КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математической статистики

Володин И.Н., Тихонов О.Е., Турилова Е.А.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЕРОЯТНОСТИ

КАЗАНЬ – 2006

П Е Ч А Т А Е Т С Я
ПО РЕШЕНИЮ СЕКЦИИ
НАУЧНО–МЕТОДИЧЕСКОГО СОВЕТА
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Учебное пособие по математическим основам теории вероятностей предназначается для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики по кафедре математической статистики.

В учебном пособии излагаются основные сведения из теории меры и интеграла Лебега, необходимые для понимания основных концепций теории вероятностей: условного математического ожидания и распределения вероястей в функциональных пространствах. Основное внимание уделяется разъяснениям „темных мест“ в доказательствах известных утверждений, не совсем четко излагаемых в традиционных руководствах по теории вероятностей. . Изложение ведется в духе монографий Ж.Неве [1] и А.Н.Ширяева [4] с привлечением ряда конструкций из учебников [2] и [3]. Разработки соответствуют семестровому курсу лекций по математическим основам теории вероятностей.

Литература:

1. Ж.Неве. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1969.
2. М.Лоев. Теория вероятностей. – М.: ИЛ, 1962.
3. А.А.Боровков. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1972.
4. А.Н.Ширяев. Вероятность. – М.: Наука, 1980. глава II.

Оглавление

§1. Алгебра событий 5

§2. Вероятность на булевой алгебре 15

§3. Булева σ-алгебра 20

§4. Вероятность на булевой σ-алгебре. Вероятностное пространство . 29

§5. Продолжение вероятности с булевой алгебры на порожденную σ-алгебру 39

§6. Продолжение вероятности с полуалгебр и компактных классов. Функции распределения 49

§7. Измеримые отображения 59

§8. Действительные случайные величины 63

§9. Математическое ожидание (интеграл Лебега по вероятностной мере 72

§10. Сходимость последовательностей случайных величин 83

§11. Сходимость распределений случайных величин 91

§12. Меры 105

§13. Функции плотности 119

§14. Условное математическое ожидание 126

§15. Независимость 137

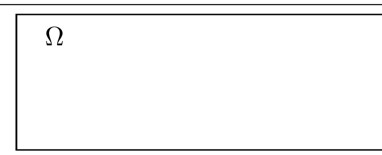
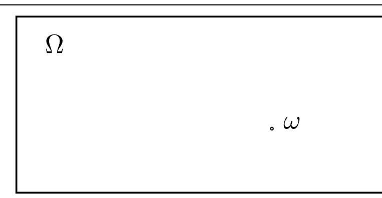
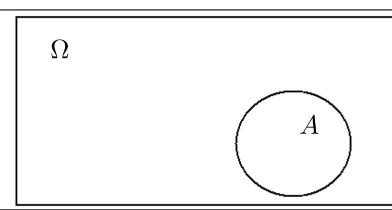
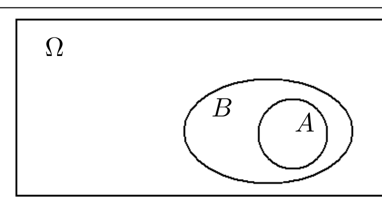
§16. Вероятность на произведении двух измеримых пространств . . 142

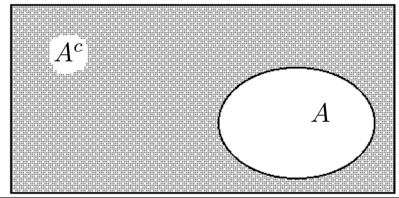
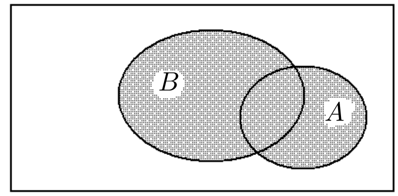
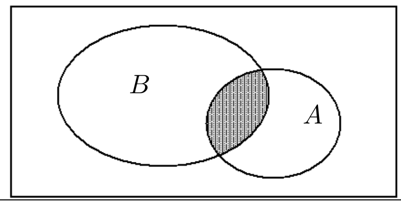
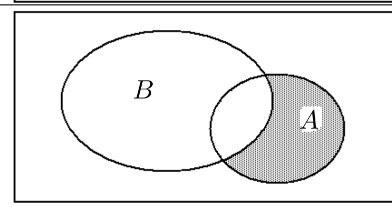
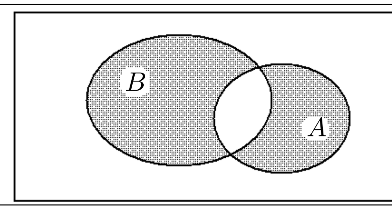
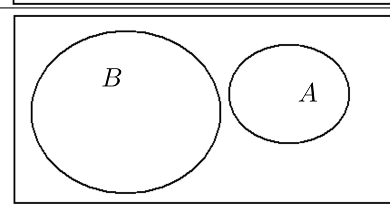
§17. Вероятность на бесконечном произведении измеримых пространств 148

Русско-английский терминологический словарь 156

§ 1. **Алгебра событий**

Аксиоматическое построение теории вероятностей начинается с формализации (описания) *пространства* Ω *элементарных исходов* ω некоторого статистического эксперимента. Определенные (см. ниже) подмножества пространства Ω называются *событиями*; говорят, что произошло событие A $(\subset \Omega)$, если статистический эксперимент закончился элементарным исходом $\omega \in A$. Над событиями A, как подмножествами пространства Ω, вводятся теоретико-множественные операции, вероятностная трактовка которых приводится в следующей таблице.

Теоретико-множественные объекты и операции	Вероятностная трактовка	Геометрическая интерпретация
Ω – множество	пространство элементарных исходов, *достоверное событие*	
ω – элемент Ω	элементарный исход эксперимента, элементарное событие	
A – подмножество множества Ω	событие	
$\emptyset$ – пустое множество	*невозможное событие*	
$A \subset B$ – подмножество A есть часть B (A содержится в B)	событие A *влечет* событие B	

A^c – дополнение подмножества A до Ω	событие A не произошло	
$A \cup B$ – объединение подмножеств A и B	Произошло по крайней мере одно из событий A или B	
$A \cap B$ – пересечение подмножеств A и B	Произошли одновременно оба события A и B	
$A \backslash B$ – разность: из подмножества A вычитается подмножество B	Произошло событие A, в то время как событие B не произошло	
$A \triangle B$ – симметрическая разность подмножеств A и B	Произошло или только событие A или только событие B	
$A \cap B = \emptyset$ – множества A и B не имеют общих точек (не пересекаются)	События A и B *несовместны*	

Если рассматривать введенные операции над множествами как алгебраические, то Ω выступает в роли „единицы“ алгебры, а $\emptyset$ – в роли ее „нуля“ , что видно из следующих равенств:

$$A \subset \Omega, \qquad \Omega^c = \emptyset, \qquad \emptyset^c = \Omega, \qquad (A^c)^c = A;$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup A^c = \Omega;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Операции объединения и пересечения распространяются на любое, возможно несчетное, семейство $\{A_i, \ i \in I\}$ событий:

$\bigcup_{i\in I} A_i$ – произошло по крайней мере одно из событий семейства $\{A_i, i\in I\}$,

$\bigcap_{i\in I} A_i$ – произошли одновременно все события семейства $\{A_i, i\in I\}$.

В связи с определением порядка по „включению“ часто используют обозначения

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \sup_{i\in I} A_i, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \inf_{i\in I} A_i,$$

поскольку объединение подмножеств есть наименьшее подмножество, содержащее все $A_i,\ i\in I$, (сравните с определением точной верхней грани множества действительных чисел). Аналогично, пересечение подмножеств есть наибольшее подмножество, содержащееся во всех $A_i,\ i\in I$.

Если элементы семейства $\{A_i,\ i\in I\}$ попарно не пересекаются: $A_i\bigcap A_j=\emptyset$ при $i\neq j$, или, что то же, события A_i, $i\in I$, несовместны, то вместо знака $\bigcup$ используется знак „прямой суммы“ $\sum$ (или $+$):

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \sum_{i\in I} A_i, \qquad A_i\bigcup A_j = A_i + A_j.$$

Имеют место *правила двойственности*:

$$\Big(\bigcup_I A_i\Big)^c = \bigcap_I A_i^c, \qquad \Big(\bigcap_I A_i\Big)^c = \bigcup_I A_i^c.$$

Если I – пустое множество индексов, то естественно принять за аксиому, что $\bigcup_I A_i=\emptyset$, и тогда приходим к равенству $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i=\Omega$.

Напомним, что операции объединения и пересечения обладают свойствами

коммутативности: $A\underset{\bigcap}{\bigcup} B = B\underset{\bigcap}{\bigcup} A$,

ассоциативности: $\Big(A\underset{\bigcap}{\bigcup} B\Big)\underset{\bigcap}{\bigcup} C = A\underset{\bigcap}{\bigcup}\Big(B\underset{\bigcap}{\bigcup} C\Big)$,

дистрибутивности: $B\bigcap(\bigcup_I A_i) = \bigcup_I (A_i\bigcap B)$,
$B\bigcup(\bigcap_I A_i) = \bigcap_I (A_i\bigcup B)$.

Отношение принадлежности $A\subset B$ порождает частичный порядок на подмножествах пространства Ω, так что отношение эквивалентности (равенства) $A = B$ двух событий означает, что одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

При „измерении“ (вычислении вероятности) события A, представленного в виде объединения конечного числа произвольных событий, бывает полезно записать A в виде объединения несовместных событий. Следующие предложения указывают некоторые варианты таких представлений.

Предложение 1.1. *Для всякого набора* $\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ *подмножеств множества* Ω *справедлива формула*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) =$$

$$A_1 + A_2 \backslash A_1 + A_3 \backslash (A_1 \cup A_2) + \cdots + A_n \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right). \qquad (1.1)$$

Доказательство. Разбиение $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ на сумму непересекающихся подмножеств в соответствии с представлением (1.1), иллюстрирует рисунок 1.1, на котором слагаемые в правой части (1.1) выделены различной штриховкой; строгое доказательство проводится методом математической индукции.

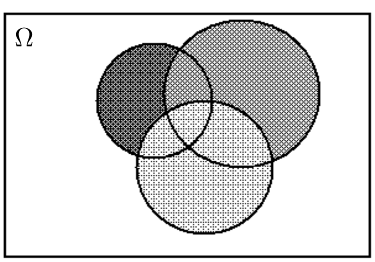


Рис. 1.1

При $n = 1$ получаем тождество $A_1 = A_1$; при $n = 2$ – очевидное равенство

$$A_1 \bigcup A_2 = A_1 + (A_2 \setminus A_1). \qquad (1.2)$$

Пусть теперь (1.1) верно для некоторого n; покажем, что тогда аналогичное представление имеет место при $n + 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \sum_{i=1}^{n+1} A_i \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right).$$

Используя равенство $B\bigcup A = B+(A\setminus B)$ с $B=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и $A = A_{n+1}$ (сравните с (1.2)) и предположение индукции, получаем

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\bigcup A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i + A_{n+1}\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) + A_{n+1}\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

$\triangle$

Предложение 1.2. *Для всякого набора* $\{A_i,\ i=1,\ldots,n\}$ *подмножеств пространства* Ω *имеет место представление*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum\bigcap_{i=1}^{n} A'_i, \tag{1.3}$$

где суммирование распространяется на 2^n-1 *индексов, участвующих в записи* $\bigcap_{i=1}^{n} A'_i$*, в которой каждое* A'_i *равно или* A_i*, или* A_i^c*, кроме того случая, когда все* $A'_i = A_i^c \quad i=1,\ldots,n$.

Доказательство. Способ (1.3) разбиения $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ указан на рисунке 1.2 для случая $n=3$. Для произвольного n равенство (1.3) устанавливается путем следующих рассуждений. Если ω принадлежит левой части (1.3), то ω принадлежит по крайней мере одному A_i, например, A_1. Но это же подмножество A_1 представлено полностью и в правой части (1.3):

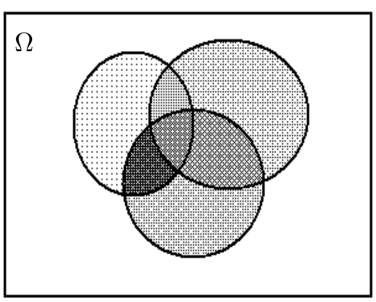


Рис. 1.2

$$A_1 = A_1\bigcap\left(\sum\bigcap_{i=2}^{n} A'_i\right), \tag{1.4}$$

где суммирование распространяется на $2^{n-1}-1$ индексов, исчерпывающих всевозможные комбинации A_i и A_i^c, $i=2,\ldots,n$, причем равенство (1.4) следует из разбиения

$$\Omega = \sum\bigcap_{i=2}^{n} A'_i \tag{1.5}$$

пространства Ω на части, принадлежащие или отдельным A_i или их дополнениям A_i^c.

Равенство (1.4) позволяет установить и обратное включение: если ω принадлежит правой части (1.3), то оно принадлежит по крайней мере одному из A_i, а следовательно, и левой части (1.3).

$\triangle$

Следствие 1.1. *Для любого набора $\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ подмножеств пространства Ω справедливо представление этого пространства в виде*

$$\Omega = \sum \bigcap_{i=1}^{n} A_i',$$

где суммирование распространяется на все 2^n множеств, участвующих в записи $\bigcap_{i=1}^{n} A_i'$, в которой каждое A_i' равно или A_i, или A_i^c.

Доказательство. Смотри (1.5).

$\triangle$

Введенные выше операции над множествами определяют структуру булевой алгебры: имеет место

Определение 1.1. *Булевой алгеброй* называется такой класс $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, что

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(3) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

Замечание. Используя метод индукции, легко показать, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ включение $\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{A}$ влечет $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. Так как $\Omega^c = \emptyset$, то $\emptyset \in \mathcal{A}$. Из правила двойственности вытекает, что

$$\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A},$$

ибо

$$\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \{A_i^c,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c =$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c \right]^c \in \mathcal{A}.$$

Таким образом, булева алгебра $\mathcal{A}$ содержит $\varnothing$, Ω, замкнута относительно взятия дополнения, а также относительно операций пересечения или объединения конечного числа ее элементов.

Примеры булевых алгебр:

1. Самая „тонкая“ булева алгебра: множество $\mathcal{P}(\Omega)$ всевозможных подмножеств пространства Ω, включая пустое множество $\varnothing$, как подмножество любого Ω.

2. Самая „грубая“ булева алгебра $\mathcal{A} = \{\varnothing,\ \Omega\}$.

3. Булева алгебра, порожденная событием A: $\mathcal{A} = \{\varnothing,\ \Omega,\ A,\ A^c\}$.

В приложениях булевы алгебры обычно строятся по некоторым заданным классам подмножеств пространства Ω и по своей структуре аналогичны примеру 3.

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{C}$ – некоторый класс подмножеств пространства Ω. *Булевой алгеброй, порожденной классом* $\mathcal{C}$, называется наименьшая булева алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$, содержащая класс $\mathcal{C}$.

Для любого класса $\mathcal{C}$ существует булева алгебра, содержащая $\mathcal{C}$; примером такой алгебры может служить $\mathcal{P}(\Omega)$ – класс всевозможных подмножеств пространства Ω.

Предложение 1.3. *Для всякого класса $\mathcal{C}$ подмножеств пространства Ω существует наименьшая булева алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$, содержащая класс $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Искомая алгебра есть пересечение всех булевых алгебр, содержащих класс $\mathcal{C}$: $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \bigcap \mathcal{A}_i$, где $\mathcal{A}_i \supset \mathcal{C}$. Чтобы доказать это, проверим аксиомы булевой алгебры (см. определение 1.1).

(1). Пространство $\Omega \in \mathcal{A}$, так как Ω принадлежит всем $\mathcal{A}_i$.

(2). Соотношение $A \in \mathcal{A}$ влечет, что A принадлежит всем $\mathcal{A}_i$. Так как $\mathcal{A}_i$ – булевы алгебры, то $A^c \in \mathcal{A}_i$ при любом i влечет $A^c \in \mathcal{A}$.

(3). Соотношение $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A, B \in \mathcal{A}_i$, $\forall\, i$. Так как $\mathcal{A}_i$ – булевы алгебры, то $A \bigcap B \in \mathcal{A}_i$, $\forall i \implies A \bigcap B \in \mathcal{A}$.

Установим теперь минимальность $\mathcal{A}$. Если существует булева алгебра $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$, то $\mathcal{A}'$ является одним из $\mathcal{A}_i$, участвующих в определении $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}_i$, откуда следует, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ и, таким образом, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

$\triangle$

Обратимся теперь к конструктивным методам построения булевых алгебр, порождаемых классами множеств, ибо предложение 1.3 есть только теорема существования таких алгебр. Наиболее просто конструируется булева алгебра, порожденная следующим классом подмножеств Ω.

Определение 1.3. *Конечным разбиением* пространства элементарных исходов Ω называется семейство $\mathcal{D} = \{D_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ непустых попарно непересекающихся, $D_i \bigcap D_j = \emptyset$, $i \neq j$, подмножеств Ω, которые в объединении дают все Ω $\left(= \sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right)$.

Предложение 1.4. *Булева алгебра, порожденная разбиением $\mathcal{D}$ пространства Ω, состоит из всевозможных объединений элементов разбиения $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Ясно, что любое подмножество вида $A = \sum\limits_{i \in I} D_i$, где I – любой набор индексов от 1 до n (включая $I = \emptyset$!), принадлежит $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, и для доказательства предложения остается показать, что любое $A \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ имеет такой вид. Однако последнее утверждение очевидно следует из определения порожденной булевой алгебры и легко проверяемого факта, что подмножества указанного вида $A = \sum\limits_{i \in I} D_i$ образуют булеву алгебру.

$\triangle$

Доказанное предложение совместно со следствием 1.1 указывает строение булевых алгебр, порождаемых любым конечным набором $\{A_i,$

$i = 1, \ldots, n\}$ подмножеств Ω. Конструкцию порожденных алгебр для произвольных классов устанавливает

Предложение 1.5. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный класс подмножеств пространства Ω. Образуем последовательно*

1) *класс $\mathcal{C}_1$, состоящий из элементов $\mathcal{C}$, их дополнений, а также содержащий $\emptyset$ и Ω, то есть $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1$, $A \in \mathcal{C}_1 \Longrightarrow A^c \in \mathcal{C}_1$ и $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}_1$;*

2) *класс $\mathcal{C}_2$ конечных пересечений элементов $\mathcal{C}_1$, то есть $A \in \mathcal{C}_2 \Longrightarrow A = \bigcap_{i=1}^n B_i$, где $\{B_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}_1$;*

3) *класс $\mathcal{C}_3$ конечных объединений попарно непересекающихся элементов $\mathcal{C}_2$, то есть $A \in \mathcal{C}_3 \Longrightarrow A = \displaystyle\sum_{i=1}^n B_i$, где $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, и $\{B_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}_2$.*

Тогда $\mathcal{C}_3$ есть булева алгебра, порожденная классом $\mathcal{C}$.

Доказательство. Проверим аксиомы булевой алгебры для $\mathcal{C}_3$ и установим ее минимальность.

Аксиома (1). Так как $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_3$ и $\Omega \in \mathcal{C}_1$, то $\Omega \in \mathcal{C}_3$.

Аксиома (3). Покажем справедливость импликации $\{A_i,\ i = \overline{1,n}\} \subset \mathcal{C}_3 \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}_3$. По определению класса $\mathcal{C}_3$ его элементы $A_i = \displaystyle\sum_{j \in I_i} B_{ij}$, причем $B_{ij} \in \mathcal{C}_2$. Используя это представление A_i, $i = 1, \ldots, n$, находим:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \sum_{j \in I_i} B_{ij} = \sum_{j_1 \in I_1} \cdots \sum_{j_n \in I_n} \bigcap_{i=1}^n B_{i j_i}. \tag{1.6}$$

Но класс $\mathcal{C}_2$ замкнут относительно операции пересечения, так что $\bigcap_{i=1}^n B_{i j_i} \in \mathcal{C}_2$. Следовательно, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ представлено в виде объединения (см. (1.6)) попарно непересекающихся элементов класса $\mathcal{C}_2$, и, таким образом, $\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}_3 \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}_3$.

Аксиома (2). Установим справедливость импликации $A \in \mathcal{C}_3 \Longrightarrow A^c \in \mathcal{C}_3$. Для этого покажем сначала, что $B \in \mathcal{C}_2 \Longrightarrow B^c \in \mathcal{C}_3$.

Действительно, $B \in \mathcal{C}_2 \Longrightarrow B = \bigcap_{i=1}^n C_i$, где $\{C_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}_1$.

В силу предложения 1.2

$$B^c = \bigcup_{i=1}^{n} C_{\,i}^{\,c} = \sum \bigcup_{i=1}^{n} C_{\,i}^{\,\prime},$$

где суммирование распространяется на $2^n - 1$ индексов, указанных в формулировке этого предложения. Но класс $\mathcal{C}_1$ замкнут относительно взятия дополнения, так что все $C_{\,i}^{\,\prime} \in \mathcal{C}_1$ и, следовательно, $\bigcap_{\,i=1}^{\,n} C_{\,i}^{\,\prime}$ есть элемент класса $\mathcal{C}_2$. Наконец, так как B^c есть объединение непересекающихся элементов $\mathcal{C}_2$, то $B^c \in \mathcal{C}_3$.

Теперь импликация $A \in \mathcal{C}_3 \Longrightarrow A^c \in \mathcal{C}_3$ следует из представления $A = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{\,i}$ с $\{B_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}_2$. Действительно, в силу правила двойственности $A^c = \bigcap_{\,i=1}^{\,n} B_{\,i}^{\,c}$, и так как $B_{\,i} \in \mathcal{C}_2 \Longrightarrow B_{\,i}^{\,c} \in \mathcal{C}_3$, а класс $\mathcal{C}_3$ по доказанному выше замкнут относительно операций пересечения, то $\bigcap_{i=1}^{n} B_{\,i}^{\,c} = A^c \in \mathcal{C}_3$.

Итак, $\mathcal{C}_3$ – булева алгебра, содержащая $\mathcal{C}$. Ее минимальность следует из того, что любая булева алгебра, содержащая класс $\mathcal{C}$, должна содержать и классы $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ – в противном случае нарушаются аксиомы булевой алгебры (см. определение 1.1). $\triangle$

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Пусть Ω – некоторое множество и $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A$ конечно или A^c конечно$\}$. Проверить, что $\mathcal{A}$ есть булева алгебра.

1.2. Может ли булева алгебра состоять из пяти элементов? Из шести элементов? Из семи?

1.3. Пусть $\Omega = [\,0;\ 1\,]$. Перечислить элементы $\mathcal{A}\ (\ \{[\,0;\ 2/3\,],\ [\,1/3;\ 1\,]\}\ )$ – булевой алгебры, порожденной двумя отрезками: $[\,0;\ 2/3\,]$ и $[\,1/3;\ 1\,]$. Описать $\mathcal{A}\ (\ \{[\,0;\ 2/3\,],\quad [\,1/3;\ 1\,]\}\ )$ в случае, если в качестве Ω взять всю числовую ось R. Из скольки элементов состоят эти булевы алгебры?

1.4. Описать булеву алгебру, порожденную классом всех одноточечных подмножеств некоторого множества Ω.

Литература: Ж.Неве, стр. 15–25.

§ 2. **Вероятность на булевой алгебре**

Определение 2.1. *Вероятностью* P на булевой алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется отображение $\mathcal{A}$ в сегмент $[0;\ 1]$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(а) $P(\Omega) = 1$;

(б) $P\Big(\sum\limits_{i\in I} A_i\Big) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)$

для любого конечного семейства $\{A_i,\ i \in I\}$ несовместных событий (попарно непересекающихся элементов $\mathcal{A}$);

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, какова бы ни была монотонно стремящаяся к $\emptyset$ последовательность событий из $\mathcal{A}$, то есть такая последовательность, что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Аксиома (а) выражает свойство *нормированности* вероятности P как меры на $\mathcal{A}$, аксиома (б) – *конечной аддитивности* P, аксиома (в) – *непрерывности* P.

В дальнейшем *монотонные пределы* A последовательностей $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ подмножеств Ω будут записываться в виде $A_n \uparrow A$ или $A = \lim\limits_n\uparrow A_n$, если $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, и $A_n \downarrow A$ или $A = \lim\limits_n\downarrow A_n$, если $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. В первом случае $A = \bigcup_1^{\infty} A_n$, а во втором – $A = \bigcap_1^{\infty} A_n$. Отметим также, что для любой последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ объединение $\bigcup_1^{\infty} A_n$ можно представить в виде монотонного предела последовательности $\{B_n = \bigcup_{m=1}^{n} A_m,\ n \geqslant 1\}$, так как, очевидно,

$$B_n \uparrow \bigcup_1^{\infty} A_i.$$

Аналогично,

$$\bigcap_1^{\infty} A_n = \lim_n \downarrow \bigcap_{m=1}^{n} A_m.$$

Предложение 2.1. *Вероятность P на булевой алгебре $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:*

(1) $P(\varnothing) = 0$;

(2) *если* $A \subset B$, *то* $P(A) \leqslant P(B)$ *(свойство монотонности* P *) и* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(свойство сильной аддитивности* P *);*

(4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ *(свойство полуаддитивности);*

(5) *если* $A_n \downarrow A$ *в* $\mathcal{A}$, *то* $P(A_n) \downarrow P(A)$, *и если* $A_n \uparrow A$, *то* $P(A_n) \uparrow P(A)$ *(свойство непрерывности* P *относительно монотонной сходимости);*

(6) $P\Big(\sum\limits_{1}^{\infty} A_n\Big) = \sum\limits_{1}^{\infty} P(A_n)$, *если* $\sum\limits_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(свойство* σ*-аддитивности или счетной аддитивности* P *);*

(7) $P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{1}^{\infty} P(A_n)$, *если* $\bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(свойство* σ*-полуаддитивности).*

Доказательство. (1). $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) \Longrightarrow P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega) \Longrightarrow P(\varnothing) = 0$.

(2). Если $A \subset B$, то $B = A + (B \setminus A)$. В силу аддитивности вероятности $P(A) = P(B) + P(B \setminus A)$, откуда $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, и, поскольку $P(A) \geqslant 0, \forall A$, то $P(A) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A)$.

(3). Так как $A \bigcup B = A + (B \setminus (A \bigcap B))$ (см. формулу (1.2)) и $A \bigcap B \subset B \Longrightarrow P(B \setminus (A \bigcap B)) = P(B) - P(A \bigcap B)$ (см. только что доказанное свойство (2) вероятности P), то, в силу аддитивности P, $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B \setminus (A \bigcap B)) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

(4). В силу предложения 1.1

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \Big).$$

Используя свойство аддитивности и монотонности (2) вероятности P, получаем

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P\Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(5). Если $A_n \downarrow A$ в $\mathcal{A}$, то $A_n = A + (A_n \setminus A)$ и $P(A_n) = P(A) + P(A_n \setminus A)$. Но $A_n \downarrow A \Longrightarrow A_n \setminus A \downarrow \varnothing$, откуда в силу непрерывности P предел $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n \setminus A) = 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$. Аналогично, если $A_n \uparrow A$ в $\mathcal{A}$, то A представимо в виде $A = A_n + A \setminus A_n$, и требуемое свойство P вытекает из ее непрерывности и того, что $A \setminus A_n \downarrow \varnothing$.

(6). Положим $A = \sum\limits_1^{\infty} A_i \ (\in \mathcal{A})$. Так как $\sum\limits_1^{n} A_i \uparrow A$, то, используя только что доказанное свойство (5) и аддитивность P, получаем

$$P\Big(\sum_1^{\infty} A_i\Big) = P\Big(\lim_n\!\uparrow \sum_1^{n} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_1^{n} A_i\Big) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^{n} P(A_i) = \sum_1^{\infty} P(A_i).$$

(7). Используя свойство полуаддитивности (4) и непрерывности относительно монотонной сходимости (5), находим:

$$P\Big(\bigcup_1^{\infty} A_i\Big) = P\Big(\lim_n\!\uparrow \bigcup_1^{n} A_i\Big) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_1^{n} A_i\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_1^{n} P(A_i) = \sum_1^{\infty} P(A_i).$$

$\triangle$

Из доказанных свойств вероятности P на булевой алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω особо следует отметить свойство σ-аддитивности (6), которое часто используется в аксиоматическом определении вероятности вместо аксиом (б) и (в). Эквивалентность σ-аддитивности P и ее конечной аддитивности и непрерывности устанавливает

Предложение 2.2. *Для того чтобы отображение P булевой алгебры $\mathcal{A}$ на отрезок $[0;1]$ было вероятностью, необходимо и достаточно, чтобы*

(a) $P(\Omega) = 1$*;*

(б) $P\Big(\sum\limits_{i\in I} A_i\Big) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)$ *для любого не более чем счетного семейства* $\{A_i,\ i\in I\}$ *попарно-непересекающихся событий из* $\mathcal{A}$, *такого, что* $\sum\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пункт (6) предложения 2.1 устанавливает необходимость условия σ-аддитивности для того, чтобы P была вероятностью. Для доказательства достаточности рассмотрим любую монотонно убывающую к $\emptyset$ последовательность событий $\{A_n,\ n\geqslant 1\}\subset\mathcal{A}$. Используя равенства

$$A_n = \sum_{m\geqslant n} (A_m \setminus A_{m+1}),\ n = 1, 2, \ldots,$$

получаем

$$P(A_n) = \sum_{m\geqslant n} P(A_m\setminus A_{m+1}) \to 0$$

при $n\to\infty$, ибо ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m\setminus A_{m+1}) = P(A_1) \leqslant 1$$

сходится и, следовательно, его остаток стремится к нулю.

$\triangle$

Свойство σ-аддитивности и его роль в аксиоматике теории вероятностей связаны, в основном, с часто встречающейся задачей вычисления вероятности события A, представимого в виде счетного объединения несовместных событий: $A = \sum\limits_{1}^{\infty} A_i$. Естественно, включение $A\in\mathcal{A}$ выполняется не всегда ($\mathcal{A}$ замкнута относительно конечных объединений), и возникает проблема продолжения P на более широкий, чем булева алгебра, класс подмножеств Ω (или задания P непосредственно на этом классе). Решение проблемы продолжения P будет дано в § 5 после более подробного изучения класса подмножеств Ω, замкнутых относительно объединений и пересечений счетного числа элементов этого класса.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Показать, что на произвольной булевой алгебре подмножеств непустого множества Ω всегда можно задать некоторую вероятность. (*Указание:* положить $P(A) = 1$, если $\omega_0 \in A$, и $P(A) = 0$, если $\omega_0 \notin A$.)

2.2. Пусть Ω – некоторое бесконечное множество, $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A$ конечно или A^c конечно$\}$ (см. упр. 1.1). Для $A \in \mathcal{A}$ положим:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ конечно;} \\ 1, & \text{если } A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Доказать, что отображение $\mu : \mathcal{A} \to [\,0;\ 1\,]$ всегда конечно аддитивно, в случае счетного Ω не является σ-аддитивным, а в случае несчетного Ω (например, $\Omega = [\,0;\ 1\,]$) будет σ-аддитивным.

Литература: Ж.Неве, стр. 26–29.

§ 3. Булева σ-алгебра

Определение 3.1. *Булевой σ-алгеброй* или *борелевским полем* называется класс $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω

(1) содержащий Ω;

(2) замкнутый относительно операции дополнения: $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

(3) замкнутый относительно пересечения счетного числа своих элементов:

$$\{A_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Пара $(\Omega, \mathcal{A})$ называется *измеримым пространством*; элементы A σ-алгебры $\mathcal{A}$ называются *измеримыми множествами* или *событиями*.

Легко видеть (см. замечание после определения 1.1 булевой алгебры), что σ-алгебра содержит также пустое множество $\emptyset$ и замкнута относительно объединения счетного числа своих элементов. Также нетрудно убедиться, что в определении σ-алгебры требование (3) замкнутости относительно пересечения можно заменить на требование замкнутости относительно объединения счетного числа элементов.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный класс подмножеств пространства Ω. Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$, содержащая класс $\mathcal{C}$, называется *σ-алгеброй, порожденной классом* $\mathcal{C}$.

Такая σ-алгебра существует и равна, как и в случае булевых алгебр, пересечению всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{C}$. Нас будет интересовать в первую очередь характеризация σ-алгебр $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A})$, порожденных булевыми алгебрами $\mathcal{A}$. Характеризация будет дана в терминах более простого семейства подмножеств Ω, содержащего $\mathcal{A}$.

Определение 3.3. Класс $\mathcal{M}$ подмножеств Ω называется *монотонным классом*, если он замкнут относительно операций монотонных пределов $\lim\limits_n\uparrow$ и $\lim\limits_n\downarrow$.

Тривиальными примерами монотонных классов являются произвольный конечный класс подмножеств и класс $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω.

Предложение 3.1. *Для того чтобы булева алгебра $\mathcal{A}$ была σ-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была монотонным классом.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – монотонный класс, так как σ-алгебра замкнута относительно операций над счетным числом своих элементов.

Достаточность. Пусть булева алгебра $\mathcal{A}$ является монотонным классом. Тогда она обладает всеми свойствами σ-алгебры, кроме, может быть, замкнутости относительно пересечения немонотонных последовательностей своих элементов. Но, как было замечено в начале §2, пересечение счетного числа множеств всегда можно представить в виде монотонного предела:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_n\downarrow \bigcap_{m\leqslant n} A_m.$$

Так как

$$B_n = \bigcap_{m\leqslant n} A_m \in \mathcal{A}$$

(см. аксиомы булевых алгебр) и $\mathcal{A}$ является монотонным классом, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_n\downarrow B_n \in \mathcal{A}.$$

△

Определение 3.4. Наименьший монотонный класс, содержащий заданный класс $\mathcal{C}$ подмножеств Ω, называется *монотонным классом* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, *порожденным классом* $\mathcal{C}$.

Как и в случаях порожденных булевых алгебр и σ-алгебр, для любого класса $\mathcal{C}$ подмножеств Ω класс $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ всегда существует и строится как пересечение всех монотонных классов, содержащих $\mathcal{C}$.

Предложение 3.2. *Булева σ-алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A})$, порожденная булевой алгеброй $\mathcal{A}$, совпадает с монотонным классом $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, порожденным $\mathcal{A}$: $\quad \mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Булева σ-алгебра $\mathcal{B}$ является монотонным классом, а так как $\mathcal{M}$ – минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$, то $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$.

Установим теперь обратное включение $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{M}$ – булева алгебра. Тогда (см. предложение 3.1) $\mathcal{M}$ является σ-алгеброй, а так как $\mathcal{B}$ – минимальная σ-алгебра, то $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

Аксиома (1) булевой алгебры: $\Omega \in \mathcal{M}$, имеет место, так как $\Omega \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Чтобы проверить аксиому (2): $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}$, рассмотрим подкласс $\mathcal{M}' = \{B \in \mathcal{M} : B^c \in \mathcal{M}\}$ монотонного класса $\mathcal{M}$ и покажем, что в действительности $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Достаточно показать $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, ибо $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ по определению $\mathcal{M}'$. Далее, требуемое $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ будет немедленно вытекать из минимальности $\mathcal{M}$, если установить, что $\mathcal{M}'$ – монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$. Впрочем, последнее ($\mathcal{A} \subset \mathcal{M}'$) выполняется по определению $\mathcal{M}'$: $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow A, A^c \in \mathcal{M}$.

Покажем теперь, что $\mathcal{M}'$ – монотонный класс, то есть замкнут относительно пределов монотонных последовательностей.

Пусть, для определенности, $\{B_n, \; n \geqslant 1\}$ – монотонно убывающая последовательность, все элементы которой принадлежат $\mathcal{M}'$ и, следовательно, обладают свойством $B_n^c \in \mathcal{M}$. Так как $\mathcal{M}$ – монотонный класс, то $B = \lim_n\!\downarrow B_n \in \mathcal{M}$. Но и

$$B^c = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c = \lim_n\!\uparrow B_n^c \in \mathcal{M},$$

ибо $\{B_n^c, \quad n \geqslant 1\}$– монотонно возрастающая последовательность, элементы которой, B_n^c, также принадлежат монотонному классу $\mathcal{M}$. Аналогично устанавливается замкнутость $\mathcal{M}'$ относительно пределов монотонно возрастающих последовательностей из $\mathcal{M}'$. Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Доказательство того, что класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет аксиоме (3): $A, B \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$, проведем с помощью аналогичной конструкции: для каждого $A \in \mathcal{M}$ определим подкласс множеств из $\mathcal{M}$ вида $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M}\}$ и покажем, что $\mathcal{M}_A$ совпадает с $\mathcal{M}$, каково бы ни было $A \in \mathcal{M}$. Как и в случае проверки аксиомы (2) достаточно убедиться, что $\mathcal{M}_A$ – монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$, ибо по определению $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$, а включение $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$ будет вытекать из минимальности $\mathcal{M}$ среди всех монотонных классов, содержащих $\mathcal{A}$.

То, что $\mathcal{M}_A$ – монотонный класс, доказывается столь же просто, как и в случае с аксиомой (2). Если монотонно убывающая последовательность $\{B_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{M}_A (\subset \mathcal{M})$, то $B = \lim\limits_n\!\downarrow B_n \in \mathcal{M}$ и $\{A \cap B_n,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно убывающая последовательность из $\mathcal{M}$, что влечет $\lim\limits_n \downarrow (A \cap B_n) = A \cap B \in \mathcal{M}$. Итак, $B \in \mathcal{M}$ и $A \cap B \in \mathcal{M}$, то есть $B = \lim\limits_n \downarrow B_n \in \mathcal{M}_A$. Если $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно возрастающая последовательность из $\mathcal{M}_A$, то $B = \lim\limits_n\!\uparrow B_n \in \mathcal{M}$ и $\{A \cap B_n,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно возрастающая последовательность из $\mathcal{M}$, что влечет

$$A \bigcap B = A \bigcap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A \bigcap B_n \Big) \in \mathcal{M}.$$

Значит, $B = \lim\limits_n\!\downarrow B_n \in \mathcal{M}_A$.

Несколько сложнее устанавливается, что булева алгебра $\mathcal{A}$ содержится в монотонном классе $\mathcal{M}_A$ при $\forall A \in \mathcal{M}$. Рассмотрим сначала случай $A \in \mathcal{A} (\subset \mathcal{M})$. Требуется показать, что $B \in \mathcal{A} \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_A$. Имеем: $B \in \mathcal{A} \Longrightarrow B \in \mathcal{M}$, а так как $A \cap B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{M}$, что (см. определение класса $\mathcal{M}_A$) означает $B \in \mathcal{M}_A$. Следовательно, для любого $A \in \mathcal{A}$ монотонный класс $\mathcal{M}_A (\subset \mathcal{M})$ содержит $\mathcal{A}$ и поэтому совпадает с $\mathcal{M}$. Следующий этап доказательства состоит в распространении включения $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ на все $A \in \mathcal{M}$.

Отметим сначала справедливость следующего условия эквивалентности для $A, B \in \mathcal{M}$: $A \in \mathcal{M}_B \iff B \in \mathcal{M}_A$. Действительно, как соотношение $A \in \mathcal{M}_B$, так и соотношение $B \in \mathcal{M}_A$ означают одно и то же: $A \cap B \in \mathcal{M}$.

Теперь покажем, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ при $\forall A \in \mathcal{M}$, то есть установим справедливость импликации: $B \in \mathcal{A} \implies B \in \mathcal{M}_A$, $\forall A \in \mathcal{M}$. Если $B \in \mathcal{A}(\subset \mathcal{M})$, то, по доказанному выше, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$, то есть $A \in \mathcal{M} \implies A \in \mathcal{M}_B\,(= \mathcal{M})$. Но тогда, в силу только что установленного свойства эквивалентности, $B \in \mathcal{M}_A$. Таким образом, $B \in \mathcal{M}_A$, каково бы ни было $A \in \mathcal{M}$.

$\triangle$

Доказанное предложение, в отличие от предложения 1.5, не дает конструктивного метода построения порожденных σ-алгебр, но достаточно полно характеризует их структуру. Если $\mathcal{A}$ – конечная алгебра, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}(A)$. В противном случае процесс построения можно представить в виде бесконечной последовательности пополнений булевой алгебры $\mathcal{A}$. Сначала $\mathcal{A}$ пополняется пределами всевозможных монотонных последовательностей ее элементов. Полученный в результате класс $\mathcal{B}_1(\mathcal{A})$ пополняется пределами монотонных последовательностей из $\mathcal{B}_1(\mathcal{A})$, и таким образом получаем $\mathcal{B}_2(\mathcal{A})$, который также подвергается аналогичной процедуре пополнения, и т. д.

До сих пор рассматривались только монотонные последовательности подмножеств Ω, которые всегда имеют предел, – они ограничены „сверху“ Ω и „снизу“ $\emptyset$. При изучении произвольных последовательностей подмножеств Ω полезно ввести понятия верхнего и нижнего пределов.

Определение 3.4. Для всякой последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ подмножеств Ω определим *верхний предел*

$$\limsup_n A_n = \lim_n\!\downarrow \sup_{m \geqslant n} A_m = \lim_n\!\downarrow \bigcup_{m \geqslant n} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geqslant n} A_m$$

и *нижний предел*

$$\liminf_n A_n = \lim_n\!\uparrow \inf_{m \geqslant n} A_m = \lim_n\!\uparrow \bigcap_{m \geqslant n} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geqslant n} A_m.$$

Нетрудно видеть, что всегда $\liminf\limits_n A_n \subset \limsup\limits_n A_n$. В случае, когда верхний и нижний пределы совпадают, говорим, что последовательность $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ имеет *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_n A_n = \limsup\limits_n A_n$.

Легко видеть, что *любая σ-алгебра содержит верхний и нижний пределы любой последовательности своих элементов.* В терминах событий (элементов $\mathcal{A}$) эти пределы допускают следующую „вероятностную“ интерпретацию: верхний предел – осуществляется одновременно бесконечное число событий из последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$, нижний предел – осуществляются одновременно все события $A_n,\ n \geqslant 1$, за исключением самое большее конечного числа этих событий.

Отметим следующее соотношение между верхним и нижним пределами:

$$(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c.$$

Действительно,

$$(\liminf_n A_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geqslant n} A_m\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geqslant n} A_m^c = \limsup_n A_n^c.$$

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Показать, что в случае бесконечного Ω (например, $\Omega = \mathbf{N}$ или $\Omega = [0;\ 1]$) булева алгебра $\mathcal{A}$ из упр. 1.1 σ-алгеброй не является.

3.2. Пусть Ω – некоторое множество и $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A$ не более чем счетно или A^c не более чем счетно$\}$. Проверить, что $\mathcal{A}$ есть булева σ-алгебра.

3.3. Пусть $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots$ – монотонно возрастающая последовательность булевых σ-алгебр подмножеств Ω. Доказать, что $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ есть булева алгебра подмножеств Ω, однако, вообще говоря, $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй.

3.4. Пусть Ω – некоторое множество. Описать булевы σ-алгебры, порожденные а) классом всех одноточечных подмножеств;

б) классом всех конечных подмножеств;

в) классом всех счетных подмножеств;

г) классом всех не более чем счетных подмножеств;

д) классом всех бесконечных подмножеств.

(В некоторых случаях ответ зависит от мощности Ω, т. е. от того, является ли рассматриваемое множество Ω конечным, счетным или более чем счетным.)

3.5. Пусть $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ – последовательность непустых непересекающихся подмножеств Ω. Определить мощность σ-алгебры, порожденной этой последовательностью.

3.6. Пусть $\mathcal{A}$ – σ-алгебра подмножеств пространства Ω. Доказать, что если $\mathcal{A}$ бесконечно, то существует счетная последовательность непустых непересекающихся элементов $\mathcal{A}$.

3.7. Доказать, что для любого пространства Ω никакая σ-алгебра его подмножеств не может иметь счетную мощность.

3.8. Показать, что совокупность

$$\{[x,\ y],\ (x,\ y],\ [x,\ y),\ (x,\ y):\ x, y \in \mathrm{R},\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$$

всех интервалов, лежащих внутри отрезка $[0,\ 1]$, является монотонным классом, а совокупность $\{[x,\ y],\ (x,\ y],\ [x,\ y),\ (x,\ y):\ x, y \in \mathbf{Q}, 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ интервалов с рациональными концами монотонным классом не является.

3.9. Доказать, что пересечение любого семейства монотонных классов в свою очередь является монотонным классом.

3.10. Найти верхний и нижний пределы последовательности множеств $\{A_n,$
$n \geqslant 1\}$, если $A_n = B$ для четных n и $A_n = C$ для нечетных n.

3.11. Найти верхний и нижний пределы последовательности множеств $\{A_n,$

$n \geqslant 1\}$, если A_n является множеством всех рациональных чисел со знаменателем n, т.е. множеством чисел вида k/n, где k – произвольное целое число.

3.12. В курсе математического анализа были введены и изучались понятия верхнего, $\overline{\lim}\, a_n$, и нижнего, $\underline{\lim}\, a_n$, пределов числовой последовательности $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$, как наибольший и наименьший из ее частичных пределов. Показать, что $\overline{\lim}\, a_n = \lim\limits_n\!\downarrow \sup\limits_{m \geqslant n} a_m$, $\underline{\lim}\, a_n = \lim\limits_n\!\uparrow \inf\limits_{m \geqslant n} a_m$. (Отсюда следует другое обозначение верхнего и нижнего пределов числовой последовательности: $\limsup\limits_n a_n$ и $\liminf\limits_n a_n$.)

3.13. Пусть Ω есть действительная прямая и A_n суть интервалы $(-\infty,\ a_n)$ $(n \geqslant 1)$. Доказать, что либо

$$\limsup_n A_n = (-\infty,\ \limsup_n a_n),$$

либо

$$\limsup_n A_n = (-\infty,\ \limsup_n a_n],$$

причем обе эти возможности действительно реализуются. Чему может равняться $\liminf\limits_n A_n$?

3.14. Доказать следующие свойства дистрибутивности:

а) если $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно возрастающие последовательности подмножеств Ω, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \bigcap B_n\Big) = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\bigcap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big);$$

б) если $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно убывающие последовательности подмножеств Ω, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \bigcup B_n\Big) = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\bigcup\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big).$$

3.15. Показать, что требования монотонности в упр. 3.14 являются существенными, то есть привести примеры таких последовательностей $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$, $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$, что равенства из упр. 3.14 места не имеют.

3.16. Пусть $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$ – некоторые последовательности подмножеств Ω. Доказать следующие соотношения:

а) $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$,

б) $\limsup_n (A_n \cup B_n) = \limsup_n A_n \cup \limsup_n B_n$,

в) $\liminf_n (A_n \cap B_n) = \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$,

г) $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset \limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n$,

д) $\liminf_n (A_n \cup B_n) \supset \liminf_n A_n \cup \liminf_n B_n$,

е) $\limsup_n A_n \cap \liminf_n B_n \subset \limsup_n (A_n \cap B_n)$.

Показать, что в пунктах г) и д) знаки включения нельзя, вообще говоря, заменить на равенства.

3.17. Проверить, что монотонные последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ подмножеств Ω действительно всегда имеют предел $\lim_{n\to\infty} A_n$, равный $\lim_n \uparrow A_n$ для монотонно возрастающей последовательности и равный $\lim_n \downarrow A_n$ для монотонно убывающей последовательности, то есть показать, что $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \lim_n \uparrow A_n$ для монотонно возрастающей последовательности и $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \lim_n \downarrow A_n$ для монотонно убывающей последовательности.

Литература: Ж.Неве, стр. 30–33.

§ 4. Вероятность на булевой σ-алгебре. Вероятностное пространство

Определение 4.1. *Вероятностным пространством* называется триплет $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, состоящий из непустого множества Ω (пространства элементарных исходов), булевой σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств (событий – измеримых множеств) и вероятности P, определенной на $\mathcal{A}$, – отображения $\mathcal{A}$ в сегмент $[0;1]$, удовлетворяющего системе аксиом в определении 2.1, или, что то же, аксиомам

(а) $P(\Omega)=1$;

(б) $P\Big(\sum\limits_1^\infty A_n\Big) = \sum\limits_1^\infty P(A_n)$ для любого набора $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ попарно несовместных $(A_i\bigcap A_j = \emptyset,\ i\neq j)$ событий из $\mathcal{A}$ (σ-аддитивность P).

Предложение 4.1 (непрерывность вероятности относительно сходимости произвольных последовательностей событий). *Для любой последовательности событий* $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ *из вероятностного пространства* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ *справедливы неравенства*

$$P\Big(\liminf_n A_n\Big)\leqslant \liminf_n P(A_n)\leqslant \limsup_n P(A_n)\leqslant P\Big(\limsup_n A_n\Big). \tag{4.1}$$

В частности, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ *существует и равен* $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\Big)$.

Доказательство. Используя непрерывность вероятности относительно монотонной сходимости (предложение 2.1, свойство (5)), получаем

$$P\Big(\liminf_n A_n\Big) = P\Big(\lim_n\uparrow \inf_{m\geqslant n} A_m\Big) = \lim_n\uparrow P\Big(\inf_{m\geqslant n} A_m\Big) =$$
$$\lim_n\uparrow P\Big(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\Big) \leqslant \lim_n\uparrow \inf_{m\geqslant n} P(A_m) = \liminf_n P(A_n).$$

Аналогично,

$$P\Big(\limsup_n A_n\Big) = P\Big(\lim_n\!\downarrow \sup_{m\geqslant n} A_m\Big) = \lim_n\!\downarrow P\Big(\sup_{m\geqslant n} A_m\Big) =$$
$$\lim_n\!\downarrow P\Big(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\Big) \geqslant \lim_n\!\downarrow \sup_{m\geqslant n} P(A_m) = \limsup_n P(A_n).$$

Этим устанавливается справедливость крайних неравенств в (4.1); центральное неравенство в (4.1) есть известное соотношение между верхним и нижним пределами числовых последовательностей (см. упражнение 3.12).

Наконец, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

что влечет равенство крайних членов (4.1):

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_n P(A_n) \leqslant \limsup_n P(A_n) \leqslant P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right),$$

откуда

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

$\triangle$

Установим еще один результат, касающийся последовательности событий, часто используемый в теории вероятностей.

Предложение 4.2. *Если* $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ *– последовательность событий в* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *сумма вероятностей которых* $\sum_1^\infty P(A_n) < \infty$, *то* $P\Big(\limsup\limits_n A_n\Big) = 0$.

Доказательство. Если ряд $\sum_1^\infty P(A_n)$ сходится, то остаток этого ряда
$\sum_{k=n}^\infty P(A_k) \to 0$ при $n\to\infty$. Используя свойства непрерывности (5) и σ-полуаддитивности (6) вероятности P (предложение 2.1), получаем

$$P\Big(\limsup_n A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}\downarrow P\Big(\sup_{m\geqslant n} A_m\Big) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \downarrow P\Big(\bigcup_{m \geqslant n} A_m\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{m \geqslant n} P(A_m) = 0.$$

△

Начиная с этого момента будем называть событиями (или измеримыми множествами) только элементы σ-алгебры $\mathcal{A}$, ибо только эти подмножества Ω можно „измерить“ с помощью вероятности P; остальные, не принадлежащие $\mathcal{A}$, подмножества объявляются *неизмеримыми.* Среди таких подмножеств особое место занимают подмножества Ω, являющиеся частью события A нулевой вероятности. Возникает естественное желание пополнить ими σ-алгебру $\mathcal{A}$, приписав им нулевую вероятность. Полезность такого пополнения будет видна в следующем параграфе при решении проблемы продолжения вероятности, заданной на булевой алгебре, на порожденную σ-алгебру.

Определение 4.2. Множество $N \subset \Omega$ называется *нулевым относительно вероятности* P (коротко, P-нулевым) в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, если существует такое событие $A \in \mathcal{A}$, что $N \subset A$ и $P(A) = 0$. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется *полным,* если $\mathcal{A}$ содержит все P-нулевые подмножества Ω.

Предложение 4.3. 1) *Всякое подмножество нулевого множества является нулевым множеством.*

2) *Объединение не более чем счетного числа нулевых множеств является нулевым множеством.*

Доказательство. 1). Если $N \subset A$ и $P(A) = 0$, то любое $N_1 \subset N$ также накрывается A и, следовательно, является нулевым множеством.

2). Пусть $\{N_i,\ i \in I\}$ – не более чем счетный набор нулевых множеств и $A_i,\ i \in I$, – соответствующие события, для которых $N_i \subset A_i$ и $P(A_i) = 0,\ i \in I$. Тогда

$$N = \bigcup_{i\in I} N_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i = A,$$

и в силу свойства σ-полуаддитивности вероятности

$$0 \leqslant P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \leqslant \sum_{i\in I} P(A_i) = 0.$$

Следовательно, N является нулевым множеством.

$\triangle$

Следует обратить особое внимание на то, что объединение *несчетного* числа нулевых множеств может оказаться ненулевым множеством. Например, равномерное распределение на отрезке $[\,0;\ 1\,]$ с борелевской σ-алгеброй его подмножеств приписывает каждой точке этого отрезка нулевую вероятность, в то время как объединение этих точек составляет все $\Omega = [\,0;\ 1\,]$ и $P(\Omega) = 1$.

Предложение 4.4. *Пусть* $\mathcal{N}$ *– класс всех нулевых множеств вероятностного пространства* $(\,\Omega,\ \mathcal{A},\ P\,)$. *Тогда класс* $\bar{\mathcal{A}}$ *множеств вида* $A\bigcup N$, *где* $A \in \mathcal{A}$ *и* $N \in \mathcal{N}$, *совпадает с* σ*-алгеброй, порожденной классами* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{N}$, *и формула* $\bar{P}(\,A\bigcup N\,) = P(A)$ *корректно определяет единственную вероятность* $\bar{P}$ *на* $\bar{\mathcal{A}}$, *продолжающую* P. *Вероятностное пространство* $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ *является полным.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\bar{\mathcal{A}}$ совпадает с σ-алгеброй $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A}\bigcup\mathcal{N})$, порожденной классами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$.

Очевидно $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$, так как σ-алгебра $\mathcal{B}$ содержит, в частности, конечные объединения множеств из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$. Чтобы показать обратное включение $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{A}}$ (откуда будет следовать $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{A}}$), достаточно убедиться, что $\bar{\mathcal{A}}$ есть σ-алгебра – тогда требуемое включение будет вытекать из минимальности $\mathcal{B}$. Итак, покажем, что класс $\bar{\mathcal{A}}$ (1) содержит Ω, (2) замкнут относительно объединения счетного числа своих элементов (см. замечания после определения 3.1), (3) содержит с каждым множеством его дополнение.

(1). Так как $\Omega \in \mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$, то $\Omega \in \bar{\mathcal{A}}$.

(2). Классы множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$ замкнуты относительно объединений счетного числа своих элементов (см. в связи с этим предложение 4.3), следовательно, этим же свойством обладает класс $\bar{\mathcal{A}}$, состоящий из множеств вида $A\bigcup N$.

(3). Пусть $\bar{A} = A\bigcup N$ и B $(\in \mathcal{A})$ – событие нулевой вероятности, в которое погружено множество N $(\in \mathcal{N})$. Требуется доказать, что $(A\cup N)^c \in \bar{\mathcal{A}}$, то есть представить это множество в виде $A'\bigcup N'$ с $A' \in \mathcal{A}$ и $N' \in \mathcal{N}$.

Используя свойство дистрибутивности, получаем:

$$\bar{A}^c = \Big(A\bigcup N\Big)^c = A^c\bigcap N^c =$$

$$\Big(B^c\bigcup B\Big)\bigcap\Big(A^c\bigcap N^c\Big) = \Big(B^c\bigcap A^c\bigcap N^c\Big)\bigcup\Big(B\bigcap A^c\bigcap N^c\Big).$$

Так как $B^c \subset N^c$, то множество

$$A' = B^c\bigcap A^c\bigcap N^c = B^c\bigcap A^c \in \mathcal{A}.$$

Множество $N' = B\bigcap A^c\bigcap N^c \in \mathcal{N}$ (является P-нулевым), так как оно составляет часть события B, имеющего нулевую вероятность.

Итак, $(A\bigcup N)^c = A'\bigcup N'$ и, следовательно, принадлежит $\bar{\mathcal{A}}$. Этим завершается доказательство того, что $\bar{\mathcal{A}}$ есть σ-алгебра и, следовательно, что $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$.

Установим корректность определения $\bar{P}$ на $\bar{\mathcal{A}}$. Необходимо показать, что если $A_1\bigcup N_1 = A_2\bigcup N_2$ $(\in \bar{\mathcal{A}})$, то $\bar{P}(A_1\bigcup N_1) = \bar{P}(A_2\bigcup N_2)$ или (см. определение $\bar{P}$), что $P(A_1) = P(A_2)$. Так как

$$A_1 = (A_1\bigcap A_2) + (A_1 \setminus A_2) \subset A_2\bigcup N_2,$$

то $A_1 \setminus A_2 \subset N_2$, следовательно, $P(A_1 \setminus A_2) = 0$ и

$$P(A_1) = P(A_1\bigcap A_2) + P(A_1 \setminus A_2) = P(A_1\bigcap A_2).$$

Аналогично, $P(A_1) = P(A_1\bigcap A_2)$. Корректность определения $\bar{P}$ на $\bar{\mathcal{A}}$ установлена.

Докажем теперь, что $\bar{P}$ является вероятностью на $\bar{\mathcal{A}}$, то есть проверим аксиомы нормируемости и σ-аддитивности. Аксиома (а) очевидна, так как $\bar{P}(\Omega) = P(\Omega) = 1$. Аксиома (б) σ-аддитивности следует из следующей цепочки очевидных равенств:

$$\bar{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\bigcup N_n\right)\right) = \bar{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\bigcup\sum_{n=1}^{\infty}N_n\right) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{P}(A_n\bigcup N_n).$$

Докажем единственность $\bar{P}$. Если $\bar{P}'$ – вероятность на $\bar{\mathcal{A}}$, продолжающая P,

$$\bar{A} = A\bigcup N \in \bar{\mathcal{A}}, \quad A \in \mathcal{A}, \quad N \subset B \in \mathcal{A}, \quad P(B) = 0,$$

то

$$\bar{P}'(\bar{A}) = \bar{P}'(A) + \bar{P}'(\bar{A} \setminus A), \quad \bar{P}'(\bar{A} \setminus A) \leqslant \bar{P}'(N) \leqslant \bar{P}'(B) = P(B) = 0,$$

откуда $\bar{P}'(\bar{A}) = \bar{P}'(A) = P(A) = \bar{P}(\bar{A})$. Таким образом, $\bar{P}' = \bar{P}$ на $\bar{\mathcal{A}}$.

Докажем, наконец, что вероятностное пространство $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ является полным. Пусть $K \subset \bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}$ и $\bar{P}(\bar{A}) = 0$. Тогда $\bar{A} = A \cup N$, где $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \bar{P}(\bar{A}) = 0$ и $N \subset B \in \mathcal{A}$, $P(B) = 0$. Следовательно, $K \subset A\bigcup B \in \mathcal{A}$, где $P(A\bigcup B) = 0$, значит, $K \in \mathcal{N} \subset \bar{\mathcal{A}}$.

$\triangle$

Операция пополнения тесно связана с понятиями внешней и внутренней вероятностей.

Определение 4.3. *Внешней вероятностью* P^* и *внутренней вероятностью* P_* на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называются функции множеств на $\mathcal{P}(\Omega)$ (множестве всех подмножеств Ω), определяемые формулами

$$P^*(\Omega_0) = \inf\{P(A),\ \Omega_0 \subset A \in \mathcal{A}\}, \quad P_*(\Omega_0) = \sup\{P(A),\ \Omega_0 \supset A \in \mathcal{A}\}.$$

Предложение 4.5. *Функции P_* и P^* обладают следующими свойствами:*

(1) $P_*(\Omega_0) \leqslant P^*(\Omega_0), \quad \forall\, \Omega_0 \subset \Omega$;
(2) $P_*(A) = P(A) = P^*(A)$, *если* $A \in \mathcal{A}$;
(3) $P_*(\Omega_0) = 1 - P^*(\Omega_0^c), \forall\, \Omega_0 \subset \Omega$.

Доказательство. Первые два свойства очевидны; свойство (3) следует из цепочки равенств:

$$P_*(\Omega_0) = \sup\{P(A),\ \Omega_0 \supset A \in \mathcal{A}\} = \sup\{1 - P(A^c),\ \Omega_0^c \subset A^c \in \mathcal{A}\} =$$

$$1 - \inf\{P(A^c),\ \Omega_0^c \subset A^c \in \mathcal{A}\} = 1 - P^*(\Omega_0^c).$$

$\triangle$

Предложение 4.6. *Для любого вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ σ*-алгебра* $\bar{\mathcal{A}}$ *совпадает с классом тех подмножеств* Ω, *на которых функции* P_* *и* P^* *принимают одинаковые значения. Более того,* $\bar{P} = P_* = P^*$ *на* $\bar{\mathcal{A}}$.

Докажем сначала следующую лемму, существенно использующую замкнутость $\mathcal{A}$ относительно операций счетного объединения и пересечения.

Лемма 4.1. *Существуют измеримые множества, на которых достигаются верхняя и нижняя грани в формулах, определяющих* P_* *и* P^*.

Доказательство проведем для P^*. Доказательство для P_* проводится аналогично.

Пусть

$$\Omega_0 \subset \Omega, \qquad P^*(\Omega_0) = \inf\{P(A),\ \Omega_0 \subset A \in \mathcal{A}\}.$$

Согласно определению точной нижней грани, существует последовательность $\{A_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{A}$, для которой $A_n \supset \Omega_0$, $n \geqslant 1$, и

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P^*(\Omega_0).$$

Всегда можно считать, что $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно убывающая последовательность, в противном случае вместо A_n можно взять $A'_n =$

$\bigcap_{m \leqslant n} A_m$. В силу монотонности этой последовательности существует предел

$$A = \bigcap_1^\infty A_n = \lim_n \downarrow A_n.$$

Имеем $A \in \mathcal{A}$, и в силу непрерывности вероятности $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P^*(\Omega_0)$.

$\triangle$

Д о к а з а т е л ь с т в о   п р е д л о ж е н и я 4.6. Для каждого $\Omega_0 \subset \Omega$, в силу только что доказанной леммы, существуют такие события $A', A'' \in \mathcal{A}$, что $A' \subset \Omega_0 \subset A''$ и $P(A') = P_*(\Omega_0)$, $P(A'') = P^*(\Omega_0)$ (множества, на которых достигаются sup и inf).

Покажем сначала, что $P^*(\Omega_0) = P_*(\Omega_0)$ влечет принадлежность Ω_0 классу $\bar{\mathcal{A}}$, то есть Ω_0 имеет вид $A \cup N$, где $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$; потом установим обратное. Имеем $\Omega_0 = A' \cup (\Omega_0 \setminus A')$. Возьмем $A = A'$. Если $P(A'') = P^*(\Omega_0) = P_*(\Omega_0) = P(A')$, то $N = \Omega_0 \setminus A'$ есть нулевое множество, поскольку $\Omega_0 \setminus A' \subset A'' \setminus A'$, а $P(A'' \setminus A') = 0$. Таким образом, $\Omega_0 = A \cup N \in \bar{\mathcal{A}}$. Так как $\bar{P}(\Omega_0) = P(A)$ по определению $\bar{P}$, то справедливы равенства $P^*(\Omega_0) = P_*(\Omega_0) = \bar{P}(\Omega_0)$, что доказывает последнее утверждение данного предложения.

Докажем обратное: $\Omega_0 \in \bar{\mathcal{A}} \Longrightarrow P^*(\Omega_0) = P_*(\Omega_0)$. Пусть $\Omega_0 = A \cup N \in \bar{\mathcal{A}}$, $A \in \mathcal{A}$ и $B (\in \mathcal{A})$ – событие нулевой вероятности, содержащее N. Тогда

$$P(A) \leqslant P_*(\Omega_0) = \sup\{P(C), \quad A \cup N \supset C \in \mathcal{A}\} \leqslant P^*(\Omega_0) = \inf\{P(C),$$

$$A \cup N \subset C \in \mathcal{A}\} \leqslant P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B) = P(A).$$

Следовательно, $P^*(\Omega_0) = P_*(\Omega_0)$.

$\triangle$

Те подмножества Ω, которые принадлежат любому из пополнений $\mathcal{A}$ относительно любой вероятности на $\mathcal{A}$, называются *абсолютно измеримыми.*

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство, $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : P(A) = 0 \text{ или } P(A) = 1\}$, $P|_{\mathcal{B}}$ – ограничение P на $\mathcal{B}$. Показать, что $(\Omega, \mathcal{B}, P|_{\mathcal{B}})$ — вероятностное пространство.

4.2. Доказать, что для любой последовательности событий $\{A_n, n \geqslant 1\}$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = P(A_1) + P(A_1^c A_2) + P(A_1^c A_2^c A_3) + \cdots$$

4.3. Пусть $\{A_n, n \geqslant 1\}$ и $\{B_n, n \geqslant 1\}$ – две последовательности событий, причем $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n \bigcap B_n)$$

при условии, что хотя бы один из указанных пределов существует.

4.4. Привести пример последовательности событий $\{A_n, n \geqslant 1\}$ такой, что
$\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$, но $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$ для любого n.

4.5. Пусть $\{A_n, n \geqslant 1\}$ – такая последовательность событий, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \bigcap A_{n+1}^c) < \infty$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Доказать, что $P(\limsup\limits_{n} A_n) = 0$.

4.6*. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – произвольное вероятностное пространство. Доказать, что множество значений функции $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, представляет собой замкнутое подмножество отрезка $[0;\ 1]$.

4.7. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ – вероятностное пространство и $\mathcal{N}$ – совокупность всех P-нулевых подмножеств Ω. Доказать, что $\mathcal{N}$ является монотонным классом.

4.8. Пусть Ω – некоторое множество и P – вероятность на булевой σ-алгебре $\mathcal{A} = \{\emptyset,\ \Omega\}$. Для произвольного подмножества $\Omega_0 \subset \Omega$ найти $P^*(\Omega_0)$ и $P_*(\Omega_0)$. Показать, что если Ω состоит более чем из одного элемента, то функции P^* и P_* на $\mathcal{P}(\Omega)$ не являются аддитивными.

Литература: Ж.Неве, стр. 33–37.

§5. **Продолжение вероятности с булевой алгебры на порожденную σ-алгебру**

Пусть $\mathcal{A}$ – булева алгебра подмножеств Ω. Введем класс множеств $\mathcal{G}$, образованный всевозможными счетными объединениями элементов алгебры $\mathcal{A}$; поскольку любое объединение можно представить в виде объединения возрастающей последовательности множеств, то при построении класса $\mathcal{G}$ достаточно ограничиться возрастающими последовательностями $\{A_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{A}$. Таким образом, каждый элемент $\mathcal{G}$ имеет вид

$$G = \lim_n\uparrow A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \{A_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{A}.$$

Определим на $\mathcal{G}$ функцию множеств $\Pi(G) = \lim_n\uparrow P(A_n)$, если $A_n \uparrow G$. Покажем, что определение Π корректно, то есть не зависит от выбора последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$, сходящейся к G.

Лемма 5.1. *Пусть $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{A'_n,\ n \geqslant 1\}$ – две монотонно возрастающие последовательности элементов $\mathcal{A}$, причем*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n. \tag{5.1}$$

Тогда

$$\lim_n\uparrow P(A_n) \leqslant \lim_n\uparrow P(A'_n). \tag{5.2}$$

Если левая и правая части (5.1) *совпадают, то в* (5.2) *достигается знак равенства.*

Доказательство. Для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$ имеем $A_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$, поэтому

$$A_m = A_m \bigcap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \Big) =$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A_m \bigcap A'_n \Big) = \lim_n\uparrow \Big(A_m \bigcap A'_n \Big),$$

и из свойства непрерывности вероятности на булевой алгебре относительно монотонной сходимости (см. (5) в предложении 2.1) вытекает, что

$$P(A_m) = \lim_n\uparrow P(A_m \cap A'_n) \leqslant \lim_n\uparrow P(A'_n).$$

Беря теперь предел при $m \to \infty$, приходим к (5.2).

Если в (5.1) имеет место знак равенства, то это означает, что вместе с (5.1) выполняется противоположное включение. Естественно, это приводит к смене знака неравенства в (5.2): $\lim_n\uparrow P(A_n) \geqslant \lim_n\uparrow P(A'_n)$. Следовательно, в (5.2) имеет место знак равенства.

$\triangle$

Подчеркнем, что Π продолжает P, и исследуем более подробно свойства функции Π.

Предложение 5.1. *Класс $\mathcal{G}$ и функция Π обладают следующими свойствами:*

(а) $\varnothing \in \mathcal{G}$, $\Omega \in \mathcal{G}$; $\Pi(\varnothing) = 0$, $\Pi(\Omega) = 1$; $0 \leqslant \Pi(G) \leqslant 1$ *для любого* $G \in \mathcal{G}$;

(б) *если* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, *то* $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G}$, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ *и*

$$\Pi(G_1 \cup G_2) + \Pi(G_1 \cap G_2) = \Pi(G_1) + \Pi(G_2);$$

(в) *если* $G_1 \subset G_2$, *где* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, *то* $\Pi(G_1) \leqslant \Pi(G_2)$;

(г) *если* $G_n \uparrow G$, $\{G_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{G}$, *то* $G \in \mathcal{G}$ *и* $\Pi(G) = \lim_n\uparrow \Pi(G_n)$.

Доказательство. (а). Все свойства этого пункта непосредственно следуют из определений класса $\mathcal{G}$ и функции Π на $\mathcal{G}$.

(б). Пусть

$$G_i = \lim_n\uparrow A_{i,n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i,n}, \quad A_{i,n} \in \mathcal{A}; \quad i = 1,\, 2.$$

Тогда, очевидно,

$$G_1 \bigcup G_2 = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1,n}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2,n}\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(A_{1,n} \bigcup A_{2,n}\Big) =$$

$$\lim_n\uparrow \left(A_{1,n} \bigcup A_{2,n} \right) \in \mathcal{G},$$

при этом

$$\Pi(G_1 \bigcup G_2) = \lim_n\uparrow P\Big(A_{1,n} \bigcup A_{2,n} \Big).$$

Несколько сложнее доказывается равенство

$$G_1 \bigcap G_2 = \lim_n\uparrow \left(A_{1,n} \bigcap A_{2,n} \right).$$

Включение

$$G_1 \bigcap G_2 \supset \lim_n\uparrow \left(A_{1,n} \bigcap A_{2,n} \right)$$

почти очевидно. Если же $\omega \in G_1 \cap G_2$, то найдутся такие n_1 и n_2, что $\omega \in A_{1,n_1}$ и $\omega \in A_{2,n_2}$. Так как последовательности $\{A_{i,n},\ n \geqslant 1\}$ монотонны, то $\omega \in A_{1,m} \cap A_{2,m}$ при $m = \max\{n_1,\ n_2\}$. Таким образом показано, что

$$G_1 \bigcap G_2 = \lim_n\uparrow \left(A_{1,n} \bigcap A_{2,n} \right),$$

следовательно, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ и

$$\Pi\Big(G_1 \bigcap G_2 \Big) = \lim_n\uparrow P\Big(A_{1,n} \bigcap A_{2,n} \Big).$$

Чтобы установить последнее равенство в этом пункте, достаточно перейти к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$P\Big(A_{1,n} \bigcup A_{2,n} \Big) + P\Big(A_{1,n} \bigcap A_{2,n} \Big) = P\Big(A_{1,n} \Big) + P\Big(A_{2,n} \Big),$$

справедливом для любой вероятности P на $\mathcal{A}$ (см. (3) в предложении 2.1).

(в). Это свойство немедленно следует из леммы 5.1, так как каждое $G \in \mathcal{G}$ представляет собой предел монотонно возрастающей последовательности элементов $\mathcal{A}$.

(г). Для каждого фиксированного n рассмотрим последовательность $A_{n,m}$ элементов $\mathcal{A}$, возрастая сходящуюся к G_n при $m \to \infty$. Положим

$$D_k = \bigcup_{n,m=1}^{k} A_{n,m}.$$

Ясно, что $\{D_k,\ k \geqslant 1\}$ – возрастающая последовательность элементов $\mathcal{A}$ и

$$\lim_k\uparrow D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lim_m\uparrow A_{n,m} = \lim_n\uparrow G_n = G,$$

откуда следует, что $G \in \mathcal{G}$ и $\Pi(G) = \lim_k\uparrow P(D_k)$.

Осталось показать, что $\Pi(G) = \lim_n\uparrow \Pi(G_n)$.

Неравенство $\Pi(G) \geqslant \lim_n\uparrow \Pi(G_n)$ следует из монотонности функции Π на $\mathcal{G}$ (свойство (в)). Противоположное неравенство получается из того, что $A_{n,m} \subset G_n \subset G_k$ при $n \leqslant k$ и любом m, откуда следует, что $D_k \subset G_k$ при любом k, и поэтому

$$\Pi(G) = \lim_k\uparrow P(D_k) \leqslant \lim_k\uparrow \Pi(G_k).$$

$\triangle$

Доказанное предложение устанавливает, что функция Π на классе $\mathcal{G}$ подмножеств Ω обладает свойствами, аналогичными свойствам вероятности, однако класс $\mathcal{G}$, к сожалению, не является, вообще говоря, σ-алгеброй и не содержит порожденную σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ (нетрудно видеть, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$). Поэтому конструкцию продолжения P с булевой алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ нельзя считать завершенной.

Введем еще одну функцию множеств на классе $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω, которую можно интерпретировать как „внешнюю вероятность“ по отношению к Π. Для любого $\Omega_0 \subset \Omega$ положим

$$\Pi^*(\Omega_0) = \inf\{\Pi(G),\quad \Omega_0 \subset G \in \mathcal{G}\}.$$

Предложение 5.2. *Функция* Π^* *на* $\mathcal{P}(\Omega)$ *обладает следующими свойствами:*

(а) $\Pi^*(G) = \Pi(G)$, *если* $G \in \mathcal{G}$, *в частности,* $\Pi^*(\Omega) = 1$ *и* $\Pi^*(\emptyset) = 0$;

$0 \leqslant \Pi^*(\Omega_0) \leqslant 1$ *для любого* $\Omega_0 \subset \Omega$;

(б) $\Pi^*(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) + \Pi^*(\Omega_1 \bigcap \Omega_2) \leqslant \Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_2)$, *в частности,*

$\Pi^*(\Omega_0) + \Pi^*(\Omega_0^c) \geqslant 1$;

(в) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Longrightarrow \Pi^*(\Omega_1) \leqslant \Pi^*(\Omega_2), \quad (\Omega_1,\ \Omega_2 \subset \Omega)$;

(г) $\Omega_n \uparrow \Omega_\infty \Longrightarrow \Pi^*(\Omega_n) \uparrow \Pi^*(\Omega_\infty)$.

Доказательство. (а) Эти свойства функции Π^* следуют непосредственно из ее определения и свойств (а) и (в) функции Π (см. предложение 5.1).

(б). Заметим сначала, что $\Pi^*(\Omega_0) \leqslant \Pi(G)$, если $\Omega_0 \subset G \in \mathcal{G}$. Далее, по определению inf каково бы ни было $\varepsilon > 0$ существует такое $G \in \mathcal{G}$, что $\Pi^*(\Omega_0) + \varepsilon \geqslant \Pi(G)$. Выберем $\varepsilon > 0$ и множества $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ так, что $G_i \supset \Omega_i$, $i = 1, 2$, и

$$\Pi^*(\Omega_1) + \varepsilon/2 \geqslant \Pi(G_1), \quad \Pi^*(\Omega_2) + \varepsilon/2 \geqslant \Pi(G_2).$$

Сложив эти неравенства, получаем

$$\Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_2) + \varepsilon \geqslant \Pi(G_1) + \Pi(G_2)$$

$$\Pi(G_1 \cup G_2) + \Pi(G_1 \cap G_2) \geqslant \Pi^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \Pi^*(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Так как ε произвольно, то из последнего неравенства немедленно следует свойство (б) функции Π^*. Полагая $\Omega_1 = \Omega_0$, $\Omega_2 = \Omega_0^c$, получаем частный случай (б).

(в). Если $G \supset \Omega_2$, то $G \supset \Omega_1$, и, следовательно, класс множеств из $\mathcal{G}$, которые накрывают Ω_1, шире класса множеств из $\mathcal{G}$, накрывающих Ω_2, что влечет

$$\Pi^*(\Omega_1) = \inf\{\Pi(G), \Omega_1 \subset G \in \mathcal{G}\} \leqslant$$

$$\inf\{\Pi(G), \Omega_2 \subset G \in \mathcal{G}\} = \Pi^*(\Omega_2).$$

(г). Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и подберем последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ и множеств $\{G_n, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{G}$ из условий

$$\varepsilon=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{\,n};\quad \Omega_n\subset G_n,\quad \Pi^*(\,\Omega_n\,)\,+\,\varepsilon_{\,n}\,\geqslant\,\Pi\,(\,G_n\,),\quad n=1,\,2,\ldots \tag{5.3}$$

Положим $G'_{\,n}=\bigcup_{m\leqslant n}G_m$. Тогда $\{G'_{\,n},n\geqslant 1\}$ есть возрастающая последовательность и $\Omega_n\subset G'_{\,n}$ при $\forall\; n\geqslant 1$. Пользуясь методом математической индукции, мы покажем ниже, что

$$\Pi^*(\,\Omega_n\,)\,+\sum_{m\leqslant n}\varepsilon_{\,m}\,\geqslant\,\Pi\,(\,G'_{\,n}\,),\quad n\geqslant 1. \tag{5.4}$$

Если (5.4) верно, то свойство (г) будет вытекать из следующих соображений. Так как $\Omega_\infty\subset\lim\limits_n\!\uparrow G'_{\,n}\in\mathcal{G}$, то, вычисляя пределы при $n\to\infty$ от обеих частей (5.4), получаем, что

$$\lim_n\!\uparrow\Pi^*(\,\Omega_n\,)\,+\,\varepsilon\,\overset{(г)}{\geqslant}\,\Pi\,(\,\lim_n\!\uparrow G'_{\,n}\,)\,\geqslant\,\Pi^*(\,\Omega_\infty\,). \tag{5.5}$$

Но в силу свойства (в) $\Pi^*(\,\Omega_n\,)\leqslant\Pi^*(\,\Omega_\infty\,)$, откуда $\lim\limits_n\uparrow\Pi^*(\,\Omega_n\,)\leqslant\Pi^*(\,\Omega_\infty\,)$. Это неравенство вместе с (5.5) влечет свойство (г).

Осталось доказать (5.4). При $n=1$ неравенство (5.4) совпадает с неравенством в (5.3). Следуя методу математической индукции, предположим, что (5.4) верно для некоторого n и докажем, что это предположение влечет справедливость (5.4) при $n+1$. Имеем:

$$\begin{aligned}\Pi\,(\,G'_{\,n+1}\,)\;&=\;\Pi\,(\,G'_{\,n}\bigcup G_{\,n+1}\,)\;=\\ &=\;\Pi\,(\,G'_{\,n}\,)\,+\,\Pi\,(\,G_{n+1}\,)\,-\,\Pi\,(\,G'_{\,n}\bigcap G_{n+1}\,).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Так как $\Omega_n\subset G'_{\,n}$ и $\Omega_n\subset\Omega_{n+1}\subset G_{n+1}$, то $\Omega_n\subset G'_{\,n}\cap G_{n+1}$. В силу этого правая часть (5.6) не превосходит

$$\Pi^*(\,\Omega_n\,)\,+\sum_{m\leqslant n}\varepsilon_{\,m}\,+\,\Pi^*(\,\Omega_{n+1}\,)\,+\,\varepsilon_{\,n+1}\,-\,\Pi^*(\,\Omega_n\,)\;=$$

$$\Pi^*(\,\Omega_{n+1}\,)\,+\sum_{m\leqslant n+1}\varepsilon_{\,m}.$$

Это доказывает неравенство (5.4) и, следовательно, свойство (г).

$\triangle$

Предложение 5.3. *Класс* $\mathcal{D}$ *подмножеств* D *пространства* Ω, *для которых* $\Pi^*(D) + \Pi^*(D^c) = 1$, *есть булева* σ*-алгебра. Ограничение* $\Pi^*|_{\mathcal{D}}$ *функции* Π^* *на* $\mathcal{D}$ *представляет собой полную вероятность на* $(\Omega, \mathcal{D})$.

Доказательство. Покажем, что

(1) класс $\mathcal{D}$, характеризуемый свойством

$$\Pi^*(D) + \Pi^*(D^c) = 1, \quad \forall\, D \in \mathcal{D},$$

есть булева алгебра и сужение функции Π^* на $\mathcal{D}$ обладает свойством $\Pi^*(\Omega) = 1$ и конечно аддитивно;

(2) $\mathcal{D}$ есть монотонный класс (согласно предложению 3.1 отсюда будет следовать, что $\mathcal{D}$ есть булева σ-алгебра) и функция Π^* на $\mathcal{D}$ непрерывна относительно монотонных последовательностей;

(3) класс $\mathcal{D}$ содержит все Π^*-нулевые подмножества Ω.

(1). Класс $\mathcal{D}$ содержит Ω (см. свойство (а) в предложении 5.2), а так как $(D^c)^c = D$, то характеризационное свойство класса $\mathcal{D}$ выполняется для D^c вместе с D, то есть $D \in \mathcal{D} \Longrightarrow D^c \in \mathcal{D}$.

Покажем, что $D_1, D_2 \in \mathcal{D} \Longrightarrow D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$, установив попутно конечную аддитивность сужения функции Π^* на $\mathcal{D}$.

В силу свойства (б) предложения 5.2

$$\Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \Pi^*(D_1) + \Pi^*(D_2),$$

$$\Pi^*((D_1 \cup D_2)^c) + \Pi^*((D_1 \cap D_2)^c) \leqslant \Pi^*(D_1^c) + \Pi^*(D_2^c), \quad (5.7)$$

так как

$$\Pi^*((D_1 \cup D_2)^c) + \Pi^*((D_1 \cap D_2)^c) =$$

$$\Pi^*(D_1^c \cap D_2^c) + \Pi^*(D_1^c \cup D_2^c).$$

Частный случай свойства (б) в предложении 5.2 дает

$$1 \leqslant \Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*((D_1 \cup D_2)^c),$$

$$1 \leqslant \Pi^*(D_1 \cap D_2) + \Pi^*((D_1 \cap D_2)^c). \quad (5.8)$$

Складывая попарно неравенства (5.7), а также (5.8) и используя равенства

$$\Pi^* (D_i) + \Pi^* (D_i^c) = 1, \quad i = 1, 2,$$

получаем, что

$$2 \leqslant \Big[\Pi^* (D_1 \cup D_2) + \Pi^* ((D_1 \cup D_2)^c) \Big] +$$

$$\Big[\Pi^* (D_1 \cap D_2) + \Pi^* ((D_1 \cup D_2)^c) \Big] \leqslant$$

$$\Big[\Pi^* (D_1) + \Pi^* (D_1^c) \Big] + \Big[\Pi^* (D_2) + \Pi^* (D_2^c) \Big] = 2.$$

Это возможно лишь когда во всех неравенствах (5.7) и (5.8) на самом деле имеют место равенства. Таким образом, $D_1,\ D_2 \in \mathcal{D} \Longrightarrow D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$ и $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ и, кроме того, сужение Π^* на $\mathcal{D}$ аддитивно в сильном смысле:

$$\Pi^* (D_1 \cup D_2) + \Pi^* (D_1 \cap D_2) = \Pi^* (D_1) + \Pi^* (D_2).$$

В частности, если $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то

$$\Pi^* (D_1 + D_2) = \Pi^* (D_1) + \Pi^* (D_2),$$

следовательно, функция Π^* конечно аддитивна на $\mathcal{D}$.

(2). Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность $\{D_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{D}$. Требуется доказать, что $\bar{D} = \lim\limits_n \uparrow D_n \in \mathcal{D}$ или, что то же, $\Pi^* (\bar{D}) + \Pi^* (\bar{D}^c) = 1$. По свойству (г) предложения 5.2 $\Pi^* (D_n) \uparrow \Pi^* (\bar{D})$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем n_0 так, что $\Pi^* (\bar{D}) \leqslant \Pi^* (D_{n_0}) + \varepsilon$. Тогда имеем:

$$1 \leqslant \Pi^* (\bar{D}) + \Pi^* (\bar{D}^c) \leqslant \Pi^* (D_{n_0}) + \varepsilon + \Pi^* (D_{n_0}^c) = 1 + \varepsilon.$$

Следовательно, $\Pi^* (\bar{D}) + \Pi^* (\bar{D}^c) = 1$.

Если последовательность $\{D_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{D}$ монотонно убывает, $\bar{D} = \lim\limits_n \downarrow D_n$, то $\{D_n^c,\ n \geqslant 1\}$ – монотонно возрастающая последовательность элементов $\mathcal{D}$. По только что доказанному $\bar{D}^c = \lim\limits_n \uparrow D_n^c \in \mathcal{D}$. Поэтому $\bar{D} = (\bar{D}^c)^c \in \mathcal{D}$. Кроме того,

$$\Pi^* (D_n) = 1 - \Pi^* (D_n^c) \downarrow 1 - \Pi^* (\bar{D}^c) = \Pi^*(\bar{D}).$$

(3). Пусть $\Omega_0 \subset D \in \mathcal{D}$ и $\Pi^*(D) = 0$. Требуется показать, что $\Omega_0 \in \mathcal{D}$ или, что то же,

$$\Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_1^c) = 1. \tag{5.7}$$

Имеем: $\Pi^*(\Omega_0) + \Pi^*(\Omega_0^c) \leqslant \Pi^*(D) + 1 = 1$ и в то же время $\Pi^*(\Omega_0) + \Pi^*(\Omega_0^c) \geqslant 1$ в силу свойства (б) предложения 5.2. Этим устанавливается справедливость равенства (5.9) и, следовательно, принадлежность нулевых множеств σ-алгебре $\mathcal{D}$ (ее полнота).

$\triangle$

Теорема 5.1. (О продолжении вероятности.) *Всякая вероятность P, определенная на булевой алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, имеет единственное продолжение до вероятности на булевой σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, порожденной $\mathcal{A}$.*

Доказательство. По построению Π^* совпадает с P на $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ (для $A \in \mathcal{A}$ выполняется характеризационное равенство класса $\mathcal{D}$: $\Pi^*(A) + \Pi^*(A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$). Так как $\mathcal{D}$ есть σ-алгебра, а $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$. Таким образом, Π^* есть продолжение вероятности P не только на $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, но и на более широкую алгебру $\mathcal{D}$. Остается доказать единственность продолжения.

Обозначим: $P' = \Pi^*|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})}$ – ограничение Π^* на $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Пусть Q – еще одна вероятность на $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, которая совпадает с P на $\mathcal{A}$, то есть $Q(A) = P(A) = P'(A)$ для $A \in \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ ($\mathcal{G}$ содержит только счетные объединения элементов $\mathcal{A}$), то для $G = \lim_n\uparrow A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$, имеем

$$Q(G) = \lim_n\uparrow Q(A_n) = \lim_n\uparrow P(A_n) = \Pi(G).$$

Далее, для $A \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$ вероятность

$$P'(A) = \Pi^*(A) = \inf\{\Pi(G),\ A \subset G \in \mathcal{G}\} =$$

$$\inf\{Q(G),\ A \subset G \in \mathcal{G}\} \geqslant Q(A).$$

Строгое неравенство $P'(A) > Q(A)$ не возможно ни для какого $A \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, ибо тогда

$$1 = Q(\Omega) = Q(A) + Q(A^c) < P'(A) + P'(A^c) = 1$$

и мы приходим к противоречию: $1 < 1$. Итак, $Q = P'$.

$\triangle$

Замечание. Так как $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$, то внешняя вероятность P'^*, построенная по P', совпадает на $\mathcal{P}(\Omega)$ с Π^* (см. предложение 4.6). Таким образом, $(\Omega,\ \mathcal{D},\ \Pi^*|_{\mathcal{D}})$ совпадает с пополнением $(\Omega,\ \mathcal{B}\ (\mathcal{A}),\ P')$, то есть $\mathcal{D}$ совпадает с пополнением $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ всевозможными P'-нулевыми множествами.

Литература: Ж.Неве, стр. 38-44.

§6. **Продолжение вероятности с полуалгебр и компактных классов. Функции распределения**

В большинстве практических ситуаций при построении вероятностных моделей реальных явлений рассматривается набор достаточно простых подмножеств Ω, который, как правило, не является булевой алгеброй. Например, если $\Omega = \mathrm{R}$ (прямая), то вероятности определяются только на интервалах, если $\Omega = \mathrm{R}^2$ (плоскость), то – на прямоугольниках и т. д. В связи с этим возникает задача доопределения (продолжения) вероятности с класса достаточно простых событий на порожденную этим классом булеву алгебру (а затем и на σ-алгебру в соответствии с конструкцией §5).

Указанные в примере классы событий (интервалы на прямой, прямоугольники в R^n) обладают тем свойством, что они замкнуты относительно пересечений, и дополнение любого элемента представимо в виде объединения конечного числа элементов этого же класса. Оказывается, если вероятность определена на классах подмножеств Ω, обладающих подобными свойствами, то как построение порожденной булевой алгебры, так и продолжение на эту алгебру вероятности осуществляется почти тривиально, по крайней мере, намного проще, чем конструкция §5.

Определение 6.1. Класс $\mathcal{S}$ подмножеств Ω называется *булевой полуалгеброй*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\Omega \in \mathcal{S}$;

(2) $\mathcal{S}$ замкнут относительно конечных пересечений;

(3) дополнение S^c каждого множества $S \in \mathcal{S}$ есть объединение конечного семейства попарно непересекающихся элементов $\mathcal{S}$.

Предложение 6.1. *Булева алгебра $\mathcal{A}$, порожденная булевой полуалгеброй $\mathcal{S}$ подмножеств Ω, состоит из сумм $A = \sum_I S_i$ конечных семейств $\{S_i,\ i \in I\}$ попарно непересекающихся элементов $\mathcal{S}$. Для каждой аддитивной функции множеств P, отображающей $\mathcal{S}$ в отре-*

зок $[0;\,1]$ *и такой, что* $P(\Omega)=1$, *формула* $P'(A)=\sum\limits_I P(S_i)$ *определяет единственное аддитивное продолжение* P' *функции* P *на алгебру* $\mathcal{A}$. *Если функция* P *является* σ*-аддитивной на* $\mathcal{S}$, *то* P' *есть вероятность на* $\mathcal{A}$; *в этом случае существует единственная продолжающая* P *вероятность на* σ*-алгебре, порожденной* $\mathcal{S}$ *(совпадающей с* σ*-алгеброй, порожденной* $\mathcal{A}$*).*

Доказательство. Всюду в доказательстве букву S с возможными нижними и верхними индексами будем использовать для обозначения элементов $\mathcal{S}$.

Покажем сначала, что класс $\mathcal{A}$ с элементами вида $A=\sum\limits_I S_i$ (I – конечно) есть булева алгебра, проверив выполнение аксиом из определения 1.1. Действительно, $\Omega\in\mathcal{A}$, так как $\Omega\in\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$, то есть выполняется аксиома (1). Выполняется аксиома (3), потому что

$$\Big(\sum_I S_i\Big)\bigcap\Big(\sum_J S'_j\Big)=\sum_{I\times J} S_i\bigcap S'_j\in\mathcal{A}$$

как объединение непересекающихся элементов $S_i\bigcap S'_j\in\mathcal{S}$ (класс $\mathcal{S}$ замкнут относительно пересечений). Если $A=\sum\limits_I S_i$, то $A^c=\bigcap_I S_i^c$, и так как каждое $S_i^c\in\mathcal{A}$ по аксиоме (3) определения 6.1, то и $\bigcap_I S_i^c\in\mathcal{A}$ по только что доказанной замкнутости $\mathcal{A}$ относительно конечных пересечений. Таким образом проверено и выполнение аксиомы (2).

Минимальность $\mathcal{A}$ среди всех булевых алгебр, содержащих $\mathcal{S}$, следует из того, что любая алгебра, содержащая $\mathcal{S}$, должна быть замкнута относительно конечных объединений ее элементов.

Проверим теперь корректность продолжения P согласно указанной в предложении формуле. Если $A=\sum\limits_I S_i$ и $A=\sum\limits_J S'_j$ – два представления множества $A\in\mathcal{A}$ в виде конечных сумм элементов $\mathcal{S}$, то

$$S_i=S_i\bigcap A=\sum_{j\in J} S_i\bigcap S'_j$$

для любого $i \in I$. Аналогично, $S'_j = \sum_{i\in I} S_i \cap S'_j$ для любого $j \in J$. Используя аддитивность функции P на $\mathcal{S}$, получаем:

$$\sum_{i\in I} P(S_i) = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} P(S_i \bigcap S'_j)\Big) = \sum_{I\times J} P(S_i \bigcap S'_j) = \sum_{j\in J} P(S'_j),$$

то есть функция P' на $\mathcal{A}$ определена корректно.

Аддитивность (σ-аддитивность) P' доказывается аналогично. Действительно, пусть $A = \sum_J A_j$, где $A,\ A_j \in \mathcal{A}$, J – конечно (или счетно), и пусть $A = \sum_K S_k$, каждое $A_j = \sum_{i\in I_j} S_i^j,\ j \in J$, ($K$ и I_j – конечны). Тогда

$$S_k = A \bigcap S_k = \sum_{j\in J} A_j \bigcap S_k = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} S_i^j \bigcap S_k, \tag{6.8}$$

$$S_i^j = S_i^j \bigcap A_j = S_i^j \bigcap A = \sum_{k\in K} S_i^j \bigcap S_k. \tag{6.9}$$

Поскольку P аддитивна (σ-аддитивна) на $\mathcal{S}$, то

$$P'\Big(\textstyle\sum_{j\in J} A_j\Big) = P'(A) = \displaystyle\sum_{k\in K} P(S_k) \stackrel{(6.1)}{=}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} P(S_i^j \bigcap S_k) =$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\sum_{k\in K} P\Big(S_i^j \bigcap S_k\Big) \stackrel{(6.2)}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} P(S_i^j) =$$

$$\sum_{j\in J} P'\Big(\sum_{i\in I_j} S_i^j\Big) = \sum_{j\in J} P'(A_j).$$

Последнее утверждение предложения есть следствие теоремы 5.1 о продолжении вероятности.

$\triangle$

Следует обратить особое внимание на последнее утверждение предложения 6.1: *аддитивная функция* P на полуалгебре $\mathcal{S}$ продолжается до *вероятности* на σ-алгебре, порожденной $\mathcal{S}$, только при условии σ-аддитивности P, то есть P должна быть вероятностью на порожденной классом $\mathcal{S}$ булевой алгебре $\mathcal{A}$. Однако в теории вероятностей нередко бывает трудно доказать, что некоторым образом построенная функция множеств σ-аддитивна. Тем не менее, в довольно большом числе случаев можно установить σ-аддитивность аддитивной функции множеств, доказав, что рассматриваемое пространство удовлетворяет некоторому дополнительному условию компактности. Ниже вводится это условие в наипростейшей форме.

Определение 6.2. Класс $\mathcal{C}$ подмножеств Ω называется *компактным*, если для всякой последовательности $\{C_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}$, для которой $\bigcap_{n \geqslant 1} C_n = \emptyset$, существует такое целое число N, что $\bigcap_{n \leqslant N} C_n = \emptyset$.

Лемма 6.1. *Если класс $\mathcal{C}$ подмножеств Ω компактен, то компактны также следующие классы:*

(а) *класс $\mathcal{C}_s$, состоящий из всевозможных конечных объединений подмножеств из $\mathcal{C}$;*

(б) *класс $\mathcal{C}_\delta$, состоящий из всевозможных счетных пересечений подмножеств из $\mathcal{C}$;*

(б) *класс $\mathcal{C}'$ – наименьший класс подмножеств Ω, содержащий $\mathcal{C}$ и замкнутый относительно операций конечного объединения и счетного пересечения.*

Доказательство. Установим сначала компактность класса $\mathcal{C}_s$. Пусть $\{D_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}_s$; требуется показать, что $\bigcap_{n \leqslant p} D_n \neq \emptyset$ при всех конечных $p \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$.

Поскольку $D_n \in \mathcal{C}_s$, то

$$D_n = \bigcup_{m=1}^{M_n} C_n^m,$$

где $C_n^m \in \mathcal{C}$. Обозначим через J множество всех бесконечных последовательностей $\{m_n,\ n \geqslant 1\}$, компоненты m_n которых удовлетворяют неравенствам $1 \leqslant m_n \leqslant M_n$. Пусть J_p – подмножество J, состоящее из тех последовательностей $\{m_n,\ n \geqslant 1\}$, для которых $\bigcap_{n \leqslant p} C_n^{m_n} \neq \emptyset$. Это подмножество не пусто ($J_p \neq \emptyset$), ибо (согласно посылке)

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \leqslant p} D_n = \bigcap_{n \leqslant p} \Big(\bigcup_{m=1}^{M_n} C_n^m \Big) = \bigcup_{m_1=1}^{M_1} \bigcup_{m_2=1}^{M_2} \cdots \bigcup_{m_p=1}^{M_p} \Big(\bigcap_{n \leqslant p} C_n^{m_n} \Big),$$

и, следовательно, найдется хотя бы одна последовательность

$$\{m_1,\, m_2, \ldots, m_p, \ldots\},$$

для которой

$$\bigcap_{n \leqslant p} C_n^{m_n} \neq \emptyset.$$

Множества $J_p,\ p = 1,\, 2, \ldots,$ убывают, ибо с ростом p требуется непустота пересечения всё большего числа множеств $C_n^{m_n}$. Остается показать, что $\lim\limits_p\!\downarrow J_p \neq \emptyset$, то есть установить существование последовательности $\{m_n,\ n \geqslant 1\} \in \lim\limits_p\!\downarrow J_p$. Действительно, тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{m_n} \neq \emptyset,$$

так как компактность класса $\mathcal{C}$ означает $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n^{m_n} \neq \emptyset$, если

$$\bigcap_{n \leqslant p} C_n^{m_n} \neq \emptyset, \quad \forall\, p \geqslant 1,$$

то есть существует $\{m_n,\ n \geqslant 1\} \in \lim\limits_p\!\downarrow J_p$.

Общую для всех $J_p,\ p = 1,\, 2, \ldots,$ последовательность $\{m_n^*,\ n \geqslant 1\}$ будем строить по индукции. Выберем в каждом множестве $J_p,\ p = 1,\, 2, \ldots,$ по одной последовательности $\{m_n^{(p)},\ n \geqslant 1\}$. Напомним, каждый член этой последовательности удовлетворяет неравенству $1 \leqslant m_n^{(q)} \leqslant M_n$ – числу множеств из $\mathcal{C}$, участвующих в представлении D_n – и

$$\bigcap_{n \leqslant p} C_n^{m_n^{(p)}} \neq \emptyset.$$

Запишем выбранные последовательности в виде таблицы

$$\begin{array}{l} m_1^{(1)},\ \dots \\ m_1^{(2)}, m_2^{(2)},\ \dots \\ m_1^{(3)}, m_2^{(3)}, m_3^{(3)},\ \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

и в дальнейшем будем учитывать только те элементы таблицы, которые стоят на или ниже главной диагонали, то есть $m_n^{(p)}$ при $n \leqslant p$.

Приступим к индуктивному построению $\{m_n^*,\ n \geqslant 1\}$. Так как $m_1^{(p)}$ принимают значения из конечного множества ($1 \leqslant m_1^{(p)} \leqslant M_1$), то среди всех строк таблицы мы можем найти бесконечную совокупность K_1 строк с одним и тем же элементом m_1^* в первом столбце. Таким образом, каждый элемент K_1 имеет вид $\{m_1^*, \dots\}$ и, конечно, принадлежит J_1. Далее, отберем среди строк K_1 бесконечную совокупность K_2 с одним и тем же элементом m_2^* во втором столбце. Каждая последовательность, записанная в строке из K_2, имеет вид $\{m_1^*,\ m_2^*,\ m_3^{(q)},\ m_4^{(q)}, \dots\}$ с $q \geqslant 2$, принадлежит J_q, следовательно, принадлежит и J_2. Продолжая неограниченно этот процесс построения, получаем последовательность $\{m_n^*,\ n \geqslant 1\}$, которая принадлежит любому J_p с $p \geqslant 1$ и, следовательно, принадлежит их пересечению $\lim\limits_p\!\downarrow J_p$.

Итак, класс $\mathcal{C}_s$ компактен. Намного проще проверить компактность класса $\mathcal{C}_\delta$. Действительно, если

$$C_n^\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n,k}, \quad C_{n,k} \in \mathcal{C}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^\delta = \varnothing,$$

то

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{n,k} = \varnothing,$$

откуда

$$\bigcap_{k \leqslant K} \bigcap_{n \leqslant N} C_{n,k} = \varnothing$$

для некоторых N и K, поэтому $\bigcap_{n \leqslant N} C_n^\delta = \varnothing$.

Если составить класс $\mathcal{C}_{s\delta}$, состоящий из счетных пересечений множеств $\mathcal{C}_s$, то он, как следует из уже доказанных пунктов (а) и (б), также компактен. Остается доказать, что он совпадает с $\mathcal{C}'$. Для этого достаточно проверить замкнутость класса $\mathcal{C}_{s\delta}$ относительно операций счетного пересечения и конечного объединения. Замкнутость $\mathcal{C}_{s\delta}$ относительно счетных пересечений следует непосредственно из определения этого класса, замкнутость относительно конечных объединений – из формулы

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\bigcup\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\,\bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(A_n \bigcup B_m\Big).$$

$\triangle$

Предложение 6.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – булева алгебра (или $\mathcal{S}$ – булева полуалгебра) подмножеств Ω, и пусть $\mathcal{C}$ – компактный подкласс $\mathcal{A}$ (или $\mathcal{S}$). Всякая аддитивная функция P, отображающая $\mathcal{A}$ (или $\mathcal{S}$) в $[0;\ 1]$, и такая, что $P(\Omega) = 1$ и $P(A) = \sup\{P(C),\ C\subset A, C\in\mathcal{C}\}$ при всех $A\in\mathcal{A}$ (или при всех $A\in\mathcal{S}$), является σ-аддитивной, то есть в случае алгебры функция P есть вероятность.*

Доказательство. Докажем предложение сначала для случая булевой алгебры. Для этого достаточно установить только непрерывность P:

$$A_n \downarrow \emptyset, \quad A_n\in\mathcal{A} \Longrightarrow P(A_n)\downarrow 0\,;$$

нормируемость и конечная аддитивность P оговаривается условиями предложения. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого n выберем множество $C_n\in\mathcal{C}$ так, чтобы $C_n\subset A_n$ и $P(A_n)\leqslant P(C_n)+\varepsilon 2^{-n}$. Поскольку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

то существует натуральное число N, для которого $\bigcap_{n\leqslant N} C_n = \emptyset$, или, что то же,

$$\Big(\bigcap_{n\leqslant N} C_n\Big)^c = \Omega.$$

Но тогда

$$A_N = \Omega\bigcap A_N = \Big(\bigcap_{n\leqslant N} C_n\Big)^c \bigcap A_N = \Big(\bigcup_{n\leqslant N} C_n^c\Big)\bigcap A_N =$$

$$\bigcup_{n\leqslant N}\Big(C_n^c\bigcap A_N\Big)\subset\bigcup_{n\leqslant N}\Big(C_n^c\bigcap A_n\Big)=\bigcup_{n\leqslant N}(A_n\setminus C_n).$$

Используя конечную аддитивность и полуаддитивность P, получаем

$$P(A_N)\leqslant\sum_{n\leqslant N}P(A_N\setminus C_n)\leqslant\varepsilon\sum_1^N 2^{-n}\leqslant\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, имеем $\lim\limits_n\!\downarrow P(A_n)=0$.

Покажем теперь, что справедливость нашего предложения для алгебры влечет его справедливость для полуалгебры. Для этого воспользуемся леммой 6.1 и предложением 6.1. Согласно лемме, класс $\mathcal{C}_s$ объединений конечных семейств множеств из $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}$, содержащийся, очевидно, в порожденной полуалгеброй $\mathcal{S}$ алгебре $\mathcal{A}$, компактен. С другой стороны, пусть $A=\sum_1^n S_i\in\mathcal{A}$. Выбирая множества C_i из $\mathcal{C}$ так, чтобы $C_i\subset S_i$, $P(S_i)\leqslant P(C_i)+\varepsilon/n$, $i=1,\dots,n$, получаем $\sum_1^n C_i\subset A$, то есть

$$P'\Big(\sum_1^n C_i\Big)\leqslant P'(A),\qquad P'(A)\leqslant P'\Big(\sum_1^n C_i\Big)+\varepsilon.$$

Так как $\sum_1^n C_i\in\mathcal{C}_s$, то тем самым показано, что алгебра $\mathcal{A}$, класс $\mathcal{C}_s$ и функция P' удовлетворяют условиям настоящего предложения. Следовательно, функция P' является σ-аддитивной на $\mathcal{A}$ и, конечно, P σ-аддитивна на $\mathcal{S}$.

△

Если на σ-алгебре $\mathcal{A}$ определена вероятность $P(A)$, то говорят, что на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{A})$ задано *распределение вероятностей.* Как было замечено в начале этого параграфа, аналитическое задание функции множеств P вызывает массу затруднений, и с ними трудно оперировать средствами классического анализа, поскольку последний развит в первую очередь для изучения функций, зависящих от *точек* некоторого пространства. В силу сказанного вероятностные меры в евклидовых пространствах зачастую определяются с помощью так называемых функций распределений. В случае $\Omega=\mathrm{R}$ такой функцией $F(x)$

является вероятность осуществления события вида $I_x = (-\infty,\ x)$, рассматриваемая как функция точки $x \in \mathrm{R} : F(x) = P(I_x)$. Возникает естественный вопрос, можно ли по функции распределения $F(x)$ однозначно восстановить распределение вероятностей P на σ-алгебре борелевских подмножеств вещественной прямой? Развитые в данном параграфе методы продолжения вероятностей с полуалгебр и компактных классов позволяют дать положительный ответ на поставленный вопрос.

Напомним некоторые определения из общих курсов математического анализа и теории вероятностей.

Определение 6.3. Действительная функция $F(x)$ действительного переменного x называется *функцией распределения*, если она

(1) не убывает,

(2) непрерывна слева,

(3) удовлетворяет граничным условиям:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Класс $\mathcal{S}$ всех интервалов (открытых, полуоткрытых и замкнутых, ограниченных и неограниченных) на действительной прямой R образует, очевидно, булеву полуалгебру и порождает булеву алгебру конечных объединений непересекающихся интервалов. Обозначим через $\mathcal{R}$ булеву σ-алгебру, порожденную $\mathcal{S}$. Подмножества R, принадлежащие $\mathcal{R}$, называют *борелевскими множествами*, а σ-алгебру $\mathcal{R}$ – *борелевским полем.*

Предложение 6.3. *Формула $P(I_x) = F(x)$, где $x \in \mathrm{R}$ и I_x – открытый интервал $(-\infty,\ x)$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между вероятностями P на $(\mathrm{R},\ \mathcal{R})$ и функциями распределения F на* R.

Доказательство. Пусть P – вероятность на $(\mathrm{R},\ \mathcal{R})$. Из соотношений $I_x \subset I_y$ при $x < y$; $I_{x_n} \uparrow I_x$ при $x_n \uparrow x$; $I_{x_n} \downarrow \emptyset$ при $x_n \downarrow -\infty$; $I_{x_n} \uparrow \mathrm{R}$ при $x_n \uparrow +\infty$ следует, что $F(x) = P(I_x)$ есть функция распределения.

Обратно, пусть F – функция распределения. Определим функцию P на $\mathcal{S}$, положив

$$P\{[a,\, b)\} = F(b) - F(a), \qquad P\{(a,\, b)\} = F(b) - F(a+0),$$

$$P\{[a,\, b]\} = F(b+0) - F(a), \quad P\{(a,\, b]\} = F(b+0) - F(a+0).$$

Пусть $\mathcal{C}$ – класс всех замкнутых ограниченных интервалов (отрезков) на прямой R. Как следует из леммы о вложенных отрезках, известной из курса анализа, класс $\mathcal{C}$ компактен, и из свойства непрерывности F слева вытекает, что P и $\mathcal{C}$ удовлетворяют условиям предложения 6.2. Следовательно, аддитивная функция P является σ-аддитивной и поэтому имеет единственное продолжение до вероятности на $(\mathrm{R},\, \mathcal{R})$.

$\triangle$

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Проверить, что класс $\{[a,\, b] :\ a,\, b \in \mathrm{R}\}$ всех отрезков на числовой прямой действительно компактен.

6.2. Показать, что класс $\{(a,\, b) :\ a,\, b \in \mathrm{R}\}$ не компактен.

6.3. Показать, что $\{[a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] :\ a_i,\, b_i \in \mathrm{R}\}$ – компактный класс.

6.4. Доказать, что класс всех конечных подмножеств произвольного множества является компактным.

6.5. Доказать, что произвольный класс компактных подмножеств некоторого метрического пространства является компактным классом.

6.6. Доказать, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{R}$ порождается классом $\{[a,\, b] :\ a,\, b \in \mathrm{R}\}$.

6.7. Доказать, что $\mathcal{R}$ порождается классом $\{(-\infty,\, b) :\ b \in \mathrm{R}\}$ и содержит все открытые подмножества числовой прямой.

Литература: Ж.Неве, стр. 46-51.

§7. **Измеримые отображения**

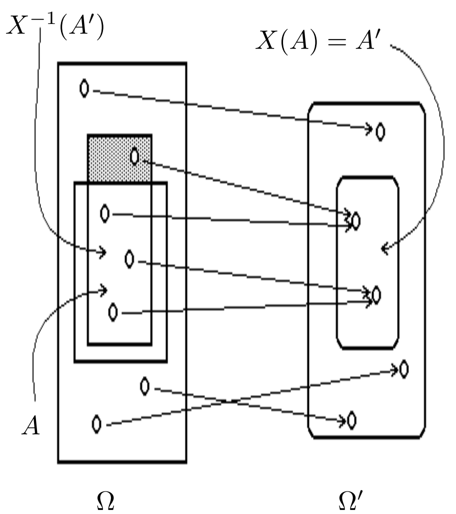
Пусть Ω – пространство элементарных исходов и $X : \Omega \to \Omega'$ – некоторое отображение. Для любого подмножества $A \subset \Omega$ можно определить его *образ*:

$$X(A) = \{X(\omega) :\ \omega \in A\} \subset \Omega',$$

для любого $A' \subset \Omega'$ можно определить его *прообраз*:

$$X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega :\ X(\omega) \in A'\} \subset \Omega.$$

Предложение 7.1. (свойства прообразов). *Пусть X – отображение Ω на Ω'. Тогда*



(а) $A \subset X^{-1}(\,X(A)\,), \quad \forall\ A \subset \Omega;$

(б) $A' \subset B' \subset \Omega' \implies X^{-1}(A') \subset X^{-1}(B');$

(в) *отображение X^{-1} есть гомоморфизм относительно операций дополнения, объединения и пересечения, то есть*

(1) $X^{-1}(\Omega') = \Omega,\ X^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$

(2) $X^{-1}(A'^c) = (X^{-1}(A'))^c,$

(3) $X^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} X^{-1}(A_i),$

(4) $X^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} X^{-1}(A_i).$

Доказательство. (а). Очевидно, что для $\omega \in A \quad X(\omega) \in X(A)$. Поэтому по определению прообраза

$$X^{-1}(X(A)) = \{\omega :\ X(\omega) \subset X(A)\} \supset \{\omega :\ \omega \in A\}.$$

(б). Если $A' \subset B'$, то

$$X^{-1}(A') = \{\omega :\ X(\omega) \in A'\} \subset \{\omega :\ X(\omega) \in B'\} = X^{-1}(B').$$

(в). Равенство $X^{-1}(\Omega') = \Omega$ выполняется по определению, а равенство $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ следует из (2), справедливость которого вытекает из следующей цепочки:

$$\omega \in X^{-1}(A'^c) \Leftrightarrow X(\omega) \in A'^c \Leftrightarrow X(\omega) \notin A' \Leftrightarrow$$

$$X(\omega) \in A'^c \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(A')^c.$$

Аналогично устанавливаются соотношения (3) и (4). Например, (3):

$$\omega \in X^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A'_i\Big) \Leftrightarrow X(\omega) \in \bigcup_{i\in I} A'_i \Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I \quad (\, X(\omega) \in A'_{i_0}\,) \Leftrightarrow$$

$$\exists\, i_0 \in I \quad (\,\omega \in X^{-1}(\, A'_{i_0}\,)\,) \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{i\in I} X^{-1}(A'_i).$$

$\triangle$

Пусть $\mathcal{C}'$ – класс подмножеств $C' \subset \Omega'$. Определим прообраз класса $\mathcal{C}'$, положив

$$X^{-1}(\mathcal{C}') = \{X^{-1}(C') :\ C' \in \mathcal{C}'\}.$$

Из только что доказанного предложения вытекают

Следствие 7.1. *Если $\mathcal{A}'$ есть σ-алгебра подмножеств Ω', то $X^{-1}(\mathcal{A}')$ есть σ-алгебра подмножеств Ω.*

Следствие 7.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – булева алгебра (булева σ-алгебра) подмножеств Ω. Тогда*

$$\mathcal{A}' = \{A' \subseteq \Omega' :\ X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

есть булева алгебра (булева σ-алгебра) подмножеств Ω'.

Определение 7.1. Пусть $(\,\Omega,\, \mathcal{A},\, P\,)$ – некоторое вероятностное пространство и X – отображение Ω в Ω'. Класс

$$\mathcal{A}' = \{A' :\ X^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

называется *σ-алгеброй, индуцированной отображением X и σ-алгеброй* $\mathcal{A}$; вероятность

$$P'(A') = P\{X^{-1}(A')\},\ A' \in \mathcal{A}'$$

называется *вероятностью, индуцированной отображением X и вероятностью P*; вероятностное пространство $(\,\Omega',\, \mathcal{A}',\, P')$ – *вероятностным пространством, индуцированным отображением X из Ω в Ω'.*

Замечание. *P' – вероятность на $\mathcal{A}'$.*

Предложение 7.2. *Каков бы ни был класс* $\mathcal{C}'$ *подмножеств пространства* Ω' *прообраз* $X^{-1}(\mathcal{A}')$ σ*-алгебры* $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'(\mathcal{C}')$, *порожденной классом* $\mathcal{C}'$, *совпадает с* σ*-алгеброй* $\mathcal{A} = A(X^{-1}(\mathcal{C}'))$, *порожденной классом* $X^{-1}(\mathcal{C}')$.

Доказательство. $\mathcal{A}$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая $X^{-1}(\mathcal{C}')$, а $X^{-1}(\mathcal{A}')$ – σ-алгебра, содержащая $X^{-1}(\mathcal{C}')$, – см. свойство (б) предложения 7.1:

$$\mathcal{C}' \subset \mathcal{A}' \Longrightarrow X^{-1}(\mathcal{C}') \subset X^{-1}(\mathcal{A}').$$

Следовательно, $\mathcal{A} \subseteq X^{-1}(\mathcal{A}')$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим класс подмножеств Ω' : $\mathcal{B}' = \{B' : \ X^{-1}(\mathcal{B}') \in \mathcal{A}\}$ и покажем, что

(а) $X^{-1}(\mathcal{B}') \subset \mathcal{A}$,

(б) $\mathcal{C}' \subset \mathcal{B}'$,

(в) $\mathcal{B}'$ есть σ-алгебра,

(г) $X^{-1}(\mathcal{A}') \subset X^{-1}(\mathcal{B}')$.

(Утверждения (б) и (в) нужны для доказательства (г), в то время как (г) и (а) дают требуемое включение $X^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq X^{-1}(\mathcal{B}') \subset \mathcal{A}$).

(а) Класс $X^{-1}(\mathcal{B}') \subseteq \{X^{-1}(B') \colon B' \in \mathcal{B}'\}$, откуда $B \in X^{-1}(\mathcal{B}') \Longrightarrow B = X^{-1}(B') \in \mathcal{A}$, что, очевидно, означает $X^{-1}(\mathcal{B}') \subseteq \mathcal{A}$.

(б) Если $C' \in \mathcal{C}'$, то $C = X^{-1}(C') \in \mathcal{A}$, ибо $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра, порожденная классом $X^{-1}(\mathcal{C}')$. Но тогда по определению класса $\mathcal{B}' = \{B' : X^{-1}(B') \in \mathcal{A}\}$ множество $C' \in \mathcal{B}'$, то есть $\mathcal{C}' \in \mathcal{B}'$.

(в) Доказывается по аналогии с доказательством предложения 7.1.

(г) Из включения $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{B}'$ и того, что $\mathcal{A}'$ есть σ-алгебра, порожденная классом $\mathcal{C}'$, следует включение $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}'$, откуда (см.(б) предложения 7.1) $X^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq X^{-1}(\mathcal{B}')$.

$\triangle$

Определение 7.2. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ – измеримые пространства. Отображение $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется *измеримым отображением*, если $X^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$, то есть $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1' = \{A' : \ X^{-1}(A') \in \mathcal{A}_1\}$, или, что то же, σ-алгебра $\mathcal{A}_1'$, индуцированная отображением X и σ-алгеброй $\mathcal{A}_1$, содержит σ-алгебру $\mathcal{A}_2$.

Предложение 7.3. *Для того чтобы отображение X измеримого пространства $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ в $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ было измеримым, достаточно, чтобы существовал класс $\mathcal{C}$ подмножеств Ω_2, порождающий $\mathcal{A}_2$ и такой, что $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_1$.*

Доказательство. Требуется показать, что

$$X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_1 \Longrightarrow X^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1.$$

Из предложения 7.2 следует, что если $\mathcal{C}$ порождает $\mathcal{A}_2$, то $X^{-1}(\mathcal{C})$ порождает $X^{-1}(\mathcal{A}_2)$. Но порожденная σ-алгебра $X^{-1}(\mathcal{A}_2)$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая $X^{-1}(\mathcal{C})$, и, следовательно, является частью любой σ-алгебры, содержащей $X^{-1}(\mathcal{C})$, в частности, и $\mathcal{A}_1$.

$\triangle$

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Докажите утверждение пункта в(4) предложения 7.1.

7.2. Установите справедливость следствия 1 после предложения 7.1.

7.3. Установите справедливость следствия 2 после предложения 7.1.

7.4. Докажите, что индуцированная вероятность P' действительно вероятность на $\mathcal{A}'$.

7.5. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство. Отображение $X: \Omega \to \mathsf{R}$ таково, что $X(\omega) \equiv 0 \quad \forall \omega \in \Omega$. Описать индуцированное пространство.

Литература: Ж.Неве, стр. 15-25.

§8. **Действительные случайные величины**

Среди измеримых отображений особое место занимают отображения на борелевскую прямую $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$, поскольку наблюдаемые характеристики изучаемых объектов имеют, как правило, числовую природу. Мы начнем изучение таких отображений с построения их аппроксимаций более простыми ступенчатыми функциями на разбиениях пространства Ω, имея в виду, как конечную цель, создание теории интегрирования измеримых функций на абстрактных пространствах.

Рассмотрим функцию

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \in A^c, \end{cases}$$

называемую *индикатором* события A.

Предложение 8.1. *Имеют место следующие формулы:*

(1) $\mathbf{1}_A = 1 - \mathbf{1}_{A^c}$;

(2) $\mathbf{1}_{A+B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$, если $A \bigcap B = \emptyset$;

(3) $\mathbf{1}_{\inf(A,B)} = \mathbf{1}_{A \bigcap B} = \inf(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;

(4) $\mathbf{1}_{\sup(A,B)} = \mathbf{1}_{A \bigcup B} = \sup(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

Определение 8.1. *Действительной ступенчатой случайной величиной* (ст.с.в.) на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ называется отображение $X : \Omega \to \mathrm{R}$ вида $X(\omega) = x_i$, если $\omega \in A_i$, $i \in I$, где $\{A_i, i \in I\}$ – конечное разбиение пространства Ω.

В определении ст.с.в. естественно считать все x_i, $i \in I$ различными – в противном случае объединяются те A_i, на которых ст.с.в. принимает одинаковое значение. Ступенчатая случайная величина может быть записана в виде

$$X = \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$$

(при этом $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$).

Предложение 8.2. *Для того чтобы отображение $X : \Omega \to \mathrm{R}$ было ст.с.в., необходимо и достаточно, чтобы класс $X^{-1}(\mathcal{R})$ был конечной* *булевой подалгеброй σ-алгебры $\mathcal{A}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $X = X(\omega)$ – ст.с.в. Тогда $X^{-1}(\mathcal{R}) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{R}\}$ есть конечная булева алгебра, состоящая из событий $A_i = \{\omega :\ X(\omega) = x_i\},\ i \in I$ и их объединений, поскольку $X^{-1}(B) = \{\omega :\ X(\omega) \in B\}$ совпадает с объединением всех тех A_i, для которых $x_i \in B$.

Достаточность. Пусть $X : \Omega \to \mathrm{R}$ таково, что $X^{-1}(\mathcal{R})$ – конечная булева алгебра. Требуется доказать, что отображение X есть ст.с.в.

В силу предложения 1.4 любая конечная булева алгебра порождена некоторым конечным разбиением пространства Ω. Пусть $\{A_i,\ i \in I\}$ – разбиение, порождающее $X^{-1}(\mathcal{R})$, то есть наименьшие элементы (так называемые атомы) σ-алгебры $\mathcal{A}$, порождающие $X^{-1}(\mathcal{R})$. Покажем, что функция $X(\omega)$ постоянна на каждом A_i и на различных A_i принимает разные значения (см. определение 8.1).

Допустим противное – найдется событие A_i и два элементарных исхода $\omega, \omega' \in A_i$, для которых $X(\omega) \neq X(\omega')$. Тогда существует такое борелевское множество $S \in \mathcal{R}$, что $X(\omega) \in S,\quad X(\omega') \notin S$. Поскольку $X^{-1}(\mathcal{R})$ – булева алгебра прообразов борелевских множеств, то $X^{-1}(S) \bigcap A_i \in X^{-1}(\mathcal{R})$ и в то же время $X^{-1}(S) \bigcap A_i$ есть собственное подмножество A_i, так как $\omega' \in A_i$, а $\omega' \notin X^{-1}(S)$. Мы пришли к противоречию с тем, что $A_i,\ i \in I$ являются атомами – наименьшими по включению элементами $\mathcal{A}$, порождающими $X^{-1}(\mathcal{R})$.

Итак, $X(\omega)$ постоянна на каждом $A_i,\ i \in I$. Далее, $X(\omega)$ принимает разные значения на различных A_i, ибо в противном случае A_i с одинаковыми значениями $X(\omega)$ можно объединить, что опять-таки противоречит атомности A_i как элементов $X^{-1}(\mathcal{R})$.

$\triangle$

Множество всех ст.с.в. замкнуто относительно алгебраических операций. Справедливость этого утверждения устанавливает

Предложение 8.3. *Пусть $\mathcal{E}$ – множество всех ст.с.в. на $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Тогда

(1) $\mathcal{E}$ – *линейное пространство,*

(2) $\mathcal{E}$ – *алгебра,*

(3)*на классе* $\mathcal{E}$ *порядок задается следующим образом:* $X \leqslant Y$, *если* $X(\omega) \leqslant Y(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Omega$.

Доказательство. (1) Проверим аксиомы линейного пространства:

(а) $X \in \mathcal{E} \Longrightarrow cX \in \mathcal{E}, \quad \forall\, c \in \mathrm{R}$;

(б) $X, Y \in \mathcal{E} \Longrightarrow X + Y \in \mathcal{E}$.

Пусть

$$X = \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}, \quad Y = \sum_{j \in J} x_j \cdot \mathbf{1}_{B_j}.$$

Справедливость аксиомы (а) вытекает из того, что cX есть ст.с.в., принимающая значения $c x_i$ на соответствующих $A_i, \ i \in I$. Чтобы установить справедливость (б), образуем новое разбиение $\{A_i \bigcap B_j, \quad i \in I, \ j \in J\}$ пространства Ω. Тогда

$$X + Y = \sum_{I \times J} (x_i + y_j) \mathbf{1}_{A_i \bigcap B_j}$$

(напомним, что в силу формулы (3) предложения 8.1 $\mathbf{1}_{A \bigcap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$; естественно, новое разбиение пространства Ω образуют только непустые множества $A_i \bigcap B_j \, (\in \mathcal{A})$). Объединяя те $A_i \bigcap B_j$, которые соответствуют одним и тем же значениям $x_i + y_j$, получаем представление $X + Y$ в виде, указывающем, что $X + Y$ есть ст.с.в.: $X + Y = \sum_{k \in K} z_k \mathbf{1}_{C_k}$, где z_k попарно различны, а $\{C_k, \ k \in K\}$ образует конечное разбиение Ω.

(2). Так как $\mathcal{E}$ – линейное пространство, то $\mathcal{E}$ будет алгеброй, если $X, Y \in \mathcal{E} \Longrightarrow X \cdot Y \in \mathcal{E}$. Аналогично представлению для $X + Y$ в пункте (1),

$$X \cdot Y = \sum_{I \times J} x_i y_j \mathbf{1}_{A_i \bigcap B_j},$$

и остается лишь объединить непустые множества $A_i \bigcap B_j$, отвечающие одинаковым значениям $x_i y_j$.

(3). $\mathcal{E}$ является структурой относительно естественного упорядочивания функций, если из $X, Y \in \mathcal{E}$ вытекает, что функции $Z_1(\omega) = \sup(X(\omega), Y(\omega))$ и $Z_2(\omega) = \inf(X(\omega), Y(\omega))$, $\omega \in \Omega$, также принадлежат $\mathcal{E}$. Но если $\omega \in A_i \bigcap B_j$ – элементу нового разбиения пространства Ω (см. построение в (1) и (2)), то $\sup(X(\omega), Y(\omega)) = \sup(x_i, y_j)$ и $\inf(X(\omega), Y(\omega)) = \inf(x_i, y_j)$, то есть $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ имеют представление, специфичное для ст.с.в.

$\triangle$

Определение 8.2. *Действительной случайной величиной* (д.с.в.) на Ω называется отображение X множества Ω в расширенную действительную прямую $\bar{\mathrm{R}} = [-\infty, +\infty]$, являющееся поточечным пределом ст.с.в. Д.с.в. называется *конечной*, если образ $X(\Omega) \subset \mathrm{R}$, и *положительной*, если $X(\Omega) \subseteq \bar{\mathrm{R}}_+ = [0, +\infty]$.

Данное определение д.с.в. в большей степени связано с построением теории интегрирования с.в., чем с решением задач о распределении вероятностей на борелевской прямой, индуцированной отображением X, – в последнем случае достаточно потребовать измеримости X (см. определения 7.1 – 7.2). Следующее предложение устанавливает, что эти два подхода к определению д.с.в. эквивалентны.

Предложение 8.4. *Пусть $\bar{\mathcal{R}}$ – σ-алгебра (борелевское поле), порожденная интервалами вида $[-\infty, b) \subset \bar{\mathrm{R}}$. Для того чтобы отображение X множества Ω в $\bar{\mathrm{R}}$ было д.с.в. на $(\Omega, \mathcal{A})$, необходимо и достаточно, чтобы оно было измеримым по отношению к $\mathcal{A}$ и σ-алгебре $\bar{\mathcal{R}}$ борелевских подмножеств $\bar{\mathrm{R}}$. Для выполнения этого условия в свою очередь достаточно, чтобы $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ при всех $x \in \bar{\mathrm{R}}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть X – д.с.в. и $\{X_n, n \geqslant 1\}$ – последовательность ст.с.в., сходящаяся поточечно к X. Требуется установить измеримость X, то есть доказать включение $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \bar{\mathcal{R}}$. Так как интервалы вида $(-\infty, x)$ порождают борелевскую σ-алгебру, то, в силу предложения 7.3, достаточно показать

$X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A}$.

Воспользуемся тем обстоятельством, что $X_n^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A}$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots,$ поскольку X_n – ст. с. в., и представим множество $X^{-1}((-\infty, x))$ в виде объединения и пересечения счетного числа событий из $\mathcal{A}$ вида $X_n^{-1}((-\infty, x))$. Покажем, что если $X(\omega) = \lim_n X_n(\omega)$, где $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ – последовательность ст.с.в., то

$$\{\omega\,:\, X(\omega) < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega\,:\, X_m(\omega) < x - 1/k\} = \tag{8.1}$$

$$\sup_k \limsup_n \{\omega\,:\, X_m(\omega) < x - 1/k\}.$$

Если ω принадлежит правой части этого равенства, то существует такое k, что

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega\,:\, X_m(\omega) < x - 1/k\}.$$

Но тогда существует такое n, что

$$\omega \in \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega\,:\, X_m(\omega) < x - 1/k\},$$

и, следовательно, существуют такие k и n, что для всех $m \geqslant n$ значения $X_m(\omega) < x - 1/k$. Так как $X_m \to X$, то $X = \lim_m X_m \leqslant x - 1/k < x$, то есть $X(\omega) < x$ и, следовательно, ω принадлежит левой части (8.1).

Пусть теперь ω принадлежит левой части (8.1), то есть $X(\omega)$ строго меньше x. Тогда существует такое целое $k \geqslant 3$, что

$$X(\omega) \leqslant x - \frac{1}{k-2} < x - \frac{1}{k-1}.$$

Так как $X_m(\omega) \to X(\omega)$, то существует такое n, что для любых $m \geqslant n$ выполняется неравенство

$$X_m(\omega) \leqslant x - \frac{1}{k-1} < x - \frac{1}{k}.$$

Итак, существуют такие k и n, что для любого $m \geqslant n$ выполняется неравенство $X_m(\omega) < x - 1/k$. Но это есть не что иное, как словесная формулировка принадлежности ω правой части (8.1).

Таким образом, показано, что подмножества Ω вида $\{\omega : X(\omega) < x\}$ являются объединениями и пересечениями счетного числа событий из $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Достаточность. Пусть X – измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\bar{\mathrm{R}}, \bar{\mathcal{R}})$. Положим

$$X^+(\omega) = \sup(X(\omega), 0), \ X^-(\omega) = \sup(-X(\omega), 0) = -\inf(X(\omega), 0).$$

Тогда $X = X^+ - X^-$, то есть X представимо в виде разности двух положительных измеримых отображений. Следовательно, достаточно показать, что любое положительное измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\bar{\mathrm{R}}, \bar{\mathcal{R}})$ является поточечным пределом последовательности ст.с.в. Но если для такого отображения Y положить

$$Y_n = \sum_{q=1}^{n2^n} \frac{q-1}{2^n} \mathbf{1}_{\{q-1 \leqslant Y 2^n < q\}} + n \mathbf{1}_{\{Y \geqslant n\}},$$

то функции $Y_n(\cdot)$, $n \geqslant 1$, образуют монотонно возрастающую последовательность ст.с.в., сходящуюся поточечно к $Y(\cdot)$.

Действительно, $Y_n(\omega) \leqslant Y(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, ибо если $Y(\omega) > n$, то $Y_n(\omega) = n < Y(\omega)$, а если $Y(\omega) = a \leqslant n$, то

$$a \in [(q-1)2^{-n}, \ q2^{-n})$$

для некоторого q $(= 1, \ldots, n2^n)$ и, следовательно,

$$Y_n(\omega) = (q-1)2^{-n} \leqslant a = Y(\omega).$$

Далее, $Y_n(\omega) \geqslant Y - 2^{-n}$ на множестве $\{\omega : Y(\omega) < n\}$, поскольку равенство $Y(\omega) = a$ $(< n)$ влечет

$$a \in ((q-1)2^{-n}, \ q2^{-n}),$$

откуда $Y_n(\omega) = (q-1)2^{-n}$, то есть $Y(\omega) - Y_n(\omega) < 2^{-n}$. Наконец, $Y_n = n$ при $Y \geqslant n$.

Итак, если $Y(\omega) < n$, то

$$Y_n(\omega) \leqslant Y(\omega) \leqslant Y_n(\omega) + 2^{-n},$$

то есть на тех ω, где $Y(\omega)$ ограничена, сходимость $Y_n(\omega)$ к $Y(\omega)$ равномерная и монотонная. Если же $Y(\omega) = \infty$, то тогда $Y(\omega) > n$ и $Y_n(\omega) = n$, то есть при $n \to \infty$ ст.с.в. $Y_n(\infty) \to \infty = Y(\omega)$.

$\triangle$

Приведенное доказательство убеждает нас в справедливости двух следствий из данного предложения.

Следствие 8.1. *Всякая положительная д.с.в. на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *есть поточечный предел по крайней мере одной возрастающей последовательности положительных ст.с.в. Более того, эту последовательность можно выбрать так, чтобы сходимость была равномерной на каждом подмножестве* Ω, *на котором* Y *ограничена сверху.*

Следствие 8.2. *Множество д.с.в. замкнуто относительно арифметических операций и перехода к пределу (по последовательностям), если только эти операции не приводят к неопределенностям вида* $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞/∞, $0/0$. *Множество д.с.в. образует алгебру.*

Последнее следствие позволяет утверждать, что если $\{X_i,\ i \in I\}$ – счетное семейство д.с.в., то оба отображения $\sup\limits_I X_i$ и $\inf\limits_I X_i$ тоже являются д.с.в.

Для всякой последовательности $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ д.с.в. существуют две д.с.в. $\limsup\limits_n X_n$ и $\liminf\limits_n X_n$. Множество *сходимости* последовательности $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ определяется как измеримое множество

$$\{\,\omega:\ \limsup_n X_n(\omega) = \liminf_n X_n(\omega)\,\}.$$

В частности, если $\limsup\limits_n X_n = \liminf\limits_n X_n$ всюду на Ω, то последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ называется *сходящейся всюду*, и общее значение верхнего и нижнего пределов обозначается $\lim X_n$. Из сказанного следует, что *предел всякой сходящейся последовательности д.с.в. есть д.с.в.*

В соответствии с определениями д.с.в. Y на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется измеримой относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ (коротко, $\mathcal{B}$-*измеримой*), если σ-алгебра $\mathcal{B}(Y) = \{Y^{-1}(S): \ S \in \mathcal{R}\}$ содержится в $\mathcal{B}$. Следующее предложение характеризует все $\mathcal{B}(X)$-измеримые д.с.в., то есть д.с.в., измеримые относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$, порожденной д.с.в. X.

Предложение 8.5. *Пусть $\mathcal{B}(X)$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, порожденная д.с.в. X. Для того чтобы д.с.в. Y на $(\Omega, \mathcal{A})$ была $\mathcal{B}(X)$-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы Y можно было представить в виде $Y = f(X)$, где f – измеримое отображение $(\bar{\mathrm{R}}, \bar{\mathcal{R}})$ в себя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность* очевидна, так как

$$\mathcal{B}(Y) = \{Y^{-1}(S), \ S \in \bar{\mathcal{R}}\} = \{X^{-1}(f^{-1}(S)), \ S \in \bar{\mathcal{R}}\} \subseteq$$
$$\{X^{-1}(B), \ B \in \bar{\mathcal{R}}\} \subseteq \mathcal{B}(X),$$

ибо $\mathcal{B}(\mathrm{X})$ порождена X.

Необходимость. Пусть Y является $\mathcal{B}(X)$-измеримой д.с.в. Покажем, что существует такая борелевская функция $f(\cdot)$, что $Y = f(X(\omega))$.

Рассмотрим сначала случай, когда Y – ст.с.в., то есть существует конечное разбиение $\{B_i, \ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{B}(X)$ пространства Ω и такие попарно различные числа $y_1, \ldots, y_n$, что $Y(\omega) = y_i$ на B_i. Так как $B_i \in \mathcal{B}(X)$, то существует такое конечное семейство $\{S_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset \bar{\mathcal{R}}$, что $B_i = \{\omega : \ X(\omega) \in S_i\} = X^{-1}(S_i)$. Для доказательства утверждения необходимо выбрать $\{S_i\}$ таким образом, чтобы они попарно не пересекались, и затем определить функцию f на $\bar{\mathrm{R}}$, положив $f(x) = y_i$ при $x \in S_i$ и доопределив f на $S = (\bigcup_1^n S_i)^c$ произвольным образом, например, положив на этом множестве $f = 0$.

Чтобы осуществить такой выбор $\{S_i\}$, обратим внимание на одно существенное свойство любых S_i, для которых $B_i = X^{-1}(S_i)$, $i = 1, \ldots, n$: общая часть любой пары (S_i, S_j) этих подмножеств $\bar{\mathrm{R}}$ лежит вне области значений $X(\cdot)$. Действительно,

$$\{\omega : \ X(\omega) \in S_i \cap S_j\} = \{\omega : \ X(\omega) \in S_i\} \bigcap \{\omega : \ X(\omega) \in S_j\} =$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset,$$

если $i \neq j$. Следовательно, убрав из каждого S_i части, принадлежащие другим подмножествам S_j, $j \neq i$, мы сохраним равенство $X^{-1}(S_i) = B_i$. Такую операцию „причесывания“ S_i, $i = 1, \ldots, n$, можно осуществить с помощью предложения 1.1, положив

$$S'_i = S_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j.$$

Тогда $S'_i \bigcap S'_j = \emptyset$, если $i \neq j$,

$$\sum_{i=1}^{n} S'_i = \bigcup_{1}^{n} S_i$$

и, в силу вышесказанного, $X^{-1}(S'_i) = B_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Итак, требуемая борелевская функция $f(x) = y_i$, если $x \in S'_i$, и $f(x) = 0$, если

$$x \in S = \Big(\sum_{1}^{n} S'_i \Big)^c.$$

Пусть теперь Y – произвольная (не обязательно ступенчатая) $\mathcal{B}(X)$-измеримая д.с.в. и $\{Y_n,\ n \geqslant 1\}$ – такая последовательность $\mathcal{B}(X)$-измеримых ст.с.в., что $Y = \lim_n Y_n$. Пусть, далее, $Y_n = f_n(x)$ – полученное выше представление Y_n. Для любого фиксированного $x \in \bar{\mathrm{R}}$ положим $f(x) = \limsup\limits_n f_n(x)$. Функция f является измеримым отображением $(\bar{\mathrm{R}}, \bar{\mathcal{R}})$ в себя, и

$$Y(\omega) = \lim_n Y_n(\omega) = \lim_n f_n(X(\omega)) = f(X(\omega))$$

при всех $\omega \in \Omega$.

$\triangle$

Полезность доказанного утверждения в приложениях видна из следующего примера. Пусть $X = X(\omega)$ – некоторое отображение Ω в $\bar{\mathrm{R}}$. Будет ли это отображение д.с.в., если X^2 – д.с.в.? В общем случае ответ отрицательный, ибо X нельзя представить в виде функции от X^2.

Литература: Ж.Неве, стр. 55-61.

§9. Математическое ожидание (интеграл Лебега по вероятностной мере)

В соответствии с определением 7.1 действительная с.в. X, как отображение измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ в борелевскую прямую $(\mathrm{R}, \mathfrak{R})$, порождает распределение P^X вероятностей на этой прямой. Интерпретируя P^X как распределение единичной массы вдоль стержня R, мы будем изучать такие характеристики распределения, как центр тяжести (среднее значение), момент инерции (дисперсия), асимметричность распределения масс и пр. Для вычисления таких характеристик требуется специальный аппарат интегрирования функций $X(\omega)$ (д.с.в.) по распределению P на $(\Omega, \mathcal{A})$. Такой аппарат был создан на рубеже XIX-XX веков усилиями ряда математиков, причем основополагающие результаты были получены Лебегом.

Построение теории интегрирования по Лебегу начинается с определения интеграла от простых функций – ступенчатых с.в. Затем определяется интеграл от положительной д.с.в. как предел интегралов от аппроксимирующих ее ст.с.в. X_n при $n \to \infty$ (см.предложение 8.4 и следствие 8.1). Центральное место в обосновании корректности такого определения занимает теорема о монотонной сходимости, в силу которой для неубывающей последовательности неотрицательных функций можно переставлять местами интегрирование и переход к пределу. Наконец, интеграл от любой д.с.в. X определяется как разность интегралов от положительной X^+ и X^- отрицательной частями X, то есть используется представление (см. доказательство достаточности в предложении 8.4) $X = X^+ - X^-$, где

$$X^+(\omega) = X(\omega) \times \mathbf{1}_{\{X(\omega) \geqslant 0\}}(\omega), \quad X^-(\omega) = -X(\omega) \times \mathbf{1}_{\{X(\omega) \leqslant 0\}}(\omega).$$

При этом мы должны избегать в определении интеграла бессмысленных выражений вида $\infty - \infty$, хотя в определении д.с.в. бесконечные значения не исключаются.

В теории вероятностей интеграл Лебега от д.с.в. по вероятностной мере называется математическим ожиданием или средним значением X; в дальнейшем мы будем придерживаться вероятностной терминологии.

Определение 9.1. 1^0. *Математическое ожидание* (м.о.) от ступенчатой с.в.

$$X_n(\omega) = \sum_1^n x_{\,i}\, \mathbf{1}_{A_{\,i}}(\omega)$$

определяется равенством

$$E\,X_{\,n} = \int_\Omega X_{\,n}(\omega)\,dP(\omega) = \sum_{i=1}^n x_{\,i}P(A_{\,i}).$$

2^0. М.о. от неотрицательной д.с.в. определяется равенством

$$E\,X = \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_{\,n}(\omega)\,dP(\omega),$$

в котором $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ – сходящаяся поточечно к X неубывающая последовательность неотрицательных ст.с.в.

3^0. М.о. от произвольной д.с.в. X определяется равенством

$$E\,X = \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega) = E\,X^+ - E\,X^-, \tag{9.1}$$

при этом предполагается, что участвующая в определении разность существует, то есть по крайней мере одно из м.о. конечно. Если оба м.о. в правой части (9.1) конечны, то говорят, что X *интегрируема* по мере P (или м.о. X конечно); если конечно только одно из м.о. в правой части (9.1), то X называется *квазиинтегрируемой* (или имеющей бесконечное м.о.).

Покажем теперь, что данное определение 9.1 м.о. корректно, то есть не зависит от выбора последовательности $\{X_{\,n}\}$. Этот результат, аналогичный лемме 5.1 в конструкции продолжения вероятности, существенно опирается на следующие элементарные свойства м.о., из которых наиболее существенно свойство аддитивности.

Элементарные свойства м.о. Пусть $E\,X$, $E\,Y$ и $E\,X + E\,Y$ существуют. Тогда имеют место

(A) *Аддитивность:* $E(X+Y) = EX + EY$.

(L) *Линейность:* $E(cX) = c\,EX$.

(P) *Положительность:* $X \geqslant 0 \Longrightarrow EX \geqslant 0$.

(M) *Монотонность:* $X \geqslant Y \Longrightarrow EX \geqslant EY$; в частности, если $X = Y$ почти наверное, то есть $P\{\omega: X(\omega) = Y(\omega)\} = 1$, то $EX = EY$.

(J) *Интегрируемость:*

(J_1) если д.с.в. X интегрируема, то $|X|$ интегрируема;

(J_2) если $|X| \leqslant Y$ и Y интегрируема, то X также интегрируема;

(J_3) если X и Y интегрируемы, то $X+Y$ интегрируема;

(J_4) если X интегрируема, то X почти наверное конечна, то есть $P\{\omega: |X(\omega)| < \infty\} = 1$.

Свойства (L) и (P) непосредственно следуют из определения м.о. Свойство (M) следует из свойства (P) и (A), если положить $X = Y + Z$ с $Z \geqslant 0$. Действительно, $EX = E(Y+Z) = EY + EZ \geqslant EY$. Непосредственно из определения м.о. также вытекают свойства (J_1), (J_2) и (J_3). Наконец, справедливость свойства (J_4) доказывается от противного. Если $P(A) > 0$, где $A = \{\omega: X(\omega) = \infty\}$, то по свойству (M) $E|X| \geqslant E|X|\mathbf{1}_A \geqslant c\,P(A)$, каково бы ни было $c > 0$. Устремляя c к бесконечности, приходим к противоречию с тем, что $E|X| < \infty$.

Итак, элементарные свойства м.о. вытекают или непосредственно из определения, или из свойства аддитивности (A). Мы используем этот факт несколько раз, чтобы последовательно установить корректность всех трех определений $1^0 - 3^0$ и доказать аддитивное свойство м.о.

Предложение 9.1. *Определение* 1^0 *м.о. от ст.с.в. корректно, обладает свойством аддитивности и непрерывности:* $X_n \downarrow 0 \Longrightarrow EX_n \downarrow 0$.

Доказательство. В данном случае корректность означает независимость значения

$$E\,X = \sum_1^n x_{\,i} P(A_{\,i})$$

от записи ст.с.в.

$$X = \sum_1^n x_{\,i} \mathbf{1}_{\,A_{\,i}}.$$

Пусть X записано каким-нибудь другим способом:

$$X = \sum_1^m y_{\,k} \mathbf{1_{B_{\,k}}}.$$

Тогда $x_{\,i} = y_{\,k}$ на $A_{\,i} \bigcap B_{\,k}$ при $A_{\,i} \bigcap B_{\,k} \neq \emptyset$, а так как

$$\sum_1^n A_{\,i} = \sum_1^m B_{\,k} = \Omega,$$

то

$$\sum_{i=1}^n x_{\,i} P(A_{\,i}) = \sum_{i=1}^n x_{\,i} P\Big(\sum_{k=1}^m B_{\,k} \cap A_{\,i}\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{\,i} P\Big(\,A_{\,i} \cap B_{\,k}\Big) =$$

$$E \sum_{i,k} x_{\,i} \mathbf{1}_{\,A_{\,i} \bigcap B_{\,k}} = E \sum_{i,k} y_{\,k} \mathbf{1}_{\,A_{\,i} \bigcap B_{\,k}} = \sum_{i,k} y_{\,k} P\Big(\,A_{\,i} \cap B_{\,k}\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^m y_{\,k} P\Big(\sum_{i=1}^n A_{\,i} \cap B_{\,k}\Big) = \sum_{k=1}^m y_{\,k} P(B_{\,k}).$$

Теперь покажем, что м.о. от ст.с.в. обладает свойством аддитивности.

Пусть

$$X = \sum_{i=1}^n x_{\,i} \mathbf{1}_{\,A_{\,i}}, \qquad Y = \sum_{k=1}^m y_{\,k} \mathbf{1}_{\,B_{\,k}} \,-$$

две неотрицательные ст.с.в., тогда

$$X + Y = \sum_{i,k} (\,x_{\,i} + y_{\,k}\,) \mathbf{1}_{\,A_{\,i} \bigcap B_{\,k}}.$$

Производя такие же выкладки, как и выше, получаем

$$E\,(X+Y) = \sum_{i,k} (x_{\,i} + y_{\,k}) P\Big(\,A_{\,i} \cap B_{\,k}\Big) = \sum_{i,k} x_{\,k} P\Big(\,A_{\,i} \cap B_{\,k}\Big) +$$

$$\sum_{i,k} y_k P\Big(A_i \cap B_k \Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) + \sum_{k=1}^{m} y_k P(B_k) = E X + E Y.$$

Для доказательства свойства непрерывности рассмотрим последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ неотрицательных ст.с.в., сходящуюся монотонно к ст.с.в. $X(\omega) \equiv 0$. Положим

$$K = \sup_{\omega \in \Omega} X_1(\omega).$$

Напомним, $X_n(\omega)$ убывает с ростом n при $\forall \omega \in \Omega$, и поэтому $K \geqslant X_n(\omega)$ при $\forall n \geqslant 1$. Следовательно, для $\forall \varepsilon \geqslant 0$, $\forall n \geqslant 1$ и $\forall \omega \in \Omega$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant X_n(\omega) \leqslant K \mathbf{1}_{\{X_n > \varepsilon\}} + \varepsilon.$$

Так как для ст.с.в. свойство аддитивности доказано выше, то м.о. от X_n обладает свойством монотонности и линейности, откуда

$$0 \leqslant E X_n \leqslant K E \mathbf{1}_{\{X_n > \varepsilon\}} + \varepsilon = K P\{X_n > \varepsilon\} + \varepsilon.$$

Но поскольку $X_n \downarrow 0$, то $\{\omega: \ X_n(\omega) > \varepsilon\} \downarrow \emptyset$, и в силу непрерывности вероятности P существует такое $N = N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N$ выполняется неравенство $0 \leqslant E X_n \leqslant 2\varepsilon$, то есть $\lim\limits_n E X_n = 0$.

$\triangle$

Следствие 9.1. *Если X – неотрицательная ст.с.в. и $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ – такая последовательность неотрицательных ст.с.в., что $X_n \uparrow X$ (или $X_n \downarrow X$), то*

$$\lim_n EX_n = EX.$$

Доказательство немедленно следует из только что установленного свойства непрерывности м.о. от ст.с.в., если рассмотреть последовательность неотрицательных ст.с.в. $\{X - X_n,\ n \geqslant 1\}$ (соответственно, $\{X_n - X,\ n \geqslant 1\}$), которая, очевидно, монотонно убывая, сходится к ст.с.в. $X = 0$.

$\triangle$

Предложение 9.2. *Определение* 2^0 *м.о. от неотрицательной д.с.в. корректно и обладает свойством аддитивности.*

Доказательство. Пусть $\{X'_m,\ m \geqslant 1\}$ и $\{X''_n,\ n \geqslant 1\}$ – такие неубывающие последовательности неотрицательных ст.с.в., что

$$\lim_m\!\uparrow X'_m \leqslant \lim_n\!\uparrow X''_n. \tag{9.2}$$

Если в этом случае

$$\lim_m E\,X'_m \leqslant \lim_n E\,X''_m, \tag{9.3}$$

то по определению 2^0 м.о. от неотрицательных д.с.в. корректно, ибо

$$\lim_m X'_m = \lim_n X''_n$$

равносильно (9.2) и одновременно противоположному (9.2) неравенству; последнее, очевидно, влечет смену знака неравенства в (9.3) (сравните с доказательством леммы 5.1 для функции $\prod(G)$).

При любых фиксированных $m\,(=1,\,2,\cdots)$ и $\omega(\in\Omega)$ предел

$$\lim_n \min\{X'_m(\omega),\ X''_n(\omega)\} = X'_m(\omega),$$

и в силу следствия 9.1 и монотонности м.о. для ст.с.в.

$$\lim_n E\,X''_n \geqslant \lim_n E\,\min\{X'_m\omega),\ X''_n(\omega)\} \,=\, E\,X'_m.$$

Устремляя теперь m к бесконечности, получаем (9.3).

Свойство аддитивности непосредственно следует из арифметических свойств предела: если $0 \leqslant X_n \uparrow X$ и $0 \leqslant Y_n \uparrow Y$, то $0 \leqslant X_n + Y_n \uparrow X+Y$, и в силу свойства аддитивности для м.о. от ст.с.в.

$$E\,(X+Y) = \lim_n E\,(X_n + Y_n) = \lim_n E\,X_n + \lim_n E\,Y_n \,=\, E\,X + E\,Y.$$

$\triangle$

Предложение 9.3. *Определение* 3^0 *м.о. от произвольной с.в. корректно и обладает свойством аддитивности.*

Доказательство. В силу единственности разложения $X = X^+ - X^-$ д.с.в. на ее положительную и отрицательную части м.о. $EX = EX^+ - EX^-$ определяется однозначно, если только либо EX^+, либо EX^- конечно. Следовательно м.о. определено корректно.

Установим аддитивность EX. Так как при доказательстве этого свойства предполагается существование не только EX и EY, но и $EX + EY$, то есть эта сумма не имеет вид $\infty - \infty$, то достаточно рассмотреть случай, когда по крайней мере одна с.в., например Y, интегрируема и, следовательно, в силу свойства (J_4) конечна. Таким образом, $X + Y$ определена почти всюду.

Разложим Ω на шесть множеств $A_1, \ldots, A_6$, на каждом из которых X, Y и $X+Y$ имеют постоянные знаки ($\geqslant 0$ или $\leqslant 0$). Тогда любая из функций $X(\omega)$, $Y(\omega)$ и $X(\omega)+Y(\omega)$ может быть представлена в виде линейной комбинации произведений функции и индикаторов, (например,

$$X(\omega) = \sum_1^6 X(\omega)\mathbf{1}_{A_i}(\omega)).$$

В силу свойства аддитивности для неотрицательных с.в. (предложение 9.2) достаточно установить свойство аддитивности для каждой из с.в. вида $X\mathbf{1}_{A_i}$, $Y\mathbf{1}_{A_i}$, $(X+Y)\mathbf{1}_{A_i}$, $i = 1, \ldots, 6$. Докажем это, например, для

$$A = \{\omega :\ X(\omega) \geqslant 0,\ Y(\omega) < 0,\ X(\omega) + Y9\omega) \geqslant 0\} -$$

остальные случаи рассматриваются аналогично.

Из определения 3^0 и аддитивного свойства для неотрицательных с.в. $(X+Y)\mathbf{1}_A$ и $-Y\mathbf{1}_A$ имеем

$$EX\mathbf{1}_A = E(X+Y)\mathbf{1}_A + E(-Y)\mathbf{1}_A = E(X+Y)\mathbf{1}_A - EY\mathbf{1}_A,$$

а так как $EY\mathbf{1}_A$ конечно, то $EX1_A + EY1_A = E(X+Y)1_A$.

$\triangle$

Установим теперь несколько результатов о сходимости м.о. от последовательности с.в.

Предложение 9.4. (свойство монотонной сходимости м.о.). *Если* $0 \leqslant X_n \uparrow X$, *то* $EX_n \uparrow EX$.

Доказательство аналогично доказательству свойства (г) функции $\Pi(G)$ в предложении 5.1.

Для каждого n $(=1, 2, \dots)$ выберем такую последовательность ст. с. в.
$\{Y_{m,n},\ m \geqslant 1\}$, что $X_n = \lim\limits_m\uparrow Y_{m,n}$, и пусть

$$Z_m = \sup_{n \leqslant m} Y_{m,n}.$$

Тогда $Y_{m,n} \leqslant Z_m \leqslant X_m$ при $\forall n \leqslant m$. Действительно, первое неравенство очевидно, а второе следует из монотонности последовательностей $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{Y_{m,n},\ m \geqslant 1\}$, которые не превосходят своих пределов X и X_n, ибо $Y_{m,n} \leqslant X_n \leqslant X_m$, если $m \geqslant n$, так что

$$Z_m = \sup_{n \leqslant m} Y_{m,n} \leqslant X_m.$$

Легко также видеть, что $\{Z_m,\ m \geqslant 1\}$ – монотонно возрастающая последовательность и $\lim\limits_m\uparrow Z_m = \lim\limits_n\uparrow X_n = X$ (см. доказательство свойства (г) в предложении 5.1). Теперь, используя определение м.о., получаем

$$EX_n = \lim_m EY_{m,n} \leqslant \lim_m EZ_m = EX = \lim_m EZ_m \leqslant \lim_m EX_m.$$

Таким образом,

$$EX_n \leqslant EX \leqslant \lim_m EX_m,$$

откуда, устремляя n к бесконечности, получаем утверждение предложения.

$\triangle$

Следствие 9.2. *Пусть* $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ *– произвольная последовательность д.с.в. Если* X_n^- *интегрируема хотя бы для одного* n, *то* $X_n \uparrow X \Longrightarrow EX_n \uparrow EX$, *а если* X_n^+ *интегрируема хотя бы для одного* n, *то* $X_n \downarrow X \Longrightarrow EX_n \downarrow EX$.

Доказательство. Заметим сначала, что если $X = X^+ - X^- \leqslant Y = Y^+ - Y^-$, то $X^+ \leqslant Y^+$ и $X^- \leqslant Y^-$, ибо

$$X^+ = \sup\{X(\omega),\ 0\} \leqslant \sup\{Y(\omega),\ 0\} = Y^+,$$

$$X^- = \sup\{-X(\omega),\ 0\} \geqslant \sup\{-Y(\omega),\ 0\} = Y^-.$$

Далее, пусть $X_n \uparrow X$ и существует такое $n = n_0$, что $X^-_{n_0}$ интегрируема. Поскольку $X_n \geqslant X_{n_0}$ при $n \geqslant n_0$, то $X^-_n \leqslant X^-_{n_0}$, а $X^- \leqslant X^-_n$ при любом $n = 1, 2, \ldots$, так что д.с.в. X и X_n, $n \geqslant n_0$, квазиинтегрируемы. Далее

$$0 \leqslant X^+_n = (X^+_n - X^-_n) + X^-_n = X_n + X^-_n \leqslant X_n + X^-_{n_0} \uparrow X + X^-_{n_0}.$$

В силу свойства аддитивности м.о. и предложения 9.4 для неотрицательных с.в.

$$0 \leqslant E X_n + E X^-_{n_0} = E(X_n + X^-_{n_0}) \uparrow E(X + X^-_{n_0}) =$$

$$E X + E X^-_{n_0} \Longrightarrow E X_n \uparrow E X.$$

Аналогично доказывается, что $X_n \downarrow X \Longrightarrow E X_n \downarrow E X$ при интегрируемости X^+_n хотя бы для одного $n\,(= 1, 2, \ldots)$.

$\triangle$

Предложение 9.5. (теорема Фату-Лебега). *Для любой последовательности д.с.в. $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ и интегрируемых д.с.в. Y и Z неравенство $X_n \leqslant Y$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ влечет*

$$E \limsup_n X_n \geqslant \limsup_n E X_n,$$

а неравенство $X_n \geqslant Z$ влечет

$$E \liminf_n X_n \leqslant \liminf_n E X_n.$$

В частности, если последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится и существует такая интегрируемая д.с.в. U, что $|X_n| \leqslant U$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_n E X_n = E \lim_n X_n.$$

Доказательство. Заметим сначала, что если Y интегрируема, и $X \leqslant Y$, то X^+ интегрируема (ибо $X^+ \leqslant Y^+$), и, следовательно, X квазиинтегрируема. Так как $X_n(\omega) \leqslant Y(\omega)$ влечет $\sup_n X_n(\omega) \leqslant Y(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, а Y интегрируема, то с.в. $(\sup_n X_n)^+$ также интегрируема. Но поскольку квазиинтегрируемая с.в.

$$\sup_{m \geqslant n} X_m \downarrow \lim_n \sup_{m \geqslant n} X_m = \limsup_n X_n,$$

и при $m \geqslant n$ м.о. $E X_m \leqslant E \sup_{m \geqslant n} X_m$, то в силу следствия 9.2

$$\sup_{m \geqslant n} E X_m \leqslant E \sup_{m \geqslant n} X_m \downarrow E \limsup_n X_n.$$

Устремляя теперь n к бесконечности, получаем доказательство первого утверждения предложения.

Второе утверждение с $X_n \geqslant Z$ доказывается аналогично. Если же $-U \leqslant X_n \leqslant U$, то в силу только что доказанного

$$E \liminf_n X_n \leqslant \liminf_n E X_n \leqslant \limsup_n E X_n \leqslant E \limsup_n X_n.$$

Отсюда следует, что если последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится, то есть

$$\liminf_n X_n = \limsup_n X_n,$$

то $\lim_n E X_n$ существует и равен

$$E \lim_n X_n = E \liminf_n X_n = E \limsup_n X_n.$$

$\triangle$

В практических приложениях теории вероятностей обычно интересуются не столько распределением P на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, сколько распределением P^X некоторой с.в. $X = X(\omega)$ со значениями в $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$. Связь между м.о. $X(\omega)$ по распределению P и м.о. X по распределению P^X устанавливает

Предложение 9.6. *Для любой конечной с.в. $X = X(\omega)$ справедливо равенство*

$$E X = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) = \int_{\mathrm{R}} x\, dP^X(x), \tag{9.4}$$

где $P^X(B) = P\{\omega: \ X(\omega) \in B\}$ *– индуцированная отображением* $X(\cdot)$ *вероятность на* $(\mathrm{R}, \ \mathcal{R})$ *(распределение с.в.* X*).*

Доказательство. Согласно конструкции интеграла Лебега достаточно установить (9.4) для индикатора $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$ некоторого события $A \in \mathcal{A}$, поскольку тогда (9.4) будет справедливо для любой ст.с.в., а в силу предложения 9.4 – для любой конечной д.с.в. Но для индикатора (9.4) выполняется тривиальным образом:

$$E\,\mathbf{1}_A = P(A) = P\{\omega: \ X(\omega) = 1\} =$$

$$P^X\{X = 1\} = \mathbf{1} \cdot P^X\{X = 1\} + 0 \cdot P^X\{X = 0\} = \int_{\mathrm{R}} x\,dP^X(x).$$

$\triangle$

Из доказанного предложения следует, что если с.в. принимает не более чем счетное множество значений $\{x_i, \ i \in I\}$, то $E\,X = \sum_{i \in I} x_i\,P^X(X = x_i)$. Если же распределение X на $(\mathrm{R}, \ \mathcal{R})$ определяется функцией распределения $F(x)$, производная которой $f(x) = dF/dx$ определена всюду, за исключением не более чем счетного числа точек на прямой R, то

$$E\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx.$$

Последнее следует непосредственно из схемы построения интеграла Лебега, если положить $\Omega = \mathrm{R}$ и рассмотреть д.с.в. $X(\omega) = \omega$, для которой аппроксимация ст.с.в. аналогична аппроксимациям ступенчатыми функциями в конструкции интеграла Римана на прямой (нижняя сумма Дарбу в определении интеграла Римана от положительной непрерывной функции аналогична конструкции интеграла Лебега в соответствии с определением 2^0).

Литература: М.Лоев, стр.128-139; Ж.Неве, стр.62-69.

§10. Сходимость последовательностей случайных величин

Определение 10.1. Две с.в. X и X' называются *равными почти наверное* (или *почти всюду*), если $P\{X(\omega) \neq X'(\omega)\} = 0$; равенство почти наверное (п.н.) обозначается $X \underset{\text{п.н.}}{=} X'$.

Предложение 10.1. *Отношение равенства п.н. является отношением эквивалентности, то есть оно*

рефлексивно: $X \underset{\text{п.н.}}{=} X$,

симметрично: $X \underset{\text{п.н.}}{=} X' \Longrightarrow X' \underset{\text{п.н.}}{=} X$,

транзитивно: $X \underset{\text{п.н.}}{=} X', \quad X' \underset{\text{п.н.}}{=} X'' \Longrightarrow X \underset{\text{п.н.}}{=} X''$.

Если $X \underset{\text{п.н.}}{=} X' \quad$ *и* $Y \underset{\text{п.н.}}{=} Y'$, *то*

$$cX \underset{\text{п.н.}}{=} cX', \quad X + Y \underset{\text{п.н.}}{=} X' + Y', \quad XY \underset{\text{п.н.}}{=} X'Y'.$$

Если $X_i \underset{\text{п.н.}}{=} X'_i$ *для любого* $i \in I$, *где* I *– множество индексов, то*

$$\sup_I X_i \underset{\text{п.н.}}{=} \sup_I X'_i \qquad \inf_I X_i \underset{\text{п.н.}}{=} \inf_I X'_i.$$

Если EX *существует и* $X' \underset{\text{п.н.}}{=} X$, *то* $EX' = EX$.

Доказательство любого из утверждений данного предложения становится очевидным, если вспомнить, что объединение не более чем счетного числа P-нулевых множеств есть множество нулевой вероятности.

$\triangle$

Класс эквивалентных с.в., содержащий заданную с.в. X, обозначим $\tilde{X} = \{X' : \ X' \underset{\text{п.н.}}{=} X\}$. Большинство задач теории вероятностей имеют дело не со с.в. X, а с классом $\tilde{X}$ эквивалентных с.в., который определяется любым своим представителем. Свойства элементов $\tilde{X}$, указанные в предложении 10.1, позволяют оперировать с $\tilde{X}$ как с отдельной с.в. X, при условии однако, что рассматриваются не более чем счетные семейства с.в. Поэтому, допуская некоторую вольность, идентифицируют класс $\tilde{X}$ с каким-либо представителем $X \in \tilde{X}$.

Если A – некоторое P-нулевое множество, то две с.в. X и X', совпадающие на A^c, совпадают п.н. Таким образом, ограничение на A^c вполне определяет класс $\tilde{X}$, и с.в., определенную на A^c, можно всегда продолжить до с.в., определенной на всем Ω, задав ее на A произвольным образом, при этом она по-прежнему будет принадлежать $\tilde{X}$. Важность свойства полноты вероятностных пространств объясняется тем, что на полных вероятностных пространствах любую с.в. можно, не нарушая ее измеримости, изменять произвольным образом на любых P-нулевых множествах. Операция пополнения вероятностных пространств, таким образом, увеличивает число с.в., но не приводит к образованию новых классов эквивалентных с.в.

Определение 10.2. Последовательность с.в. $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ называется *сходящейся почти наверное*, если

$$\liminf_n X_n \underset{\text{п.н.}}{=} \limsup_n X_n.$$

Если $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится п.н., то ее пределом по определению считается любая с.в., принадлежащая классу эквивалентности, содержащему с.в. $\limsup\limits_n X_n(\omega)$. Этот класс эквивалентности, равно как и любой из его элементов, будем обозначать $\lim\limits_n{}_{\text{п.н.}} X_n$.

Предложение 10.2. *Последовательность* $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ *сходится п.н. к с.в.* X *тогда и только тогда, когда для* $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{k\geqslant n}\{\omega:\ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right\} = 0. \qquad (10.1)$$

Доказательство. Если $X_n \underset{\text{п.н.}}{\to} X$, то существует такое P-нулевое множество N, что для любого $\omega \in \Omega\backslash\mathrm{N}$ найдется такое $n = n(\omega)$, для которого

$$\sup_{k\geqslant n} |X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\Omega \setminus \mathrm{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega: \ |X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\},$$

так что противоположное событие

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega: \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} =$$

$$\lim_{n}\!\downarrow \bigcup_{k \geqslant n} \{\omega: \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \subset \mathrm{N}.$$

Так как $P(\mathrm{N}) = 0$, то это включение и непрерывность вероятности P влечет равенство (10.1).

Установим теперь достаточность равенства (10.1) для сходимости $\{X_n, \ n \geqslant 1\}$ к X п.н. Если выполняется (10.1), то множество

$$\mathrm{N} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega: \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > 1/l\},$$

будучи объединением счетного числа P-нулевых множеств, есть P-нулевое множество. Легко видеть, что $\{\omega : \ X_n(\omega) \not\to X(\omega)\} \subset \mathrm{N}$. Действительно, $X_n(\omega) \not\to X(\omega)$ при некотором фиксированном ω означает существование такого $\varepsilon > 0$, что для любого n существует $k \geqslant n$, при котором $|X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$. Выбирая l таким образом, что $\varepsilon > 1/l$, и замечая, что предыдущее высказывание есть словесное описание множества N, получаем $\{\omega: \ X_n(\omega) \not\to X(\omega)\} \subset \mathrm{N}$, то есть $\{X_n(\omega)\}$ сходится к $X(\omega)$ всюду за исключением множества N нулевой вероятности.

$\triangle$

Предложение 10.3. (критерий Коши сходимости п.н.). *Для того чтобы последовательность* $\{X_n, \ n \geqslant 1\}$ *п.н. конечных д.с.в. сходилась п.н. к п.н. конечной с.в., необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью) в смысле сходимости п.н., то есть чтобы последовательность* $\{|X_{n+p} - X_n|, \ n \geqslant 1\}$ *сходилась п.н. к 0 при* $n \to \infty$, *каково бы ни было* $p \geqslant 1$.

Более точно: для любого $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $n = n(\varepsilon)$ *и* P*-нулевое множество* $N \subset \Omega$*, что для любых* $k > n,\ p \geqslant 1$,

$$\omega \in \Omega \backslash \mathrm{N}: \ |X_{k+p}(\omega) - X_k(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство немедленно вытекает из критерия Коши для последовательностей действительных чисел, если заметить, что последовательность $\{|X_{n+p} - X_n|,\ n \geqslant 1\}$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда последовательность $\{|X_{n+p}(\omega) - X_n(\omega)|,\ n \geqslant 1\}$ сходится в R при всех ω, не принадлежащих некоторому множеству нулевой вероятности.

△

Критерий Коши обычно применяется не столько к доказательству сходимости п.н. конкретных последовательностей с.в., сколько к доказательству различных достаточных признаков сходимости п.н. Один из таких признаков дает

Предложение 10.4. *Для сходимости п.н. последовательности* $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ *п.н. конечных с.в. достаточно, чтобы для некоторой суммируемой последовательности* $\{\varepsilon_n,\ n \geqslant 1\}$ *положительных чисел*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\} < \infty; \tag{10.2}$$

при выполнении этого условия $\lim\limits_{n}{}_{\text{п.н}} X_n$ *существует и конечен.*

Доказательство. Суммируемость последовательности $\{\varepsilon_n,\ n \geqslant 1\}$ означает сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} \varepsilon_n$. Для любого $n \geqslant 1$ рассмотрим множество $A_n = \{\omega: |X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| > \varepsilon_n\}$. В силу предложения 4.2 сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} P(A_n)$ (см.(10.2)) влечет $\limsup\limits_{n} A_n = \emptyset$. Но если

$$\omega \in \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

то для любого n существует такое $k \geqslant n$, что $|X_{k+1} - X_k| > \varepsilon_k$. Следовательно, $\omega \notin \limsup_n A_n$ влечет существование такого n, что для любого $k \geqslant n$ имеет место $|X_{k+1} - X_k| \leqslant \varepsilon_k$.

Теперь воспользуемся критерием Коши сходимости п.н., для чего оценим $|X_{k+1} - X_k|$ при $k \geqslant n$. Так как при $k \geqslant n$ и $\omega \notin \limsup_n A_n$ модуль разности

$$|X_{k+1} - X_k| = \left| \sum_{i=1}^{p} (X_{k+i} - X_{k+i-1}) \right| \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{p} |X_{k+i} - X_{k+i-1}| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_{k+i-1} = \sum_{j=k}^{k+p} \varepsilon_j \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon_j,$$

а ряд $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_j$ сходится, то остаточный член $\sum_{k}^{\infty} \varepsilon_j \to 0$ при $k \to \infty$. Это означает, что начиная с некоторого $k \geqslant n$ для любого $p \geqslant 1$ модуль разности $|X_{k+p}(\omega) - X_k(\omega)|$ меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, если только ω не принадлежит P-нулевому множеству $\limsup_n A_n$. Следовательно, в силу критерия Коши, последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится п.н.

$\triangle$

Определение 10.3. Последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ п.н. конечных с.в. называется *сходящейся по вероятности* к п.н. конечной с.в. X, если

$$\lim_n P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Сходимость по вероятности обозначается $X_n \underset{P}{\to} X$.

Если $X_n \xrightarrow[\text{п.н.}]{} X$, то $X_n \underset{P}{\to} X$, ибо (см.(10.1))

$$0 \leqslant P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leqslant P\left\{ \bigcup_{k \geqslant n} |X_k - X| > \varepsilon \right\} \to 0,$$

когда $n \to \infty$ и $X_n \xrightarrow[\text{п.н.}]{} X$, однако обратное неверно.

Пример 10.1. Возьмем за пространство элементарных исходов отрезок $[0;\, 1]$, и пусть P – равномерное распределение на $\Omega:\quad P\{(\alpha;\ \beta)\} = \beta - \alpha$ для любого интервала $(\alpha;\ \beta) \subseteq [0;\ 1]$. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$, в которой $X_1(\omega) \equiv 0$, $X_2(\omega) = 1$ и при любом $n > 2$ с.в.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если}\, \omega \in [\, i/2^j;\ (i+1)/2^j\,], \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где целые j и i определяются из условия $n = 2^j + i,\ i < 2^j$.

Таким образом, при любом n выполняются неравенства $2^j \leqslant n < 2^{j+1}$ с некоторым j $(= 1, 2, \ldots)$, и существует единственный сегмент длины 2^{-j}, на котором $X_n(\omega)$ отлична от нуля (равна единице), и когда n пробегает промежуток $[\,2^j;\ 2^{j+1})$, интервалы, на которых $X(\omega) = 1$, заполняют весь сегмент $[\,0;\,1\,]$.

Очевидно $X_n \underset{P}{\to} 0$, ибо при любом $\varepsilon > 0$ вероятность

$$P\{|\,X_n\,| > \varepsilon\} = P\{i\,2^{-j} \leqslant \omega \leqslant i\,2^{-j-1}\} = 2^{-j} \to 0,$$

когда $n \to \infty$ (n и j связаны неравенствами $2^j \leqslant n < 2^{j+1}$). С другой стороны, при любом $\omega \in \Omega = [\,0;\ 1\,]$ и любом $n(\geqslant 1)$ существует такое $k \geqslant n$, что $X_k(\omega) = 1$, то есть

$$\sup_{k \geqslant n} |\,X_n(\omega) - 0\,| = 1$$

и (10.1) не выполняется.

Предложение 10.5. *Последовательность* $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ *п.н. конечных с.в. сходится по вероятности тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши в смысле сходимости по вероятности, то есть когда* $X_m - X_n \underset{P}{\to} 0$ *при* $m, n \to \infty$. *Из всякой сходящейся по вероятности последовательности п.н. конечных с.в. можно выбрать подпоследовательность, п.н. сходящуюся к тому же пределу.*

Доказательство. Покажем сначала, что $X_n \underset{P}{\to} X \Rightarrow X_n - X_m \underset{P}{\to} 0$

(то есть $P\{| X_n - X_m | > \varepsilon\} \to 0$) при $m, n \to \infty$. Так как

$$\{| X_m - X_n | >, \varepsilon\} \subseteq \{| X_m - X | > \varepsilon/2\} \cup \{| X_n - X | > \varepsilon/2\}, \text{то}$$

$$P\{| X_m - X_n | > \varepsilon\} \leqslant P\{| X_m - X | > \varepsilon/2\} + P\{| X_n - X | > \varepsilon/2\},$$

и когда $X_n \underset{P}{\to} X$, оба слагаемых в правой части последнего неравенства стремятся к нулю.

Чтобы доказать обратное, покажем сначала, что сходимость $X_m - X_n \underset{P}{\to} 0$ $(m, n \to \infty)$ влечет существование сходящейся к некоторому пределу последовательности $\{X_{n_j},\ j \geqslant 1\}$.

Так как $| X_m - X_n | \underset{P}{\to} 0$ при $m, n \to \infty$ означает, что для любых положительных ε и δ существует такое N, что при любых $r, s > N$ вероятность $P\{| X_r - X_s | > \varepsilon\} < \delta$, то последовательность индексов $\{n_j,\ j \geqslant 1\}$ будем строить по индукции следующим образом. Положим $n_1 = 1$, и если определен $n_{j-1},\ j \geqslant 2$, то

$$n_j = \min\{N:\ P\{| X_r - X_s | > 2^{-j}\} < 3^{-j};\ r, s \geqslant \mathrm{N} > n_{j-1}\}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\{| X_{n_{j+1}} - X_{n_j} | > 2^{-j}\} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} < \infty,$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty,$$

так что в силу предложения 10.4 $X_{n_j} \underset{\text{п.н.}}{\to} X,\ j \to \infty$, где X – некоторая действительная случайная величина.

Теперь покажем, что $X_n \underset{P}{\to} X$ – тому же пределу, что и $\{X_{n_j},\ j \geqslant 1\}$, если $|X_m - X_n| \underset{P}{\to} 0$ при $m, n \to \infty$. Имеем

$$P\{| X_n - X | > \varepsilon\} \leqslant P\{| X_n - X_{n_j} | > \varepsilon/2\} + P\{| X_{n_j} - X | > \varepsilon/2.$$

Если n и j стремятся к бесконечности, то первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю, ибо $| X_m - X_n | \underset{P}{\to} 0$ при

$m, n \to \infty$. Второе слагаемое также стремится к нулю, ибо $X_{n_j} \underset{\text{п.н.}}{\to} X$, откуда $X_{n_j} \underset{P}{\to} X, \quad j \to \infty$. Следовательно, $X_m - X_n \underset{P}{\to} 0$ влечет как существование $\{X_{n_j},\ j \geqslant 1\}$ со свойством $X_{n_j} \underset{\text{п.н.}}{\to} X$, так и сходимость $\{X_n\}$ по вероятности к тому же пределу X.

$\triangle$

Литература: Ж.Неве, стр.71-77.

§11. Сходимость распределений случайных величин

До сих пор мы рассматривали последовательности $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ с.в., заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Однако, как уже отмечалось в начале предыдущего параграфа, мы отождествляем (считаем эквивалентными) все с.в., имеющие одно и то же распределение, или одну и ту же функцию распределения, поскольку она однозначно определяет распределение с.в. (см.предложение 6.3). Если заметить к тому же, что в большинстве практических задач представляют интерес только вероятности попадания с.в. в интервалы на прямой, то возникает необходимость не столько в изучении сходимости с.в. как функций на Ω, сколько в сходимости их функций распределений; при этом с.в. могут быть заданы на различных вероятностных пространствах.

Определение 11.1. Последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ с.в. сходится к с.в. X *по распределению* (обозначение $X_n \underset{\text{сл.}}{\longrightarrow} X$), если соответствующая последовательность $\{F_n,\ n \geqslant 1\}$ функций распределения сходится к функции распределения $F(x)$ с.в. X в каждой точке непрерывности $F(x)$. Эта сходимость называется также *слабой сходимостью* функций распределений и обозначается $F_n \Longrightarrow F$.

Сходимость по вероятности (тем более сходимость п.н.) влечет сходимость по распределению. Обратное утверждение, конечно, неверно.

Пример 11.1. Пусть $\Omega = [0; 1]$, P – равномерное распределение на $[0;\ 1]$ (см.пример 10.1), $X_n(\omega) = (-1)^n$, если $0 \leqslant \omega \leqslant 1/2$, и $X_n(\omega) = (-1)^{n+1}$, если $1/2 \leqslant \omega \leqslant 1$; $\quad n = 1, 2, \ldots$. Все случайные величины последовательности $\{X_n\}$ имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$, определяемую вероятностями $P\{X_n = -1\} = P\{X_n = +1\} = 1/2$, так что $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится по распределению. Очевидно также, что $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ не имеет предела по вероятности, ибо эта последовательность образуется повторением одной и той же пары различных с.в. X_1 и X_2, где $X_1(\omega) = -1, \quad X_2(\omega) = +1$, если $\omega \in [0; 1/2)$

и $X_1(\omega) = +1, \quad X_2(\omega) = -1$, если $\omega \in [\,1/2;\,1\,]$.

Один из наиболее распространенных критериев слабой сходимости для распределений с.в. формулируется в терминах их характеристических функций.

Определение 11.2. *Характеристической функцией* (х.ф.) д.с.в. X с функцией распределения $F(x)$ называется комплекснозначная функция

$$\varphi(t) = Ee^{itx} = \int_{\mathrm{R}} e^{itx} dF(x),$$

где t – действительное число, i – мнимая единица.

Х.ф. существует для любой с.в. X, поскольку в силу равенства $|\,e^{itx}\,| = 1$

$$|\,\varphi(t)\,| \leqslant \int_{\mathrm{R}} \left|\, e^{itx} \,\right| dF(x) = 1$$

В случае непрерывных распределений, когда существует для почти всех $x \in \mathrm{R}$ производная $f(x) = dF/dx$, характеристическая функция

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

есть преобразование Фурье функции $f(x)$. Из курса математического анализа известно, что преобразование Фурье $\varphi(t)$ функции $f(x)$ однозначно определяет $f(x)$ и наоборот. Следующая теорема устанавливает взаимно однозначное соответствие между х.ф. $\varphi(t)$ с.в. X и ее функцией распределения $F(x)$.

Теорема 11.1. (формула обращения). *Если $F(x)$ – функция распределения с.в. X, а $\varphi(t)$ – ее х.ф., то для любых точек непрерывности x и y функции $F(x)$ имеет место формула обращения*

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi(t) dt. \tag{11.3}$$

Доказательство. Заметим сначала, что правая часть формулы обращения (11.1) представляет собой несобственный интеграл в смысле главного значения, так как $\varphi(t)/t$ может оказаться неинтегрируемой функцией. Если существует $f(x) = dF(x)/dx$ и х.ф. $\varphi(t)$ интегрируема, то

(11.1) нетрудно получить из обычной формулы обращения преобразования Фурье
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt,$$
проинтегрировав обе части в пределах от x до y.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству формулы (11.1), для чего рассмотрим при $y>x$ интеграл
$$J_A=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{it}\varphi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(u-x)}-e^{it(u-y)}}{it}dF(u)dt,$$
в котором $\varphi(t)$ заменена на определяющий ее интеграл. Легко видеть, что при фиксированных x и y подынтегральная функция $(e^{it(u-x)}-e^{it(u-y)})/t$ в области $|u|<\infty$, $|t|\leqslant\infty$ непрерывна и ограничена, поэтому можно изменить порядок интегрирования:
$$J_A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-A}^{A}\frac{e^{it(u-x)}-e^{it(u-y)}}{it}dt\right]dF(u).$$

Преобразуем внутренний интеграл I_A в пределах от $-A$ до A, для чего представим его в виде суммы интегралов по отрезкам $[-A,0]$ и $[0,A]$ и в интеграле по отрезку $[-A,0]$ сделаем замену t на $-t$. В результате получим
$$I_A=\int_0^A\left[\frac{e^{it(u-x)}-e^{-it(u-x)}}{it}-\frac{e^{it(u-y)}-e^{-it(u-y)}}{it}\right]dt=$$
$$2\int_0^A\left[\frac{\sin(t(u-x))}{t}-\frac{\sin(t(u-y))}{t}\right]dt,$$
поскольку (формула Эйлера) $(e^{iz}-e^{-iz})/2i=\sin z$.

Вычисляя интеграл Дирихле
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha,$$
получаем следующее выражение для правой части (11.1):
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\operatorname{sgn}(u-x)-\operatorname{sgn}(u-y)]dF(u).$$

Представим последний интеграл в виде суммы трех интегралов по отрезкам $(-\infty,x]$, $[x,y]$ и $[y,\infty)$, на которых, соответственно,

$\mathrm{sgn}(u-x) = \mathrm{sgn}(u-y) = -1$, $\mathrm{sgn}(u-x) = -\mathrm{sgn}(u-y) = +1$, $\mathrm{sgn}(u-x) = \mathrm{sgn}(u-y) = 1$. Тогда этот интеграл, а следовательно и правая часть (11.1), принимает окончательный вид $\int_x^y dF(u) = F(y) - F(x)$, устанавливающий справедливость формулы обращения (11.1).

$\triangle$

Следующая теорема дает удобный критерий слабой сходимости распределений с.в.

Теорема 11.2. *Пусть* $\{\varphi_n,\, n \geqslant 1\}$ *– последовательность х.ф. и* $\{F_n,\, n \geqslant 1\}$ *– последовательность соответствующих функций распределений. Если при любом фиксированном* $t \in \mathsf{R}$ *последовательность характеристических функций сходится к некоторой непрерывной в точке* $t = 0$ *функции* $\varphi(t)$, *то* $\varphi(t)$ *есть х.ф. некоторой д.с.в. с функцией распределения* $F(x)$ *и* $F_n \Longrightarrow F$. *Обратно, если* $F_n \Longrightarrow F$ *и* $F(x)$ *есть функция распределения, то* $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ *при любом* $t \in \mathsf{R}$ *и* $\varphi(t)$ *– х.ф. с.в. с функцией распределения* $F(x)$.

Доказательство этой теоремы (в монографиях по теории вероятностей она обычно называется теоремой непрерывности для последовательностей х.ф.) основано на ряде вспомогательных утверждений о слабой сходимости функций распределений и их свойствах.

Лемма 11.1. *Любая функция распределения имеет не более чем счетное множество скачков.*

Доказательство. Утверждается, что каждому скачку функции распределения $F(x)$ можно присвоить свой номер n $(= 1, 2, \ldots)$; нумерацию скачков проведем следующим образом. Для каждого целого m $(= 1, 2, \ldots)$ выпишем все скачки функции $F(x)$, величина которых больше или равна $1/m$. При фиксированном m таких скачков конечное число – их не может быть больше m, ибо сумма их величин не превосходит 1 (напомним $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ и $F(x)$ не убывает). В полученной таблице нумеруем скачки построчно; при этом скачок любой величины ε попадает в строку с номером m, удовлетворяющим неравенствам $1/(m-1) > \varepsilon \geqslant 1/m$, и будет занумерован при прохождении m-й строки.

$\triangle$

Лемма 11.2. *Всякая последовательность функций распределения* $\{F_n,\ n \geqslant 1\}$ *содержит подпоследовательность* $\{F_{n_k},\ k \geqslant 1\}$, *слабо сходящуюся к некоторой ограниченной неубывающей и непрерывной слева функции* $F(x)$, *т.е.* $F_{n_k}(x) \to F(x)$ *при* $k \to \infty$ *в любой точке* x *непрерывности функции* $F(x)$.

Замечание 11.1. Если последовательность $\{F_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится в каждой точке x, то предельная функция $F(x)$ может и не быть функцией распределения, хотя, очевидно, $F(x)$ не убывает и ее изменение на R: $\mathrm{var} F = \sup_x F(x) - \inf_x F(x) \leqslant 1$, ибо таковы функции распределения $F_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$. Пример такой последовательности дает семейство равномерных распределений, в котором $F_n(x)$ при каждом фиксированном $n (= 1, 2, \ldots)$ есть функция равномерного распределения на отрезке $[n, n+1]$. Поскольку $F_n(x) = 0$ при $x < n$, то для любого $x \in \mathrm{R}$ существует такое N (достаточно взять N больше x), что $F_n(x) = 0$ для всех $n \geqslant N$. Следовательно, $F_n(x) \to F(x) = 0$ и $\mathrm{var} F = 0$.

Доказательство леммы 11.2. Начнем с выбора подпоследовательности $\{F_{n_k},\ k \geqslant 1\}$, которая сходится слабо к некоторому пределу F, обладающему указанными свойствами.

Пусть $D = \{r_n,\ n \geqslant 1\}$ – счетное всюду плотное в R множество, например, множество рациональных чисел. Числовая последовательность $\{F_n(r_1),\ n \geqslant 1\}$ ограничена, и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность $\{F_{1n}(r_1),\ n \geqslant 1\}$. Пусть $F_1(r_1)$ – предел этой подпоследовательности. Рассмотрим теперь последовательность чисел $\{F_{1n}(r_2),\ n \geqslant 1\}$; она также содержит сходящуюся подпоследовательность $\{F_{2n}(r_2),\ n \geqslant 1\}$ с некоторым пределом $F_2(r_2)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} F_{2n}(r_1) = F_1(r_1),$$

ибо $\{F_{2n}(r_1),\ n \geqslant 1\}$ – подпоследовательность сходящейся к $F_1(r_1)$ последовательности $\{F_{1n}(r_1),\ n \geqslant 1\}$. Точно так же последовательность $\{F_{2n}(r_3),\ n \geqslant 1\}$ содержит подпоследовательность $\{F_{3n}(r_3),\ n \geqslant 1\}$ с пределом $F_3(r_3)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} F_{3n}(r_2) = F_2(r_2), \quad \lim_{n\to\infty} F_{3n}(r_1) = F_1(r_1),$$

ибо

$$\{F_{3n}(r_1),\ n \geqslant 1\} \subseteq \{F_{2n}(r_1),\ n \geqslant 1\} \subseteq \{F_{1n}(r_1),\ n \geqslant 1\} -$$

индексы каждой последующей подпоследовательности выбирались из множества индексов предыдущей. Продолжая этот процесс, мы убеждаемся, что для любого $k \geqslant 1$ число $F_k(r_k)$ есть общий предел всех последовательностей

$$\{F_{jn}(r_k),\ n \geqslant 1\},\ j = k, k+1, \ldots,$$

причем каждая последующая последовательность есть подпоследовательность предыдущей.

Рассмотрим диагональную последовательность $\{F_{nn}(r_k),\ n \geqslant 1\}$. За исключением первых $k-1$ членов ее последующие члены выбираются по одному из рассмотренных выше последовательностей, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} F_{nn}(r_k) = F_k(r_k).$$

Тем самым для всех $x \in D$ определена неубывающая функция $F_0(x)$, равная $F_k(r_k)$, если $x = r_k$, и

$$\lim_{n\to\infty} F_{nn}(x) = F_0(x), \forall x \in D.$$

Функция $F_0(\,\cdot\,)$ ограничена и не убывает на D, ибо этими свойствами обладает каждый член последовательности $\{F_{nn},\ n \geqslant 1\}$. Теперь определим $F(x)$ при любом $x \in \mathrm{R}$, полагая

$$F(x) = \sup_{r<x,\, r\in D} F_0(r).$$

Покажем, что $F(\,\cdot\,)$ – искомая функция, то есть она (1) не убывает, (2) непрерывна слева и (3) $F_{nn}(x) \to F(x)$ в каждой точке x непрерывности функции F.

(1) Монотонность F следует из аналогичного свойства F_0: если $x \leqslant y$, то

$$F(x) = \sup_{r<x} F_0(r) \leqslant \sup_{r<y} F_0(r) = F(y).$$

(2) Непрерывность слева функции F в любой точке $x \in \mathrm{R}$ вытекает из определения точной верхней грани и монотонности функций F и F_0. Требуется доказать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathrm{R}$ существует такое $y_0 = y_0(\varepsilon,\, x) < x$, что $0 \leqslant F(x) - F(y) \leqslant \varepsilon$ при любом $y \in (y_0,\, x)$. По определению супремума существует такая возрастающая (супремальная) последовательность $\{r_k,\ k \geqslant 1\} \subset D$, что $r_k < x$ при $\forall k = 1, 2, \ldots$ и

$$\lim_k \uparrow F_0(r_k) = F(x).$$

Следовательно, существует такое $K = K(\varepsilon)$, что при $\forall k \geqslant K$ выполняется неравенство $0 \leqslant F(x) - F_0(r_k) < \varepsilon$. Но для любого $y \geqslant r_K$ имеет место неравенство

$$F_0(r_K) \leqslant \sup_{r<y} F_0(r) = F(y),$$

и поэтому $0 \leqslant F(x) - F(y) \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было $y \geqslant r_K = y_0$. Итак, F непрерывна слева.

(3) Покажем теперь, что $F_{nn} \Longrightarrow F$, то есть в любой фиксированной точке x непрерывности функции $F(\,\cdot\,)$, начиная с некоторого n, выполняется неравенство $|F_{nn}(x) - F(x)| < \varepsilon$, каково бы ни было наперед заданное число $\varepsilon > 0$.

Начнем с того, что в силу только что установленной непрерывности слева функции $F(\,\cdot\,)$ по заданному ε всегда можно подобрать такие $x', x'' \in \mathrm{R}$ и $r', r'' \in D$, что $x' < r' < x < r'' < x''$, и при этом

$$0 < F(x'') - F(x) < \varepsilon, \quad 0 < F(x) - F(x') < \varepsilon/2.$$

Так как $F_{nn}(r) \to F_0(r)$ при $\forall r \in \mathbf{D}$, то, начиная с некоторого $n >$

$N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|\,F_{nn}(r)-F_0(r)\,|<\varepsilon/2$, и поэтому

$$F_{nn}(x)-F(x)\leqslant F_{nn}(r'')-F(x)=$$

$$[\,F_{nn}(r'')-F_0(r'')\,]+[\,F_0(r'')-F(x)\,]\leqslant\varepsilon/2+F_0(r'')-F(x)\quad,$$

а также

$$F(x)-F_{nn}(x)\leqslant F(x)-F_{nn}(r')=$$

$$[\,F(x)-F_0(r')\,]+[\,F_0(r')-F_{nn}(r')\,]\leqslant F(x)-F_0(r')+\varepsilon/2.$$

Для доказательства сходимости $F_{nn}(x)$ к $F(x)$ достаточно показать, что

$$F_0(r'')\leqslant F(x''),\quad F_0(r')\geqslant F(x'),$$

а затем воспользоваться неравенством $F(x'')-F(x)<\varepsilon/2$. Но это почти очевидно, поскольку выполняются строгие неравенства $x'<r'$ и $r''<x''$. Действительно,

$$F_0(r'')\leqslant\sup_{r<x''}F_0(r)=F(x'')$$

и, аналогично,

$$F_0(r')\geqslant\sup_{r<r'}F_0(r)=F(r')\geqslant F(x').$$

Следовательно,

$$F_0(r'')-F(x)\leqslant F(x'')-F(x)\leqslant\varepsilon/2,\ F(x)-F_0(r')\leqslant F(x)-F(x')\leqslant\varepsilon/2,$$

откуда $-\varepsilon\leqslant F_{nn}(x)-F(x)\leqslant\varepsilon$.

$\triangle$

Лемма 11.3. *Для того чтобы последовательность функций распределений* $\{F_n,\,n\geqslant 1\}$ *слабо сходилась к некоторой функции распределения* $F(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной и ограниченной функции* $g(x)$, $x\in\mathsf{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathrm{R}}g(x)dF_n(x)=\int_{\mathrm{R}}g(x)dF(x)\tag{11.4}$$

Доказательство. *Необходимость*. Оценим разность

$$\Delta_n=\Big|\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF_n(x)\Big|$$

и покажем, что Δ_n можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно большое n, если $F_n \Longrightarrow F$.

Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$ и выберем на оси R такие точки a и b, чтобы $F(x)$ была непрерывной в a и b и чтобы $F(a) < \varepsilon$ и $1 - F(b) < \varepsilon$. Поскольку $F_n \Longrightarrow F$, то

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a), \quad \lim_{n\to\infty} F_n(b) = F(b)$$

и, следовательно,

$$F_n(a) \leqslant F(a) + \varepsilon, \quad F_n(b) \geqslant F(b) - \varepsilon, \tag{11.3}$$

начиная с некоторого $n > N(\varepsilon)$.

Разобьем каждый из интегралов, участвующих в определении Δ_n, на сумму трех интегралов по промежуткам $[-\infty;\, a\,]$, $[\,a;\, b\,]$, $[\,b;\, +\infty]$. Тогда $\Delta_n \leqslant \Delta_{1n} + \Delta_{2n} + \Delta_{3n}$, где

$$\Delta_{1n} = \left| \int_{-\infty}^{a} g dF - \int_{-\infty}^{a} g dF_n \right|, \quad \Delta_{2n} = \left| \int_{a}^{b} g dF - \int_{a}^{b} g dF_n \right|,$$

$$\Delta_{3n} = \left| \int_{b}^{\infty} g dF - \int_{b}^{\infty} g dF_n \right|.$$

Положим $M = \sup\limits_{x} |\, g(x)\, | < \infty$ (напомним, функция g ограничена) и оценим Δ_{1n} и Δ_{3n}. Используя (11.3), получаем

$$\Delta_{1n} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{a} |\, g\, | dF + \int\limits_{-\infty}^{a} |\, g\, | dF_n \leqslant M(F(a) + F_n(a)) \leqslant M(2F(a) + \varepsilon) \leqslant 3M\varepsilon,$$

$$\Delta_{3n} = \int_{b}^{\infty} |\, g\, | dF + \int_{b}^{\infty} |\, g\, | dF_n \leqslant M(1 - F(b) + 1 - F_n(b)) \leqslant 3M\varepsilon,$$

ибо $F(a) < \varepsilon$ и $1 - F(b) < \varepsilon$. Таким образом, Δ_{1n} и Δ_{3n} стремятся к нулю с ростом n. Покажем, что аналогичное заключение можно сделать относительно Δ_{2n}.

Разобьем отрезок $[\,a;\, b\,]$ на N частей точками $x_1, \ldots, x_{N-1}$, выбрав их так, чтобы они оказались точками непрерывности $F(\,\cdot\,)$ (это возможно в силу известного свойства функции распределения: она имеет не более чем счетное множество скачков, и поэтому не может быть целого промежутка, состоящего из точек разрыва $F(\,\cdot\,)$). Итак, пусть

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Так как функция $g(\,\cdot\,)$ непрерывна на R, то на конечном отрезке $[\,a;\,b\,]$ она равномерно непрерывна. Следовательно, при достаточно большом N разность $|\,g(x) - g(x_k)\,| < \varepsilon$ при $x_k \leqslant x < x_{k+1}$ и любом $k = 0, \ldots, N$. Введем ступенчатую функцию $g_\varepsilon(x)$, положив ее равной $g(x_k)$, если $x \in [\,x_k;\, x_{k+1})$, $k = 0, \ldots, N-1$, и обратимся к оценке Δ_{2n}. Имеем

$$\Delta_{2n} = \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon + g_\varepsilon) dF - \int_a^b (g - g_\varepsilon + g_\varepsilon) dF_n \right| \leqslant$$

$$\left| \int_a^b (g - g_\varepsilon) dF \right| + \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon) dF_n \right| + \left| \int_a^b g_\varepsilon dF - \int_a^b g_\varepsilon dF_n \right|.$$

Каждое из первых двух слагаемых в правой части не превосходит ε, поскольку

$$|g - g_\varepsilon| < \varepsilon,\ F(b) - F(a) \leqslant 1,\ F_n(b) - F_n(a) \leqslant 1,$$

а для последнего слагаемого имеем оценку

$$\left| \int\limits_a^b g_\varepsilon dF - \int\limits_a^b g_\varepsilon dF_n \right| = \left| \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dF(x) - \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dF_n(x) \right| =$$

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \{ (F(x_{k+1}) - F(x_k)) - (F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k)) \} \right| \leqslant$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\,g(x_k)\,| \{ |\,F(x_{k+1}) - F_n(x_{k+1})\,| + |\,F(x_k) - F_n(x_k)\,| \}.$$

Правая часть этого неравенства меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$, поскольку N фиксировано, $|\,g(x)\,| \leqslant M$, а $F_n(x_k) \to F(x_k)$ при любом $k = 0, \ldots, N$. Итак, Δ_{2n} сколь угодно мало и, следовательно, $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Достаточность. Пусть выполняется (1). Для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки x непрерывности F рассмотрим непрерывную функцию $f_\varepsilon(t)$, принимающую значение 1 при $t < x$, значение 0, если $t > x + \varepsilon$, и меняющуюся линейно на $[\,x;\ x + \varepsilon\,]$. Так как

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\varepsilon(t) dF_n(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dF_n(t),$$

то в силу (1)

$$\limsup_n F_n(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dF(t) \leqslant \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} dF(t) = F(x + \varepsilon).$$

Аналогично, с помощью функции $f_\varepsilon^*(t) = f_\varepsilon(t + \varepsilon)$ получаем неравенство

$$F_n(x) \geqslant \int_{-\infty}^{x} f_\varepsilon^*(t) dF_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^*(t) dF_n(t),$$

откуда

$$\liminf_n F_n(x) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^*(t) dF(t) \geqslant F(x - \varepsilon).$$

Следовательно,

$$F(x - \varepsilon) \leqslant \liminf_n F_n(x) \leqslant \limsup_n F_n(x) \leqslant F(x + \varepsilon),$$

а так как x – точка непрерывности F, то в силу произвольности ε имеем равенство

$$\liminf_n F_n(x) = \limsup_n F_n(x) = \lim_n F_n(x) = F(x).$$

$\triangle$

Замечание 11.2. В большинстве монографий по теории вероятностей слабая сходимость распределений определяется соотношением (11.2) – именно таким образом можно распространить понятие слабой сходимости на векторные случайные величины (или случайные величины с абстрактным пространством их значений).

Определение 11.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – полное сепарабельное метрическое пространство (так называемое *польское пространство*). Последовательность распределений $\{P_n,\ n \geqslant 1\}$ на σ-алгебре подмножеств $\mathfrak{X}$

называется слабо сходящейся к распределению P, если для любой ограниченной непрерывной функции на $\mathcal{X}$ выполняется соотношение

$$\lim_n \int_{\mathcal{X}} g(x)dP_n(x) = \int_{\mathcal{X}} g(x)dP(x).$$

Слабая сходимость распределений обозначается тем же символом $P_n \Longrightarrow P$.

Из леммы 11.3 следует, что определение 11.3 в случае $\mathcal{X} = \mathrm{R}$ эквивалентно определению 11.2 слабой сходимости функции распределения.

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы доказать критерий слабой сходимости.

Доказательство теоремы непрерывности 11.2. Если $F_n \Longrightarrow F$, то

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}tx} dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}tx} dF(x) = \varphi(t)$$

(достаточно применить лемму 11.3 к ограниченной непрерывной функции $g(x) = e^{\mathbf{i}tx}$).

Пусть теперь последовательность характеристических функций $\{\varphi_n,\ n \geqslant 1\}$ сходится к некоторой непрерывной в точке $t = 0$ функции $\varphi(t)$, и $\{F_n,\ n \geqslant 1\}$ – соответствующая последовательность функций распределения. Требуется доказать, что φ – характеристическая функция случайной величины с функцией распределения F и $F_n \Longrightarrow F$.

В силу леммы 11.2 из последовательности $\{F_n,\ n \geqslant 1\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{F_{n_k},\ k \geqslant 1\}$, слабо сходящуюся к некоторой неубывающей, непрерывной слева функции F, причем $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. Если $\mathrm{var} F = 1$, то есть F – функция распределения, то (см.(1)) $\varphi_{n_k}(t) \to \varphi_0(t),\ \ k \to \infty$, при любом $t \in \mathrm{R}$, где $\varphi_0(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F(\,\cdot\,)$. Так как последовательность $\{\varphi_n(t),\ n \geqslant 1\}$ сходится, то все ее подпоследовательности имеют один и тот же предел $\varphi(t)$, откуда $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ и $\varphi(t),\ t \in \mathrm{R}$ – характеристическая функция. Наконец, в силу теоремы единственности 11.1 все подпоследовательности последовательности $\{F_n,\ n \geqslant 1\}$ имеют один и тот же слабый предел F, характеристическая функция которого есть φ, откуда $F_n \Longrightarrow F$.

Итак, осталось показать, что $\mathrm{var}F = 1$.

Допустим противное $\mathrm{var}F = \delta < 1$. Так как $\varphi(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке $t = 0$ и $\varphi(0) = 1$, ибо $\varphi_n(0) = 1$ при любом $n = 1, 2, \ldots,$ то для любого $\varepsilon \in (0;\, 1 - \delta)$ существует отрезок $[-\tau,\, \tau\,]$, на котором

$$|\,1 - \varphi(t)\,| < \varepsilon/2 = \varepsilon - \varepsilon/2 < 1 - \delta - \varepsilon/2.$$

Функция $\varphi(\,\cdot\,)$ интегрируема на любом отрезке $[\,-\tau,\, \tau\,]$, так как она есть предел интегрируемых на $[\,-\tau,\, \tau\,]$ и ограниченных функций $\varphi_n(\,\cdot\,)$ (см.начало доказательства формулы обращения). Следовательно, (напомним, $|\,a\,| - |\,b\,| \leqslant |\,a - b\,|$)

$$1 - \left| \frac{1}{2\tau} \int\limits_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) dt \right| \leqslant \frac{1}{2\tau} \left| \int\limits_{-\tau}^{\tau} (1 - \varphi(t)) dt \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{2\tau} \int\limits_{-\tau}^{\tau} |\,1 - \varphi(t)\,| dt < 1 - \delta - \varepsilon/2,$$

откуда,

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int\limits_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) dt \right| > \delta + \varepsilon/2. \tag{11.4}$$

Это неравенство получено нами только из предположения непрерывности функции $\varphi(\,\cdot\,)$ в точке $t = 0$. Покажем теперь, что из сделанного нами предположения $\mathrm{var}F = \delta < 1$ вытекает противоположное неравенство. Пусть $F_{n_k} \Longrightarrow F$, а соответствующая последовательность характеристических функций $\varphi_{n_k}(t) \to \varphi(t)$ при $\forall t \in \mathrm{R}$. Имеем

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t) dt \right| = \left| \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}tx} dF_{n_k}(x) dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{\mathbf{i}tx} dt \right| dF_{n_k}(x) =$$

$$\int\limits_{|\,x\,| > A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{\mathbf{i}tx} dt \right| dF_{n_k}(x) + \int\limits_{|\,x\,| \leqslant A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{\mathbf{i}tx} dt \right| dF_{n_k}(x),$$

где A – некоторое положительное число. Так как $F(A) - F(-A) \leqslant \mathrm{var} F \leqslant \delta$, то $F_{n_k}(A) - F_{n_k}(-A) < \delta + \varepsilon/4$, начиная с некоторого k. Учитывая, что интеграл

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{\mathbf{i}tx} dt = \frac{e^{\mathbf{i}\tau x} - e^{-\mathbf{i}\tau x}}{\mathbf{i}x} = \frac{2\sin(\tau x)}{x}$$

и, следовательно, по модулю не превосходит 2τ (напомним, $|\sin x| \leqslant |x|$), получаем

$$\int\limits_{|x|\leqslant A} \left| \int\limits_{-\tau}^{\tau} e^{\mathbf{i}tx} dt \right| dF_{n_k}(x) \leqslant 2\tau(\delta + \varepsilon/4),$$

$$\int\limits_{|x|>A} \left| \int\limits_{-\tau}^{\tau} e^{\mathbf{i}tx} dt \right| dF_{n_k}(x) =$$

$$2 \int\limits_{|x|>A} \left| \frac{\sin(\tau x)}{x} \right| dF_{n_k}(x) \leqslant \int\limits_{|x|>A} \frac{2}{|x|} dF_{n_k}(x) \leqslant \frac{2}{A}\,.$$

Если выбрать $A = 4/\tau\varepsilon$, то

$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t) dt \right| \leqslant \delta + \varepsilon/2,$$

что противоречит (11.4) при $k \to \infty$ и, следовательно, предположению $\delta = \mathrm{var} F < 1$. Итак, F – функция распределения, φ – соответствующая ей характеристическая функция и $F_n \Longrightarrow F$.

$\triangle$

Литература: А.А.Боровков, стр.96, 110-111, 116-118, 276-282; М.Лоев, стр.191-195, 198-204.

§12. **Меры**

Определение 12.1. *Мерой* на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω называется такое отображение $\mathcal{A}$ в $(-\infty, +\infty]$, что $\mu(\varnothing) = 0$ и

$$\mu\Big(\sum_I A_i\Big) = \sum_I \mu(A_i)$$

(σ-аддитивность), каково бы ни было счетное семейство $\{A_i,\ i \in I\}$ попарно непересекающихся подмножеств Ω из $\mathcal{A}$.

Символ $-\infty$ исключается из множества значений меры с целью избежать появления выражений вида $\infty - \infty$, ибо в случае $\mu(A) = +\infty$, $\mu(B) = -\infty$ невозможно было бы придать смысл соотношению

$$\mu(A) + \mu(A^c \cap B) = \mu(B) + \mu(B^c \cap A) = \mu(A \cup B).$$

Определение 12.2. Мера μ называется *положительной*, если $\mu(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$; *конечной*, если $\mu(A) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$; *$\sigma$-конечной*, если любое $A \in \mathcal{A}$ есть объединение не более чем счетного числа элементов $\mathcal{A}$ конечной меры μ; *ограниченной*, если

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} |\, \mu(A)\, | < \infty.$$

Положительная мера, удовлетворяющая условию $\mu(\Omega) = 1$ (и, следовательно, ограниченная), является вероятностью.

Примеры наиболее употребительных мер.

1). *Мера Лебега* на $(\mathrm{R}^n, \mathcal{R}^n)$: каждому борелевскому множеству $A \in \mathcal{R}^n$ ставится в соответствие его объем $\mu(A)$.

2). *Считающая мера* на борелевской прямой $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$: каждому борелевскому множеству $A \in \mathcal{R}$ ставится в соответствие число $\mu(A)$ точек A с целочисленными координатами (например, $A = (-5; \pi]$, $\mu(A) = 8$).

3). *Заряд* (или температурная мера) – мера на борелевской прямой, которая любому интервалу (a, b) приписывает число

$$\mu\{(\,a,\,b\,)\} = \begin{cases} b-a, & \text{если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0; \\ a-b, & \text{если } a \leqslant 0,\ b \leqslant 0; \\ b+a, & \text{если } a \leqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

Свойство σ-аддитивности меры тесно связано со свойством ее непрерывности как функции множеств. Мера μ называется *непрерывной снизу* или *сверху*, если

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$$

для каждой монотонно возрастающей последовательности $\{A_n\}$ или, соответственно, для каждой монотонно убывающей последовательности $\{A_n\}$, обладающей тем свойством, что, начиная с некоторого n_0, значения $\mu(A_n)$ конечны при всех $n > n_0$. Если μ непрерывна сверху и снизу, то она называется непрерывной.

Предложение 12.1. *Любая мера μ на измеримом пространстве $(\,\Omega,\,\mathcal{A}\,)$ обладает свойством непрерывности относительно монотонных последовательностей: $A_n \uparrow A$ (или $A_n \downarrow A$) влечет*

$$\lim_n \mu\,(A_n) = \mu\,(\,\lim_n A_n\,) = \mu(A).$$

Обратно, если функция множеств μ на $\mathcal{A}$ конечно аддитивна, $\mu(\varnothing) = 0$ и μ либо непрерывна снизу, либо конечна и непрерывна в $\varnothing$, то она является мерой на $\mathcal{A}$ (то есть σ-аддитивна).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству соответствующего утверждения для вероятности P (см. §2), поскольку в этом доказательстве используется только σ-аддитивность P и ее ограниченность сверху числом 1.

$\triangle$

Лемма 12.1. *Если μ – мера на $(\,\Omega,\,\mathcal{A}\,)$, то существуют такие множества C и D из $\mathcal{A}$, что $\mu(C) = \sup\{\mu(A) : \ A \in \mathcal{A}\}$ и $\mu(D) = \inf\{\mu(A) : \ A \in \mathcal{A}\}$.*

Доказательство. Покажем, что существует множество $C \in \mathcal{A}$, обладающее указанным свойством; существование D доказывается аналогично.

Если для некоторого $C \in \mathcal{A}$ мера $\mu(C) = \infty$, то C – требуемое множество. Поэтому достаточно рассмотреть случай конечной меры: $\mu(A) < \infty$ при $\forall\, A \in \mathcal{A}$ (напомним, что по определению $\mu(A) > -\infty$ при $\forall\, A \in \mathcal{A}$). Далее, по определению точной верхней грани функции существует такая последовательность множеств $\{A_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{A}$, что

$$\lim_n \mu(A_n) = \sup\{\mu(B):\ B \in \mathcal{A}\}.$$

Положим $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и постараемся убрать из A его части, имеющие отрицательную меру (с тем, чтобы получить множество максимальной меры).

В силу следствия 1.1 для любого конечного набора множеств $\{A_i,\ i = 1,\ldots,m\}$ и набора $\{\bar{A}_i = A \setminus A_i,\ i = 1,\ldots,m\}$ их дополнений до A ($= \Omega$ в терминах следствия 1.1) справедливо представление (разбиение) множества A в виде прямой суммы:

$$A = \sum \bigcap_{i=1}^{m} A_i', \tag{12.1}$$

где суммирование распространяется на $k = 2^m$ индексов, участвующих в записи $\bigcap_{i=1}^{m} A_i'$, каждое A_i' равно или A_i, или $A_i^{\,c}$ (см. рис.1.2 с $\Omega = A$). Если увеличивать m, то (12.1) будет представлять разбиение A на все более мелкие части, причем каждое последующее разбиение есть подразбиение предыдущего, ибо

$$\bigcap_{1}^{m+1} A_i' = \Big(\bigcap_{1}^{m} A_i'\Big) \bigcap A_{m+1}'.$$

Занумеруем непересекающиеся множества в правой части (12.1) индексом $k = 1,\ldots,2^m$, так что

$$A = \sum_{k=1}^{2^m} A_{\,m\,k},$$

где каждое A_{mk} имеет вид $\bigcap_1^m A_i'$. Пусть B_m – объединение (прямая сумма) тех A_{mk}, на которых μ положительна:

$$B_m = \sum_{k:\ \mu(A_{mk}) \geqslant 0} A_{mk};$$

если все $\mu(A_{mk}) < 0,\ k = 1, \ldots, 2^m$, то полагаем $B_m = \emptyset$. Имеем

$$\mu(A_m) \leqslant \mu(B_m), \tag{12.2}$$

ибо B_m содержит только те подмножества A_m, которые имеют положительную меру, а части с $\mu(A_{mk}) < 0$ убраны. Далее

$$\mu(B_m) \leqslant \mu(B_m \cup B_{m+1} \cup \cdots \cup B_{m'}) \tag{12.3}$$

при $\forall\, m' > m$, что легко устанавливается по индукции, если учесть что

$$\mu(B_m \cup B_{m+1}) = \mu(B_m) + \mu(B_{m+1} \setminus B_m) \geqslant \mu(B_m).$$

Действительно, $\mu(B_{m+1} \setminus B_m) \geqslant 0$, ибо B_{m+1} включает в себя части (подмножества) отдельных составляющих $A_{mk} \subset B_m$, и все эти части имеют положительную меру; оставшиеся части B_{m+1} после вычитания B_m также имеют положительную меру.

Положим

$$C = \lim_m{\downarrow} \bigcup_{k \geqslant m} B_k.$$

Используя свойство непрерывности μ, неравенства (12.2)–(12.3) и то, что $\mu(C) \leqslant \sup\limits_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$, получаем

$$\sup\{\mu(A) :\ A \in \mathcal{A}\} = \lim_m \mu(A_m) \leqslant \lim_m \mu(B_m) \leqslant \lim_m \mu\left(\bigcup_{k \geqslant m} B_k\right) =$$

$$\mu\left(\lim_m{\downarrow} \bigcup_m^{\infty} B_k\right) = \mu(C) \leqslant \sup\{\mu(A) :\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Следовательно,

$$\mu(C) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$$

и C есть множество максимальной положительной меры.

$\triangle$

Следствие 12.1. *Любая конечная мера ограничена.*

Доказательство. Если μ конечна, то есть $\mu(A) < \infty,\ \forall A \in \mathcal{A}$, то в силу леммы 12.1

$$-\infty < \mu(D) = \inf\{\mu(A) :\ A \in \mathcal{A}\} \leqslant \sup\{\mu(A) :\ A \in \mathcal{A}\} = \mu(C) < \infty.$$

$\triangle$

Теорема 12.1. (разложение Жордана-Хана). *Для всякой меры μ на $(\Omega, \mathcal{A})$ формулы*

$$\mu^+(A) = \sup\{\,\mu(B) :\ B \subset A\,\},$$

$$\mu^-(A) = \sup\{\,-\mu(B) :\ B \subset A\,\} = -\inf\{\,\mu(B) : B \subset A\,\}$$

определяют две положительные меры на $(\,\Omega,\,\mathcal{A}\,)$, при этом мера μ^- ограничена и $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Существует по крайней мере одно такое множество $D \in \mathcal{A}$, что для любого $A \in \mathcal{A}$ мера

$$-\mu^-(A) = \mu\,(\,A\,\cap\,D\,), \qquad \mu^+(A) = \mu\,(\,A\,\cap\,D^c\,).$$

Доказательство. В силу леммы 12.1 существует такое $D \in \mathcal{A}$, что $\mu(D) = \inf\{\,\mu(A) :\ A \in \mathcal{A}\,\}$. Так как

$$\inf\{\,\mu(A) :\ A \in \mathcal{A}\,\} \leqslant \mu(\varnothing) = 0,$$

то $-\infty < \mu(D) \leqslant 0$. Покажем, что для любого $A \in \mathcal{A}$ мера $\mu\,(\,A \cap D\,) \leqslant 0$, а мера $\mu\,(\,A\,\cap\,D^c\,) \geqslant 0$.

Рассуждаем от противного: если, вопреки утверждению $\mu\,(\,A \cap D\,) > 0$, то

$$\mu\,(\,D \setminus (\,A\,\cap\,D\,)\,) = \mu(D) - \mu\,(\,A\,\cap\,D\,) < \mu(D),$$

и мы приходим к противоречию с минимальностью $\mu(D)$. Аналогично, если $\mu\,(\,A\,\cap\,D^c\,) < 0$, то

$$\mu\,(\,D + A\,\cap\,D^c\,) = \mu(D) + \mu\,(\,A\,\cap\,D^c\,) < \mu(D),$$

и опять то же противоречие.

Теперь покажем, что $-\mu^-(A) = \mu(A \cap D)$ и $\mu^+(A) = \mu(A \cap D^c)$. Так как $\mu(B \cap D) \leqslant 0$ при любом $B \in \mathcal{A}$, то для любых $A, B \in \mathcal{A}$ и $B \subset A$ мера

$$\mu(B) = \mu(B \cap D) + \mu(B \cap D^c) \leqslant \mu(B \cap D^c) \leqslant$$

$$\mu(B \cap D^c) + \mu((A \setminus B) \cap D^c) = \mu(A \cap D^c).$$

Следовательно,

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B):\ B \subset A\} \leqslant \mu(A \cap D^c).$$

Но $A \bigcap D^c \subset A$, так что

$$\mu(A \cap D^c) \leqslant \sup\{\mu(B):\ B \subset A\},$$

откуда $\mu(A \cap D^c) = \mu^+(A)$. Аналогично устанавливается, что $\mu(A \cap D) = -\mu^-(A)$. Таким образом,

$$\mu(A) = \mu(A \cap D^c) + \mu(A \cap D) = \mu^+(A) - \mu^-(A).$$

Остается показать, что μ^+ и μ^- являются мерами. Имеем:

$$\mu^+(\varnothing) = \mu(\varnothing \cap D^c) = \mu(\varnothing) = 0,$$

$$\mu^+\Big(\sum_I A_i\Big) = \mu\Big(\sum_I A_i \cap D^c\Big) = \sum_I \mu(A_i \cap D^c) = \sum_I \mu^+(A_i),$$

то есть μ^+ – мера. Доказательство для μ^- аналогичное.

Наконец, положительная мера μ^- ограничена, поскольку

$$\sup\{\mu^-(A):\ A \in \mathcal{A}\} = \mu^-(\Omega) = -\mu(D) < \infty$$

(по определению меры для любого $A \in \mathcal{A}$ мера $\mu(A) > -\infty$, а так как $D \in \mathcal{A}$, то и $\mu(D) > -\infty$).

$\triangle$

Следствие 12.2. *Для того чтобы мера μ на $(\Omega, \mathcal{A})$ была ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\Omega) < \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.*

Если $\sup\{\,|\,\mu(A)\,|:\ A\in\mathcal{A}\,\}<\infty$, то, естественно, и $\mu(\Omega)<\infty$.

Достаточность. Покажем, что $\mu(\Omega)<\infty$ влечет $\sup_A|\,\mu(A)\,|<\infty$. Так как μ^- – положительная ограниченная мера (см.теорему 12.1), то

$$-\infty<-\mu^-(\Omega)\leqslant-\mu^-(A)\leqslant\mu^+(A)-\mu^-(A)=\mu(A)\leqslant\mu^+(A)\leqslant\mu^+(\Omega).$$

Следовательно, если $\mu^+(\Omega)<\infty$, то $|\,\mu(A)\,|<\infty$ при любом $A\in\mathcal{A}$, то есть мера μ конечна и, в силу следствия 12.1, ограничена. Но если $\mu(\Omega)<\infty$, то $\mu^+(\Omega)=\mu(\Omega)+\mu^-(\Omega)<\infty$, ибо мера μ^- конечна.

$\triangle$

Замечание 12.1. Теорема 12.1 указывает способ определения интеграла Лебега по любой σ-конечной мере, а не только по вероятности P, как в § 9 (предполагается, естественно, что $\mu(\Omega)\neq0$).

В случае положительной конечной (ограниченной) меры μ на $(\,\Omega,\,\mathcal{A}\,)$ рассмотрим вероятностную меру $P(A)=\mu(A)/\mu(\Omega),\ A\in\mathcal{A}$, и определим интеграл Лебега от измеримой функции $X=X(\Omega)$ по мере μ равенством

$$\int_\Omega X\,d\mu=\mu(\Omega)\int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega).$$

Если μ – положительная σ-конечная мера и $\Omega=\sum\limits_1^\infty A_i$ – разбиение Ω на множества конечной меры μ, то для каждого A_i с $\mu(A_i)>0$ введем σ-алгебру $\mathcal{A}_i=\{A\bigcap A_i,\ A\in\mathcal{A}\}$ и определим на ней вероятностную меру $P_i(A)=\mu(A\bigcap A_i)/\mu(A_i),\quad i=1,2,\ldots.$ Интеграл Лебега по положительной σ-конечной мере μ определим равенством

$$\int_\Omega X\,d\mu=\sum_{i=1}^\infty\mu(A_i)\int_{A_i}X(\omega)\,dP_i.$$

Нетрудно проверить, что это определение корректно, то есть не зависит от способа представления Ω в виде прямой суммы счетного числа множеств конечной меры (достаточно проверить для $X=1_A$).

Наконец, интеграл по любой, не обязательно положительной σ-конечной мере μ определяется с помощью разложения Жордана-Хана:

$$\int_\Omega X d\mu = \int_\Omega X d\mu^+ - \int_\Omega X d\mu^-.$$

Определение 12.3. Мера μ называется *абсолютно непрерывной* по отношению к *положительной* мере ν (коротко, ν-непрерывной; обозначение $\mu \ll \nu$), если $\nu(A) = 0$ для какого-либо $A \in \mathcal{A}$ влечет $\mu(A) = 0$, то есть ν-нулевые множества являются μ-нулевыми. Если $\mu \ll \nu$ и одновременно $\nu \ll \mu$, то меры μ и ν называются *эквивалентными* (обозначение $\mu \sim \nu$). Положительная мера μ называется *сингулярной* по отношению к положительной мере ν (ν-сингулярной; обозначение $\mu \perp \nu$), если существует такое ν-нулевое множество N, что $\mu\,(N^c) = 0$, то есть меры μ и ν сосредоточены на разных элементах σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Очевидно, свойство сингулярности является взаимным, то есть следует говорить о взаимной сингулярности мер μ и ν.

Пример 12.1. (сингулярные меры). Пусть ν – мера Лебега, а μ – считающая мера на борелевской прямой $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$. Покажем, что эти меры взаимно сингулярны. Рассмотрим множество N рациональных чисел на R, мера Лебега которого $\nu(N) = 0$. Множество N содержит все целые числа и, следовательно, считающая мера его дополнения $\mu\ (N^c) = 0$. Итак, $\mu \perp \nu$.

Интересно отметить, что любой паре положительных мер μ и ν можно сопоставить пару взаимно сингулярных мер μ_1 и ν, положив $\mu_1(A) = \mu(A \bigcap N)$, где N есть ν-нулевое множество. Действительно, $\nu(N) = 0$ и, в то же время, $\mu_1(N^c) = \mu(N \bigcap N^c) = \mu(\emptyset) = 0$.

Пример 12.2. (абсолютно непрерывные меры). Интеграл

$$\nu(A) = \int_\Omega \mathbf{1}_A(\omega) X(\omega)\, d\mu(\omega) \stackrel{df}{=} \int_A X\, d\mu,$$

рассматриваемый как функция множеств A на $\mathcal{A}$, называется *неопределенным интегралом Лебега.* Если X^- интегрируема, то $\nu(\,\cdot\,)$ есть мера на $\mathcal{A}$. Действительно, $\nu(\varnothing) = 0$, и если $A = \sum_I A_i$, где $\{A_i,\ i \in I\}$ – не более чем счетное семейство подмножеств Ω, то в силу теоремы о монотонной сходимости (предложение 9.4)

$$\nu\Big(\sum_I A_i\Big) = \int_{\sum A_i} X\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{\sum A_i} X\,d\mu \overset{(9.4)}{=} \sum_I \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} X\,d\mu = \sum_I \nu(A_i).$$

Если μ – положительная мера, то $\nu \ll \mu$, ибо $\mu(N) = 0$ влечет

$$\nu(N) = \int_N x\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu = 0,$$

поскольку последнее равенство справедливо для любой ст.с.в., аппроксимирующей X.

Два последних примера наводят на мысль о том, что любую меру μ, кроме ее разложения на положительную и отрицательную составляющие (разложение Жордана-Хана), можно представить в виде суммы двух мер, одна из которых абсолютно непрерывна относительно некоторой априори заданной положительной меры ν, а другая сингулярна относительно ν. Покажем, что такое представление действительно имеет место и начнем его построение с доказательства одного вспомогательного утверждения, в чем-то аналогичного лемме 12.1.

Лемма 12.2. *Пусть μ и ν – две положительные конечные меры на $(\Omega, \mathcal{A})$. В классе*

$$\mathcal{L} = \{\, Y:\ Y(\omega) \geqslant 0,\ \forall\,\omega \in \Omega; \quad \int_A Y\,d\nu \leqslant \mu(A),\ \forall\,A \in \mathcal{A}\}$$

неотрицательных с.в. существует д.с.в., доставляющая максимум функционалу

$$\int_\Omega Y\,d\nu.$$

Доказательство. Класс с.в. $\mathcal{L}$ непуст, ибо $Y \equiv 0$ принадлежит $\mathcal{L}$. Так как μ – конечная мера, то (см. следствие 12.2) $\mu(\Omega) < \infty$, и, следовательно, для любого $Y \in \mathcal{L}$ интеграл

$$\int_\Omega Y\,d\nu \leqslant \mu(\Omega) < \infty.$$

Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ – супремальная последовательность, для которой при $n \to \infty$

$$\int_\Omega X_n\, d\nu \ \to \ \sup_{Y\,\in\mathcal{L}} \int_\Omega Y\, d\nu \ (\,\leqslant \mu(\Omega)\,), \quad \{X_n,\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{L}. \tag{12.4}$$

Положим

$$X'_n(\omega) = \sup{}_{\,k\,\leqslant\, n}\ X_k(\omega), \quad \omega \in \Omega;$$

тогда

$$0 \leqslant X'_n \uparrow X = \sup{}_{\,k\,\geqslant\, 1}\ X_k,$$

и в силу свойства монотонной сходимости интегралов Лебега (см. предложение 9.4 с очевидными модификациями в духе замечания 12.1)

$$\lim_n{\uparrow} \int_\Omega X'_n\, d\nu \ = \ \int_\Omega X\, d\nu.$$

Так как $X_n(\omega) \leqslant X'_n(\omega),\ \forall\, \omega \in \Omega$, то из (12.4) следует, что

$$\sup_{Y\ \in\ \mathcal{L}} \ \int_\Omega Y\, d\nu \ \leqslant \ \int_\Omega X\, d\nu.$$

Покажем, что

$$\int_A X\, d\nu \ \leqslant \ \mu(A),\ \forall\, A \in \mathcal{A},$$

то есть $X \in \mathcal{L}$.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим $A_k = \{\omega :\ \ X_k(\omega) = X'_n(\omega)\}$ и рассмотрим попарно непересекающиеся множества

$$A'_k = A^{\,c}_1 \cap A^{\,c}_2 \cap \cdots \cap A^{\,c}_{k-1} \cap A_{\,k}\ (\in \mathcal{A}), \quad k = 2, \ldots, n, \quad A'_1 = A_1.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} A'_k = A_1 + A^{\,c}_1 \cap A_2 + \cdots + A^{\,c}_1 \cap \cdots \cap A^{\,c}_{n-1} \cap A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega,$$

так как при любом $\omega \in \Omega$ существует такое k, что

$$X'_n(\omega) = \sup{}_{\,i\leqslant n}\ X_i(\omega) = X_k(\omega),$$

то есть $\omega \in A_k$. Теперь для каждого $A \in \mathcal{A}$, используя представление

$$A = \Omega \cap A = \sum_{k=1}^{n} A'_k \cap A$$

и то, что $X'_n = X_k\,(\in \mathcal{L})$ на $A'_k(\subset A_k)$, получаем

$$\int_A X'_n\, d\nu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A\cap A'_k} X'_n\, d\nu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A\cap A'_k} X_k\, d\nu \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu\,(A\cap A'_k) = \mu\left(\sum_{k=1}^{n}(A\cap A'_k)\right) = \mu(A).$$

Устремляя n к бесконечности в левой части этого неравенства и используя свойство монотонной сходимости интеграла Лебега, убеждаемся, что

$$\lim_n\uparrow \int_A X'_n\, d\nu = \int_A X\, d\nu \leqslant \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

то есть $X \in \mathcal{L}$.

$\triangle$

Теорема 12.2. *(разложение Лебега). Пусть μ и ν – две σ-конечные меры на $\mathcal{A}$ и ν положительна. Тогда существует одно и только одно разложение меры μ на ν-непрерывную и σ-конечную меру μ_c и ν-сингулярную меру μ_s : $\mu(A) = \mu_c(A) + \mu_s(A)$, $A \in \mathcal{A}$, причем $\mu_c(A)$ является неопределенным интегралом от конечной д.с.в. X, определенной с точностью до ν-эквивалентности, а $\mu_s(A) = \mu(A\cap N)$, где N есть ν-нулевое множество:*

$$\mu(A) = \int_A X\, d\nu + \mu\,(A\cap N), \quad \forall A \in \mathcal{A} \tag{12.5}$$

Доказательство. Теорему достаточно доказать для положительных конечных мер μ и ν, ибо представление (12.5) для σ-конечных мер будет следовать непосредственно из разложения Жордана-Хана с использованием конструкции в замечании 12.1.

Если μ и ν – положительные конечные меры, то в силу леммы 12.2 существует такая неотрицательная д.с.в. X (максимальный элемент в $\mathcal{L}$), что

$$\mu_s(A) = \mu(A) - \int_A X\, d\nu \geqslant 0$$

для любого $A \in \mathcal{A}$. Следовательно, μ_s – положительная мера, и нам необходимо показать, что существует такое множество N, что $\nu(N) = 0$ и

$\mu_s(A) = \mu(A \bigcap N)$ (о взаимной сингулярности мер μ и μ_s см.в примере 12.1).

Построим требуемое N, используя множество D в разложении Жордана-Хана для специально сконструированной меры. Рассмотрим последовательность мер

$$\Big\{ \mu_s(A) - \frac{1}{n}\,\nu\,(A),\ n \geqslant 1 \Big\},$$

и пусть $\{D_n,\ n \geqslant 1\}$ – соответствующая последовательность множеств в разложении Жордана-Хана для этих мер. Тогда (см.теорему 12.1) при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu_s(A \cap D_n) - \frac{1}{n}\,\nu\,(A \cap D_n) \geqslant 0, \quad \mu_s\,(A \cap D_n^c) - \frac{1}{n}\,\nu\,(A \cap D_n^c) \leqslant 0. \quad (12.6)$$

Рассмотрим также последовательность с.в.

$$\left\{ X + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{D_n},\ n \geqslant 1 \right\},$$

в которой X – максимальный элемент в $\mathcal{L}$. Если мы покажем, что

$$X + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{D_n} \in \mathcal{L}$$

при любом $n = 1, 2, \ldots$, то в силу максимальности элемента X индикатор $\mathbf{1}_{D_n}(\omega) = 0$ п.н. по мере ν, то есть $\nu(D_n) = 0$, откуда требуемое N можно будет определить как $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

Покажем сначала, что

$$X + \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1}_{D_n} \in \mathcal{L}.$$

Используя (12.6) и положительность меры μ_s, получаем

$$\int_A \Big(X + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{D_n} \Big)\, d\nu = \int_A X\, d\nu + \frac{1}{n} \int_{A \cap D_n} d\nu =$$

$$\int_A X\, d\nu + \frac{1}{n}\,\nu\,(A \cap D_n) \leqslant \int_A X\, d\nu + \mu_s\,(A \cap D_n) =$$

$$\mu(A) - \mu_s(A) + \mu_s(A \cap D_n) \leqslant \mu(A),$$

откуда следует требуемое включение. Но так как

$$\int_\Omega X\, d\nu \geqslant \int_\Omega \Big(X + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{D_n} \Big)\, d\nu,$$

то

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{D_n}\, d\nu \leqslant 0,$$

то есть $\nu(D_n) = 0$, и нам остается только показать, что $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ – искомое ν-нулевое множество, то есть доказать равенство $\mu_s(A) = \mu\,(\,A \bigcap N\,)$.

Для этого установим сначала сингулярность мер ν и μ_s, показав, что $\mu_s(N^c) = 0$. При любом $n \geqslant 1$ положительная мера

$$\mu_s(\,N^c\,) = \mu_s\Big(\Big(\bigcup_1^{\infty} D_n\Big)^c\Big) = \mu_s\Big(\bigcap_1^{\infty} D_n^c\Big) \leqslant \mu_s(\,D_n^c\,) \leqslant \frac{1}{n}\,\nu(\,D_n^{\,c}\,)$$

(см. второе неравенство в (12.6)). Устремляя n к бесконечности в правой части этого неравенства, получаем $\mu_s(N^c) = 0$.

Для доказательства основного равенства $\mu_s(A) = \mu\,(\,A \cap N\,)$ заметим, что

$$\mu_s(\,N\,) = \mu_s(\,N\,) + \mu_s(\,N^c\,) = \mu_s(\,\Omega\,).$$

Следовательно,

$$\mu_s(\,A\,) = \mu_s(\,A \cap \Omega\,) = \mu_s(\,A \cap N\,) =$$

$$\mu\,(\,A \cap N\,) - \int_{A \cap N} X\, d\nu = \mu\,(\,A \cap N\,),$$

ибо $0 \leqslant \nu\,(\,A \cap N\,) \leqslant \nu\,(\,N\,) = 0, \quad X \geqslant 0$, так что

$$\int_{A \cap N} X\, d\nu = 0.$$

Докажем теперь единственность разложения (12.5) меры μ на ν-непрерывную и ν-сингулярную составляющие. Пусть наряду с (12.5) существует еще одно разложение

$$\mu\,(\,A\,) = \int_A X'\, d\nu + \mu'_s(\,A\,).$$

Покажем, что тогда $X' = X$ п.н. по мере ν.

Допустим противное: $\nu\,\{\omega:\ X'(\omega) \neq X(\omega)\} > 0$. Поскольку $\mu = \mu_{\,c} + \mu_s = \mu'_{\,c} + \mu'_{\,s}$, то $\mu_{\,c} - \mu'_{\,c} = \mu'_{\,s} - \mu_{\,s}$. Кроме того, в силу максимальности

X в $\mathcal{L}$,

$$\mu'_s(\Omega) \,=\, -\int_\Omega X'\,d\nu \,+\, \mu(\Omega) \,>\, -\int_\Omega X\,d\nu \,+\, \mu(\Omega) \,=\, \mu_s(\Omega),$$

то есть $\mu'_s(\Omega) - \mu_s(\Omega) > 0$, если верно предположение

$$\nu\,\{\omega: \; X'(\omega) \neq X(\omega)\} > 0,$$

из которого следовало строгое неравенство

$$\int_\Omega (\,X - X'\,)\,d\nu \,>\, 0.$$

Мера $(\mu_c - \mu'_c) \ll \nu$, поэтому для любого N с $\nu(N) = 0$ мера $(\mu_c - \mu'_c)(N) = 0$. В то же время, в силу сингулярности мер $(\mu'_s - \mu_s)$ и ν, существует такое N_0 с $\nu(N_0) = 0$, что $(\mu'_s - \mu_s)(N_0^c) = 0$. Но тогда

$$0 = (\mu_c - \mu'_c)(N_0) \,=\, (\mu'_s - \mu_s)(N_0) \,=$$

$$(\mu'_s - \mu_s)(N_0) + (\mu'_s - \mu_s)(N_0^c) \,=\, (\mu'_s - \mu_s)(\Omega) \,>\, 0,$$

и мы приходим к противоречию. Следовательно, $\nu\{\omega: \; X'(\omega) \neq X(\omega)\} = 0$.

$\triangle$

Литература: М.Лоэв, стр.95-96, 140-142; Ж.Неве, стр. 151-158.

§13. **Функции плотности**

Частный случай теоремы 12.2 с мерой μ абсолютно непрерывной относительно ν играет особую роль в теории вероятностей.

Теорема 13.1 (Радона-Никодима). *Если σ-конечная мера μ абсолютно непрерывна относительно положительной σ-конечной меры ν, то существует такая д.с.в. X, что*

$$\mu(A) = \int_A X(\omega)\, d\nu(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{A} \tag{13.1}$$

Доказательство немедленно следует из разложения (12.5), ибо $\mu \ll \nu$ означает, что $\nu(N) = 0$ влечет $\mu(N) = 0$ и, следовательно, $\mu(A \bigcap N) = 0$.

$\triangle$

Определение 13.1. Если $\mu \ll \nu$, то с.в. $X(\omega)$ в представлении (13.1) называется *производной Радона-Никодима* меры μ по положительной мере ν и обозначается $d\mu/d\nu$. В частном случае, когда $\mu = P$ – вероятностной мере, положительная с.в. $p(\omega) = dP/d\nu,\ \omega \in \Omega$, называется *плотностью* (или *функцией плотности*, когда Ω – эвклидово пространство) распределения P по мере ν.

В общем курсе теории вероятностей мы рассматривали два типа распределений на борелевской прямой $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$ – дискретное и непрерывное. Дискретное распределение P_d определяется ступенчатой функцией распределения $F_d(x)$, возрастающей скачками в не более чем счетном числе точек; это распределение абсолютно непрерывно относительно считающей меры μ_d, приписывающей меру 1 каждой точке $x_k,\ k = 1, 2, \ldots$ роста F_d (в изучаемых нами дискретных распределениях все точки роста были целочисленными, поэтому термин „считающая мера“ следует понимать в последующем несколько шире, чем ранее). Для дискретных распределений

$$P_d(A) = \int_A f_d(x)\, d\mu_d(x) = \sum_{x \in A} f_d(x), \quad \forall A \in \mathcal{R},$$

и $f_d(x) = dP_d/d\mu_d(x)$ – функция плотности распределения P_d по (обобщенной) считающей мере μ_d.

Непрерывный тип распределения P_c определяется непрерывной функцией распределения $F_c(x)$, обладающей почти всюду (по мере Лебега) на R производной $dF_c(x)/dx = f_c(x)$, которая есть не что иное, как плотность распределения P_c по мере Лебега μ_c на $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$, поскольку

$$P_c(A) = \int_A f_c(x)\, d\mu_c(x) = \int_A f_c(x)\, dx, \quad \forall\, A \in \mathcal{R}$$

Оказывается существует еще третий тип распределений P_s на борелевской прямой, которые сингулярны по отношению к мере Лебега μ_c.

Предложение 13.1. *Любая функция распределения F на борелевской прямой $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$ представима в виде суммы трех неубывающих ограниченных функций: $F = G_d + G_{ac} + G_s$, где G_d – ступенчатая функция, имеющая не более чем счетное множество скачков; G_{ac} – функция, определяющая на $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$ абсолютно непрерывную относительно меры Лебега μ_c меру*

$$\mu_{ac}(A) = \int_A g(x)\, dx, \quad \forall\, A \in \mathcal{R},$$

с $g(x) = dG_{ac}/dx$ почти всюду по мере μ_c; G_s – непрерывная функция, все точки роста которой принадлежат некоторому множеству с нулевой лебеговой мерой, так что почти всюду по μ_c производная $dG_s/dx = 0$, и G_s определяет сингулярную относительно μ_c меру μ_s на $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$.

Доказательство. Любая функция распределения имеет не более чем счетное множество $\{x_i,\ i \in I\}$ точек разрыва (лемма 11.1), причем для любого интервала $[\,a; b\,) \subset \mathrm{R}$

$$\sum_{i:\ a \leqslant x_i < b} p\,(x_i) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant 1, \tag{13.2}$$

где $p\,(x_i) = F(x_i+0) - F(x_i)$. Введем неубывающую, непрерывную слева, ограниченную, ступенчатую функцию

$$G_d(x) = \sum_{i:\ x_i < x} p(x_i),\ x \in \mathrm{R},$$

и положим $G_c = F - G_d$. При $x < x'$

$$G_c(x') - G_c(x) = F(x') - F(x) - \sum_{i:\ x \leqslant x_i < x'} p(x_i) =$$

$$F(x') - F(x+0) - \sum_{i:\ x < x_i < x'} p(x_i) \geqslant 0 \qquad (13.3)$$

(см.(13.2)), так что G_c не убывает и ограничена. Кроме того, она непрерывна в любой точке $x \in \mathrm{R}$, ибо при $x' \downarrow x$ (то есть при $x' = x + 0$) разность

$$G_c(x+0) - G_c(x) = F(x+0) - F(x+0) - 0 = 0,$$

откуда следует непрерывность справа, а при $x \uparrow x'$ (то есть при $x = x' - 0$) – аналогичная ситуация:

$$G_c(x') - G_c(x'-0) = F(x') - F(x') - 0 = 0,$$

так что G_c непрерывна слева.

Итак, если F имеет точки разрыва (скачки), то функция $G_d(x)/\sup_x G_d(x)$ есть функция распределения, которая однозначно (см. предложение 6.3) определяет дискретное распределение P_d на $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$, или, что то же, функция $G_d(x)$ определяет посредством равенства

$$\nu_d\{(-\infty; x)\} = G_d(x) - G_d(-\infty) = G_d(x)$$

меру ν_d на $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$, абсолютно непрерывную относительно считающей меры μ_d.

Аналогично непрерывная функция $G_c(x) = F(x) - G_d(x)$ определяет некоторую меру ν_c на $(\mathrm{R}, \mathcal{R})$. Применяя к ней теорему Лебега о разложении ν_c относительно меры Лебега (в (12.5) $\nu = \mu_c$, так что $d\nu = dx$), получаем $\nu_c = \mu_{ac} + \mu_s$, где

$$\mu_{ac}(A) = \int_A g(x)dx, \quad \forall A \in \mathcal{R},$$

$g(x)$ – положительная измеримая функция и $\mu_s(N^c) = 0$ на дополнении некоторого множества N с мерой Лебега $\mu_c(N) = 0$. Следовательно (предложение 6.3), существуют такие неубывающие ограниченные функции G_{ac} и G_s, что $G_c = G_{ac} + G_s$,

$$G_{ac}(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt,\ g(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathsf{R},$$

и G_s является непрерывной функцией, все точки роста которой лежат в N.

△

Из доказательства этого предложения легко понять, что сингулярные функции распределения вряд ли удастся представить в некоторой замкнутой аналитической форме, ибо это функции, производные от которых почти всюду равны нулю, а точки их роста образуют сложные множества в R. Чтобы наглядно представить себе феномен сингулярности, рассмотрим

Пример 13.1. (кривая Кантора). Пусть функция $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = 1$ при $x > 1$, а на отрезке $[0;1]$ F определяется следующим образом.

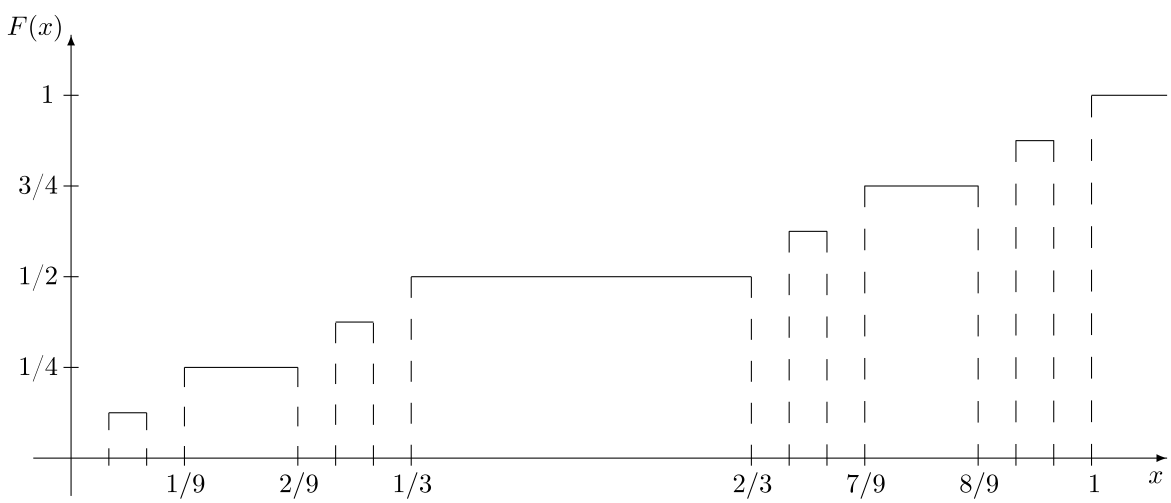


Рис. 13.1

Отрезок $[0;1]$ разбивается на три равные части $[0;\ 1/3\,)$, $[\,1/3;\ 2/3\,)$, $[\,2/3;\ 1\,]$. На внутреннем сегменте полагаем $F(x) = 1/2$. Оба оставшихся сегмента снова разбиваются на три равные части, и на внутренних сегментах $F(x)$ полагается равной соответственно $1/4$ и $3/4$. Каждый из оставшихся сегментов снова делится на три равные части и на внутренних сегментах $F(x)$ определяется как постоянная, равная среднему арифметическому между соседними, уже определенными значениями $F(x)$ и т.д.

Нетрудно видеть, что построенная таким образом функция будет непрерывной и суммарная длина внутренних сегментов, на которых $F(x)$ постоянна, равна

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1}=1,$$

так что $F(x)$ растет на множестве меры 0, но без скачков.

В приложениях теории вероятностей и ряде задач математической статистики часто рассматриваются семейства распределений $\mathcal{P}=\{P(\,\cdot\,|\,\theta),\ \theta\in\Theta\}$, заданных на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{A})$ и индексируемых абстрактным параметром θ с областью значений (так называемым *параметрическим пространством*) Θ. Такие семейства обычно определяются плотностью $p\,(\omega\,|\,\theta)$, зависящей от параметра θ и являющейся при каждом фиксированном $\theta\in\Theta$ производной Радона-Никодима по одной и той же мере μ, каково бы ни было $\theta\in\Theta$.

Определение 13.2. Семейство $\mathcal{P}$ *доминировано* σ-конечной мерой μ, если $P(\,\cdot\,|\,\theta)\ll\mu$ при любом $\theta\in\Theta$. Семейство $\mathcal{P}$ называется *доминированным*, если существует σ-конечная мера μ, доминирующая $\mathcal{P}$.

Для доминированных семейств существует определенная с точностью до μ-эквивалентности функция $P(\omega\,|\,\theta)=dP(\,\cdot\,|\,\theta)/d\mu$ двух переменных ω и θ, являющаяся при каждом $\theta(\in\Theta)$ функцией плотности распределения $P(\,\cdot\,|\,\theta)$. Следующее предложение устанавливает достаточное условие доминируемости семейств распределений.

Предложение 13.2. 1^0. *Если существует доминирующая семейс-*

тво $\mathcal{P}$ положительная σ-конечная мера μ, то всегда существует конечная доминирующая семейство $\mathcal{P}$ мера. 2^0. Семейство $\mathcal{P}$ доминировано, если существует такое счетное подмножество $\{\theta_i,\ i \in I\} \subset \Theta$, что для любых $\theta \in \Theta$ и $\varepsilon > 0$ найдется $i_0 \in I$, для которого

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} |\, P(A\,|\,\theta) - P(A\,|\,\theta_{i_0})\,| < \varepsilon, \tag{13.4}$$

то есть в $\mathcal{P}$ существует счетная ε-сеть в смысле равномерной метрики на $\mathcal{P}$.

Доказательство. 1^0. Если μ – положительная σ-конечная мера, то существует такое счетное разбиение пространства $\Omega = \sum_1^n A_n$, что $0 < \mu(A_n) < \infty$ при любом $n = 1, 2, \cdots$. Введем положительную меру

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap A_n)}{2^n \mu(A_n)},\ A \in \mathcal{A}.$$

Так как $0 < \mu(A_n) < \infty$, то

$$0 \leqslant \mu(A \cap A_n)/\mu(A_n) \leqslant 1,$$

а так как ряд

$$\sum_1^{\infty} 2^{-n} = 1,$$

то $0 \leqslant \mu^*(A) \leqslant 1$, то есть μ^* – ограниченная мера. Кроме того, если $\mu^*(N) = 0$, то $\mu(N) = 0$, откуда $P(N\,|\,\theta) = 0$ при любом $\theta \in \Theta$, то есть μ^* доминирует $\mathcal{P}$.

2^0. При выполнении условия данного предложения в качестве доминирующей меры можно взять меру

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} 2^{-i} \times P(A\,|\,\theta_i).$$

Действительно, если $\mu(N) = 0$, то $P(N\,|\,\theta_i) = 0$ при любых $i \in I$, и при любом $\theta \in \Theta$ существует такое $i_0 \in I$, что

$$P(N\,|\,\theta) = |\, P(N\,|\,\theta) - P(N\,|\,\theta_{i_0})\,| < \varepsilon,$$

где ε – любое сколь угодно малое число. Следовательно, $\mu(N) = 0$ влечет $P(N\,|\,\theta) = 0$, то есть μ^* доминирует $\mathcal{P}$.

$\triangle$

Если Θ – эвклидово пространство, то, в силу наличия в Θ счетной ε-сети, проверка условия (13.4) не представляет труда. Кроме того, при построении вероятностной модели обычно оперируют функциями плотности, так что в итоге получается заведомо доминированное семейство распределений.

Мы завершаем этот параграф правилом перехода от одной доминирующей меры к другой при вычислении функции плотности.

Предложение 13.3. *Пусть μ и λ – две σ-конечные меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Если $\lambda \ll \mu$, а с.в. X интегрируема по мере λ, то*

$$\int_A X d\lambda = \int_A X \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{13.5}$$

Доказательство. Достаточно показать справедливость (13.5) для индикаторов $X(\omega) = 1_B(\omega)$, $B \in \mathcal{A}$. Тогда, в силу линейности интеграла Лебега, утверждение будет справедливо для любой ст.с.в., а в силу свойства монотонной сходимости – для любого предела монотонно возрастающей последовательности положительных ст.с.в., то есть для любой положительной д.с.в. Справедливость утверждения для любой д.с.в. будет следовать из представления $X = X^+ - X^-$.

Итак, покажем, что (13.5) имеет место для индикаторов. Действительно,

$$\int_A 1_B(\omega) d\lambda(\omega) = \int_{A \cap B} d\lambda(\omega) = \lambda(A \cap B),$$

и в силу теоремы 13.1 Радона-Никодима

$$\lambda(A \cap B) = \int_{A \cap B} \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu(\omega) = \int_A 1_B(\omega) \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu(\omega).$$

$\triangle$

Литература: М.Лоэв, стр.142-143, 188-191;

А.А.Боровков, стр.46-47.

§14. Условное математическое ожидание

В элементарной теории вероятностей условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, определяется формулой

$$P(A\,|\,B) = P(A \cap B)/P(B), \tag{14.1}$$

и, следовательно, условная вероятность имеет смысл лишь при $P(B) \neq 0$. Формула (14.1) была установлена Байесом в XVIII веке, и не одно поколение математиков пыталось дать корректное определение условной вероятности, если $P(B) = 0$. Наиболее остроумным следует признать следующее рассуждение: $P(A\,|\,B) = 0$ при $P(B) = 0$, поскольку невозможное событие не может влечь за собой что-либо возможное. Естественно, такого рода доводы не имеют под собой математической основы, и вопрос о корректном определении условной вероятности (и условного математического ожидания) оставался открытым до 20-х годов прошлого столетия.

Развитие математической статистики (задачи регрессионного анализа) и теории случайных процессов (марковские процессы, прогноз и фильтрация случайных процессов) во многом было затруднено из-за отсутствия достаточно общего и строгого определения условной вероятности и соответсвующего условного среднего. Такое определение было дано Андреем Николаевичем Колмогоровым, причем общая конструкция условного математического ожидания существенно опиралась на теорему Радона-Никодима. Рассуждения, положенные в основу этого на первый взгляд крайне формального и неконструктивного определения, выглядят следующим образом.

Пусть, как и прежде, B – фиксированное событие с $P(B) \neq 0$. Рассмотрим функцию множеств $P_B(A) = P(A\,|\,B) = P(A \cap B)/P(B)$, $A \in \mathcal{A}$. Эта функция, как отображение σ-алгебры $\mathcal{A}$ в отрезок $[0;1]$, является вероятностью, поскольку $P_B(\Omega) = 1$ и

$$P_B\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big) = P\Big(\sum_{i\in I} A_i \cap B\Big)/P(B) = \sum_{i\in I} P_B(A_i)$$

для любого не более чем счетного семейства $\{A_i,\ i \in I\}$ несовместных событий. Так как $P_B(\,\cdot\,)$ – распределение вероятностей на $\mathcal{A}$, то относительно этого распределения можно вычислять математическое ожидание от любой д.с.в. X.

Определение 14.1. *Условное математическое ожидание* (у.м.о.) с.в. X *относительно ненулевого события* B определяется формулой

$$E_B X = \int_\Omega X(\omega)\, dP_B(\omega). \tag{14.2}$$

Так как $P_B(B^c) = P(\,B^c \cap B\,)/P(B) = 0$, то

$$E_B X = \int_B X\, dP_B + \int_{B^c} X\, dP_B = \int_B X\, dP_B = \frac{1}{P(B)} \int_B X\, dP, \tag{14.3}$$

и именно так определяется у.м.о. в элементарной теории вероятностей при $P(B) \neq 0$; равенство (14.3) только устанавливает эквивалентность определений (14.2) и (14.3).

Если принять (14.3) за аксиоматическое определение у.м.о., то условная вероятность $P(A\,|\,B)$ есть у.м.о. от индикатора $\mathbf{1}_A(\omega)$, откуда немедленно следует знакомая формула (14.1):

$$P(A\,|\,B) = E_B \mathbf{1}_A = \frac{1}{P(B)} \int_B \mathbf{1}_A dP = P(A \cap B)/P(B).$$

Для того чтобы дальше продвинуться в построении у.м.о., будем интерпретировать его как значение некоторой функции на Ω: число $E_B X$ будем приписывать каждому $\omega \in B$, а на дополнении B^c события B придадим этой функции значение $E_{B^c} X$. Таким образом, на измеримом пространстве $(\,\Omega,\, \mathcal{B}\,)$, где $\mathcal{B} = \{\,\emptyset,\, \Omega,\, B,\, B^c\,\}$ – алгебра, порожденная событием B, вводится случайная величина

$$E^{\mathcal{B}} X = \begin{cases} E_B X, & \text{если } \omega \in B \\ E_{B^c} X, & \text{если } \omega \in B^c \end{cases}. \tag{14.4}$$

Если $P(B) = 0$ (или $P(B^c) = 0$), то формула (14.3), определяющая $E_B X$ (или, соответственно, $E_{B^c} X$) не работает, но поскольку $E^{\mathcal{B}} X$ есть случайная величина, то на P-нулевых подмножествах Ω она может быть определена произвольным образом. Итак, если отказаться от концепции у.м.о. относительно события B как числовой характеристики с.в. X, а рассматривать $E_B X$ как значение функции $E^{\mathcal{B}}X$ (д.с.в.) на Ω при $\omega \in B$, то можно ввести корректное определение у.м.о., которое при $P(B) \neq 0$ совпадает с определением 14.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. *Условное математическое ожидание с. в. относительно алгебры $\mathcal{B}$, порожденной событием* $B\,(\in \mathcal{A})$, есть д.с.в. $E^{\mathcal{B}}X$, определяемая с точностью до P-эквивалентности формулой (14.4).

Новая концепция у.м.о., данная в определении 14.2, позволяет нам рассмотреть более общую конструкцию у.м.о. Пусть $\{B_i, i \in I\}(\subset \mathcal{A})$ – некоторое не более чем счетное разбиение измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ и $\mathcal{B}$ – подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, порожденная этим разбиением. Рассмотрим ст.с.в.

$$E^{\mathcal{B}}X = \sum_{i \in I} (\, E_{B_i} X \,) \mathbf{1}_{B_i}(\omega).$$

Если ω принадлежит некоторому B_i с $P(B_i) = 0$, то $E^{\mathcal{B}}X$ не определена, поскольку (14.3) с $B = B_i$ не применима для вычисления $E_{B_i}X$. Но, как и в предыдущем случае, с.в. $E^{\mathcal{B}}X$ на P-нулевых множествах может быть задана произвольным образом, например, мы можем положить $E^{\mathcal{B}}X = 0$, если $\omega \in B_i$ с $P(B_i) = 0$. Таким образом, мы приходим к более общему, чем 14.2 определению у.м.о.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.3. *Условным математическим ожиданием с. в. X относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$, порожденной счетным разбиением* $\{B_i,\ i \in I\}$ измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$, называется д.с.в.

$$E^{\mathcal{B}}X = \sum_{i \in I} (E_{B_i} X)\, \mathbf{1}_{B_i}(\omega) = \sum_{i \in I} \left[\, \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X \, dP \, \right] \mathbf{1}_{B_i}(\omega),$$

причем, если $P(B_i) = 0$ для некоторого $i \in I$, то $E_{B_i}X$ определяется произвольным образом. *Условная вероятность* события $A \in \mathcal{A}$ *отно-*

сительно σ-алгебры $\mathcal{B}$, порожденной счетным разбиением $(\Omega, \mathcal{A})$, есть д.с.в. $P^{\mathcal{B}}(A) = E^{\mathcal{B}}\mathbf{1}_A$.

Мы вплотную приблизились к общему определению у.м.о. относительно произвольной σ-подалгебры $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$. Последний шаг связан с некоторой детализацией и разъяснением термина у.м.о. относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$. Дело в том, что определение 14.3 по существу определяет $E_B X$ при любых $B \in \mathcal{B}$, то есть для любых событий вида $B = \sum\limits_J B_j$, где J – подмножество индексов из I. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\int_B X\,dP = P(B)\,E_B X = \int_{\sum\limits_J B_j} X\,dP = \sum_J \int_{B_j} X\,dP =$$

$$\sum_J P(B_j)\,E_{B_j} X = \sum_J (\,E\,\mathbf{1}_{B_j}\,)\,E_{B_j} X = E\sum_J (E_{B_j} X)\,\mathbf{1}_{B_j} = \tag{14.5}$$

$$E\,\mathbf{1}_B \sum_I (\,E_{B_i} X\,)\,\mathbf{1}_{B_i} = E(\mathbf{1}_B\,E^{\mathcal{B}} X) =$$

$$\int_\Omega \mathbf{1}_B\,E^{\mathcal{B}} X\,dP_{\mathcal{B}} = \int_B E^{\mathcal{B}} X\,dP_{\mathcal{B}}.$$

Здесь $P_{\mathcal{B}}$ – *сужение* вероятности P на σ-подалгебру $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$, то есть $P_{\mathcal{B}}(A) = P(A)$ при $A \in \mathcal{B}$, и если $A \notin \mathcal{B}$, то $P_{\mathcal{B}}(A)$ не определена. Таким образом, у.м.о. $E^{\mathcal{B}}X$ как ст.с.в. постоянна на элементах B_i разбиения $(\,\Omega,\,\mathcal{A}\,)$ и удовлетворяет следующему уравнению (см.начало и конец цепочки равенств (14.5)):

$$\int_B E^{\mathcal{B}} X\,dP_{\mathcal{B}} = \int_B X dP, \quad \forall\,B \in \mathcal{B}.$$

Замечательно то, что это уравнение с переменным пределом интегрирования $B \in \mathcal{B}$ имеет единственное с точностью до $P_{\mathcal{B}}$-эквивалентности решение $E^{\mathcal{B}}X$ для любой фиксированной подалгебры $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$. Действительно,

$$\mu(B) = \int_B X dP,\ B \in \mathcal{B},$$

есть мера на $\mathcal{B}$ (см.пример 12.2), абсолютно непрерывная относительно сужения $P_{\mathcal{B}}$ меры P на σ-алгебру $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}}(B) = P(B) = 0 \Longrightarrow \mu(B) = 0$, если $B \in \mathcal{B}$. Следовательно, в силу теоремы Радона-Никодима 13.1, существует такая единственная с точностью до $P_{\mathcal{B}}$-эквивалентности с.в. $Y(\omega)$, что

$$\mu(B) = \int_B Y(\omega) dP_{\mathcal{B}}(\omega).$$

Эта с.в. Y и есть $E^{\mathcal{B}}X$ в уравнении (14.5).

Итак, мы пришли к следующему дискриптивному (описательному) определению у.м.о.

Определение 14.4. *Условным математическим ожиданием* $E^{\mathcal{B}}X$ *с.в.* X *относительно* σ*-подалгебры* $\mathcal{B}$ σ*-алгебры* $\mathcal{A}$ называется любая $\mathcal{B}$-измеримая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\int_B E^{\mathcal{B}}X \, dP_{\mathcal{B}} = \int_B X \, dP,$$

каково бы не было $B \in \mathcal{B}$. *Условной вероятностью* события $A (\in \mathcal{A})$ *относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{B}$ называется любая $\mathcal{B}$-измеримая функция $P^{\mathcal{B}}(A)$, удовлетворяющая уравнению

$$\int_B P^{\mathcal{B}}(A) dP_{\mathcal{B}} = \int_B \mathbf{1}_A(\omega) \, dP(\omega) = P(\, A \cap B \,), \; \forall \, B \in \mathcal{B}. \tag{14.6}$$

В виду крайней неконструктивности данного определения возникает вопрос, нельзя ли определить некоторый вариант условной вероятности $P^{\mathcal{B}}(A) = P_{\omega}^{\mathcal{B}}(A)$ из класса эквивалентных с.в., удовлетворяющих (14.6), и вычислять у.м.о. $E^{\mathcal{B}}X = E_{\omega}^{\mathcal{B}}X$ с помощью обычной операции усреднения X по распределению $P_{\omega}^{\mathcal{B}}(\,\cdot\,)$, то есть вычислять у.м.о. по формуле

$$E_{\omega}^{\mathcal{B}}X = \int_{\Omega} X \, dP_{\omega}^{\mathcal{B}}$$

(индекс ω указывает, что с.в. $E_{\omega}^{\mathcal{B}}X$ и $P_{\omega}^{\mathcal{B}}(A)$ есть конкретные измеримые функции от ω на $(\,\Omega, \mathcal{A}\,)$).

Определение 14.5. Условная вероятность $P_{\omega}^{\mathcal{B}}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ называется *регулярной*, если существует такая функция $P_\omega^{\mathcal{B}}(A),\ A\in\mathcal{A},\ \omega\in\Omega$ на произведении пространств $\Omega\times\mathcal{A}$, что

(1) при каждом фиксированном $A\in\mathcal{A}$ функция $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)$ есть $\mathcal{B}$-измеримая функция $\omega(\in\Omega)$;

(2) при каждом фиксированном $\omega\in\Omega$ функция множеств $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)$, $A\in\mathcal{A}$, есть распределение вероятностей на σ-алгебре $\mathcal{A}$;

(3) для любых $A\in\mathcal{A}$ и $B\in\mathcal{B}$

$$\int_B P_\omega^{\mathcal{B}}(A)\,dP_{\mathcal{B}} = P(\,A\cap B\,).$$

Итак, для регулярных условных вероятностей

$$E_\omega^{\mathcal{B}}X = \int_\Omega X\,dP_\omega^{\mathcal{B}},$$

и остается выяснить условия, при которых существуют такие условные вероятности.

Предложение 14.1. *Если $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра, порожденная не более чем счетным разбиением $\{B_i,\ i\in I\}$ измеримого пространства $(\Omega,\mathcal{A})$, то условная вероятность $P^{\mathcal{B}}(\,\cdot\,)$ регулярна.*

Доказательство. Предлагается следующий вариант $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)$ условной вероятности $P^{\mathcal{B}}(A)$: если $P(B_i)\neq 0$, то $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)=P(\,A\cap B_i\,)/P(B_i)$ при $\omega\in B_i$, если же $P(B_i)=0$, то $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)=P(A),\ \omega\in B_i$. Легко проверить выполнимость условий (1)–(3) определения 14.5 для с.в. $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)$, поскольку множество тех ω, на которых $P_\omega^{\mathcal{B}}(A)=P(A)$, имеет вероятность P нуль как объединение не более чем счетного числа P-нулевых событий (для таких B равенство в условии (3) превращается в тождество 0=0).

$\triangle$

Пример 14.1. Пусть $\Omega=[\,0;\,1\,]$ и P – равномерное распределение на борелевской σ-алгебре подмножеств отрезка $[\,0;1\,]$, то есть

$$P(A)=\int_A d\omega,\ \forall\, A\in\mathcal{A}.$$

Вычислим условное м.о. с.в. $X(\omega) = \omega$ относительно σ-алгебры, порожденной разбиением $B_1 = [\,0;\, 1/2\,)$, $B_2 = \{\,1/2\,\}$, $B_3 = (\,1/2;\, 1\,]$, построив конкретный вариант условной вероятности $P^{\mathcal{B}}(A)$.

Поскольку $P(B_2) = 0$, то, согласно доказательству предложения 14.1, полагаем $P_{\omega}^{\mathcal{B}}(A) = P(A)$ при любом $A \in \mathcal{A}$, как только $\omega = 1/2$. Для $\omega \in B_i$ с $i = 1$ или 3 полагаем

$$P_{\omega}^{\mathcal{B}}(A) = \frac{P(\,A \cap B_i\,)}{P(B_i)} = \frac{1}{P(B_i)} \int_{A \cap B_i} dx = \frac{\mu_c(\,A \cap B_i\,)}{P(B_i)}.$$

Тогда при $\omega = 1/2$

$$E_{\omega}^{\mathcal{B}} X = \int_{\{1/2\}} x\,dx = 0,$$

как интеграл по множеству лебеговой меры нуль. Если $\omega \in B_1$, то

$$E_{\omega}^{\mathcal{B}} X = 2 \int_0^{1/2} x\,dx = 1/4,$$

и если $\omega \in B_3$, то

$$E_{\omega}^{\mathcal{B}} X = 2 \int_{1/2}^{1} x dx = 3/4.$$

Что касается более общих случаев существования регулярных условных вероятностей, то они в основном относятся к σ-алгебрам, порожденным случайными величинами на $(\,\Omega,\, \mathcal{A}\,)$. Пусть $X = X(\omega)$ и $Y = Y(\omega)$ – две с.в. на вероятностном пространстве $(\,\Omega,\, \mathcal{A},\, P\,)$ и $\mathcal{B}_Y$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, порожденная отображением Y.

Определение 14.6. *У.м.о. действительной с.в.* X *относительно д.с.в.* Y есть у.м.о. X относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_Y$, порожденной отображением $Y = Y(\omega)$.

У.м.о. X относительно с.в. Y обычно обозначается $E(X\,|\,Y)$. Так как у.м.о. является с.в., то можно говорить о ее реализации, которая трактуется как среднее значение с.в. X при условии, что с.в. Y приняла значение y; реализация $E(X\,|\,Y)$ при Y=y обозначается $E\,(\,X\,|\,Y = y\,)$.

Для вычисления $E(X \,|\, Y)$ достаточно найти совместное распределение с.в. X и Y и, таким образом, свести задачу построения регулярных условных вероятностей к построению условных функций распределений. В монографии М.Лоэва можно найти доказательство существования таких функций для любых конечных с.в.; конкретные построения для непрерывных и дискретных распределений проводились нами в общем курсе теории вероятностей.

Изучим свойства у.м.о. как д.с.в. на $(\Omega, \mathcal{B})$.

Предложение 14.2. *Условное математическое ожидание обладает следующими свойствами.*

(1) $E(E^{\mathcal{B}}X) = EX$.

(2) *Если* $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ *или* X *есть* $\mathcal{B}$*-измеримая функция, то* $E^{\mathcal{B}} \underset{\text{п.н.}}{=} X$.

(3) *Если* $X \underset{\text{п.н.}}{\geqslant} Y$*, то* $E^{\mathcal{B}}X \underset{\text{п.н.}}{\geqslant} E^{\mathcal{B}}Y$ *(свойство монотонности).*

(4) $E^{\mathcal{B}}(c_1X + c_2Y) \underset{\text{п.н.}}{=} c_1\, E^{\mathcal{B}}X + c_2\, E^{\mathcal{B}}Y$; *в частности,*

$$E^{\mathcal{B}}c \underset{\text{п.н.}}{=} c, \quad P^{\mathcal{B}}(\Omega) \underset{\text{п.н.}}{=} 1, \quad P^{\mathcal{B}}(\emptyset) \underset{\text{п.н.}}{=} 0, \quad P^{\mathcal{B}}(A) \underset{\text{п.н.}}{\geqslant} 0.$$

(5) *Для у.м.о. справедливы все утверждения о переходе к пределу под знаком* $E^{\mathcal{B}}$*, в частности, теорема Фату-Лебега: если последовательность с.в.* $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ *сходится и существует такая интегрируемая с.в.* U*, что* $|\, X_n \,| \leqslant U$ *при любых* $n = 1, 2, \ldots,$ *то*

$$\lim_{n\to\infty} E^{\mathcal{B}}X_n \underset{\text{п.н.}}{=} E^{\mathcal{B}} \lim_{n\to\infty} X_n.$$

(6) *На любом атоме* B σ*-алгебры* $\mathcal{B}$ *с* $P(B) \neq 0$ *у.м.о.*

$$E^{\mathcal{B}}X \underset{\text{п.н.}}{=} \frac{1}{P(B)} \int_B X\, dP, \quad \forall\, \omega \in B.$$

В частности, если $\mathcal{B} = \{\, \emptyset,\, \Omega \,\}$*, то* $E^{\mathcal{B}}X \underset{\text{п.н.}}{=} E\,X$.

(7) *У.м.о.* $E(X \,|\, Y)$ *относительно с.в.* Y *зависит от* ω *только через функцию* $Y(\omega)$*, то есть* $E\,(\, X \,|\, Y \,) = g(Y(\omega))$.

(8) *Если* X *есть* $\mathcal{B}$*-измеримая функция, то для любой интегрируемой д.с.в.* Y *у.м.о.* $E^{\mathcal{B}}(\,X\,Y\,) = X\,E^{\mathcal{B}}Y$.

(9) *Если* $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, *то*

$$E^{\mathcal{B}}(E^{\mathcal{B}'}X) = E^{\mathcal{B}}X = E^{\mathcal{B}'}(E^{\mathcal{B}}X).$$

В частности, если X' *есть* $\mathcal{B}'$*-измеримая функция, то*

$$E^{\mathcal{B}}(X\,X') = E^{\mathcal{B}}(X'\,E^{\mathcal{B}'}X),$$

то есть "условное усреднение" можно производить последовательно, и при последующем усреднении по более тонкой σ*-алгебре сохраняется предыдущий результат.*

Доказательство всех утверждений (1) – (9) следует непосредственно из определения у.м.о. как решения уравнения

$$\int_B E^{\mathcal{B}}X\,dP_{\mathcal{B}} = \int_B X\,dP,\ \forall\,B \in \mathcal{B}. \tag{14.7}$$

(1) По определению математического ожидания

$$E(E^{\mathcal{B}}X) = \int_\Omega (E^{\mathcal{B}}X)\,dP = \int_\Omega E^{\mathcal{B}}X\,dP_{\mathcal{B}},$$

так как Ω принадлежит любой σ-алгебре, в том числе и рассматриваемой σ-алгебре $\mathcal{B}$. Далее, по определению у.м.о. с $B = \Omega$ (см.(14.7))

$$\int_\Omega E^{\mathcal{B}}X\,dP_{\mathcal{B}} = \int_\Omega X\,dP = E\,X,$$

что вместе с предыдущей цепочкой равенств дает $E(E^{\mathcal{B}}X) = E\,X$.

(2) Любая $\mathcal{B}$-измеримая функция постоянна на атомах σ-алгебры $\mathcal{B}$. Так как $E^{\mathcal{B}}X$ и X суть $\mathcal{B}$-измеримые функции, то для любого атома B по определению у.м.о.

$$\int_B (E^{\mathcal{B}}X)\,dP_{\mathcal{B}} = (E^{\mathcal{B}}X)_B P(B) = \int_B X\,dP = X_B P(B), \tag{14.8}$$

где $(E^{\mathcal{B}}X)_B$ и X_B – значения соответствующих функций $E^{\mathcal{B}}_\omega X$ и $X(\omega)$ на множестве B. Из (14.8) вытекает, что эти значения совпадают и, таким образом, при $\forall\omega \in \Omega$ у.м.о. $E^{\mathcal{B}}X \underset{\text{п.н.}}{=} X$.

(3) Если $X \underset{\text{п.н.}}{\geqslant} Y$, то $\mathbf{1}_B X \geqslant \mathbf{1}_B Y$ при $\forall\, B \in \mathcal{B}$, откуда в силу монотонности интеграла Лебега

$$\int_B X\, dP \geqslant \int_B Y\, dP.$$

Следовательно (см.(14.7)),

$$\int_B E^{\mathcal{B}} X\, dP_{\mathcal{B}} \geqslant \int_B E^{\mathcal{B}} Y\, dP_{\mathcal{B}}.$$

Последнее неравенство при любых $B \in \mathcal{B}$ возможно лишь в случае $E^{\mathcal{B}} X \underset{\text{п.н.}}{\geqslant} E^{\mathcal{B}} Y$, поскольку противоположное неравенство при некотором B с $P(B) \neq 0$ противоречит свойству монотонности интеграла Лебега.

(4) Линейность у.м.о. непосредственно следует из (14.7) и линейности интеграла Лебега.

(5) Все утверждения о сходимости для интеграла Лебега выполняются для правой части (14.7), откуда, используя свойство монотонности (3), легко получить аналогичное утверждение для у.м.о.

(6) У.м.о., как $\mathcal{B}$-измеримая функция, постоянна на атомах σ-алгебры $\mathcal{B}$. Следовательно, если B – атом, то

$$\int_B X\, dP = \int_B E^{\mathcal{B}} X\, dP_{\mathcal{B}} \underset{\text{п.н.}}{=} P(B)\, E^{\mathcal{B}} X.$$

В частности, если $\mathcal{B} = (\,\Omega,\, \emptyset\,)$, то $E^{\mathcal{B}} X$ п.н. постоянно при любом $\omega \in \Omega$, откуда

$$E\, X = \int_\Omega X\, dP = \int_\Omega E^{\mathcal{B}} X\, dP_{\mathcal{B}} \underset{\text{п.н.}}{=} P(\Omega)\, E^{\mathcal{B}} X = E^{\mathcal{B}} X.$$

(7) В силу только что доказанного у.м.о. $E(\,X \,|\, Y\,) = E^{\mathcal{B}_Y} X$ постоянно на атомах σ-алгебры $\mathcal{B}_Y$, но и с.в. Y также постоянна на тех же атомах, что, очевидно, эквивалентно утверждению (7) данного предложения (см. в связи с этим предложение 8.5).

(8) Равенство $E^{\mathcal{B}}(X\,Y) = X\, E^{\mathcal{B}} Y$ достаточно доказать для $\mathcal{B}$-измеримой функции $X(\omega) = 1_{B'}(\omega)$ с множеством $B' \in \mathcal{B}$ (используется стандартная схема доказательства равенств между интегралами Лебега).

Применяя несколько раз формулу (14.7) для функции $\mathbf{1}_{\mathcal{B}'}Y$, получаем

$$\int_B E^{\mathcal{B}}(\,\mathbf{1}_{B'}Y\,)\,dP_{\mathcal{B}} = \int_B \mathbf{1}_{B'}Y\,dP = \int_{B\cap B'} Y\,dP =$$
$$\int_{B\cap B'} E^{\mathcal{B}}Y\,dP_{\mathcal{B}} = \int_B \mathbf{1}_{B'}E^{\mathcal{B}}Y\,dP_{\mathcal{B}}, \quad \forall\, B \in \mathcal{B}.$$

то есть при $B' \in \mathcal{B}$ у.м.о.

$$E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{B'}Y) = 1_{B'}E^{\mathcal{B}}Y.$$

(9) Если $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, то $P_{\mathcal{B}}$ есть сужение не только вероятности P, но и вероятности $P_{\mathcal{B}'}$, поэтому для любого $B \in \mathcal{B}$, применяя несколько раз формулу (14.7), получаем

$$\int_B E^{\mathcal{B}}(E^{\mathcal{B}'}X)\,dP_{\mathcal{B}} = \int_B E^{\mathcal{B}'}X\,dP_{\mathcal{B}'} = \int_B X\,dP = \int_B E^{\mathcal{B}}X\,dP_{\mathcal{B}}, \forall B,$$

откуда $E^{\mathcal{B}}(E^{\mathcal{B}'}X) = E^{\mathcal{B}}X$. Что касается второго равенства в (9), то, используя (8) и $\mathcal{B}'$-измеримость (напомним $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$), получаем

$$E^{\mathcal{B}'}(E^{\mathcal{B}}X) = E^{\mathcal{B}}X\ E^{\mathcal{B}'}1 = E^{\mathcal{B}}X.$$

Наконец, третье равенство в (9) легко следует из (8) и предыдущих равенств в (9), если взять за $\mathcal{A}$ σ-алгебру $\mathcal{B}'$. Тогда, поскольку

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}', \quad E^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{B}'}(\,\cdot\,) = E^{\mathcal{B}}(\,\cdot\,),$$

так что

$$E^{\mathcal{B}}(X'E^{\mathcal{B}'}X) = E^{\mathcal{B}}(E^{\mathcal{B}'}(X'X)) = E^{\mathcal{B}}(X'X).$$

$\triangle$

Литература: Ж.Неве, стр.175-176; М.Лоэв, стр. 353-372.

§15. **Независимость**

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$– фиксированное вероятностное пространство. Говорят, что событие A не зависит от события B, если условная вероятность $P(A\,|\,B) = P(A)$. Так как $P(A\,|\,B) = P(A \cap B)/P(B)$, то независимость A от B влечет $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, откуда немедленно следует $P(B\,|\,A) = P(B)$. Таким образом, можно говорить о взаимной независимости событий A и B.

Определение 15.1. Два события A и B называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

В случае нескольких событий $A_1, \ldots, A_n$ понятие совместной независимости усложняется.

Определение 15.2. События (элементы σ-алгебры $\mathcal{A}$) называются *независимыми* (точнее, совместно независимыми или независимыми в совокупности), если для любого набора индексов $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$ и любых $k = 1, \ldots, n$ вероятность

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}). \tag{15.1}$$

Как показывает известный пример Берштейна, для совместной независимости событий недостаточно выполнение (15.1) для некоторого (определенного) набора индексов $i_1, \ldots, i_k$, например, недостаточно потребовать только попарной независимости (k=2).

Рассмотрим теперь любое, возможно несчетное семейство событий $\{A_i,\ i \in I\}$, а также семейство классов $\mathcal{C}_t = \{A_i,\ i \in I_t\},\ t \in T$ событий из $\mathcal{A}$.

Определение 15.3. *События* $A_i,\ i \in I$ называются *независимыми* (в совокупности), если независимы события, принадлежащие любому *конечному* набору $\{A_j,\ j \in J\}$ событий из семейства $\{A_i,\ i \in I\}$. Классы событий $\mathcal{C}_t,\ t \in T$ называются *независимыми*, если независимы события любого семейства, которое образуется произвольным выбором по одному событию из каждого класса $\mathcal{C}_t,\ t \in T$.

В этом случае, когда $\mathcal{C}_t,\ t \in T$ является σ-подалгебрами σ-алгебры $\mathcal{A}$, определение 15.3 несколько упрощается.

Определение 15.4. Конечное семейство $\{\mathcal{B}_j,\ j \in J\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ называется *семейством независимых σ-алгебр*, если

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \prod_{j \in J} P(B_j), \tag{15.2}$$

каковы бы ни были события $B_j \in \mathcal{B}_j,\ j \in J$. Бесконечное семейство $\{\mathcal{B}_t,\ t \in T\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ называется *семейством независимых σ-алгебр*, если независимы σ-алгебры любого конечного семейства $\{\mathcal{B}_j,\ j \in J\},\ J \subset T$.

Предложение 15.1. *Семейство $\{\mathcal{B}_t,\ t \in T\}$ есть семейство независимых σ-алгебр тогда и только тогда, когда*

$$E\Big(\prod_{k=1}^{n} X_{t_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} E\,X_{t_k}, \tag{15.3}$$

каковы бы ни были интегрируемые $\mathcal{B}_{t_k}$-измеримые с.в. $X_{t_k},\ t_k \in T$, $k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Если положить в (15.3) $X_{t_k} = \mathbf{1}_{B_{t_k}}$ с $B_{t_k} \in \mathcal{B}_{t_k}$, то оно превращается в (15.2), что означает независимость σ-алгебр семейства $\{\mathcal{B}_t,\ t \in T\}$. Обратно, если эти σ-алгебры независимы, то (15.3) выполняется для индикаторов – с.в. вида $X_{t_k} = \mathbf{1}_{B_{t_k}}$. Но тогда, используя стандартный прием доказательства равенства между м.о. (интегралами Лебега), получаем, что (15.3) выполняется для любых интегрируемых с.в. $X_{t_k},\ t_k \in T$.

$\triangle$

Предложение 15.2. *Минимальные σ-алгебры $\mathcal{B}_t,\ t \in T$, порожденные независимыми классами $\mathcal{C}_t,\ t \in T$, замкнутыми относительно конечных пересечений своих элементов, независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что свойство независимости классов $\mathcal{C}_t,\ t \in T$ сохранится, если каждое $\mathcal{C}_t$ пополнить следующими событиями: (1) $\emptyset$ и Ω, (2) дополнениями к каждому событию, (3) конечными объединениями несовместных событий. Тогда, в силу предложения 1.5, каждый из классов $\mathcal{C}_t$ превратится в булеву алгебру, порожденную этим классом. Если теперь показать, что (4) независимость классов $\mathcal{C}_t,\ t \in T$ сохранится и при пополнении их пределами монотонных последовательностей, то в результате мы получим независимые монотонные классы, порожденные классами $\mathcal{C}_t,\ t \in T$, и в то же время монотонные классы, порожденные соответствующими булевыми алгебрами. Но в силу предложения 3.2 монотонный класс, порожденный булевой алгеброй, совпадает с σ-алгеброй, порожденной той же булевой алгеброй. Таким образом, доказательство утверждения (1)–(4) равносильно доказательству данного предложения.

Пусть $A_{t_1}, \dots, A_{t_k}$ – конечный набор событий из соответствующих классов $\mathcal{C}_{t_1}, \dots, \mathcal{C}_{t_k}$. В силу независимости классов,

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i}\Big) = \prod_{i=1}^{k} P(A_{t_i})$$

при любом $k = 1, 2, \dots$. Пусть теперь B – одно из событий в (1)–(4), которым пополняются классы. Требуется показать, что

$$P\Big(B \bigcap \Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i}\Big)\Big) = P(B) \prod_{i=1}^{k} P(A_{t_i}). \tag{15.4}$$

(1). Если $B = \emptyset$ или Ω, то (15.4) очевидно выполняется.

(2). Пусть $A_{t_0} \in \mathcal{C}_{t_0}$, где t_0 отлично от $t_1, \dots, t_k$, и $B = A^c_{t_0}$. Тогда

$$P\Big(A^c_{t_0} \bigcap \Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i}\Big)\Big) = P\Big(\Omega \bigcap \Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i}\Big)\Big) - P\Big(\bigcap_{i=0}^{k} A_{t_i}\Big) =$$

$$\prod_{i=1}^{k} P(A_{t_i}) - \prod_{i=0}^{k} P(A_{t_i}) = (1 - P(A_{t_0})) \prod_{i=1}^{k} P(A_{t_i}) = P(A^c_{t_0}) \prod_{i=1}^{k} P(A_{t_i}).$$

(3). Если $\{A_t^j,\ j=1,\ldots,n\}$ – конечное семейство несовместных событий из $\mathcal{C}_t,\ t\neq t_i$ при любом $i=1,\ldots,k$, и $B=\sum\limits_{i=1}^{n} A_t^j$, то

$$P\Big(\sum_{j=1}^{n}\bigcap_{i=1}^{k}\Big(A_{t_i}\bigcap A_t^j\Big)\Big)=\sum_{j=1}^{n}P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}(A_{t_i}\bigcap A_t^j)\Big)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}P(A_t^j)\prod_{i=1}^{k}P(A_{t_i})=P\Big(\sum_{j=1}^{n}A_t^j\Big)\prod_{i=1}^{k}P(A_{t_i})=P(B)\prod_{i=1}^{k}P(A_{t_i}).$$

(4). Если $\{A_{t_0}^n,\ n\geqslant 1\}$ – монотонная последовательность событий из $\mathcal{C}_{t_0}$ с t_0, отличным от $t_1,\ldots,t_k$, и $A_{t_0}^n\downarrow(\uparrow)A_{t_0}\,(=B)$, то из непрерывности вероятности P следует, что

$$P\Big(\bigcap_{i=0}^{k}A_{t_i}\Big)=\lim_{n\to\infty}P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}(A_{t_i}\bigcap A_{t_0}^n)\Big)=\prod_{i=1}^{k}P(A_{t_i})\lim_{n\to\infty}P(A_{t_0}^n)=$$

$$\prod_{i=1}^{k}P(A_{t_i})\,P\Big(\lim_{n\to\infty}A_{t_0}^n\Big)=\prod_{i=0}^{n}P(A_{t_i}).$$

△

Определение 15.5. *Случайные величины* $X_t,\ t\in T$ на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{A})$ называются *независимыми*, если независимы порожденные ими σ-подалгебры $\mathcal{B}_t,\ t\in T$, то есть для любого конечного набора $\{S_{t_i},\ i=1,\ldots,k\}$ борелевских множеств

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\omega:\ X_{t_i}(\omega)\in S_{t_i}\}\Big)=\prod_{i=1}^{k}P\{\omega:\ X_{t_i}(\omega)\in S_{t_i}\}.$$

В определении 15.5 независимости с.в. более естественно оперировать не вероятностью на $(\Omega,\mathcal{A})$, а совместными распределениями любых конечных наборов с.в. $X_{t_1},\ldots,X_{t_k};\ t_i\in T,\ i=1,\ldots,k,\ k=1,2,\ldots$.

Следствие 15.1. *С.в.* $X_t,\ t\in T$ *независимы тогда и только тогда, когда совместная функция распределения любого конечного набора этих* *величин представима в виде произведения их маргинальных функций распределения, то есть*

$$F_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) = P(X_{t_1} < x_1,\dots,X_{t_k} < x_k) =$$

$$\prod_{i=1}^{k} P(X_{t_i} < x_i) = \prod_{i=1}^{k} F_{t_i}(x_i).$$

Доказательство немедленно следует из предложения 15.2, поскольку классы событий $\mathcal{C}_t = \{X_t^{-1}((-\infty, a)),\ a \in \mathrm{R}\}$ замкнуты относительно пересечений их элементов: $X_t^{-1}((-\infty, a)) \bigcap X_t^{-1}((-\infty, b)) = X_t^{-1}((-\infty, \min(a, b))$.

△

Предложение 15.3. *Если д.с.в. X и Y независимы, то* $E(X\,|\,Y) \underset{\text{п.н.}}{=} EX$ и $E(Y\,|\,X) \underset{\text{п.н.}}{=} EY$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_X(\mathcal{B}_Y)$ есть σ-подалгебра, порожденная с.в. X (соответственно Y). Тогда $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ независимы, откуда при любом $B \in \mathcal{B}_Y$ независимы с.в. X и $\mathbf{1}_B$. По определению у.м.о. при любом $B \in \mathcal{B}_Y$ выполняется равенство

$$\int_B E(X\,|\,Y)\,dP_{\mathcal{B}_Y} = \int_B X\,dP = E(X\,\mathbf{1}_{\mathbf{B}}) =$$

$$E\,X\,E\,\mathbf{1}_{\mathbf{B}} = E\,X\,P(B) = \int_B (E\,X)\,dP,$$

что, очевидно, влечет $E(X\,|\,Y) \underset{\text{п.н.}}{=} E\,X$. Аналогично доказывается равенство $E(Y\,|\,X) \underset{\text{п.н.}}{=} E\,Y$.

△

Концепция независимости играет важнейшую роль в теории вероятностей; по существу именно она выделяет теорию вероятностей из теории меры в самостоятельную математическую дисциплину. Все важнейшие законы стохастики, такие как закон больших чисел, центральная предельная теорема и ряд других, связаны с последовательностями независимых случайных величин.

Литература: Ж.Неве, стр.179-182; М.Лоэв, стр.237-242.

§16. **Вероятность на произведении двух измеримых пространств**

Пусть Ω_1 и Ω_2 – пространства элементарных исходов.

Определение 16.1. Множество пар $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ с $\omega_1 \in \Omega_1$ и $\omega_2 \in \Omega_2$ называется *произведением пространств* Ω_1 и Ω_2 и обозначается $\Omega_1 \times \Omega_2$.

С произведением пространств связана обширная терминология. Каждой точке $\omega \in \Omega_1 \times \Omega_2$ ставятся в соответствие ее координаты ω_1 и ω_2, так что *i-й координатой* называется отображение $\Omega_1 \times \Omega_2$ в Ω_i, $i = 1, 2$. Для любого подмножества $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ его *сечение* в точке $\omega_1 \in \Omega_1$ определяется как множество A_{ω_1} тех точек Ω_2, для которых $(\omega_1, \omega_2) \in A$, то есть $A_{\omega_1} = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$. Если $X = X(\omega_1, \omega_2)$ – отображение $\Omega_1 \times \Omega_2$ в некоторое пространство $\mathfrak{X}$, то *сечением* X в точке ω_1 называется отображение $X_{\omega_1}(\,\cdot\,) = X(\omega_1, \,\cdot\,)$ пространства Ω_2 в пространство $\mathfrak{X}$.

Прямоугольником в $\Omega_1 \times \Omega_2$ называется подмножество вида $A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in A_1, \ \omega_2 \in A_2\}$, где $A_i \subset \Omega_i$, $i = 1, 2$. Для всякого прямоугольника его сечение в точке $\omega_1 \in \Omega_1$ равно либо A_2, либо пусто. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ суть σ-алгебры подмножеств соответствующих пространств Ω_1 и Ω_2, то прямоугольник $A_1 \times A_2$ называется *измеримым* (по отношению к $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$), если $A_1 \in \mathcal{A}_1$ и $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Нетрудно убедиться, что *множество прямоугольников в $\Omega_1 \times \Omega_2$ образуют булеву полуалгебру.* Следовательно (см. предложение 6.1), булева алгебра, порожденная измеримыми прямоугольниками, состоит из всевозможных конечных сумм непересекающихся измеримых прямоугольников. (Заметим, что именно так измеряется площадь плоских фигур в эвклидовой геометрии).

Определение 16.2. Порожденная булевой алгеброй (или полуалгеброй) измеримых прямоугольников σ-алгебра называется *произведением σ-алгебр* $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и обозначается $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$. Измеримое пространство

$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ называется *произведением измеримых пространств* $(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

Предложение 16.1. *Для любого фиксированного ω_1 сечение A_{ω_1} произвольного измеримого множества из $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ является измеримым множеством в $(\Omega_2,\ \mathcal{A}_2)$. Более того, сечение X_{ω_1} любой действительной с.в. X на* $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ есть с.в. на $(\Omega_2,\ \mathcal{A}_2)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}_{\omega_1}$ – класс подмножеств $A \subset (\Omega_1 \times \Omega_2)$, сечения которых $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Достаточно показать, что $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}_{\omega_1}$ – все измеримые подмножества $\Omega_1 \times \Omega_2$ принадлежат $\mathcal{C}_{\omega_1}$. Но все измеримые прямоугольники (в том числе и $\Omega_1 \times \Omega_2$) принадлежат $\mathcal{C}_{\omega_1}$, ибо по определению измеримого прямоугольника $A = A_1 \times A_2$ его сечение $A_{\omega_1} = A_2\ (\in \mathcal{A}_2)$ или $A_{\omega_1} = \emptyset (\in \mathcal{A}_2)$. Далее, так как сечение любого счетного объединения непересекающихся прямоугольников есть объединение их сторон (измеримых подмножеств Ω_2 – элементов $\mathcal{A}_2$), то класс $\mathcal{C}_{\omega_1}$ замкнут относительно операции объединения счетного числа своих элементов. Столь же просто проверяется, что $\mathcal{C}_{\omega_1}$ замкнут относительно взятия дополнения (достаточно вспомнить, что множество прямоугольников образует полуалгебру). Следовательно, любой элемент, принадлежащий $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$, принадлежит и $\mathcal{C}_{\omega_1}$, то есть $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}_{\omega_1}$.

Вторая часть предложения вытекает теперь из соотношения

$$X_{\omega_1}^{-1}(B) = [X^{-1}(B)]_{\omega_1}, \quad \forall B \in \mathcal{R}.$$

$\triangle$

Определение 16.3. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ – измеримые пространства. *Переходной вероятностью* для этих пространств называется отображение P_2^1 произведения $\Omega_1 \times \mathcal{A}_2$ в $[0;1]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(а) для любого $\omega_1 \in \Omega_1$ функция $P_2^1(\omega_1,\ \cdot\ )$ является вероятностью на $(\Omega_2;\ \mathcal{A}_2)$;

(б) для любого $A_2 \in \mathcal{A}_2$ функция $P_2^1(\ \cdot,\ A_2)$ измерима на $(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1)$.

Замечание 16.1. (1). Переходная вероятность $P_2^1(\omega_1, A_2)$, принимающая одно и то же значение на Ω_1 при каждом фиксированном $A_2 \in \mathcal{A}_2$, является обычной вероятностью на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

(2). Если условие (а) выполняется, то для выполнения условия (б) при всех $A_2 \in \mathcal{A}_2$ достаточно, чтобы оно выполнялось для каждого множества из какой-либо полуалгебры, порождающей $\mathcal{A}_2$ (используется единственность продолжения вероятности с полуалгебры на порожденную σ-алгебру).

Предложение 16.2. *Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ – измеримые пространства, P_1 – вероятность на $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и P_2^1 – переходная вероятность на $\Omega_1 \times \mathcal{A}_2$. Существует такая единственная вероятность на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$, что*

$$P(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} P_2^1(\omega_1, A_2)\, P_1(d\omega_1), \quad A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Для любой квазиинтегрируемой д.с.в. X на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ функция

$$Y(\omega_1) = \int_{\Omega_1} X_{\omega_1}(\omega_2)\, P_2^1(\omega_1,\ \omega_2)$$

почти всюду по мере P_1 определена, $\mathcal{A}_1$-измерима и квазиинтегрируема по P_1. Более того,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X\, dP = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\omega_2)\, P_2^1(\omega_1,\ d\omega_2).$$

Доказательство. Покажем, что P есть вероятность на $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$. Для этого достаточно проверить аксиомы вероятности для P как функции на полуалгебре прямоугольников (см.предложение 6.1 о продолжении вероятности с полуалгебры на σ-алгебру). Очевидно, $P(A_1 \times A_2) \in [0;\, 1]$. Далее, пусть

$$A_1 \times A_2 = \sum_I A_1^i \times A_2^i,$$

где I не более чем счетно. Перепишем это представление с помощью индикаторов

$$\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\,\mathbf{1}_{A_2}(\omega_2) = \sum_I \mathbf{1}_{A_1^i}(\omega_1)\,\mathbf{1}_{A_2^i}(\omega_2)$$

и проинтегрируем это равенство по Ω_2 относительно распределения $P_2^1(\omega_1,\ \cdot\,)$; в результате получим равенство

$$\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\,P_2^1(\omega_1,\ A_2) = \sum_I \mathbf{1}_{A_1^i}(\omega_1)\,P_2^1(\omega_1,\ A_2^i).$$

Интегрируя теперь по $\omega_1 \in \Omega_1$ относительно P_1, получаем

$$P(A_1 \times A_2) = \sum_I P(A_1^i \times A_2^i).$$

Таким образом, P обладает свойством σ-аддитивности и является вероятностью на $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$.

Обратимся к доказательству формул для вычисления м.о. от с.в. X на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$. Рассмотрим сначала случай положительных с.в. X. Тогда в силу предложения 16.1 для $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ сечение X_{ω_1} является (положительной) с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Следовательно, с.в. Y определена на Ω_1. Так как при каждом фиксированном ω_1 с.в. Y есть линейный функционал (интеграл Лебега) от X, то соответствие $X \to Y$ монотонно и непрерывно: $X_n \uparrow X \Longrightarrow Y_n \uparrow Y$. Отсюда следует, что при доказательстве двух последних формул данного предложения можно ограничиться только индикаторами $X = \mathbf{1}_A$ с $A \in \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$. Но тогда $Y(\omega_1) = P_2^1(\omega_1,\ A_{\omega_1})$, и остается показать $\mathcal{A}_1$-измеримость этой функции. Класс $\mathcal{C}$ подмножеств A $(\in \Omega_1 \times \Omega_2)$, для которых $P_2^1(\omega_1,\ A_{\omega_1})$ является $\mathcal{A}_1$-измеримой функцие, содержит все прямоугольники $A = A_1 \times A_2$ – в этом случае $P_2^1(\omega_1, A_{\omega_1}) = P_2^1(\omega_1, A_2)\,\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)$, так что $P_2^1(\omega_1,\ A_{\omega_1})$ измерима как произведение измеримых функций. Следовательно, $\mathcal{C}$ содержит порожденную прямоугольниками булеву алгебру; ($P_2^1(\omega_1, A_2)$ – аддитивная функция, а порожденная полуалгеброй булева алгебра (см.предложение 6.1) состоит из объединения непересекающихся элементов этой полуалгебры). Кроме того, этот класс замкнут относительно монотонных пределов (непрерывность вероятности $P(\omega_1, \cdot\,))$. Итак, класс $\mathcal{C}$ подмножеств $\Omega_1 \times \Omega_2$, для которых $P_2^1(\omega_1, A_{\omega_1})$ есть $\mathcal{A}_1$- измеримая функция, содержит монотонный класс, порожденный булевой алгеброй прямоугольников, а поскольку этот монотонный класс совпадает с порожденной σ-алгеброй (предложение 3.2) $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$, то последняя также входит в класс $\mathcal{C}$ (сравните проведенные рассуждения с доказательством предложения 15.2).

Выражение

$$\int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\omega_2)\, P_2^1(\omega_1, d\omega_2),$$

таким образом, имеет смысл для любой положительной с.в. X на $(\Omega_1 \times \Omega_2)$ и определяет линейный функционал, монотонный и непрерывный относительно монотонной сходимости, то есть обладающий всеми свойствами м.о. от с.в. X. С другой стороны, это выражение совпадает с $\int X\,dP$ для всех д.с.в. вида $\mathbf{1}_{A_1 \times A_2}$. Отсюда, используя стандартную схему доказательства соотношений для интегралов Лебега, получаем, что это выражение равно $\int X\,dP$ для любой положительной с.в. X.

Рассуждения, аналогичные доказательству свойства м.о. от квазиинтегрируемых с.в. (см. §9), приводит нас к доказательству последнего равенства в формулировке предложения для любых квазиинтегрируемых $X = X(\omega_1, \omega_2)$.

$\triangle$

Следствие 16.1. *При выполнении условий предложения* 16.2 *существует единственная вероятность* P_2 *на* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, *такая, что*

$$P_2(A_2) = \int_{\Omega_1} P_2^1(\omega_1, A_2)\, P_1(d\omega_1), \quad A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Доказательство. Достаточно положить в последней формуле предложения 16.2 $\quad X(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_{\Omega_1 \times A_2}(\omega_1, \omega_2)$.

$\triangle$

Частный случай предложения 16.2, когда переходная вероятность $P_2^1(\omega_1,\ A_2)$ не зависит от ω_1, известен как

Теорема Фубини. *Пусть* $(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1,\ P_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2,\ P_2)$ *– два вероятностных пространства. Существует такая единственная вероятность* P *на* $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ *(обозначаемая также* $P_1 \times P_2$*), что* $P(A_1 \times A_2) = P(A_1)\,P(A_2)$, $A_i \in \mathcal{A}_i$. *Для любой квазиинтегрируемой с.в.* X*, определенной на* $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2,\ P_1 \times P_2)$, *имеет место следующая формула*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X\,dP = \int_{\Omega_1} P_1(\,d\omega_1\,) \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\,\omega_2\,)\,P_2(\,d\omega_2\,) =$$
$$\int_{\Omega_2} P_2(\,d\omega_2\,) \int_{\Omega_1} X_{\omega_2}(\,\omega_1\,)\,P_1(\,d\omega_1\,).$$

Доказательство. Достаточно применить предложение 16.2 как к вероятности P_1 и переходной вероятности $P_2^1(\omega_1,\ A_2) = P_2(A_2)$, так и к вероятности $P_1(A_1)$ и переходной вероятности $P_1^2(\omega_2,\ A_2) = P_1(A_1)$ и заметить, что определяемые при этом вероятности на $(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ совпадают.

$\triangle$

Определение 16.4. Вероятностное пространство

$$(\,\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2,\ P_1 \times P_2\,)$$

называется *произведением пространств* $(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1,\ P_1)$ и $(\Omega_2,\ \mathcal{A}_2,\ P_2)$, его обозначают также $(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1,\ P_1) \times (\Omega_2,\ \mathcal{A}_2,\ P_2)$.

Литература: Ж.Неве, стр.105-113.

§17. **Вероятность на бесконечном произведении измеримых пространств**

Пусть $\{\Omega_t,\ t\in T\}$ – произвольное семейство непустых множеств (пространств элементарных исходов).

Определение 17.1. Совокупность всех семейств $\omega = \{\omega_t, t\in T\}$, где $\omega_t\in\Omega_t$ при каждом $t\in T$, называется *произведением пространств* $\Omega_t,\ t\in T$, и обозначается $\prod_T \Omega_t$. Если $\Omega_t=\Omega$ при $\forall\, t\in T$, то есть перемножаются одинаковые пространства, то их произведение обозначается Ω^T.

Произведение пространств играет важную роль при изучении случайных процессов: если ω_t – значение процесса в момент t (точка в пространстве Ω_t), то $\omega=\{\omega_t,\ t\in T\}$ – траектория случайного процесса, а $\prod_T\Omega_t$ – пространство всех возможных траекторий процесса за „время“ T.

Отображение $\omega\to\omega_s$ произведения $\prod_T\Omega_t$ в Ω_s называется *s-й координатой*. Его часто обозначают X_s, так что $\omega_s = X_s(\omega)$ и означает состояние траектории процесса в момент s. Для любого $S\subset T$ *сечение* подмножества $A\subset\prod_T\Omega_t$ в точках $\omega_s\in\omega_S=\{\omega_s,\ s\in S\}$ определяется как подмножество

$$A_{\omega_S}=\{\{\omega_u,\ u\in S^c\}\ :\ \{\omega_t,\ t\in T\}\in A\}\subset\prod\nolimits_{u\in S^c}\Omega_u.$$

Подмножество $A=B\times\prod_{S^c}\Omega_u$ произведения $\prod_T\Omega_t$, где $B\subset\prod_S\Omega_s$, называется *цилиндром с основанием* B. Для того чтобы множество $A\subset\prod_T\Omega_t$ было цилиндром с основанием в $\prod_S\Omega_s$, необходимо и достаточно, чтобы все его сечения $A_{\omega_{S^c}}$ не зависели от ω_{S^c}; при этом $B=A_{\omega_{S^c}}$. *Прямоугольником* в $\prod_T\Omega_t$ называется подмножество вида $\prod_T A_t = \{\omega:\ \omega_t\in A_t,\ (t\in T)\}$, причем предполагается, что подмножества A_t множеств Ω_t отличаются от Ω_t лишь для *конечного* множества значений $t\in T$. Всякое сечение прямоугольника тоже является прямоугольником.

Легко проверить, что *семейство всевозможных измеримых пря-*

моугольников $\{A_t \in \mathcal{A}_t,\ t \in T\}$ *образует булеву полуалгебру.* Согласно предложению 6.1, конечные суммы непересекающихся прямоугольников образуют булеву алгебру. Следует обратить особое внимание на то, что при таком построении булевой алгебры прямоугольников объединяются прямоугольники разной размерности.

Определение 17.2. Порожденная булевой алгеброй прямоугольников σ-алгебра называется *произведением σ-алгебр* $\mathcal{A}_t,\ \ t \in T$ и обозначается $\bigotimes_T \mathcal{A}_t$. Измеримое пространство $\left(\prod_T \Omega_t,\ \bigotimes_T \mathcal{A}_t\right)$ называется *произведением измеримых пространств* $(\Omega_t,\ \mathcal{A}_t)$, $t \in T$. Как и в определении 17.1 в случае одинаковых Ω_t и $\mathcal{A}_t$ произведение обозначается $(\Omega^T,\ \mathcal{A}^T)$.

Применение предложения 16.1 к измеримым пространствам $(\prod_S \Omega_s,$ $\bigotimes_S \mathcal{A}_s)$ и $\left(\prod_{S^c} \Omega_u,\ \bigotimes_{S^c} \mathcal{A}_u\right)$, произведение которых есть $\Big(\prod_T \Omega_t,$ $\bigotimes_T \mathcal{A}_t\Big)$, позволяет утверждать, что всякое сечение A_{ω_s} множества A из $\bigotimes_T \mathcal{A}_t$ измеримо в $\left(\prod_{S^c} \Omega_u,\ \bigotimes_{S^c} \mathcal{A}_u\right)$. В частности, если A – цилиндр в $\prod_T \Omega_t$ с основанием B в $\prod_S \Omega_s$, то A тогда и только тогда измерим, то есть принадлежит $\bigotimes_T \mathcal{A}_t$, когда его основание B измеримо, то есть принадлежит $\bigotimes_S \mathcal{A}_s$.

Чтобы сделать “функцию”, определенную на семействе $\{(\Omega_t,\ \mathcal{A}_t),$ $t \in T\}$ измеримых пространств состояний, случайной функцией, чаще всего используют следующий метод. Каждому набору $(t_1, \ldots, t_n)$ моментов времени сопоставляется некоторый вероятностный закон, скажем $(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) = (X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega))$ считается распределенным по закону $P_{t_1,\ldots,t_n}$. Затем пытаются определить такую вероятность P_T на измеримом пространстве $\left(\prod_T \Omega_t,\ \bigotimes_T \mathcal{A}_t\right)$ траекторий, ограничения которой на σ-алгебру $\bigotimes_1^n \mathcal{A}_{t_i}$ событий, зависящих лишь от координат $t_1, \ldots,\ t_n$, совпадали бы с заданными вероятностями $P_{t_1,\ldots,t_n}$. Мы установим существование такой вероятности P_T на бесконечном произведении $(\prod_T \Omega_t,\ \bigotimes_T \mathcal{A}_t)$ измеримых пространств в том случае, когда $(\Omega_t,\ \mathcal{A}_t) = (\mathrm{R},\ \mathcal{R})$ (борелевская прямая), так что $\left(\prod_T \Omega_t,\ \bigotimes_T \mathcal{A}_t\right) =$

$(\mathrm{R}^T,\ \mathcal{R}^T)$, хотя такие вероятности существуют и в более общих (польских) пространствах (см.Ж.Невё, стр.121). Заметим, что если $T_n = (t_1, \dots, t_n)$ – конечный набор индексов из T, то, естественно

$$(\mathrm{R}^{T_n},\ \mathcal{R}^{T_n}) = (\mathrm{R}^n,\ \mathcal{R}^n),$$

однако при некоторых рассуждениях в доказательствах нам будет важно сохранить запись

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{R}_{t_i} = \mathrm{R}_{t_1} \times \cdots \times \mathrm{R}_{t_n}\ (= \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}).$$

Определение 17.3. Семейство вероятностных мер $\{P_{T_n},\ T_n \subset T\}$ на соответствующих σ-алгебрах из семейства измеримых пространств $\{(\mathrm{R}^{T_n},\ \mathcal{R}^{T_n}),\ T_n \subset T\}$ называется *согласованным*, если для любых конечных наборов индексов T_m и T_n с $m < n$ ограничение P_{T_n} на цилиндрическую σ-алгебру $\mathcal{R}^{T_m}$ совпадает с P_{T_m}.

Теорема 17.1. (А.Н.Колмогоров). *Согласованное семейство вероятностных мер на борелевских полях конечных произведений борелевских прямых определяет единственную вероятность P_T на $\mathcal{R}^T$, продолжающую каждую вероятность P_{T_n}, $T_n \subset T$.*

Доказательство. Так как семейство прямоугольников в $\mathrm{R}^T = \prod_T \mathrm{R}_t$ образует булеву полуалгебру, порождающую σ-алгебру $\mathcal{R}^T$, то, в силу предложения 6.1, достаточно доказать существование нормированной, непрерывной в $\emptyset$ функции множеств P_T на подмножествах R^T вида $B_n = B'_n \times \mathrm{R}^{T \setminus T_n}$, где $B'_n = \prod_{i=1}^n A_{t_i}$ и A_{t_i} – интервалы на прямой R.

Пусть P_{T_n}, $T_n \subset T$, – согласованные вероятности на $(\mathrm{R}^{T_n},\ \mathcal{R}^{T_n}) = (\mathrm{R}^n, \mathcal{R}^n)$, $T_n \subset T$. Покажем, что соотношения

$$P_T(B_n) = P_T(B'_n \times \mathrm{R}^{T \setminus T_n}) = P_{T_n}(B'_n) \qquad (17.1)$$

определяют вероятностную меру на полуалгебре прямоугольников в $(\mathrm{R}^T,\ \mathcal{R}^T)$.

Условие согласованности обеспечивает корректность определения P_T, когда B'_n – прямоугольник, часть сторон которого совпадает с R. Очевидно, P_T нормирована и конечно аддитивна, ибо этим свойством обладает P_{T_n}. Остается доказать непрерывность P_T. Доказательство этого свойства вероятности проведем не совсем стандартным образом – покажем, что если $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$ – убывающая последовательность прямоугольников в соответствующих пространствах $\mathrm{R}^{T_n} \times \mathrm{R}^{T \setminus T_n}$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что $P_T(B_n) > \varepsilon$ при $\forall n = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ не пусто.

Заметим, что при каждом фиксированном $n\,(= 1, 2, \ldots)$ прямоугольник B_n есть цилиндр в R^T с основанием B'_n в $\mathrm{R}^n\,(= \mathrm{R}^{T_n})$ и включение $B_{n+1} \subset B_n$ означает $B'_{n+1} \bigcap \mathrm{R}^{T_n} \subset B'_n$. В силу определения (17.1) вероятности P_T достаточно показать, что неравенство $P_{T_n}(B'_n) > \varepsilon$ для некоторого ε при любом $n = 1, 2, \ldots$ влечет $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$, то есть существует такая последовательность $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots\}$, что ее первые n членов $(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \subset B'_n$ при любом $n = 1, 2, \ldots$.

В силу непрерывности вероятности P_{T_n} для каждого прямоугольника $B'_n \subset \mathrm{R}^n$ существует такой замкнутый прямоугольник K'_n, что $K'_n \subset B'_n$ и

$$P_{T_n}(B'_n \setminus K'_n) < \varepsilon / 2^{n+1}$$

при любых $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим прямоугольный цилиндр $K_n = K'_n \times \mathrm{R}^{T \setminus T_n}$ с основанием K'_n, для которого также

$$P_T(B_n \setminus K_n) = P_{T_n}(B'_n \setminus K'_n) < \varepsilon / 2^{n+1},$$

и прямоугольник $D_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$. Так как $K_n \subset B_n$, то $D_n \subset B_n$ и

$$B_n \setminus D_n = B_n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} K_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} (B_n \setminus K_i). \tag{17.2}$$

Действительно, если

$$x^{(n)} = (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in B'_n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} K'_i,$$

то $x^{(n)} \in B'_n$, но не принадлежит одновременно всем $K'_1, \ldots, K'_n$, то есть существует такое $i\,(= 1, \ldots, n)$, что $x^{(n)} \in B_n$, но $x^{(n)} \notin K'_i$, и, следовательно,

$$x^{(n)} \in \bigcup_{i=1}^{n} (B'_n \backslash K'_i).$$

Таким образом, принадлежность $x^{(n)}$ левой части (17.2) влечет принадлежность $x^{(n)}$ правой части (17.2).

Используя (17.2), включения $D_n \subset B_n$ и $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n$, получаем

$$P_T(B_n) - P_T(D_n) = P_T(B_n \backslash D_n) \leqslant P_T\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_n \backslash K_i\right) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_T(B_n \backslash K_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P_{T_i}(B'_i \backslash K'_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $P_T(B_n) - P_T(D_n) \leqslant \varepsilon/2$, а так как по условию $P_T(B_n) > \varepsilon$, то

$$P_T(D_n) \geqslant P_T(B_n) - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда $D_n \neq \emptyset$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ (напомним, $P_T(D_n) = P_{T_n}(D'_n)$, где D'_n – основание цилиндра D_n).

Итак, осталось указать при каждом $n\,(= 1,\, 2, \ldots)$ точку

$$x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in D'_n.$$

Тогда цилиндрическое множество

$$x^{(n)} \times \mathrm{R}^{T \backslash \{x^{(n)}\}} \subset D_n \subset B_n,$$

каково бы ни было $n = 1,\, 2, \ldots$ и $\bigcap_1^\infty B_n$ не пусто.

При каждом фиксированном n множество D_n не является пустым; выберем некоторую точку $(x_1^n, \ldots, x_n^n) \in D'_n$. Напомним, $D_n = \bigcap_1^n K_i$ и, следовательно, D_n монотонно убывает с ростом n, так что, если

$$(x_1^{n+p}, \ldots, x_n^{n+p},\ x_{n+1}^{n+p}, \ldots, x_{n+p}^{n+p}) \in D'_{n+p}.$$

то

$$(x_1^{n+p}, \ldots, x_n^{n+p}) \in D'_n \subset K'_n$$

при $\forall p \geqslant 0$. В силу ограниченности и замкнутости прямоугольника K'_n можно выбрать из последовательности $\{x_1^{n+p},\ p \geqslant 0\}$ подпоследовательность $\{x_1^{n_{1k}},\ k \leqslant 1\}$, сходящуюся к некоторому x_1 при $k \to \infty$. Из последовательности индексов $\{n_{1k},\ k \geqslant 1\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_{2k},\ k \geqslant 1\}$, что $\{x_2^{n_{2k}}\}$ сходится к некоторому x_2 при $k \to \infty$ и т.д. При этом $x_i^{n_{ik}} \to x_i$ и $x_j^{n_{ik}} \to x_j$, если $j < i$, ибо $\{n_{ik},\ k \geqslant 1\} \subseteq \{n_{jk},\ k \geqslant 0\}$.

Рассмотрим теперь диагональную последовательность

$$\{x_1^{n_{kk}}, x_2^{n_{kk}}, \ldots, x_{n_{kk}}^{n_{kk}},\ k \geqslant 1\}.$$

При $k \to \infty$ последовательности $x_1^{n_{kk}} \to x_1,\ x_2^{n_{kk}} \to x_2, \ldots$ так что для каждого фиксированного $m(\geqslant 1)$ вектор

$$(x_1^{n_{kk}}, \ldots, x_m^{n_{kk}}) \to (x_1, \ldots, x_m) \in K'_m.$$

Это означает, что соответствующая точка

$$(x_{t_1} = x_1,\ x_{t_2} = x_2, \ldots) \in K_m \in B_m$$

при $\forall m$, и поэтому $\bigcap_1^\infty B_m$ не пусто. Итак, P_T – вероятность на полуалгебре прямоугольников, и в силу предложения 6.1 имеет единственное продолжение до вероятности на $\mathcal{R}^T$.

$\triangle$

Построение вероятностных моделей случайных процессов основано на спецификации их конечномерных распределений – задании совместных распределений случайных величин $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ и любых $(t_1, \ldots, t_n) \subset T$. При таком построении условие согласованности выполняется автоматически. Рассмотрим один из наиболее распространенных способов спецификации конечномерных распределений, основанный на задании системы переходных вероятностей. Пусть $[0; \mathrm{T}]$ – отрезок прямой R, любая точка t которого трактуется как текущий момент времени. В начальный момент $t_0 = 0$ определяется распределение P_0 случайной величины $X_0(\omega)$. Если в момент $t_0 = 0$ процесс принял значение x_0, то его распределение в последующий момент $t_1 > 0$, то есть распределение случайной величины $X_{t_1}(\omega)$, задается с помощью переходной вероятности $P_1^0(x_0;\ A_1)$. При заданных $X_{t_0}(\omega) = x_0$ и $X_{t_1}(\omega) = x_1$ распределение $X_{t_2}(\omega)$ с $t_2 > t_1$ определяется переходной вероятностью $P_2^{01}(x_0, x_1;\ A_2)$ и т.д.

Если $(\mathcal{X}_t,\ \mathcal{X}_t)$, $t \in [0;\ T]$ – измеримые пространства значений процесса X_t при каждом фиксированном $t \in [0;\ T]$, то в соответствии с предложением 16.2 совместное распределение $X_{t_0}(\omega)$ и $X_{t_1}(\omega)$ на произведении σ-алгебр $\mathcal{X}_{t_0} \bigotimes \mathcal{X}_{t_1}$ определяется вероятностями

$$P(A_0 \times A_1) = \int_{A_0} P_1^0(x_0;\ A_1)\, P_0(dx_0) =$$

$$\int_{A_0} P_0(dx_0) \int_{A_1} P_1^0(x_0;\ dx_1), \quad A_0 \in \mathcal{X}_{t_0},\ A_1 \in \mathcal{X}_{t_1}.$$

Дальнейшее построение конечномерных распределений на $\bigotimes_0^n \mathcal{X}_{t_i}$, $t_0 = 0$, осуществляется по индукции. Пространство $(\mathcal{X}_{t_0} \times \mathcal{X}_{t_1}$, $\mathcal{X}_{t_0} \bigotimes \mathcal{X}_{t_1})$ берется за исходное, задается переходная вероятность $P_2^{01}(x_0,\ x_1;\ A_2)$ и распределение на

$$(\mathcal{X}_{t_0} \times \mathcal{X}_{t_1} \times \mathcal{X}_{t_2},\ \bigotimes_1^3 \mathcal{X}_{t_i})$$

определяется вероятностями

$$P(A_0 \times A_1 \times A_2) = \int_{A_0} P_0(dX_0) \int_{A_1} P_1^0(x_0;\ dX_1) \cdot$$

$$\int_{A_2} P_2^{01}(x_0, x_1;\ dx_2), A_i \in \mathcal{X}_{t_i},\ i = 0, 1, 2.$$

Легко видеть, что такое индуктивное построение приводит к *согласованному* семейству конечномерных распределений на

$$\Big(\prod_{i=0}^n \mathcal{X}_{t_i},\ \bigotimes_{i=0}^n \mathcal{X}_{t_i},\Big), \quad (t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n) \subset [0;\ T],$$

определяемому следующими вероятностями на прямоугольниках:

$$P\Big(\prod_{i=0}^n A_i\Big) = \int_{A_0} P_0(dx_0) \int_{A_1} P_1^0(x_0;\ dx_1) \cdots$$

$$\cdots \int_{A_n} P_n^{01\ldots n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1};\ dx_n), \quad A_i \in \mathfrak{X}_{t_i},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Условие согласованности позволяет говорить о существовании распределения вероятностей на бесконечном произведении

$$\Big(\prod_{[0;\ T]} \mathfrak{X}_t,\ \bigotimes_{[0;\ T]} \mathfrak{X}_t \Big)$$

– измеримом пространстве траекторий случайного процесса $X_t(\omega),\ t \in [0;\ T]$.

Литература: Ж.Неве, стр.116-119, 227-229, 232-233;

А.А.Боровков, стр. 261-264.

Русско-английский терминологический словарь

определение	-definition
теорема	-theorem
предложение	-proposition
лемма	-lemma
следствие	-corollary
(из теоремы, предложения)	
доказательство	-proof
достаточность	-sufficiency
необходимость	-necessity

§1. Algebra of events

пространство	-space
элементарный исход	-prime result, outcome,
	elementary event
множество	-set
подмножество	-subset
событие	-event
пустое множество	-null set
невозможное событие	-impossible event
принадлежность	-belong to
влечь	-imply
дополнение множества	-complement of a set
объединение	-join
пересечение	-intersection
разность	-difference
вычитать	-deduct
симметрическая	-symmetrical
несовместный	-disjoint, mutually exclusive
булева алгебра	-Boolean algebra

единица	-unit
нуль	-zero
правило двойственности	-duality rule
разбиение	-partition
конечный	-finite
бесконечный	-infinite
порожденный	-generalted

§2. Probability on a Boolean algebra

вероятность	-probability
попарное пересечение	-pairwise disjoint
нормируемость	-normability
аддитивность	-additivity
непрерывность	-continuity
монотонный предел	-monotone limit
монотонность	-monotonicity
сильная аддитивность	-strong additivity
полуаддитивность	-semiadditivity
монотонная сходимость	-monotone convergence
счетная аддитивность	-countably additivity

§3. Boolean σ-algebra

борелевское поле	-Borel field (algebra)
измеримое пространство	-measurable space
измеримое множество	-measurable set
монотонный класс	-monotone class
порожденная σ-алгебра	-generated σ-algebra
счетное множество	-denumerable set
не более чем счетный	-at most contable

верхний предел (грань)	-upper limit (bound), complete limit
нижний предел	-lower limit
последовательность	-sequence
сходимость	-convergence
сходящийся	-convergent

§4. Probability on the Boolean σ-algebra. Probability space

вероятностное пространство	-probabilistic space
неизмеримое подмножество	-nonmeasurable subset
нулевое множество (множество меры нуль)	-null set (set of measure zero)
полное пространство	-complete space
внешняя (внутренняя) вероятность	-outer (interior) probability
точная верхняя грань	-least upper bound, supremum
точная нижняя грань	-greatest lower bound, infimum
абсолютная измеримость	-absolute measurable

§5. Continuation of probability with a Boolean algebra to the generated σ-algebra

продолжение вероятности	-continuation of probability
возрастающая (убывающая) последовательность	-increasing (decreasing) sequence
единственность	-uniqueness

§6. Continuation of probability with semialgebras and compact classes. Distribution functions

полуалгебра	-semialgebra
компактный класс	-compact class
вероятностная модель	-probabilistic model
прямая	-line (Euclidean line, real line)
интервал	-interval
отрезок	-segment, closed interval
плоскость	-plane
прямоугольник	-rectangle
полуоткрытый интервал	-half-open interval
открытое множество	-opened set
замкнутое множество	-closed set
функция распределения	-distribution function
борелевская прямая	-Borel line
борелевское множество	-Borel set
непрерывность слева (справа)	-continuity from the left (right)
взаимнооднозначное соответствие	-one-to-one correspondence

§7. Measurable mapping

отображение	-mapping
измеримое отображение	-measurable mapping
образ	-image
прообраз	-inverse image, preimage, original, prototype
гомоморфизм	-homomorphism
отображение “в”	-into mapping, injection
отображение “на”	-outo mapping, bijection

сюръективный	-surjective
индуцированный	-induced

§8. Real random variable

действительная случайная величина	-real random variable, variate
ступенчатая случайная величина	-step random variable
индикатор	-indicator
линейное пространство	-linear (vector) space
структура	-structure
частичное упорядочивание	-partial ordering
расширенная прямая	-entended line

§9. Mathematical expectation (Lebesgue integral by probabilistic measure)

интеграл Лебега	-Lebesgue integral
математическое ожидание	-mathematical expectation, expectation
среднее значение	-expectation, mean value, mean
интегрируемость	-integrability, summability
квазиинтегрируемость	-quasiintegrability
корректность	-correctness
неотрицательная случайная величина	-nonnegative random variable
положительный	-positive
интеграл Римана	-Riemann integral

§10. Convergence of sequence of random variables

почти наверное	-almost surely, everywhere
равный почти наверное	-equal almost surely
конечный почти наверное	-almost surely finite
эквивалентность	-equivalence
отношение эквивалентности	-equivalence relation
рефлексивность	-reflexivity
симметричность	-symmetry
транзитивность	-transitivity
фундаментальная последовательность (последовательность Коши)	-Cauchy sequence
критерий Коши	-Cauchy criterian
сходимость почти наверное	-convergence almost surely
сходимость по вероятности	-convergence in probability
сходимость по мере	-convergence in measure

§11. Convergence of distributions of random variables

слабая сходимость (сходимость по распределению)	-weak convergence
равномерное распределение	-uniform distribution
характеристическая функция	-characteristic function
преобразование Фурье	-Fourier transform
теорема непрерывности	-continuity theorem
формула обращения	-inversion formula
польское пространство	-Polish space

§12. Measures

мера	-measure
положительная мера	-positive measure
конечная мера	-finite measure
ограниченная мера	-bounded measure
мера Лебега	-Lebesgue measure
считающая мера	-countiny measure
заряд (знакопеременная мера)	-charge
разложение Жордана	-Jordan decomposition
разложение в ряд	-expansion
абсолютная непрерывность	-absolute continuity
сингулярность	-singular
взаимная сингулярность	-mutually singular
неопределенный интеграл	-indefinite integral

§13. Density functions

плотность	-density
теорема Радона-Никодима	-Radon-Nikodym thorem
производная	-derivative
дискретное распределение	-discrete distribution
абсолютно непрерывное распределение	-absolutely continuous distribution
кривая Кантора	-Cantor curve
доминировать	-dominate
доминированный	-dominated
доминирующий	-dominating
замена переменных	-change of variable
параметрическое пространство	-parametric space

§14. Condition expectation

условное математическое ожидание	-condition expectation
условная вероятность	-conditional probability
формула Байеса	-Bayes formula
относительно σ-алгебры	-with respect to σ-algebra
регулярная условная вероятность	-regular conditional probability

§15. Independence

независимость	-independence
независимый	-independent (events, functions, variable...)
совместная (взаимная) независимость	-mutual independence
попарная независимость	-pairwise independence

§16. Probability on product of two measurable spaces

произведение пространств	-product spaces
координата	-coordinate
сечение	-section
прямоугольная система координат	-Cartesian coordinate system
прямоугольник	-rectangle
переходная вероятность	-transitional probability

§17. Probability on the infinity product of measurable spaces

цилиндр	-cylinder
цилиндрическое множество	-cylindrical set
основание	-base
согласованные распределения	-consistence distributions
теорема Колмогорова	-Kolmogorov theorem
случайный процесс	-stochastic process

Словари

1. К.А.Боровков. Англо-русский, русско-английский словарь по теории вероятностей, статистике и комбинаторике. – М.: ТВП/Philadelphia; SIAM, 1994. – VI, 154с.

2. A.J.Lohwater's Russian-English dictionary of the mathematical sciences. Second edition, edited by R.P.Boas. AMS, Providence, RhodeIsland, 1990.

3. Англо-русский словарь математических терминов. – М.: ИЛ, 1962.