упрощает решение многих задач.

Равенство $A + \overline{A} = \Omega$ и аксиомы (1.1), (1.2) дают

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A). \tag{1.3}$$

Полагая в формуле (1.3) $A = \Omega$, получим $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Для произвольных событий A и B имеет место формула

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB). \tag{1.4}$$

Действительно, событие $A + B$ можно представить как сумму несовместных событий A и $\overline{A}B$, а событие B как сумму несовместных событий AB и $\overline{A}B$. Применив (1.2), получим $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}B)$ и $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\overline{A}B)$, откуда следует (1.4). Из формулы (1.4) следует, что $\mathbf{P}(A + B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Очевидно, что если $A \subset B$, то $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

Имеет место следующее свойство, вытекающее из аксиомы 4[1]: если для бесконечной последовательности событий $A_1, A_2, \ldots$ выполнено

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

или

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A). \tag{1.5}$$

Это свойство позволяет обобщить формулу (1.2) на счетное число событий: если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, т. е. $A_iA_j = \varnothing$, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ сходится и равен $\mathbf{P}(A)$.

[1] Доказательство этого свойства можно найти, например в [1]

1.4 Вероятностные модели

Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ называется *вероятностным пространством*. Задание вероятностного пространства не означает окончательного построения математической модели случайного явления, так как аксиомы вероятности, сформулированные в 1.3 не фиксируют однозначно вероятности событий. Выбор конкретных значений вероятностей определяется такими факторами как симметрия модели, статистические данные о случайном явлении и даже интуитивные представления. Насколько удачным оказался этот выбор чаще всего решается в ходе экспериментальной проверки вероятностной модели.

Поясним сказанное на следующих примерах.

Пример 1.2. Рассмотрим множество событий из примера 1.1. Алгебра событий $\mathfrak{A}$ в этом случае состоит из всех подмножеств

$$A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant 6, \quad k \leqslant 6.$$

Пусть заданы числа $p_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 6$, причем $\sum\limits_{i=1}^{6} p_i = 1$. Вероятность элементарного события определим как

$$\mathsf{P}(\omega_i) = p_i.$$

Это означает, что вероятность события A

$$\mathsf{P}(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}.$$

Определенная таким образом функция $\mathsf{P}(A)$ удовлетворяет всем аксиомам вероятности. Конкретные значения чисел p_i при этом не фиксированы. Выбор этих значений происходит на основе дополнительных соображений.

Для «правильной» кости естественно считать, что все числа $p_i = 1/6$. Если кость сделана несимметрично, то вероятности будут отличны от $1/6$. Корректность того или иного выбора вероятностей можно установить многократным бросанием кости. $\square$

Пример 1.3. (Парадокс игры в кости) При бросании двух костей как 9, так и 10 может выпасть двумя способами: $9 = 3 + 6 = 4 + 5$ и $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. При бросании трех костей оба числа могут быть получены шестью способами. Для 9 это наборы {1,2,6}, {1,3,5}, {1,4,4},

$\{2{,}2{,}5\}$, $\{2{,}3{,}4\}$, $\{3{,}3{,}3\}$, а для 10 — $\{1{,}3{,}6\}$, $\{1{,}4{,}5\}$, $\{2{,}2{,}6\}$, $\{2{,}3{,}5\}$, $\{2{,}4{,}4\}$, $\{3{,}3{,}4\}$. Почему тогда 9 появляется чаще, когда бросают две кости, а 10, когда бросают три?

Решение. Предложенная модель не проходит проверку экспериментом, поскольку в ней сделано ошибочное предположение о равновозможности событий — выпадению пар $\{4{,}5\}$, $\{5{,}5\}$, $\{3{,}6\}$ и $\{4{,}6\}$ приписываются одинаковые вероятности. Точно так же одинаковыми считаются вероятности всех перечисленных выше троек. На самом деле вероятность выбросить $\{4{,}5\}$ выше, чем $\{5{,}5\}$, так как первую пару можно получить двумя способами (4 на первой кости и 5 — на второй, и наоборот), а вторую — только одним. Поэтому вероятность появления 9 выше, чем 10 при бросании двух костей. При бросании трех костей вероятность комбинации $\{1{,}3{,}6\}$ выше вероятности $\{2{,}2{,}5\}$, а вероятность $\{3{,}3{,}3\}$ меньше любой из первых двух. Следовательно, для трех костей больше оказывается вероятность появления 10.

Таким образом, возникновение парадокса связано с неверным выбором вероятностной модели. Применительно к костям нужно учитывать, что, даже, если мы бросаем одинаковые кости, они являются, все же, различными объектами и состояние $\{4{,}5\}$ отлично от $\{5{,}4\}$. Отметим, что модели, неподходящие для одних случайных явлений хорошо описывают другие. Например, модель «неразличимых костей» оказывается востребованной в статистической физике для описания некоторых типов частиц[1]. □

§ 2 Вероятностные схемы

2.1 Классическое определение вероятности

Пусть Ω — конечное множество и n — общее число возможных элементарных исходов испытания, а m — число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. Все элементарные события считаются равновозможными. Вероятность события A определим равенством

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

Классическое определение вероятности является математической

[1] См. пример 2.5

моделью для целого ряда случайных явлений, которые можно встретить как в повседневной жизни, так и при решении задач, относящихся к различным отраслям естествознания, техники, экономики и т. д.

Во многих задачах по теории вероятностей часто предлагается только описание явления и для решения необходимо подобрать подходящую математическую модель. Ниже мы дадим описание некоторых, достаточно часто встречающихся вероятностных схем, в которых реализуется классическое определение вероятности.

Случайный выбор с возвращением. Пусть $\mathcal{A}$ — множество N чисел: $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, N\}$. Каждое элементарное событие $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ представляет собой упорядоченный набор из n чисел, взятых из множества $\mathcal{A}$, т. е.

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n),\ i_k \in \mathcal{A},\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Общее число элементарных событий[1)], входящих в Ω равно N^n.

Наглядной реализацией такой схемы является корзина с пронумерованными шарами, из которой один за другим наугад достают n шаров, номер шара фиксируется, после чего он сразу же возвращается в корзину.

Случайный выбор без возвращения. Пусть $\mathcal{A}$ — множество N чисел из предыдущей схемы. Элементарное событие ω снова представляет собой упорядоченный набор из n чисел, взятых из множества $\mathcal{A}$, но все числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ различны, т. е.

$$\Omega = \{\omega = (i_1, \ldots, i_n),\ i_k \in \mathcal{A},\ i_k \neq i_j \text{ для } k \neq j, \quad k = 1, 2, \ldots, n,\ \}. \tag{2.1}$$

В данном случае $n \leqslant N$ и полное число элементарных событий равно числу размещений A_N^n.

Эту схему также можно интерпретировать с помощью пронумерованных шаров, однако, после того как номер шара был записан, шар в корзину не возвращается.

Приведем несколько примеров, в которых используются описанные выше схемы.

Пример 2.1. Найти вероятность того, что при n подбрасываниях монеты «решка» выпадет m раз ($m \leqslant n$).

[1)]Краткое изложение способов вычисления чисел размещения, сочетания и перестановок дано в приложении 1. Более подробно с элементами комбинаторики можно познакомиться в [9, 4].

Решение. В качестве модели возьмем схему выбора с возвращением, в которой множество $\mathcal{A}$ состоит из двух элементов: «орел» и «решка». Общее число элементарных событий равно 2^n. Число благоприятствующих исходов равно числу способов, которыми m из n монет можно положить «решкой». Это число равно C_n^m. Следовательно, вероятность $\mathsf{P}(A) = C_n^m/2^n$. □

Пример 2.2. В ящике лежат пять карточек с различными числами. Поочередно вытаскивают три карточки. Найти вероятность, что числа расположатся в порядке возрастания.

Решение. В качестве модели подходит схема выбора без возвращения с $N = 5$ и $n = 3$. Введем нумерацию карточек: карточка с наименьшим числом получает номер 1, а с наибольшим — 5. Всего элементарных событий $A_5^3 = 5!/2! = 60$. Благоприятствующие события подсчитаем перебором: $A = \{123,\ 124,\ 125,\ 134,\ 135,\ 145,\ 234,\ 235,\ 245\}$, всего 10 событий. $\mathsf{P}(A) = 1/6$. □

Пример 2.3. (Парадокс дней рождения) Какова вероятность, что в группе из n человек, по крайней мере у двоих дни рождения совпадают.

Решение. Найдем вероятность противоположного события $\overline{A} = \{$у всех дни рождения различны$\}$. Так как у любого человека день рождения может прийтись на любой день года, то подходящей моделью будет модель выбора с возвращением. Полное число элементов равно[1)] 365^n. Число способов, которыми можно набрать n различных дней рождения A_{365}^n — как в схеме без возвращения. Таким образом, $\mathsf{P}(A) = 1 - A_{365}^n/365^n$. Ниже приведена таблица соответствия числа человек в группе и искомой вероятности:

n	20	23	30	50
$\mathsf{P}(A)$	0,41	0,51	0,70	0,97

Кажется, что представленная таблица противоречит здравому смыслу. Ведь очевидно, что вероятность совпадения дней рождения у двух человек крайне мала. Это действительно так! Но в задаче требуется найти вероятность другого события — совпадения дней рождения *по крайней мере* у двоих, то есть, в том числе, у троих, четверых и т. д. Эти вероятности по

[1)] Мы не берем в расчет, что год может быть високосным. Также предполагается, что любой день года равновозможен для рождения (по статистике это не так).

отдельности тоже малы, но в сумме вероятность может оказаться достаточно большой. □

Гипергеометрическая схема. Данная модель может быть применена к целому ряду различных задач, но обычно иллюстрируется следующим образом. В корзине находится N шаров, среди них M белых и $N-M$ черных. Из корзины вынимают n шаров. Найти вероятность того, что среди них будет ровно m белых.

Элементарным событием будем считать набор n шаров, взятых из множества N шаров. Число таких наборов C_N^n. Благоприятствующие события состоят из двух наборов: m белых шаров, взятых среди имеющихся в корзине M шаров и $n-m$ черных, выбранных из $N-M$ штук. Таким образом, число благоприятствующих событий $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, а искомая вероятность определяется формулой

$$P = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{2.2}$$

Пример 2.4. Найти вероятность выигрыша по одной карточке в лотерею 5 из 36.

Решение. Перед розыгрышем участник лотереи отмечает 5 чисел на карточке с 36 номерами. Во время розыгрыша производится выборка 5 шаров из лототрона. Карточка выигрывает, если совпали 4 или 5 номеров. Для оценки вероятности выигрыша воспользуемся формулой (2.2). Белыми шарами считаем выигрышные, остальные — черными. Тогда $N = 36$, $M = 5$, $n = 5$, $m = 4$ и 5. Пусть $A_k = \{$имеется k совпадений$\}$. Тогда вероятность выигрыша $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_4) + \mathbf{P}(A_5)$. По формуле (2.2) находим

$$\mathbf{P}(A_4) = 0{,}000411, \quad \mathbf{P}(A_5) = 0{,}000003, \quad \mathbf{P}(A) = 0{,}000414. \qquad \square$$

Пример 2.5. (Системы частиц) Рассматривается система N частиц ($N > 1$), каждая из которых может находиться в одном из k равновозможных состояний[1]. Найти вероятность событий $A = \{$все частицы находятся в одном и том же состоянии$\}$ и $B = \{$все частицы находятся в различных состояниях$\}$.

[1]Предположение о равновозможности состояний позволяет наглядно показать качественное различие в коллективном поведении частиц. Реальные состояния равновозможными не являются.

Решение. Решение задачи зависит от того, какими свойствами обладают частицы.

В системе Максвелла—Больцмана частицы считаются различными, число частиц в любом состоянии не ограничено. В этом случае мы имеем дело с упорядоченной выборкой из N элементов, которые могут принимать повторяющиеся значения из множества всех состояний. Следовательно, полное число состояний вычисляется по формуле (П.4), в которой нужно положить $m = N$ и $n = k$, то есть k^N.

В системе Бозе—Эйнштейна частицы неразличимы, то есть при перестановке любых двух частиц состояние системы остается прежним; число частиц в любом состоянии не ограничено. Эта система отличается от предыдущей тем, что выборка будет неупорядоченной. Это значит, что число состояний должно вычисляться по формуле (П.6) и будет равно $\overline{C}_k^N$.

В системе Ферми—Дирака частицы неразличимы, но в каждом состоянии может находиться не более одной частицы. Тогда мы имеем неупорядоченную выборку из N элементов, в которой значения не повторяются. Следовательно, число состояний дается формулой (П.3) и равно C_k^N. В этом случае число частиц не должно превышать числа состояний.

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A в системах Максвелла—Больцмана и Бозе—Эйнштейна равно числу состояний k. Для системы Ферми—Дирака событие A является невозможным. Следовательно,

$$\mathsf{P}_{\text{МБ}}(A) = \frac{1}{k^{N-1}}, \qquad \mathsf{P}_{\text{БЭ}}(A) = \frac{k}{\overline{C}_k^N}, \qquad \mathsf{P}_{\text{ФД}}(A) = 0.$$

Разместить частицы так, чтобы в каждом находилось не более одной частицы можно только в случае, если $N \leqslant k$. Для системы Максвелла—Больцмана в силу различимости частиц число возможных расположений равно A_k^N, а в системах Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака из-за тождественности частиц это число будет равно C_k^N. Таким образом,

$$\mathsf{P}_{\text{МБ}}(B) = \frac{A_k^N}{k^N}, \qquad \mathsf{P}_{\text{БЭ}}(B) = \frac{C_k^N}{\overline{C}_k^N}, \qquad \mathsf{P}_{\text{ФД}}(B) = 1,$$

если $N \leqslant k$, и $\mathsf{P}(B) = 0$ для любой из трех систем при $N \geqslant k$. □

2.2 Статистическое определение вероятности

В самом начале было отмечено, что теория вероятностей имеет дело только с теми событиями, которые могут быть проведены, хотя бы мысленно, бесконечное число раз. Далеко не для всех таких событий вероятность можно установить заранее из каких-либо соображений. Например, звонок другу по мобильному телефону в зону слабого приема может быть успешным или неудачным, но никаких априорных заключений о вероятности дозвона сделать нельзя. В подобных случаях для вероятности вводится статистическое определение.

Относительная частота появления события A определяется равенством

$$\nu_n(A) = \frac{m}{n}, \tag{2.3}$$

где m — число испытаний, в которых событие A наступило, n — общее число произведенных испытаний.

Статистическое определение применимо только к тем событиям, которые обладают так называемой *статистической устойчивостью* или *устойчивостью частот*. Это значит, что с увеличением числа экспериментов частота события стабилизируется, то есть стремится к некоторому пределу.

Статистическая вероятность события есть предел относительной частоты при $n \to \infty$:

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A). \tag{2.4}$$

На практике применяется формула (2.3). Статистическое определение вероятности является скорее эмпирическим, а формула (2.4) выражает тот факт, что чем больше будет проведено экспериментов, тем более точно определится вероятность. Теоретическая обоснованность использования этого определения базируется на группе теорем, называемых *законом больших чисел*, которые будут рассматриваться при изучении случайных величин.

Пример 2.6. На сборах перед соревнованиями биатлонист сделал 738 выстрелов из положения стоя и 461 выстрел из положения лежа. Число метких выстрелов — 637 и 409, соответственно. Для вероятности «закрыть» мишень на соревнованиях разумно принять значения $p_1 = 637/738 = 0{,}863$ для положения стоя и $p_2 = 409/461 = 0{,}887$ для положения лежа. По такой схеме вычисляются показатели действующих спортсменов. Конечно, для более объективной оценки могут браться выстрелы за несколько лет или только те, что сделаны на соревнованиях определенного уровня, но принцип остается тем же. □

2.3 Геометрическое определение вероятности

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Предполагается, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения и формы. Тогда вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P = \frac{S(g)}{S(G)},$$

где S — площадь фигуры.

Аналогичным образом можно определить вероятность попадания точки на отрезок длины l, лежащий внутри отрезка большей длины L:

$$P = \frac{l}{L},$$

и вероятность попадания внутрь пространственной фигуры, имеющей объем v и являющейся частью фигуры с объемом V:

$$P = \frac{v}{V}.$$

Пример 2.7. (Задача Бюффона) Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Решение. Введем следующие обозначения: x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ — угол, составленный иглой с этой параллелью (рис. 2). Положение иглы полностью определяется заданием определенных значений и φ, причем принимает значения от 0 до a; возможные значения φ изменяются от 0 до π. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и π (рис. 3). Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры G равна $a\pi$.

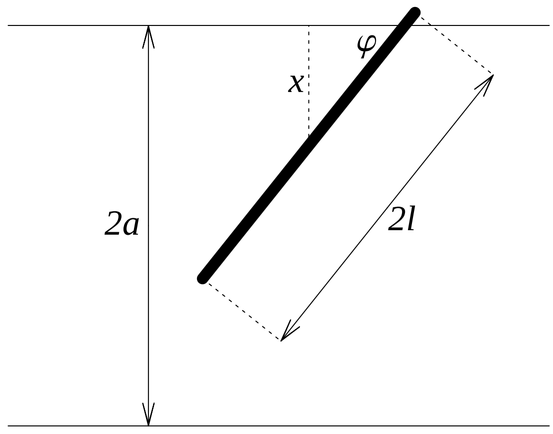

Рис. 2.

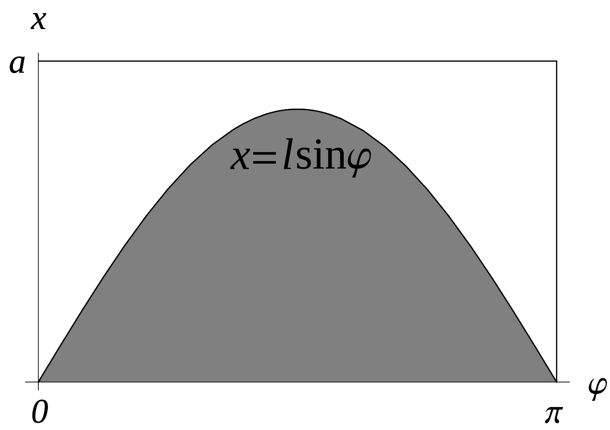

Рис. 3.

Найдем теперь фигуру g, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т. е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Как видно из рис. 2, игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии $x \leqslant \sin\varphi$, т. е. если середина иглы попадет в любую из точек фигуры, заштрихованной на рис. 3. Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру g. Найдем площадь этой фигуры:

$$S(g) = \int\limits_0^\pi l\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = 2l.$$

Искомая вероятность того, что игла пересечет прямую

$$P = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{2l}{a\pi}. \qquad \square$$

Пример 2.8. (Задача о встрече) Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение четверти часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке от 12 до 13 часов.

Решение. Обозначим момент прихода первого студента через x, а второго — через y. Станем изображать x и y как декартовы координаты на плоскости (рис. 4); в качестве единицы масштаба выберем минуту. Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 60.

Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| < 15$. Если первый студент пришел раньше, то $x < y$ и

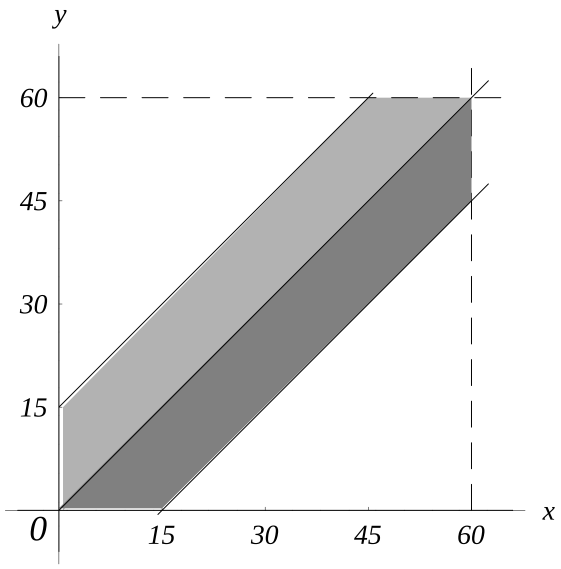

Рис. 4.

$y - x < 15$; благоприятные события расположатся в светло-серой области. Если раньше пришел второй студент, то $y < x$ и $x - y < 15$; благоприятные события расположатся в темно-серой области.

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}. \qquad \square$$

§ 3 Условные вероятности

3.1 Условная вероятность и независимость событий

В ряде случаев приходится рассматривать вероятности событий при дополнительном условии, что произошло некоторое другое событие. Такие вероятности мы будем называть условными и обозначать символом $\mathsf{P}(B|A)$, что означает вероятность события B при условии, что событие A произошло.

Пример 3.1. Брошены две игральных кости. Найти вероятность того, что сумма очков будет равна 4, если известно, что на костях выпали нечетные числа.

Решение. Обозначим события $A = \{$на костях выпали нечетные числа$\}$ и $B = \{$сумма равна 4$\}$. Безусловная вероятность $\mathsf{P}(B) = 1/12$ (три элементарных события, 1+3, 2+2, 3+1 из 36 возможных), тогда как условная вероятность $\mathsf{P}(B|A) = 2/9$ (два события из девяти возможных). □

При вычислении условной вероятности мы, по сути, использовали классическое определение, в котором роль множества событий играло событие A, а роль подмножества B — те события из B, которые благоприятствуют наступлению события A — событие AB. Таким образом,

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{|AB|}{|A|} = \frac{|AB|)/|\Omega|}{|A|/|\Omega|)} = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Последнее выражение используют как определение условной вероятности для произвольных событий.

Условной вероятностью называют отношение

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)}, \tag{3.1}$$

если $\mathsf{P}(A) \neq 0$.

События A и B называют *независимыми*, если

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \tag{3.2}$$

Сопоставляя (3.1) и (3.2), мы получаем, что для независимых событий $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$ и $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$.

Определение условной вероятности (3.1) эквивалентно *теореме умножения*:

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A), \tag{3.3}$$

которая по индукции легко обобщается на совокупность нескольких событий:

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n|A_1\ldots A_n).$$

Обобщение определения независимости для совокупности более чем двух событий нуждается в некоторых уточнениях.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если при любом $k = 2, 3, \ldots, n$ для любого набора событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ выполняется условие

$$\mathsf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2})\ldots\mathsf{P}(A_{i_k}).$$

Если же данное условие выполняется только при $k = 2$, то события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно независимыми*.

3.2 Формула полной вероятности и формула Байеса

Теорема 3.1. (Формула полной вероятности) Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий $H_1, H_2 \ldots H_n$, образующих полную группу[1]. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A|H_2) + \ldots + \mathsf{P}(B_n)\mathsf{P}(A|H_n). \quad (3.4)$$

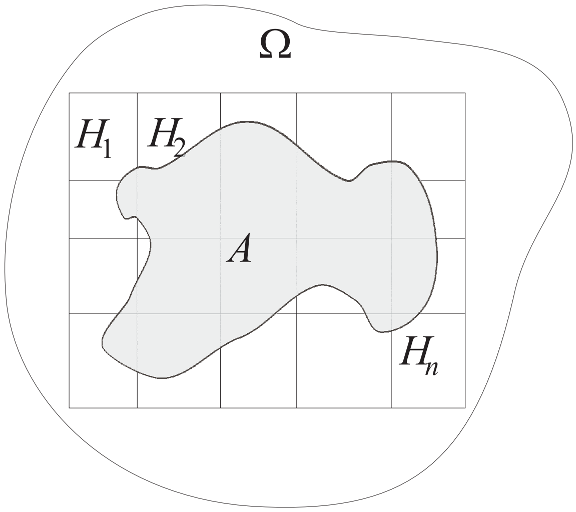

Рис. 5.

Доказательство. Событие A можно разбить на n несовместных событий:

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Тогда по 3-й аксиоме вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AH_1) + \mathsf{P}(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Применяя теорему умножения (3.3) для каждого из слагаемых в правой части, получим искомую формулу (3.4). ■

Вероятности гипотез $H_1, \ldots, H_n$ переоцениваются, если событие A уже произошло. В этом случае их значения определяются по формуле Байеса[2].

[1] События H_k принято называть *гипотезами*.

[2] Безусловную вероятность гипотезы $\mathsf{P}(H_k)$ называют *априорной* (насколько вероятна причина вооб-

Теорема 3.2. (Формула Байеса) Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2 \dots H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса

$$\mathsf{P}(H_k|A) = \frac{\mathsf{P}(H_k)\mathsf{P}(A|H_k)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)\mathsf{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A|H_i)}. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Согласно определению условной вероятности

$$\mathsf{P}(H_k|A) = \frac{\mathsf{P}(AH_k)}{\mathsf{P}(A)}.$$

По теореме умножения $\mathsf{P}(AH_k) = \mathsf{P}(H_k)\mathsf{P}(A|H_k)$, а $\mathsf{P}(A)$ выразим формулой полной вероятности (3.4). ■

Пример 3.2. Есть две мишени — большая и маленькая. Стрелок с равной вероятностью выбирает одну из них. В большую он попадает с вероятностью 0,9, а в маленькую — с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что стрелок поразит мишень при очередном выстреле.

Решение. Рассмотрим событие $A = \{$стрелок поразил мишень$\}$ при наличии гипотез
$H_1 = \{$стрелок выбрал большую мишень$\}$,
$H_2 = \{$стрелок выбрал маленькую мишень$\}$.
Вероятности гипотез $\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = 1/2$.
Условные вероятности $\mathsf{P}(A|H_1) = 0{,}9$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}4$.
По формуле полной вероятности (3.4)

$$\mathsf{P}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}65. \qquad \square$$

Пример 3.3. (Парадокс Монти Холла[1]) Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими‘— козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который

ще), а условную $\mathsf{P}(H_k|A)$ — *апостериорной*. Первая показывает насколько вероятна гипотеза вообще, а второая — насколько она вероятна с учетом данных о событии. Часто различие между априорными и апостериорными вероятностями игнорируются и правильные результаты отличаются от ожидаемых (см. пример 3.3).

[1] Задача приведена в формулировке, опубликованной в журнале Parade Magazine в 1990 г.

знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Решение. Рассмотрим систему гипотез $H_k = \{$приз находится за k-ой дверью$\}$. Все варианты равновозможны, поэтому $\mathsf{P}(H_k) = 1/3$. Пусть $A = \{$ведущий открыл дверь номер 3, когда игрок выбрал первую$\}$. Тогда $\mathsf{P}(A|H_1) = p$, так как он мог открыть дверь номер 2 или 3 по своему усмотрению, и значение p выражает степень его предпочтений в этом вопросе. Очевидно, $\mathsf{P}(A|H_2) = 1$ и $\mathsf{P}(A|H_3) = 0$. Надо переоценить шансы на то, за какой дверью находится приз. По формуле Байеса

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{(1/3)p}{(1/3)p + 1/3} = \frac{p}{p+1}, \qquad \mathsf{P}(H_2|A) = \frac{1}{p+1}.$$

Так как $p \leqslant 1$, то $\mathsf{P}(H_2|A) \geqslant \mathsf{P}(H_1|A)$. Это значит, что поменяв дверь, игрок увеличивает свои шансы на выигрыш. □

§ 4 Последовательности испытаний

Пусть задано множество элементарных событий

$$\Omega = \left\{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n) : i_k = \overline{1, N}; k = \overline{1, n}\right\}.$$

Элементарное событие $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ интерпретируется как цепочка исходов в n последовательных испытаниях, каждое из которых имеет N несовместных исходов. В качестве вероятности такого события берется

$$\mathsf{P}(\omega) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1}),$$

где $A_k = \{$в k-м испытании выпало число $i_k\}$ и при любом $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено

$$\sum_{i_k=1}^{N} \mathsf{P}(A_k|A_1\ldots A_{k-1}) = 1.$$

Тогда для любого события $A \subset \Omega$ его вероятность

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathsf{P}(\omega).$$

Определенная таким образом вероятность удовлетворяет всем аксиомам вероятности.

Отметим, что некоторые из рассмотренных ранее схем — подбрасывание нескольких монет, схемы выбора с возвращением и без и т. д., могут быть интерпретированы как последовательности испытаний.

Пример 4.1. (Задача о пьянице[1]) Пьяница стоит на краю пропасти и через равные промежутки времени с вероятностью $1/2$ делает шаг к пропасти или от нее (рис. 6). Какова вероятность того, что он *в конце концов*[2] свалится в пропасть?

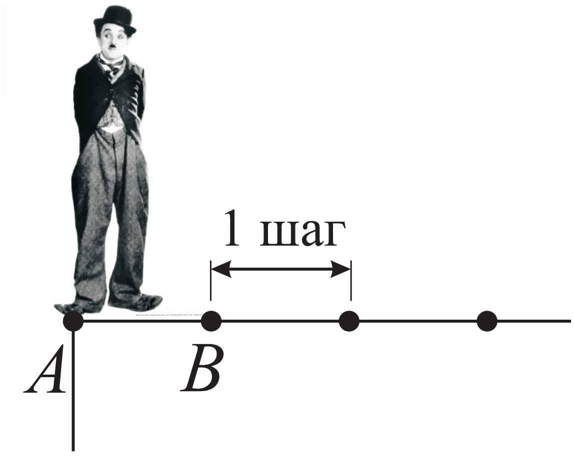

Рис. 6.

Решение. Рассмотрим события:
$A = \{$из точки A пьяница в конце концов сделает шаг влево$\}$,
$B = \{$из точки B пьяница в конце концов сделает шаг влево$\}$,
$L = \{$пьяница сделает шаг влево$\}$,
$R = \{$пьяница сделает шаг вправо$\}$.

Очевидно, что $\mathsf{P}(L) = \mathsf{P}(R) = 1/2$ и $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B)$. Искомую вероятность обозначим p. Тогда $p = \mathsf{P}(A)$. С другой стороны падение в пропасть происходит одним из двух способов: либо происходит событие L, либо происходит цепочка событий R, B и A, то есть

$$p = \mathsf{P}(L) + \mathsf{P}(R)\mathsf{P}(B|R)\mathsf{P}(A|RB) = \mathsf{P}(L) + \mathsf{P}(R)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A)\,,$$

так как события A и B не зависят от способа попадания в точки A и B. Следовательно,

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p^2\,,$$

[1] См. также пример 4.6.

[2] Слова «в конце концов» означают когда-нибудь, на каком-либо шаге от 1 до ∞.

откуда $p = 1$. □

В целом ряде важных приложений последовательность испытаний обладает рядом дополнительных свойств, существенно упрощающих общую схему. Такие последовательности будут рассмотрены в следующих разделах.

4.1 Последовательность независимых испытаний

Пусть производится опыт, в котором возможны N несовместных исходов. Если производятся испытания, в которых вероятность появления любого из этих исходов не зависит от исходов в других испытаниях, то такие испытания называют *независимыми*. В этом случае

$$\mathsf{P}(A_k|A_1 \ldots A_{k-1}) = \mathsf{P}(A_k)\,.$$

Для вероятности события A_k, $i_k = 1, 2, \ldots, N$ введем обозначение $\mathsf{P}(A_k) = p_{i_k}$. Тогда

$$\mathsf{P}(\omega) = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n}, \qquad i_k = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, n},$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$. Эту вероятностную модель также называют *полиномиальной схемой*. Она является математической моделью серии опытов, проводящихся в одинаковых условиях.

Частный случай полиномиальной схемы при $N = 2$ называют *биномиальной схемой* или *схемой Бернулли*. В каждом испытании возможно появление одного из двух исходов. Один исход принято называть успехом, его вероятность в каждом испытании равна p; другой — неудачей, его вероятность равна $q = 1 - p$.

Все задачи, связанные со схемой Бернулли так или иначе сводятся к решению одной из трех следующих задач:

1. Найти вероятность события A_m ={в n испытаниях Бернулли произойдет m успехов}. Вероятность события A_m принято обозначать $\mathsf{P}(A_m) = P_n(m)$.
2. Найти вероятность события B ={в n испытаниях Бернулли произойдет не более, чем m успехов}.
3. Найти наивероятнейшее число успехов в n испытаниях Бернулли.

Первую задачу решает следующая теорема.

Теорема 4.1. Вероятность того, что в n независимых испытаниях успех наступит ровно m раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4.1}$$

где $q = 1 - p$, p — вероятность успеха в одном испытании, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим элементарное событие ω_1, в котором сначала было подряд m успехов, а затем $n - m$ неудач:

$$\omega_1 = \{\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{m}\underbrace{\text{Н}\ldots\text{Н}}_{n-m}\}.$$

Вероятность этого события $\mathbf{P}(\omega_1) = p^m q^{n-m}$. Любая другая цепочка исходов с m успехами отличается от ω_1 только расположением успехов и неудач и имеет ту же самую вероятность. Возможные различные расположения соответствуют неупорядоченной выборке m элементов из n возможных. Это можно сделать C_n^m способами, откуда следует формула (4.1). ■

Для решения второй задачи представим событие B в виде суммы несовместных событий A_k:

$$B = A_0 + A_1 + \ldots + A_m = \sum_{k=0}^{m} A_k.$$

Тогда, согласно аксиоме 3, вероятность

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{m} P_n(k) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{4.2}$$

В третьей задаче требуется найти наивероятнейшее число успехов m_0, то есть такое число успехов, для которого выполнено $P_n(m_0) \geqslant P_n(m)$ при любом $m \leqslant n$, в том числе для $m = m_0 \pm 1$.

Неравенство $P_n(m_0) \geqslant P_n(m_0 + 1)$ перепишем в виде

$$\frac{n!}{m_0!(n - m_0)!}\, p_0^m q^{n-m_0} \geqslant \frac{n!}{(m_0 + 1)!(n - m_0 - 1)!}\, p^{m_0+1} q^{n-m_0-1},$$

откуда

$$\frac{q}{n - m_0} \geqslant \frac{p}{m_0 + 1} \quad \Longrightarrow \quad m_0 \geqslant np - q.$$

Аналогично получаем:

$$P_n(m_0) \geqslant P_n(m_0-1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n! p_0^m q^{n-m_0}}{m_0!(n-m_0)!} \geqslant \frac{n! p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!},$$

откуда

$$\frac{p}{m_0} \geqslant \frac{q}{n-m_0+1} \quad \Longrightarrow \quad np + p \geqslant m_0.$$

Таким образом, наивероятнейшее число успехов должно удовлетворять двойному неравенству:

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p.$$

Заметим, что может быть либо одно, либо два наивероятнейших значения.

Полиномиальная схема. Пусть $N > 2$. Вероятности исходов в отдельном испытании равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_N$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. Вероятность того, что в n независимых испытаний первый исход появится m_1 раз, второй исход — m_2 раз, …, N-й исход — m_N раз, равна

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_N) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_N!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_N^{m_N}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Как и в схеме Бернулли рассмотрим элементарное событие ω_1, в котором сначала появился подряд m_1 раз первый исход, затем m_2 раз — второй исход и т. д.:

$$\omega_1 = \{\underbrace{11\ldots1}_{m_1}\underbrace{22\ldots2}_{m_2}\ldots\underbrace{NN\ldots N}_{m_N}\}.$$

Вероятность этого события $\mathsf{P}(\omega_1) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_N^{m_N}$. Любая другая цепочка исходов с этими же числами исходов отличается от ω_1 только их расположением и имеет ту же самую вероятность. Возможные различные расположения соответствуют перестановке с повторениями элементов N сортов с фиксированным числом элементов каждого сорта, откуда следует формула (4.3). ■

Заметим, что полиномиальная схема с $p_1 = p_2 = \ldots = p_N = 1/N$ совпадает со схемой выбора с возвращением.

4.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

Часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда в схеме Бернулли число испытаний велико. В этом случае непосредственные вычисления по формулам (4.1) и (4.2) становятся затруднительными. При определенных условиях эти формулы можно заменить асимптотическими выражениями, которые позволяют довольно точно оценить вероятности (4.1) и (4.2).

Теорема 4.3. (Теорема Пуассона) Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to p_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}$$

при любом фиксированном $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Обозначим $\lambda_n = np$. Тогда вероятность $P_n(m)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} P_n(m) &= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda_n^m}{m!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}_{m-1 \text{ сомножитель}}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Отсюда, при $n \to \infty$ получим утверждение теоремы. ■

Таким образом, если $p \ll 1$, а число испытаний велико можно использовать приближенную формулу:

$$P_n(m) \approx p_m = \frac{\lambda_n^m}{m!}\, e^{-\lambda_n}, \quad \lambda_n = np. \tag{4.4}$$

Для сравнения точных и приближенных значений вероятностей приведем таблицу:

Число успехов m	$P_{10}(m)$ при $p=0{,}1$	$P_{100}(m)$ при $p=0{,}01$	$P_{1000}(m)$ при $p=0{,}001$	p_m при $\lambda_n = np = 1$
0	0.3487	0.3660	0.36770	0.3679
1	0.0387	0.3697	0.3681	0.3679
2	0.0019	0.1849	0.1840	0.1839
3	$5{,}7 \cdot 10^{-5}$	0.0610	0.0613	0.0613
4	$1.1 \cdot 10^{-6}$	0.0149	0.0153	0.0153
5	$1.5 \cdot 10^{-8}$	0.0029	0.0030	0.0031

Как видно из таблицы, некорректное использование приближение может привести к ошибке в несколько порядков[1)].

Если p близко к 1, то пуассоновским приближение можно воспользоваться для вероятности q. Если p и q заметно отличаются от 0 и 1, то для вычислений используются теоремы Муавра—Лапласа.

Теорема 4.4. (Локальная теорема Муавра—Лапласа) Если $n \to \infty$, p постоянно ($0 < p < 1$), величина $x_m = (m-np)/\sqrt{npq}$ равномерно ограничена по m и n ($-\infty < a \leqslant x_m \leqslant b < \infty$), то при $n \to \infty$

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-x_m^2/2}.$$

Доказательство. Прологарифмируем выражение (4.1):

$$\ln P_n(m) = \ln n! - \ln m! - \ln (n-m)! + m \ln p + (n-m) \ln q. \tag{4.5}$$

Представим:

$$m = np + x_m\sqrt{npq}, \qquad n - m = nq - x_m\sqrt{npq}. \tag{4.6}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга (см. приложение 2, формула (П.8)):

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi n} + n\ln n - n + O(1/n). \tag{4.7}$$

Тогда с учетом (4.6), получим

$$\begin{aligned} \ln m! &= \ln\sqrt{2\pi m} + (np + x_m\sqrt{npq}) \ln (np + x_m\sqrt{npq}) - \\ &\quad -(np + x_m\sqrt{npq}) + O(1/n) \qquad (4.8)\\ \ln (n-m)! &= \ln\sqrt{2\pi(n-m)} + (nq - x_m\sqrt{npq}) \ln (nq - x_m\sqrt{npq}) - \\ &\quad -(nq - x_m\sqrt{npq}) + O(1/n) \end{aligned}$$

[1)]Смотри также сноску на стр. 30

Используя формулу $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ при $|x| < 1$, найдем

$$\begin{aligned}
\ln(np + x_m\sqrt{np\,q}) &= \ln np + \ln\left(1 + x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = \\
&= \ln np + x_m\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x_m^2}{2}\,\frac{q}{np} + O(1/n^{3/2}) \quad (4.9)\\
\ln(nq - x_m\sqrt{np\,q}) &= \ln nq - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x_m^2}{2}\,\frac{p}{nq} + O(1/n^{3/2})
\end{aligned}$$

Подставляя (4.6)–(4.9) в (4.5), получим утверждение теоремы. ■

Теорема 4.5. (Интегральная теорема Муавра—Лапласа) Если $n \to \infty$, p постоянно $(0 < p < 1)$, то при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(a \leqslant x_m \leqslant b) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x,$$

равномерно по a и b, где $x_m = (m - np)/\sqrt{np\,q}$ и $-\infty < a \leqslant b < \infty$.

Доказательство. Вероятность события $\{a \leqslant x_m \leqslant b\}$ может быть представлена суммой

$$\mathsf{P}(a \leqslant x_m \leqslant b) = \sum_{m: a \leqslant x_m \leqslant b} P_n(m).$$

Применяя локальную теорему, получим

$$\mathsf{P}(a \leqslant x_m \leqslant b) = \sum_{m:\, a \leqslant x_m \leqslant b} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi np\,q}}\, e^{-x_m^2/2} + O(n^{3/2})\right). \qquad (4.10)$$

Заметим, что

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{np\,q}},$$

поэтому сумму в (4.10) можно переписать в виде

$$\sum_{m:\, a \leqslant x_m \leqslant b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x_m^2/2} \Delta x_m + O(n^{3/2}). \qquad (4.11)$$

Главный член совпадает с подходящим образом выбранной интегральной суммой[1)], поэтому

[1)]Слова «подходящим образом» означают, что можно подобрать интегральную сумму таким образом, что она будет в точности совпадать с суммой в (4.11). Интегральная сумма при произвольном разбиении интервала $[a, b]$ отличается от суммы (4.11) на бесконечно малую величину.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a \leqslant x_m \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

Таким образом, для вычисления вероятностей при большом числе испытаний используются формулы

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_m) \tag{4.12}$$

и

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_{m_2}) - \Phi(x_{m_1}), \tag{4.13}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

есть так называемая функция Лапласа.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений аргумента приведена в приложении 3; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ — четная.

Таблица значений функции Лапласа для положительных значений ($0 \leqslant x \leqslant 5$) приведена в приложении 4; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$; для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная.

Приближения с использованием формул (4.12) и (4.13) дают наилучший эффект при $p \approx 1/2$, а при $p < 1/20$ приводят к грубейшим ошибкам[1]! В этом случае рекомендуется пользоваться предельной теоремой Пуассона.

Пример 4.2. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как число испытаний $n = 2400$ велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра—Лапласа (4.12). Вычислим x_m при

[1] При $n \approx 1000$ и $p \approx 0{,}002$ можно ошибиться на 25 порядков!

$m = 1400$:
$$x_{1400} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{40}{24} = -1{,}67.$$
Используя свойство четности функции $\varphi(x)$, по таблице из приложения 3 найдем значение $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67) = 0{,}0989$. Искомая вероятность
$$P_{2400}(1400) = \frac{0{,}0989}{24} = 0{,}0041. \qquad \square$$

Пример 4.3. Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $\ = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение. Число испытаний $n = 100$ велико, поэтому используем интегральную теорему Муавра-Лапласа (4.13).

а) $m_1 = 75,\ m_2 = 90,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2$. Вычисляем
$$\begin{aligned} x_{m_1} = x_{75} &= \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25, \\ x_{m_2} = x_{90} &= \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5. \end{aligned}$$
Учитывая, что функция Лапласа нечетна, получим
$$\begin{aligned} P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 90) &= \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = \\ &= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882. \end{aligned}$$
Значения функции Лапласа взяты из таблицы в *приложении* 4.

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно либо 75, либо 76, ..., либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $m_1 = 75,\ m_2 = 100$. Тогда
$$\begin{aligned} x_{m_1} = x_{75} &= \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25\,, \\ x_{m_2} = x_{100} &= \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5\,. \end{aligned}$$
Искомая вероятность
$$\begin{aligned} P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 100) &= \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = \\ &= 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944. \end{aligned}$$

в) События $\{A$ появилось не менее 75 раз$\}$ и $\{A$ появилось не более 74 раз$\}$ противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность

$$P_{100}(m \leqslant 74) = 1 - P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056. \qquad \square$$

Пример 4.4. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение. По условию, $n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$, $m = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой (4.4). При этом $\lambda_n = np = 100\,000 \cdot 0{,}0001 = 10$. Искомая вероятность

$$P_{100\,000}(5) = \frac{10^5}{5!}e^{-10} = 0{,}0375. \qquad \square$$

4.3 Цепи Маркова

Пусть в опыте возможны N несовместных исходов, а вероятность любого из них зависит только от того, каков был исход в предыдущем испытании и не зависит от более ранних исходов. Тогда

$$\mathbf{P}(A_k|A_1 \ldots A_{k-1}) = \mathbf{P}(A_k|A_{k-1}),$$

где $A_k = \{$в k-м испытании выпало число $i_k\}$. В этом случае вероятность того, что в n опытах произойдет событие $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ будет равна

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_2)\ldots\mathbf{P}(A_n|A_{n-1}).$$

Эта вероятностная модель называется *цепью Маркова*. Наиболее распространенной интерпретацией этой модели является следующая. Система имеет N возможных взаимоисключающих состояний, между которыми происходят переходы в некоторые дискретные моменты времени $t = k = 1, 2, \ldots$ Вероятность любого перехода определяется только текущим состоянием системы и не зависит от того, как она в это состояние попала. Поэтому такие процессы часто называют процессами *без памяти*, а свойство системы «забывать» свою эволюцию — *марковость*.

Если для любого $k = 1, 2, \ldots$ набор вероятностей $\mathbf{P}(A_k|A_{k-1})$ одинаков, то есть вероятности перехода не зависят от момента времени, в который происходит переход, то такая цепь Маркова называется *однородной*. Далее мы будем рассматривать только однородные цепи Маркова.

Поскольку индекс k теперь неважен, удобно ввести более простые обозначения. Пусть $A_{k-1} = \{$система находится в состоянии $i_{k-1} = i\}$ или, короче, $A_{k-1} = \{i_{k-1} = i\}$, а $A_k = \{i_k = j\}$. Обозначим $\mathsf{P}(A_k|A_{k-1}) \equiv \mathsf{P}(i_k = j|i_{k-1} = i) = p_{ij} =$const.

Набор чисел p_{ij} образует матрицу $\mathcal{P}$ размера $N \times N$, которая называется *матрицей перехода* системы. Так как всевозможные переходы из состояния i образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1. \tag{4.14}$$

Матрица, удовлетворяющая свойству (4.14) называется *стохастической*[1)].

Пусть вероятности найти систему на k-м шаге в состоянии j равны $q_j^{(k)}$. Строка

$$Q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \ldots, q_N^{(k)}), \qquad \sum_{j=1}^{N} q_j^{(k)} = 1$$

называется *вектором вероятностей* состояний системы в момент времени $t = k$.

Согласно формуле полной вероятности (3.4)

$$q_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} q_j^{(1)} p_{ji}. \tag{4.15}$$

Переход из состояния i в состояние j за n шагов может быть осуществлен различными путями вида $i \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_{n-1} \to j$. Вероятность перехода по каждому такому пути, который называется *траекторией*, равна $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} j}$. Сумма вероятностей по всем возможным траекториям дает полную вероятность перехода $i \to j$ за n шагов. Эту вероятность будем обозначать $p_{ij}^{(n)}$. Очевидно, что $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$,

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{s=1}^{N} p_{is} p_{sj}. \tag{4.16}$$

По индукции несложно получить реккурентную формулу

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{s=1}^{N} p_{is}^{(n)} p_{sj}^{(m)}. \tag{4.17}$$

[1)] От греч. $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa o\sigma$ — умеющий угадывать. Является синонимом слов случайный, вероятностный.

Более элегантно формулы (4.15)–(4.17) записываются в матричной форме. Вероятности $p_{ij}^{(n)}$ являются элементами матрицы $\mathcal{P}^n$, поэтому вектор вероятностей через n шагов преобразуется по формуле

$$Q^{(k+n)} = Q^{(k)}\mathcal{P}^n, \qquad k, m = 1, 2, \ldots,$$

а реккурентное соотношение (4.17) выражает ассоциативность умножения матриц перехода:

$$\mathcal{P}^{n+m} = \mathcal{P}^n\mathcal{P}^m.$$

Пример 4.5. Заданы матрица перехода и начальный вектор состояния:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad Q^{(1)} = (1, 0, 0)\,.$$

Найти вероятность того, что в конце концов система окажется в состоянии 1.

Решение. Выражение «в конце концов» означает, что мы ожидаем наступление данного события в течение бесконечного промежутка времени. Поэтому сначала найдем вероятность того, что система окажется в первом состоянии за n шагов, а потом устремим n к бесконечности.

Так как переходы $2 \to 1$ и $3 \to 1$ отсутствуют, то

$$q_1^{(n)} = q_1^{(1)} \underbrace{p_{11} \ldots p_{11}}_{n-1} = 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3}}_{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}\,.$$

При $n \to \infty$ находим

$$q_1^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} q_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0. \qquad \square$$

Пример 4.6. (Случайное блуждание) Частица находится на отрезке $[0, n]$. В дискретные моменты времени она может перейти на 1 влево или вправо с вероятностями p и q соответственно ($p + q = 1$). При попадании на границы 0 и n частица остается там навсегда. Найти: 1) матрицу перехода системы, 2) вероятность того, что из точки m частица в конце концов попадет в точку n.

Решение. Для любой внутренней точки m отрезка $[0, n]$ вероятности перейти в соседние точки $p_{m,m-1} = p$ и $p_{m,m+1} = q$. Вероятности перехода в другие точки равна нулю. Для граничных точек ненулевыми являются только $p_{00} = p_{nn} = 1$. Матрица перехода такой системы имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вероятность достигнуть точки n. Обозначим $\mathsf{P}(i_k = n | i_1 = m) = \pi_{mn}(k)$. Тогда

$$\begin{aligned} \pi_{mn}(k+1) &= \mathsf{P}(i_{k+1} = n | i_1 = m) = \\ &= \mathsf{P}(i_2 = m+1 | i_1 = m)\mathsf{P}(i_{k+1} = n | i_2 = m+1) + \\ &\quad + \mathsf{P}(i_2 = m-1 | i_1 = m)\mathsf{P}(i_{k+1} = n | i_2 = m+1) = \\ &= q\pi_{m+1,n}(k) + p\,\pi_{m-1,n}(k)\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Можно доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_{mn}(k)$ существует [11]. Обозначим его π_{mn}. Тогда из уравнений (4.18) следует

$$\pi_{mn} = q\pi_{m+1,n} + p\,\pi_{m-1,n}\,. \tag{4.19}$$

Уравнения (4.19) нужно дополнить условиями «залипания» частицы на границах $\pi_{0n} = 0$ и $\pi_{nn} = 1$. Решение уравнения типа (4.19) аналогично решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Используем подстановку[1)] $\pi_{mn} = \lambda^m$, тогда уравнение (4.19) сводится к квадратному уравнению $q\lambda^2 - \lambda + p = 0$, которое имеет решения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = p/q$. Общее решение является их линейной комбинацией

$$\pi_{mn} = C_1\lambda_1^m + C_2\lambda_2^m = C_1 + C_2\left(\frac{p}{q}\right)^m.$$

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$\pi_{0n} = C_1 + C_2 = 0, \qquad \pi_{nn} = C_1 + C_2\left(\frac{p}{q}\right)^n = 1,$$

[1)]Система (4.19) является системой линейных разностных уравнений, базисные решения которой находятся с помощью данной подстановки. Общее решение является линейной комбинацией базисных. Более подробно см. [8].

откуда $C_1 = -C_2 = \left(1 - \frac{p^n}{q^n}\right)^{-1}$. В результате получим искомую вероятность

$$\pi_{mn} = \frac{1 - p^m/q^m}{1 - p^n/q^n}\,. \tag{4.20}$$

В этой формулировке задача известна как *задача о разорении игрока*. Рассмотренная цепь описывает финансовую игру двух игроков с общим капиталом N и на каждом шаге первый выигрывает или проигрывает 1 у другого с вероятностями q и p соответственно. Формула (4.20) дает вероятность выигрыша первого игрока в бесконечной игре при начальном капитале m; вероятность его разорения π_{m0}. Кроме того, задача о пьянице из примера 4.1 является частным случаем этой цепи, когда $p = q = 1/2$ и $n \to \infty$.

Отметим, что аналогичные задачи и их обобщения являются частью теории случайных процессов, имеющей широкие приложения в различных областях физики и экономико-математических моделях. $\square$

Для анализа однородных марковских последовательностей удобна пользоваться *графами состояний*. Граф состояний системы представляет собой ориентированный граф, в котором вершины соответствуют состояниям системы, а ребра — переходам между состояниями. На рисунке 7 изображены графы состояний систем из примеров 4.5 и 4.6. Числа в вершинах графа означают номера состояний, а числа около стрелок дают вероятности перехода. Вероятности перехода p_{mm} на графе не указаны; они вычисляются с помощью условия нормировки (4.14).

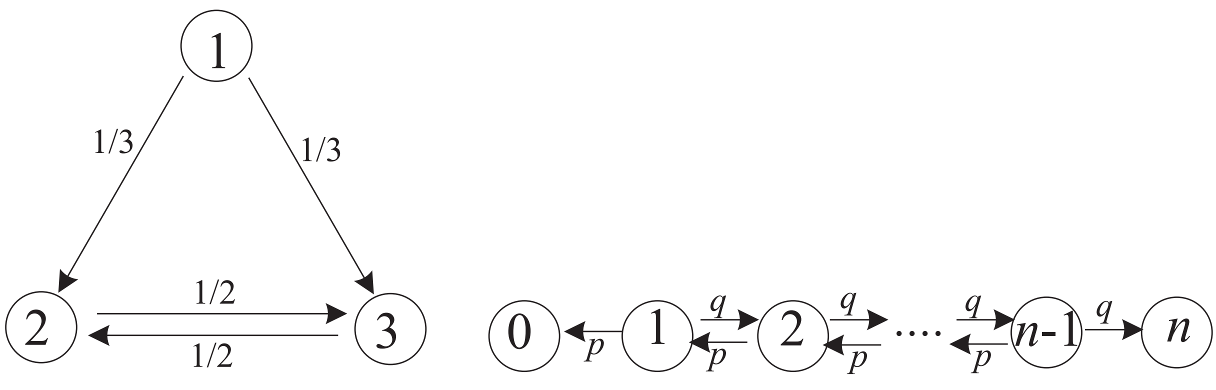

Рис. 7.

Для систем с конечным числом состояний граф позволяет легко определить типы как отдельных состояний, так и системы в целом. Ниже мы познакомимся с терминологией, которая принята для классификации отдельных состояний и их множеств.

Состояние i, для которого вероятность в конце концов вернуться в это же состояние[1)] равна 1, называется *возвратным*. Если указанная вероятность меньше 1, то состояние *невозвратное*. Состояние j *достижимо* из состояния i, если $p_{ij}^{(n)} > 0$. Состояние i называется *периодическим* с периодом $T > 1$, если $p_{ii}^{(n)} = 0$ для любого n не кратного T и T — наименьшее целое число, обладающее этим свойством (т. е. система не может вернуться в состояние i за время, отличное от T, $2T$, $3T$ и т. д.). Возвратное непериодическое состояние называется *эргодическим*.

Множество состояний A называется *замкнутым*, если никакое состояние вне A не может быть достигнуто ни из какого состояния, входящего в A. Очевидно, что поглощающее состояние является замкнутым множеством, состоящим из одного состояния. Для того, чтобы множество было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы все вероятности $p_{ij} = 0$ для всех состояний i, входящих в A и всех j, не входящих в A. Цепь Маркова называется *неприводимой*, если в ней нет никаких замкнутых множеств, кроме множества всех состояний. Имеет место *критерий неприводимости*: цепь Маркова является неприводимой тогда и только тогда, когда любое ее состояние может быть достигнуто из любого другого состояния.

Вектор состояния $S = (s_1, \ldots, s_N)$ называется *стационарным*, если

$$s_i = \sum_{j=1}^{N} s_j p_{ji} \qquad \text{или} \qquad S = S\mathcal{P}. \tag{4.21}$$

Если начальное распределение стационарно, то все последующие переходы оставляют его без изменения. С физической точки зрения это можно рассматривать как «независимость» поведения системы от времени. Часто такое поведение обусловлено большим числом процессов в системе, происходящих одновременно. Несмотря на составляющие могут переходить из одного состояния в другое, вероятности этих состояний не меняются, а это значит, что не меняются и другие важные характеристики системы[1)]. Макроскопическое равновесие поддерживается за счет большого числа микроскопических переходов в противоположных направле-

[1)]Мы не будем останавливаться на деталях вычисления такой вероятности, поскольку они несущественны для нашего краткого изложения. Также мы опускаем в изложении нулевые состояния, так как они реализуются только для бесконечного числа состояний. Все подробности заинтересованный читатель может найти, например, в [8].

[1)]Речь идет о средних, вычисление которых будет описано в разделе «Случайные величины».

ниях. В этом случае принято говорить о *статистическом равновесии*.

Пример 4.7. Частицы могут находиться в двух состояниях, между которыми возможны переходы с вероятностями, определяемыми матрицей

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найти стационарный вектор системы.

Решение. Уравнения (4.21) дают

$$q_1 = \frac{1}{3}\,q_1 + \frac{1}{2}\,q_2, \qquad q_2 = \frac{2}{3}\,q_1 + \frac{1}{2}\,q_2.$$

Детерминант системы (4.21) всегда равен нулю, поэтому из двух уравнений независимым является только одно. Второе независимое уравнение — это условие нормировки $q_1 + q_2 = 1$. Решением этой системы будет $q_1 = 3/7$, $q_2 = 4/7$.

Данное решение можно интерпретировать следующим образом. Если большое число частиц первоначально разместить в этих состояниях так, что $3/7$ будет находиться в первом состоянии, а $4/7$ — во втором, то это распределение будет оставаться таким же и впредь, хотя отдельные частицы будут менять свое состояние. Переходы одних частиц из первого состояния во второе будут компенсироваться обратными переходами других частиц. □

Теорема 4.6. (Эргодическая теорема) Если в неприводимой непериодической цепи Маркова все состояния эргодические, то для любого $i = 1, \ldots, N$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = s_j > 0,$$

где s_j — компоненты стационарного вектора.

Данная теорема, которую мы примем без доказательства имеет важное следствие, которое интерпретируется как стремление системы к равновесию.

Теорема 4.7. Если в неприводимой непериодической цепи Маркова все состояния эргодические, то для любого начального вектора состояний $Q = (q_1, \ldots, q_N)$ выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} Q\mathcal{P}^n = S, \tag{4.22}$$

где S — стационарный вектор.

Доказательство. Запишем предел в левой части (4.22) покомпонентно:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} q_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} q_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} q_i s_j = s_j \sum_{i=1}^{N} q_i = s_j. \tag{4.23}$$

Здесь мы последовательно применили эргодическую теорему и использовали условие нормировки вектора состояния. ■

Приложения

Приложение 1. Элементы комбинаторики

При решении многих задач по теории вероятностей необходимо подсчитать число элементарных событий, составляющих благоприятный исход. Будем рассматривать только конечные множества, из которых по тем или иным правилам выбирается какой-либо набор элементов.

Пусть каждая такая выборка может содержать только различные элементы множества.

Размещение есть упорядоченная выборка m элементов из n возможных. Число возможных размещений можно вычислить следующим образом: первый элемент может быть выбран n способами, второй — n–1 способом, третий — $n-2$ способами и т. д. В результате

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (\text{П.1})$$

Перестановка — это частный случай размещения, когда в выборку входят все элементы множества, то есть $m = n$:

$$P_n = A_n^n = n! \qquad (\text{П.2})$$

Сочетание есть неупорядоченная выборка m элементов из n возможных. Число сочетаний можно получить, если число размещений A_n^m разделить на число возможных перестановок внутри каждого размещения P_m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \qquad (\text{П.3})$$

Например, выбирая два из трех элементов a, b, c, мы получаем шесть размещений: ab, ac, ba, bc, ca, cb — и три сочетания: ab, ac, bc.

Если в выборке элементы могут повторяться, то различают следующие типы выборок.

Размещение с повторениями есть упорядоченная выборка m элементов из n возможных, в которой каждый элемент может встречаться более одного раза. При этом может быть, что $m > n$. Каждый элемент выборки может быть выбран n способами, поэтому число таких размещений есть

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m \qquad (\text{П.4})$$

Перестановки с повторениями. Имеются элементы m различных сортов, причем элементов 1-го сорта n_1 штук, 2-го — n_2 штук и т. д., так что $n_1+n_2+\ldots+n_m = n$. Внутри каждого сорта элементы неразличимы. Число различных перестановок получится, если учесть, что в каждой перестановке нам не важен внутренний порядок элементов каждого сорта:

$$P_n(n_1, n_2 \ldots, n_m) = \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_m}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} \qquad (\text{П}.5)$$

Сочетания с повторениями есть неупорядоченная выборка m элементов из n возможных, в которой каждый элемент может встречаться более одного раза. Состав выборки определяется только числом элементов каждого сорта. Число возможных сочетаний можно подсчитать следующим образом. Разместим все элементы выборки на одной прямой, группируя их по сортам. Таких групп будет n штук, включая пустые группы. Отделим группы перегородками, которых будет $n-1$ штука. Заменим каждый элемент любой группы единицей, а перегородку нулем. Число сочетаний с повторениями совпадает с числом перестановок с повторениями $n-1$ нулей и m единиц:

$$\overline{C}_n^m = P_{n+m-1}(n-1, m) = \frac{P_{n+m-1}}{P_m P_{n-1}} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m \qquad (\text{П}.6)$$

Например, выбирая два из трех элементов a, b, c, мы получаем девять размещений с повторениями: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ — и шесть сочетаний с повторениями: aa, bb, cc, ab, ac, bc.

В ряде случаев бывает удобно вместо применения формул (П.1)–(П.6) использовать два основных правила комбинаторики — правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то только один из них может быть выбран $m+n$ способами. Например, если на тарелке лежит два яблока и три груши, то фрукт может быть выбран пятью способами.

Правило произведения. Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то пара a, b может быть выбрана mn способами. В частности, отсюда немедленно следует формула для размещения с повторениями (П.4).

Приложение 2. Формула Стирлинга

Вычисление $n!$ при больших числах n становится весьма трудоемким. В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой

$$\ln n! = n\ln n - n + O(\ln n). \tag{П.7}$$

Мы дадим простое наглядное доказательство формулы (П.7). Из определения $n!$ следует, что

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n\,.$$

Геометрически эту сумму можно представить как сумму площадей прямоугольников, изображенных на рис. 8. С другой стороны площадь по кривой $\ln x$ выражается интегралом

$$\int_1^n \ln x = (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1\,.$$

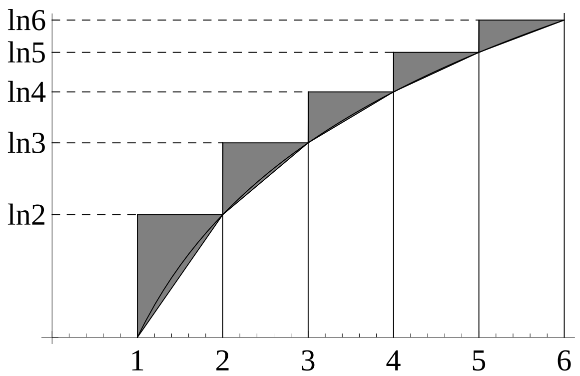

Рис. 8.

Разница между этими площадями не превышает суммарной площади заштрихованных треугольников, которая равна $\frac{1}{2}\ln n$. Таким образом, получим, что

$$n\ln n - n + 1 < \ln n! < n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n\,.$$

Если n велико, то можно положить

$$\ln n! \approx n\ln n - n\,.$$

Более точное приближение дает формула Стирлинга

$$\ln n! = n\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi n} + O(1/n)\,, \tag{П.8}$$

погрешность которой меньше $1\,\%$ уже при $n = 10$.

Приложение 3. Таблица значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0.	0.39894	0.31	0.38023	0.62	0.32918	0.93	0.25888	1.24	0.18494
0.01	0.39892	0.32	0.37903	0.63	0.32713	0.94	0.25647	1.25	0.18265
0.02	0.39886	0.33	0.3778	0.64	0.32506	0.95	0.25406	1.26	0.18037
0.03	0.39876	0.34	0.37654	0.65	0.32297	0.96	0.25164	1.27	0.1781
0.04	0.39862	0.35	0.37524	0.66	0.32086	0.97	0.24923	1.28	0.17585
0.05	0.39844	0.36	0.37391	0.67	0.31874	0.98	0.24681	1.29	0.1736
0.06	0.39822	0.37	0.37255	0.68	0.31659	0.99	0.24439	1.3	0.17137
0.07	0.39797	0.38	0.37115	0.69	0.31443	1.	0.24197	1.31	0.16915
0.08	0.39767	0.39	0.36973	0.7	0.31225	1.01	0.23955	1.32	0.16694
0.09	0.39733	0.4	0.36827	0.71	0.31006	1.02	0.23713	1.33	0.16474
0.1	0.39695	0.41	0.36678	0.72	0.30785	1.03	0.23471	1.34	0.16256
0.11	0.39654	0.42	0.36526	0.73	0.30563	1.04	0.2323	1.35	0.16038
0.12	0.39608	0.43	0.36371	0.74	0.30339	1.05	0.22988	1.36	0.15822
0.13	0.39559	0.44	0.36213	0.75	0.30114	1.06	0.22747	1.37	0.15608
0.14	0.39505	0.45	0.36053	0.76	0.29887	1.07	0.22506	1.38	0.15395
0.15	0.39448	0.46	0.35889	0.77	0.29659	1.08	0.22265	1.39	0.15183
0.16	0.39387	0.47	0.35723	0.78	0.29431	1.09	0.22025	1.4	0.14973
0.17	0.39322	0.48	0.35553	0.79	0.292	1.1	0.21785	1.41	0.14764
0.18	0.39253	0.49	0.35381	0.8	0.28969	1.11	0.21546	1.42	0.14556
0.19	0.39181	0.5	0.35207	0.81	0.28737	1.12	0.21307	1.43	0.1435
0.2	0.39104	0.51	0.35029	0.82	0.28504	1.13	0.21069	1.44	0.14146
0.21	0.39024	0.52	0.34849	0.83	0.28269	1.14	0.20831	1.45	0.13943
0.22	0.3894	0.53	0.34667	0.84	0.28034	1.15	0.20594	1.46	0.13742
0.23	0.38853	0.54	0.34482	0.85	0.27798	1.16	0.20357	1.47	0.13542
0.24	0.38762	0.55	0.34294	0.86	0.27562	1.17	0.20121	1.48	0.13344
0.25	0.38667	0.56	0.34105	0.87	0.27324	1.18	0.19886	1.49	0.13147
0.26	0.38568	0.57	0.33912	0.88	0.27086	1.19	0.19652	1.5	0.12952
0.27	0.38466	0.58	0.33718	0.89	0.26848	1.2	0.19419	1.51	0.12758
0.28	0.38361	0.59	0.33521	0.9	0.26609	1.21	0.19186	1.52	0.12566
0.29	0.38251	0.6	0.33322	0.91	0.26369	1.22	0.18954	1.53	0.12376
0.3	0.38139	0.61	0.33121	0.92	0.26129	1.23	0.18724	1.54	0.12188

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1.55	0.12001	1.96	0.05844	2.37	0.02406	2.78	0.00837	3.19	0.00246
1.56	0.11816	1.97	0.0573	2.38	0.02349	2.79	0.00814	3.2	0.00238
1.57	0.11632	1.98	0.05618	2.39	0.02294	2.8	0.00792	3.21	0.00231
1.58	0.1145	1.99	0.05508	2.4	0.02239	2.81	0.0077	3.22	0.00224
1.59	0.1127	2.	0.05399	2.41	0.02186	2.82	0.00748	3.23	0.00216
1.6	0.11092	2.01	0.05292	2.42	0.02134	2.83	0.00727	3.24	0.0021
1.61	0.10915	2.02	0.05186	2.43	0.02083	2.84	0.00707	3.25	0.00203
1.62	0.10741	2.03	0.05082	2.44	0.02033	2.85	0.00687	3.26	0.00196
1.63	0.10567	2.04	0.0498	2.45	0.01984	2.86	0.00668	3.27	0.0019
1.64	0.10396	2.05	0.04879	2.46	0.01936	2.87	0.00649	3.28	0.00184
1.65	0.10226	2.06	0.0478	2.47	0.01888	2.88	0.00631	3.29	0.00178
1.66	0.10059	2.07	0.04682	2.48	0.01842	2.89	0.00613	3.3	0.00172
1.67	0.09893	2.08	0.04586	2.49	0.01797	2.9	0.00595	3.31	0.00167
1.68	0.09728	2.09	0.04491	2.5	0.01753	2.91	0.00578	3.32	0.00161
1.69	0.09566	2.1	0.04398	2.51	0.01709	2.92	0.00562	3.33	0.00156
1.7	0.09405	2.11	0.04307	2.52	0.01667	2.93	0.00545	3.34	0.00151
1.71	0.09246	2.12	0.04217	2.53	0.01625	2.94	0.0053	3.35	0.00146
1.72	0.09089	2.13	0.04128	2.54	0.01585	2.95	0.00514	3.36	0.00141
1.73	0.08933	2.14	0.04041	2.55	0.01545	2.96	0.00499	3.37	0.00136
1.74	0.0878	2.15	0.03955	2.56	0.01506	2.97	0.00485	3.38	0.00132
1.75	0.08628	2.16	0.03871	2.57	0.01468	2.98	0.0047	3.39	0.00127
1.76	0.08478	2.17	0.03788	2.58	0.01431	2.99	0.00457	3.4	0.00123
1.77	0.08329	2.18	0.03706	2.59	0.01394	3.	0.00443	3.41	0.00119
1.78	0.08183	2.19	0.03626	2.6	0.01358	3.01	0.0043	3.42	0.00115
1.79	0.08038	2.2	0.03547	2.61	0.01323	3.02	0.00417	3.43	0.00111
1.8	0.07895	2.21	0.0347	2.62	0.01289	3.03	0.00405	3.44	0.00107
1.81	0.07754	2.22	0.03394	2.63	0.01256	3.04	0.00393	3.45	0.00104
1.82	0.07614	2.23	0.03319	2.64	0.01223	3.05	0.00381	3.46	0.001
1.83	0.07477	2.24	0.03246	2.65	0.01191	3.06	0.0037	3.47	0.00097
1.84	0.07341	2.25	0.03174	2.66	0.0116	3.07	0.00358	3.48	0.00094
1.85	0.07206	2.26	0.03103	2.67	0.0113	3.08	0.00348	3.49	0.0009
1.86	0.07074	2.27	0.03034	2.68	0.011	3.09	0.00337	3.5	0.00087
1.87	0.06943	2.28	0.02965	2.69	0.01071	3.1	0.00327	3.51	0.00084
1.88	0.06814	2.29	0.02898	2.7	0.01042	3.11	0.00317	3.52	0.00081
1.89	0.06687	2.3	0.02833	2.71	0.01014	3.12	0.00307	3.53	0.00079
1.9	0.06562	2.31	0.02768	2.72	0.00987	3.13	0.00298	3.54	0.00076
1.91	0.06438	2.32	0.02705	2.73	0.00961	3.14	0.00288	3.55	0.00073
1.92	0.06316	2.33	0.02643	2.74	0.00935	3.15	0.00279	3.56	0.00071
1.93	0.06195	2.34	0.02582	2.75	0.00909	3.16	0.00271	3.57	0.00068
1.94	0.06077	2.35	0.02522	2.76	0.00885	3.17	0.00262	3.58	0.00066
1.95	0.05959	2.36	0.02463	2.77	0.00861	3.18	0.00254	3.59	0.00063

Приложение 4. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.	0.	0.31	0.12172	0.62	0.23237	0.93	0.32381	1.24	0.39251
0.01	0.00399	0.32	0.12552	0.63	0.23565	0.94	0.32639	1.25	0.39435
0.02	0.00798	0.33	0.1293	0.64	0.23891	0.95	0.32894	1.26	0.39617
0.03	0.01197	0.34	0.13307	0.65	0.24215	0.96	0.33147	1.27	0.39796
0.04	0.01595	0.35	0.13683	0.66	0.24537	0.97	0.33398	1.28	0.39973
0.05	0.01994	0.36	0.14058	0.67	0.24857	0.98	0.33646	1.29	0.40147
0.06	0.02392	0.37	0.14431	0.68	0.25175	0.99	0.33891	1.3	0.4032
0.07	0.0279	0.38	0.14803	0.69	0.2549	1.	0.34134	1.31	0.4049
0.08	0.03188	0.39	0.15173	0.7	0.25804	1.01	0.34375	1.32	0.40658
0.09	0.03586	0.4	0.15542	0.71	0.26115	1.02	0.34614	1.33	0.40824
0.1	0.03983	0.41	0.1591	0.72	0.26424	1.03	0.34849	1.34	0.40988
0.11	0.0438	0.42	0.16276	0.73	0.2673	1.04	0.35083	1.35	0.41149
0.12	0.04776	0.43	0.1664	0.74	0.27035	1.05	0.35314	1.36	0.41309
0.13	0.05172	0.44	0.17003	0.75	0.27337	1.06	0.35543	1.37	0.41466
0.14	0.05567	0.45	0.17364	0.76	0.27637	1.07	0.35769	1.38	0.41621
0.15	0.05962	0.46	0.17724	0.77	0.27935	1.08	0.35993	1.39	0.41774
0.16	0.06356	0.47	0.18082	0.78	0.2823	1.09	0.36214	1.4	0.41924
0.17	0.06749	0.48	0.18439	0.79	0.28524	1.1	0.36433	1.41	0.42073
0.18	0.07142	0.49	0.18793	0.8	0.28814	1.11	0.3665	1.42	0.4222
0.19	0.07535	0.5	0.19146	0.81	0.29103	1.12	0.36864	1.43	0.42364
0.2	0.07926	0.51	0.19497	0.82	0.29389	1.13	0.37076	1.44	0.42507
0.21	0.08317	0.52	0.19847	0.83	0.29673	1.14	0.37286	1.45	0.42647
0.22	0.08706	0.53	0.20194	0.84	0.29955	1.15	0.37493	1.46	0.42785
0.23	0.09095	0.54	0.2054	0.85	0.30234	1.16	0.37698	1.47	0.42922
0.24	0.09483	0.55	0.20884	0.86	0.30511	1.17	0.379	1.48	0.43056
0.25	0.09871	0.56	0.21226	0.87	0.30785	1.18	0.381	1.49	0.43189
0.26	0.10257	0.57	0.21566	0.88	0.31057	1.19	0.38298	1.5	0.43319
0.27	0.10642	0.58	0.21904	0.89	0.31327	1.2	0.38493	1.51	0.43448
0.28	0.11026	0.59	0.2224	0.9	0.31594	1.21	0.38686	1.52	0.43574
0.29	0.11409	0.6	0.22575	0.91	0.31859	1.22	0.38877	1.53	0.43699
0.3	0.11791	0.61	0.22907	0.92	0.32121	1.23	0.39065	1.54	0.43822

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.55	0.43943	1.76	0.4608	1.97	0.47558	2.36	0.49086	2.78	0.49728
1.56	0.44062	1.77	0.46164	1.98	0.47615	2.38	0.49134	2.8	0.49744
1.57	0.44179	1.78	0.46246	1.99	0.4767	2.4	0.4918	2.82	0.4976
1.58	0.44295	1.79	0.46327	2.	0.47725	2.42	0.49224	2.84	0.49774
1.59	0.44408	1.8	0.46407	2.02	0.47831	2.44	0.49266	2.86	0.49788
1.6	0.4452	1.81	0.46485	2.04	0.47932	2.46	0.49305	2.88	0.49801
1.61	0.4463	1.82	0.46562	2.06	0.4803	2.48	0.49343	2.9	0.49813
1.62	0.44738	1.83	0.46638	2.08	0.48124	2.5	0.49379	2.92	0.49825
1.63	0.44845	1.84	0.46712	2.1	0.48214	2.52	0.49413	2.94	0.49836
1.64	0.4495	1.85	0.46784	2.12	0.483	2.54	0.49446	2.96	0.49846
1.65	0.45053	1.86	0.46856	2.14	0.48382	2.56	0.49477	2.98	0.49856
1.66	0.45154	1.87	0.46926	2.16	0.48461	2.58	0.49506	3.	0.49865
1.67	0.45254	1.88	0.46995	2.18	0.48537	2.6	0.49534	3.2	0.49931
1.68	0.45352	1.89	0.47062	2.2	0.4861	2.62	0.4956	3.4	0.49966
1.69	0.45449	1.9	0.47128	2.22	0.48679	2.64	0.49585	3.6	0.49984
1.7	0.45543	1.91	0.47193	2.24	0.48745	2.66	0.49609	3.8	0.49993
1.71	0.45637	1.92	0.47257	2.26	0.48809	2.68	0.49632	4.	0.49997
1.72	0.45728	1.93	0.4732	2.28	0.4887	2.7	0.49653	4.5	0.5
1.73	0.45818	1.94	0.47381	2.3	0.48928	2.72	0.49674	5.	0.5
1.74	0.45907	1.95	0.47441	2.32	0.48983	2.74	0.49693	5.5	0.5
1.75	0.45994	1.96	0.475	2.34	0.49036	2.76	0.49711	6.	0.5

Литература

[1] А. А. Боровков. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
[2] М. Х. Бренерман. Теория вероятностей. Казань, изд-во КГТУ, 2009.
[3] Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
[4] Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
[5] В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003.
[6] Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
[7] В. А. Попов, М. Х. Бренерман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Казань, изд-во КГУ, 2008.
[8] В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1984.
[9] М. Холл. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
[10] В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.
[11] А. Н. Ширяев. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Оглавление

Попов Владимир Александрович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧАСТЬ 1.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Подписано в печать 23.07.2013. Форм. 60×84 1/16. Гарнитура «Литературная».
Печать ризографическая. Печ. л. 2,75. Тираж 100 экз. Заказ 189.
Лаборатория оперативной полиграфии издательства КФУ
420045, Казань, ул. Кр. Позиция, 2а
Тел. 233–72–12