

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО “КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ”

Р.М. ХУСНУТДИНОВ

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

КАЗАНЬ – 2012

*Печатается по решению учебно-методического совета
Института физики
Казанского (Приволжского) федерального университета*

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
X98

Научный редактор
д-р физ.-мат. наук, проф. **Р.Х. Сафаров**

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. (КГЭУ) **А.С. Ситдинов**
канд. физ.-мат. наук, доц. (КФУ) **Ф.М. Гафаров**

Хуснутдинов Р.М. Учебно-методическое пособие “Классическая механика и специальная теория относительности”. – Казань: К(П)ФУ, 2012. – 54 с.

ISBN 978-5-87730-488-8

В данном учебно-методическом пособии представлены задачи по курсу “Классическая механика и СТО”, основные положения и формулы, необходимые для решения задач, а также примеры с решениями типичных задач.

Пособие предназначено для студентов физических факультетов.

ISBN 978-5-87730-488-8

©Р.М. Хуснутдинов, 2012

Оглавление

Предисловие	4
§1. Кинематика материальной точки	5
§2. Динамика материальной точки	11
§3. Движение в полях	16
§4. Движение тел переменной массы	21
§5. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Скобки Пуассона	27
§6. Законы сохранения	35
§7. Релятивистская механика	38
Ответы и указания	45
Приложение	52
Литература	53

Предисловие

Решение физических задач является необходимой практической основой изучения дисциплины “Классическая механика и специальная теория относительности”. Основной целью практических занятий является выработка у студентов приемов и навыков решения задач из разных разделов классической механики. Практические занятия несут в себе функцию закрепления, развития и углубленного освоения основных положений теории. Решение задач способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе. При решении задач студент должен самостоятельно осуществлять ряд мыслительных операций, опираясь на имеющиеся у него знания и умения. Практические занятия позволяют проверить степень усвоения студентами основных разделов теоретического курса.

В данном учебном пособии рассмотрены основные разделы курса “Классическая механика и специальная теория относительности”, такие как, кинематика материальной точки, динамика, движения в полях, функция и уравнение Лагранжа, уравнения Гамильтона, законы сохранения, релятивистская кинематика и динамика. Каждый раздел включает необходимые теоретические сведения, основные понятия и определения, представлены примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

§1. Кинематика материальной точки

1. Положение материальной точки в пространстве задается **радиус-вектором** \vec{r} , который в каждый момент времени направлен из начала некоторой произвольной системы координат (СК) на данную материальную точку.
2. Зависимость от времени радиус-вектора $\vec{r}(t)$ (или координат) определяет **закон движения** материальной точки.
3. **Траектория** материальной точки – это геометрическое место точек концов радиус-вектора $\vec{r}(t)$.
4. **Декартова система координат** (ДСК). Закон движения в ДСК определяется в трехмерном случае тремя скалярными функциями (координатами) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, зависящими от времени t , и выражается равенством:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z.$$

5. **Цилиндрическая система координат** (ЦСК). Переменные ДСК и ЦСК связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < \infty, \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ z = z. \end{cases}$$

Связь между ортами имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi, \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi, \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z. \end{cases}$$

Радиус-вектор будет иметь вид:

$$\vec{r}(t) = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z.$$

6. **Сферическая система координат** (ССК). Переменные ДСК и ССК связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \sin \theta, & 0 \leq \rho < \infty, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, & 0 \leq \phi < 2\pi, \\ z = \rho \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Связь между ортами имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos \phi \sin \theta + \vec{e}_y \sin \phi \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta, \\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos \phi \cos \theta + \vec{e}_y \sin \phi \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta, \\ \vec{e}_\phi = -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi. \end{cases}$$

Радиус-вектор будет иметь вид:

$$\vec{r}(t) = \rho \vec{e}_\rho.$$

7. **Перемещение** материальной точки есть вектор между двумя точками траектории, т.е.

$$\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t).$$

8. **Путь**, пройденный материальной точкой к моменту времени t , определяется как длина участка траектории и выражается через интеграл от модуля скорости ϑ ,

$$s(t) = \int_0^t \vartheta(\tau) d\tau.$$

9. **Мгновенная линейная скорость** материальной точки в момент времени t

$$\vec{\vartheta}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

в криволинейных координатах определяется выражением:

$$\vec{\vartheta} = H_1 \dot{q}_1 \vec{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \vec{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \vec{e}_3.$$

Здесь H_j – коэффициенты Ламэ

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq_j}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_j}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_j}\right)^2}.$$

10. *Секторная скорость* определяется соотношением:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}].$$

Пример 1. Движение материальной точки задано радиус-вектором $\vec{r} = \alpha \left(\vec{i} \sin(\omega t) + \vec{j} \cos(\omega t) \right)$, где α – постоянная. Найти модули векторов скорости и нормального ускорения.

Решение: Сравнивая выражение радиус-вектора, данное в условии задачи, с его координатным представлением, находим, что $x = \alpha \sin(\omega t)$, $y = \alpha \cos(\omega t)$. Компоненты скорости можно найти как:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha\omega \cos(\omega t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -\alpha\omega \sin(\omega t).$$

Компоненты ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\alpha\omega^2 \sin(\omega t), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\alpha\omega^2 \cos(\omega t).$$

Модуль мгновенной скорости:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \alpha\omega \left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) \right) = \alpha\omega.$$

Отсюда следует, что тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$

т.е. нормальное ускорение совпадает с полным ускорением. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha\omega^2$$

также постоянен. Постоянство скорости и нормального ускорения есть свидетельство постоянства радиуса кривизны R траектории движения. Движение по кривой с постоянным радиусом кривизны – это движение по окружности. Таким образом, участие точки в двух взаимно-перпендикулярных гармонических колебаниях приводит к движению по окружности.

Ответ: $v = \alpha\omega$, $a = \alpha\omega^2$.

Пример 2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота по закону $\omega = \alpha\varphi$. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0$. Найти зависимость от времени угла поворота φ и угловой скорости ω .

Решение: Для угла φ можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha\varphi.$$

Разделим переменные интегрирования и проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \alpha \int dt.$$

Результат интегрирования:

$$\varphi = C \exp(\alpha t),$$

где C – постоянная интегрирования. Используя начальные условия и выполняя дифференцирование по времени, получим:

$$\varphi = \varphi_0 \exp(\alpha t), \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha\varphi_0 \exp(\alpha t).$$

Ответ: $\varphi = \varphi_0 \exp(\alpha t)$, $\omega = \alpha\varphi_0 \exp(\alpha t)$.

Пример 3. Частица движется в плоскостях x , y из точки с координатами $x = y = 0$ со скоростью $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, где a и b – некоторые постоянные, \vec{i} и \vec{j} – орты осей x и y . Найти уравнение ее траектории $y(x)$.

Решение: Запишем приращения y - и x -координат частицы за промежуток времени dt .

$$dy = v_y dt, \quad dx = v_x dt,$$

где $v_y = bx$, $v_x = a$. Взяв их отношение, получим

$$dy = (b/a)xdx.$$

Интегрируем это уравнение:

$$y = \int_0^x (b/a)xdx = \frac{bx^2}{2a},$$

т.е. траекторией точки будет парабола.

Ответ: $y = (b/2a)x^2$.

Задачи

1. Вычислить скорость материальной точки в полярных координатах, если известна связь полярных и декартовых координат: $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$.
2. Определить ускорение пули перфоратора в глинистом растворе, если закон движения пули $x = \frac{1}{k} \ln(k\vartheta_0 t - 1)$, где k – постоянный коэффициент пропорциональности, ϑ_0 – начальная скорость пули.
3. Частица, несущая электрический заряд e , движется в однородном электрическом поле с переменной напряженностью $E = A \sin(kt)$, где A и k – постоянные коэффициенты. Уравнение движения частицы имеет вид $x = \frac{eA}{mk} \left(t - \frac{\sin(kt)}{k} \right)$, где m – постоянная величина. Определить величину скорости точки, ее начальное значение, а также наибольшее и наименьшее значения скорости.
4. Точка M , движущаяся с постоянной по величине скоростью ϑ , описывает цепную линию, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{\alpha}{2} \left(e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha} \right).$$

Определить проекции скорости и ускорения, а также полное ускорение точки как функции координат.

5. Даны уравнения движения снаряда

$$x = \vartheta_0 t \cos \alpha, \quad y = \vartheta_0 t \sin \alpha - gt^2/2,$$

где ϑ_0 – начальная скорость снаряда, α – угол между ϑ_0 и горизонтальной осью x , g – ускорение силы тяжести. Определить траекторию движения снаряда, высоту H , дальность L и время T полета снаряда.

6. Точка движется по винтовой линии

$$x = \alpha \cos(kt), \quad y = \alpha \sin(kt), \quad z = \vartheta t.$$

Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

7. Даны уравнения движения точки:

$$x = 2\alpha \cos^2(kt/2), \quad y = \alpha \sin(kt),$$

где α и k – положительные постоянные. Определить траекторию и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки

8. По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$$x = R \cos^2(kt/2), \quad y = (R/2) \sin(kt), \quad z = R \sin(kt/2),$$

найти ее траекторию и уравнения движения в сферических координатах.

9. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = a \sin(kt)$. Определить амплитуду a и круговую частоту k , если при $x = x_1$ скорость $\vartheta = \vartheta_1$, а при $x = x_2$ скорость $\vartheta = \vartheta_2$.

10. Частица движется в положительном направлении вдоль оси Ox так, что ее скорость меняется по закону $\vartheta = \alpha x$, где α – размерная постоянная. Принимая во внимание начальные условия ($t = 0, x = x_0$), найти:

а. зависимость от времени мгновенной скорости и ускорения частицы;

б. среднюю величину скорости частицы за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

11. Найти траекторию $y(x)$, мгновенную и среднюю скорость, мгновенное и среднее ускорение материальной точки массы m , если ее декартовы координаты меняются по закону:

1. $x = \alpha(1 - \lambda \cos(\omega t)), \quad y = \beta(1 - \cos(\omega t)), \quad 0 < \lambda < 1;$

2. $x = \alpha(1 - \lambda \cos(\omega t)), \quad y = \beta(1 - \sin(\omega t)), \quad 0 < \lambda < 1.$

§2. Динамика материальной точки

Механическое состояние свободно движущейся материальной точки характеризуется заданием 3 координат и их производных по времени. Закон изменения состояния материальной точки определяется уравнениями Ньютона:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

где \vec{F} – равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку. Эти уравнения позволяют решать два типа задач:

1. *Прямая задача динамики:* по заданным силам определить характер движения тела.
2. *Обратная задача динамики:* по заданному характеру движения определить действующие на тело силы.

Пример 1. Сила трения лодки массой m о воду прямо пропорциональна квадрату ее скорости (коэффициент пропорциональности k). Лодка двигалась со скоростью v_0 . Найти время, в течение которого скорость лодки уменьшится в два раза.

Решение: Для описания движения лодки воспользуемся вторым законом Ньютона в дифференциальной форме:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \int dt,$$

получим

$$-\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t + C,$$

где C – постоянная интегрирования. Она может быть вычислена из условия, что в момент времени $t = 0$ скорость лодки составляла v_0 . После подстановки находим $C = -1/v_0$, откуда $-\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t - \frac{1}{v_0}$. Для определения времени, за которое скорость лодки уменьшается

в два раза, подставляя в полученное уравнение $\vartheta = \vartheta_0/2$, получим $t = \frac{m}{k\vartheta_0}$.

Ответ: $t = \frac{m}{k\vartheta_0}$.

Пример 2. На горизонтальном столе лежит брусок массой m . В момент времени $t = 0$ к нему под углом α к горизонту прикладывают силу \mathcal{F} , зависящую от времени $\mathcal{F} = kt$, где k – постоянная. Определить скорость бруска в момент отрыва, а также путь, который он пройдет к этому моменту.

Решение: Уравнение движения по горизонтали:

$$m \frac{d\vartheta}{dt} = \mathcal{F} \cos \alpha.$$

Отрыв от стола свидетельствует о том, что между бруском и столом нет взаимодействия, и сила нормального давления бруска на стол составляет нуль. Тогда условие отрыва отвечает равенству двух сил – вертикальной проекции действующей силы и силы тяжести:

$$mg = \mathcal{F} \sin \alpha.$$

Решая оба уравнения, находим ускорение:

$$a = \frac{kt \cos \alpha}{m}.$$

Момент t_0 отрыва от стола: $t_0 = \frac{mg}{k \sin \alpha}$. С учетом формул кинематики можно записать выражения для скорости и пройденного расстояния как функции времени (подстановка в эти функции момента отрыва t_0 даст скорость в момент отрыва и пройденное до отрыва расстояние):

$$\begin{aligned} \vartheta &= \int_0^{t_0} a dt = \frac{k \cos \alpha}{m} \int_0^{t_0} t dt = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2k \sin^2 \alpha}, \\ s &= \int_0^{t_0} \vartheta dt = \frac{k \cos \alpha}{2m} \int_0^{t_0} t^2 dt = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6k^2 \sin^3 \alpha}, \end{aligned}$$

Ответ: $\vartheta = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2k \sin^2 \alpha}$, $s = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6k^2 \sin^3 \alpha}$.

Пример 3. Частица массой m движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$. В момент времени $t = 0$ известны ее радиус-вектор $\vec{r} = 0$ и скорость $\vec{v} = 0$. Найти положение частицы, т.е. радиус-вектор \vec{r} в зависимости от времени.

Решение: Согласно основному уравнению динамики, ускорение равняется

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_0}{m} \sin(\omega t).$$

Отсюда находим элементарное приращение вектора скорости $d\vec{v}$ за время dt и затем приращение этого вектора за время от 0 до t :

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \frac{\vec{F}_0}{m} \int_0^t \sin(\omega t) dt.$$

Учитывая, что $v(0) = 0$, после интегрирования получим

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega} \left(1 - \cos(\omega t) \right).$$

Теперь найдем $d\vec{r}$ – элементарное приращение, или приращение радиус-вектора \vec{r} частицы за время dt :

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) dt.$$

Приращение же радиус-вектора за время от 0 до t

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega} \int_0^t \left(1 - \cos(\omega t) \right) dt.$$

В результате интегрирования с учетом начального условия $\vec{r}(0) = 0$, находим

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega^2} \left(\omega t - \sin(\omega t) \right).$$

Ответ:
$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega^2} \left(\omega t - \sin(\omega t) \right).$$

Задачи

1. Тело брошено под углом α к горизонту. Определить наибольшую высоту и дальность полета, если начальная скорость тела v_0 .
2. Тяжелое тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить максимальную высоту, которой достигнет тело и дальность полета. Сопротивление воздуха не учитывать.
3. Пуля массой 20 г в момент удара о стенку под углом 90° имела скорость 300 м/с. Углубившись в стенку на какое-то расстояние, она остановилась через время $5 \cdot 10^{-4}$ с. Определить:
 - а. среднюю силу сопротивления стенки F_c и расстояние l , на которое пуля проникла;
 - б. с какой скоростью v_k пуля вылетит из стенки, если стенка будет иметь толщину 5 см.
4. Тело массой m начинает двигаться из начала координат в момент времени $t = 0$ под действием силы $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cos(\omega t)$, где \mathcal{F}_0 и ω – постоянные. Найти путь, пройденный телом до первой остановки.
5. Из спортивного арбалета вертикально вверх выпущена стрела массой m со скоростью v_0 . Сила трения стрелы о воздух прямо пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности k). Найти время подъема стрелы до верхней точки траектории.
6. Тело массой m начинает двигаться из начала координат в момент времени $t = 0$ со скоростью v_0 под действием силы $\mathcal{F} = kv$, где k – постоянная, v – скорость тела. Найти скорость тела и пройденный им путь в зависимости от времени.
7. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью v_0 , первый под углом α , второй под углом β к горизонту (азимут один и тот же). Найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

8. Пуля, пробив доску толщиной h , изменила свою скорость от v_0 до v . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной некоторой степени скорости v^α ($\alpha > 1$).
9. Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = a \cos(kt)$, $y = b \sin(kt)$. Определить силу F , вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.
10. Определить силу сопротивления воды движению лодки веса P , если ее движение происходит согласно уравнению

$$x = \frac{P}{ag} v_0 \left[1 - \exp\left(\frac{-ag}{P} t\right) \right],$$

где v_0 – начальная скорость движения, a – постоянный коэффициент. Сила сопротивления движению является функцией только скорости лодки.

11. Воздушный шар массой m падает вниз. На высоте H скорость шара равна v_0 , а ускорение a_0 . Какой балласт необходимо сбросить, чтобы шар мягко ($v = 0$) приземлился? Силу сопротивления воздуха считать постоянной.
12. Автомобиль массой m тормозит, двигаясь по горизонтальной прямой. Сила сопротивления воздуха зависит от скорости, $R_c = kv$, коэффициент трения f . За какое время скорость автомобиля уменьшится с v_0 до v_1 ?
13. Материальная точка массой m движется из состояния покоя по гладкой криволинейной направляющей, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы $F = Q \sin(kt)$. Сила образует постоянный угол α с вектором скорости. Определить скорость точки в момент времени t .
14. Автомобиль массой m_1 без груза разгоняется с места до заданной скорости за время t_1 . Сопротивление пропорционально скорости. За какое время разгоняется до той же скорости автомобиль с грузом m_2 ?

§3. Движение в полях

Потенциальная энергия в *центральной поле* $U(r)$ зависит только от расстояния её до центра поля, $r = |\vec{r}|$. Соответствующая сила

$$\vec{F} = -\text{grad}U(r) = -\frac{\vec{r} dU}{r dr}$$

направлена по радиус-вектору \vec{r} и имеет нулевой момент относительно центра поля,

$$\vec{K} = [\vec{r}, \vec{F}],$$

что приводит к сохранению момента импульса

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = \text{const.}$$

Это означает, что частица движется в одной и той же плоскости, перпендикулярной вектору \vec{M} . Вводя в этой плоскости полярные координаты (r, φ) , получим выражение для функции Лагранжа в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Цикличность координаты φ соответствует сохранению момента импульса

$$\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Уравнение движения и уравнение траектории частицы следует из закона сохранения энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E = \text{const.}$$

Подставляя сюда $\dot{\varphi} = \mathcal{M}/(mr^2)$ и разрешая данное уравнение относительно \dot{r} , получаем:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{\mathcal{M}^2}{m^2 r^2}}.$$

Выбор знака перед корнем определяется направлением движения частицы ($\dot{r} > 0$ соответствует удалению от центра, $\dot{r} < 0$ – приближению частицы к центру). Интеграл от этого уравнения определяет

закон радиального движения частицы. Область доступных для движения значений координаты r ограничена условием положительности подкоренного выражения:

$$E \geq U_{eff},$$

где $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{\mathcal{M}}{2mr^2}$ – эффективный потенциал для радиального движения.

Пример 1. Материальная точка M движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорциональной ее расстоянию до неподвижного центра: $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$, где \vec{r} – радиус-вектор точки, m – ее масса, k^2 – постоянный коэффициент. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение $M_0 \left(a, -\frac{g}{k^2} \right)$ и имела скорость \vec{v}_0 , направленную по вертикали вверх.

Решение: Начало осей декартовых координат взято в неподвижном центре O , к которому притягивается точка M . Ось x проходит по горизонтали вправо, ось y – по вертикали вверх. Запишем начальные условия:

$$t = 0 \quad x = a, \quad y = -\frac{g}{k^2}, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = v_0.$$

К материальной точке приложены следующие силы: $\vec{P} = m\vec{g}$ – ее вес, $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$ – сила притяжения, направленная к неподвижному центру O . Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - k^2 m \vec{r}.$$

Проектируя на оси x и y , получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g. \tag{2}$$

Уравнение (1) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составим характеристическое уравнение $\lambda^2 +$

$k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt), \quad (3)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Для определения C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin(kt) + C_2 k \cos(kt) \quad (4)$$

и затем подставим в уравнение (3) $t = 0, x = a$, а в уравнение (4) $t = 0, \dot{x} = 0$. Находим: $C_1 = a, C_2 = 0$. Внося эти значения C_1 и C_2 в уравнение (3), имеем:

$$x = a \cos(kt). \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение (2), в отличие от дифференциального уравнения (1), является неоднородным. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \quad (6)$$

где y_2 – частное решение неоднородного уравнения, а y_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (7)$$

Заметив, что дифференциальное уравнение (7) аналогично дифференциальному уравнению (1), запишем:

$$y = C_3 \cos(kt) + C_4 \sin(kt). \quad (8)$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому ищем частное решение в виде $y_2 = A$, где $A = \text{const}$. Положив в уравнении (2) $y = A$, находим:

$$y_2 = -\frac{g}{k^2}. \quad (9)$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 \cos(kt) + C_4 \sin(kt) - \frac{g}{k^2}. \quad (10)$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим:

$$\dot{y} = -C_3 k \sin(kt) + C_4 k \cos(kt). \quad (11)$$

Затем подставим в уравнение (10) $t = 0$, $y = -\frac{g}{k^2}$, а в уравнение (11) $t = 0$, $\dot{y} = v_0$. Тогда $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{v_0}{k}$. Подставив эти значения в уравнение (10), получим:

$$y = \frac{v_0}{k} \sin(kt) - \frac{g}{k^2}. \quad (12)$$

Замечая, что

$$\cos(kt) = \frac{x}{a}, \quad \sin(kt) = \frac{k}{v_0} \left(y + \frac{g}{k^2} \right),$$

получим искомое уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{k^2} \right)^2}{\left(\frac{v_0}{k} \right)^2} = 1.$$

Ответ: Траектория движения частицы – эллипс с центром в точке $A\left(0, -\frac{g}{k^2}\right)$. Одна полуось эллипса равна a , а другая полуось равна $\frac{v_0}{k}$.

Задачи

1. Частица, имеющая массу m и заряд e , влетает в однородное стационарное электрическое поле \vec{E} со скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению поля. Определить траекторию движения частицы.
2. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное тормозящее электрическое поле \vec{E} со скоростью v_0 , параллельной направлению поля. Определить время, через которое частица вернется в начальную точку.
3. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное стационарное магнитное поле \vec{H} со скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению магнитного поля. Определить траекторию движения частицы.

4. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное электрическое поле, меняющееся по закону $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ со скоростью ϑ_0 , перпендикулярной к направлению электрического поля. Определить траекторию движения частицы.
5. Частица массы m , имеющая заряд e , движется между обкладками плоского конденсатора. Напряженность электрического поля в конденсаторе $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, где \vec{E}_0 и ω – константы. В момент времени $t = 0$ радиус-вектор частицы и скорость имели значения $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Найти $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$.
6. Частица массы m движется под влиянием силы, пропорциональной расстоянию от некоторой неподвижной точки \mathcal{O} и направленной всегда в эту точку: $\vec{F} = -k\vec{r}$. Найти радиус-вектор и скорость частицы как функции времени, если в начальный момент времени $t = 0$ она находилась в положении \vec{r}_0 и имела скорость \vec{v}_0 относительно системы отсчета, связанной с точкой \mathcal{O} . Получить уравнение траектории.
7. Частица массы m движется в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$. Найти радиус-вектор $\vec{r}(t)$ и скорость $\vec{v}(t)$ частицы как функции времени, если $\vec{r}_0 = \{0, 0, r_0\}$ и $\vec{v}_0 = \{\vartheta_0 \cos \alpha, 0, \vartheta_0 \sin \alpha\}$. Определить траекторию движения частицы.
8. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если полная энергия ее равна нулю.
9. Найти выражение для силы, под действием которой материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = a \operatorname{ch}(kt)$, $y = b \operatorname{sh}(kt)$.
10. Частица движется в одномерной прямоугольной потенциальной “яме” с бесконечно высокими “стенками”. Ширина ямы a , полная энергия частиц E . Вычислить среднюю силу, с которой частица действует на стенку.
11. Найти закон движения заряда в магнитном поле $\vec{H} = \{0, 0, H_0 \times \cos(y/a)\}$, если $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = \{0, a\omega, 0\}$, где $\omega = \frac{eH_0}{mc}$.

§4. Движение тел переменной массы

Уравнение Мещерского – основное уравнение в механике тел переменной массы, полученное И. Мещерским в 1904 году:

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{ex} + \frac{dm}{dt} \vec{u}.$$

Здесь m – переменная масса тела,

v – скорость движения тела переменной массы,

F^{ex} – внешние силы (сопротивление среды, сила тяжести и т.п.),

u – относительная скорость отделяющихся частиц,

$\frac{dm}{dt}$ – расход массы.

Пример 1. Ракету массой M запускают вертикально. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна u . При каком расходе топлива (массы в единицу времени) сила тяги двигателя будет достаточна, чтобы:

- а. уравновесить действующую на ракету силу тяжести;
- б. сообщить ракете ускорение a .

Решение:

- а. Если расход топлива равен $\frac{dm}{dt} = \mu$, а скорость истечения газов из сопла u , то за единицу времени ракете сообщается импульс μu , который, согласно законам Ньютона, равен реактивной силе. Поэтому:

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{ex} - \mu u.$$

По условию задачи

$$\vec{F}^{ex} - \mu u = 0$$

и учитывая, что

$$\vec{F}^{ex} = mg,$$

найдем расходе топлива (массы в единицу времени):

$$\mu = \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{u}.$$

б. По условию задачи

$$ma = \mathcal{F}^{ex} - \mu u.$$

Откуда,

$$\mu = \frac{dm}{dt} = \frac{\mathcal{F}^{ex} - ma}{u}.$$

Ответ: $\mu = mg/u$, $\mu = \frac{\mathcal{F}^{ex} - ma}{u}$

Пример 2. Определите скорость ракеты в момент полного выгорания топлива, если начальная масса ракеты $m_0 = 100$ кг, масса заряда $m_f = 50$ кг, относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 800$ м/с. Сопротивление воздуха и ускорение силы тяжести не учитывать.

Решение: Запишем уравнение Мещерского

$$\frac{m d\vartheta}{dt} = \mathcal{F}^{ex} - u \frac{dm}{dt},$$

где m – текущая масса ракеты, dm – изменение массы ракеты за бесконечно малое время dt , $d\vartheta$ – изменение скорости ракеты за время dt . По условию задачи величина $\mathcal{F}^{ex} = 0$. Далее, разделяя переменные и выполняя интегрирование

$$\frac{1}{u} \int_0^{\vartheta_T} d\vartheta = - \int_{m_0}^{m_0 - m_f} \frac{dm}{m},$$

получим

$$\vartheta_T = u \ln \left| \frac{m_0}{m_0 - m_f} \right|.$$

Ответ: $\vartheta_T = u \ln \left| \frac{m_0}{m_0 - m_f} \right| = 555$ м/с.

Пример 3. Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью u . Найти:

- а. сколько времени ракета сможет оставаться на этой высоте, если начальная масса топлива составляет η -ю часть ее массы (без топлива);

- б.** какую массу $\mu(t)$ газов должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0 .

Решение:

- а.** В данном случае $d\vartheta/dt = 0$ и уравнение движения примет вид:

$$mg + \frac{dm}{dt}u = 0,$$

или после разделения переменных

$$\frac{dm}{m} = -\frac{g}{u}dt. \quad (1)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{g}{u}t. \quad (2)$$

Отсюда

$$t = \frac{u}{g} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta),$$

где учтено $\eta = (m_0 - m)/m$.

- б.** Из уравнения (1) предыдущего пункта следует, что

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{g}{u}m,$$

где m находим из (2): $m = m_0 e^{-gt/u}$. В результате

$$\mu = \frac{g}{u}m_0 e^{-gt/u}.$$

Ответ: **а.** $t = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta)$; **б.** $\mu = \frac{g}{u}m_0 e^{-gt/u}$.

Пример 4. Космический корабль массы m_0 движется в отсутствии внешнего силового поля с постоянной скоростью ϑ_0 . Для изменения направления движения был включен реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью u , причем вектор \vec{u} все время перпендикулярен

направлению движения корабля. В конце работы двигателя масса корабля стала равной m . На какой угол изменилось направление движения корабля за время работы двигателя?

Решение: Найдем приращение вектора скорости корабля за промежуток времени dt . Умножив обе части уравнения

$$\frac{m d\vec{\vartheta}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}^{ex} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

на dt и учитывая, что $\vec{\mathcal{F}}^{ex} = 0$, получим

$$d\vartheta = \frac{dm}{m} u.$$

Здесь $dm < 0$. Так как вектор \vec{u} все время перпендикулярен вектору $\vec{\vartheta}$, то модуль вектора ϑ не меняется и остается равным своему первоначальному значению: $\vartheta = \vartheta_0$. Отсюда следует, что угол поворота $d\alpha$ вектора $\vec{\vartheta}$ за время dt определяется как

$$d\alpha = \frac{|d\vartheta|}{\vartheta_0} = \frac{u}{\vartheta_0} \left| \frac{dm}{m} \right|.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$\alpha = \frac{u}{\vartheta_0} \ln(m_0/m).$$

Ответ: $\alpha = \frac{u}{\vartheta_0} \ln(m_0/m).$

Задачи

1. Определить закон изменения массы ракеты при вертикальном подъеме в однородном поле тяжести:

- а.** с постоянной скоростью;
- б.** с постоянным ускорением.

Скорость истечения газов постоянна.

2. Составить дифференциальное уравнение восходящего движения ракеты. Эффективную скорость истечения газов u считать

постоянной. Масса ракеты изменяется по закону $m = m_0 f(t)$ (закон сгорания). Сила сопротивления воздуха является заданной функцией скорости и положения ракеты: $\mathcal{R}(x, \dot{x})$.

3. Ракета начальной массы m_0 поднимается вертикально вверх в однородном поле тяжести с постоянным ускорением ng (g – ускорение земного тяготения). Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость истечения газов u постоянной, определить:
 - а. закон изменения массы ракеты;
 - б. закон изменения массы ракеты при отсутствии поля тяготения.
4. Ракета движется в однородном поле силы тяжести вверх с постоянным ускорением a . Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость истечения газов u постоянной, определить время T , за которое масса ракеты уменьшится в два раза.
5. Эффективная скорость истечения газов из ракеты $u = 2.4$ км/с. Какой процент должен составлять вес топлива от стартового веса ракеты, чтобы ракета, движущаяся вне поля тяготения и атмосферы, приобрела скорость 9 км/с?
6. Тело переменной массы, имея начальную скорость, равную нулю, движется с постоянным ускорением a по горизонтальным направляющим. Эффективная скорость истечения газов u постоянна. Определить, пренебрегая сопротивлением, путь, пройденный телом до того момента, когда его масса уменьшится в k раз.
7. Какой путь пройдет ракета на прямолинейном активном участке в пустоте и при отсутствии сил тяготения за время разгона от нулевой начальной скорости до скорости, равной эффективной скорости истечения продуктов сгорания u , если известна начальная масса ракеты m_0 и секундный расход β ?

8. Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх в однородном поле тяжести. Первоначальная масса ракеты (с топливом) равна m_0 . Скорость газовой струи постоянна и равна u относительно ракеты. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость v ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t .
9. Железнодорожная платформа в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы тяги \vec{F} . Пренебрегая трением в осях, найти зависимость от времени скорости платформы $v(t)$, если:
- платформа нагружена песком, который высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью μ , а в момент $t = 0$ масса платформы с песком равна m_0 ;
 - на платформу, масса которой m_0 , в момент $t = 0$ начинает высыпаться песок из неподвижного бункера так, что скорость погрузки постоянна и равна μ .
10. Ракета с запасом топлива имеет начальную массу m_0 . Топливо сжигается с постоянным расходом, так что $dm/dt = -c$, где m – мгновенная масса ракеты. Продукты сгорания выбрасываются с постоянной относительно ракеты скоростью u . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость v ракеты, движущейся вертикально вверх, в произвольный момент времени t . Ускорение силы тяжести g считать постоянным.
11. Ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести. Найти скорость и положение ракеты после сгорания топлива массы M . Скорость истечения газов u постоянна и постоянен расход топлива $dm/dt = k = \text{const}$. Начальная масса ракеты вместе с топливом равна m_0 .

§5. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Скобки Пуассона

1. Уравнения движения в переменных q_i называются **уравнениями Лагранжа**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0,$$

где $\mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = \mathcal{T}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) - \mathcal{U}(q_\alpha, t)$ – функция Лагранжа, \mathcal{T} и \mathcal{U} – соответственно, кинетическая и потенциальная энергия материальной точки ($\alpha = 1, 2, \dots, s$, где s – число степеней свободы).

2. В каноническом (гамильтоновом) формализме механическое состояние системы определяется заданием обобщенных координат q_α и обобщенных импульсов p_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$, где s – число степеней свободы). По определению

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (1)$$

Переменные q_α и p_α называются канонически сопряженными переменными. Если ввести **функцию Гамильтона** \mathcal{H} , определяемую формулой

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{\beta=1}^s p_\beta \dot{q}_\beta - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad (2)$$

в правой части которой величины \dot{q} выражены как функции p , q и t с помощью соотношения (1), то уравнения для $p_\alpha(t)$ и $q_\alpha(t)$ (**уравнения Гамильтона**) имеют вид:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (3)$$

Выражение (2) можно представить в виде:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \mathcal{T}(p, q) + \mathcal{U}(q, t),$$

\mathcal{T} и \mathcal{U} – кинетическая и потенциальная энергии системы.

3. **Скобкой Пуассона** двух произвольных функций импульсов и координат, $\phi(p, q, t)$ и $\varphi(p, q, t)$, называется величина

$$\{\phi, \varphi\} = \sum_{\alpha}^s \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial \phi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \right\}.$$

Основные свойства скобок Пуассона:

а. Антисимметричность:

$$\{\phi, \varphi\} = -\{\varphi, \phi\}.$$

б. Для $c = \text{const}$:

$$\{\phi, c\} \equiv 0.$$

в. Дистрибутивность:

$$\{c_1\phi + c_2\varphi, \psi\} = c_1\{\phi, \psi\} + c_2\{\varphi, \psi\},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

г. Распределительное свойство:

$$\{\phi \cdot \varphi, \psi\} = \phi\{\varphi, \psi\} + \varphi\{\phi, \psi\}.$$

д. Дифференцирование:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi, \varphi \right\} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t}, \varphi \right\} + \left\{ \phi, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

е. Для $\varphi = p_{\alpha}$:

$$\{\phi, p_{\alpha}\} = \frac{\partial \phi}{\partial q_{\alpha}}.$$

ж. Для $\varphi = q_{\alpha}$:

$$\{\phi, q_{\alpha}\} = -\frac{\partial \phi}{\partial p_{\alpha}}.$$

з. Фундаментальные скобки Пуассона:

$$\{p_{\alpha}, q_{\beta}\} = \delta_{\alpha, \beta}, \quad \{p_{\alpha}, p_{\beta}\} = \{q_{\alpha}, q_{\beta}\} = 0.$$

и. Тождество Якоби:

$$\{\phi, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, \{\psi, \phi\}\} + \{\psi, \{\phi, \varphi\}\} = 0.$$

Для произвольной функции $f(q, p, t)$ имеем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\}.$$

4. Преобразование от переменных p, q к новым переменным

$$\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha(q, p, t), \quad \mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha(q, p, t)$$

называется *каноническим преобразованием*, если уравнения для \mathcal{P}, \mathcal{Q} снова имеют вид уравнений Гамильтона

$$\frac{d\mathcal{P}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{Q}_\alpha}, \quad \frac{d\mathcal{Q}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{P}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

$\mathcal{H}' \neq \mathcal{H}$, если \mathcal{P} и \mathcal{Q} явно зависят от времени. Для всякого канонического преобразования существует *производящая функция*, из которого оно может быть получено. Производящие функции могут быть заданы как функции одного из четырех наборов независимых переменных:

$$q_\alpha, \mathcal{Q}_\beta; \quad q_\alpha, \mathcal{P}_\beta; \quad p_\alpha, \mathcal{Q}_\beta; \quad p_\alpha, \mathcal{P}_\beta.$$

Пусть, например, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q_\alpha, \mathcal{Q}_\beta, t)$ – производящая функция в переменных $q_\alpha, \mathcal{Q}_\beta$. Тогда можно показать, что

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_\alpha}, \quad \mathcal{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{Q}_\alpha}, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}.$$

Пример 1. Составить функцию Лагранжа и получить уравнения Лагранжа для следующих свободных систем:

- а. Свободно двигающаяся частица;
- б. Линейный гармонический осциллятор;
- в. Частица, двигающаяся в центрально-симметричном поле под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра.

Решение:

- а.** Так как на свободную частицу не действуют никакие силы, то ее функция Лагранжа будет состоять только из кинетической энергии:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Составляя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0,$$

найдем

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, используя начальные условия ($\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$), получим:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

- б.** *Линейным гармоническим осциллятором* называют частицу массы m ,двигающуюся по прямой под действием силы $F = -kx$ ($k = \text{const}$). Используя связь силы с потенциальной энергией

$$\vec{F} = -\text{grad}U(x),$$

получим

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Так как кинетическая энергия осциллятора

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

то для функции Лагранжа найдем

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Составляя уравнение Лагранжа, получим уравнение движения осциллятора в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где $\omega^2 = k/m$.

в. Запишем силу действующую на частицу, движущуюся в центрально-симметричном поле в полярной системе координат:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{\rho^2}\vec{e}_\rho,$$

где α – константа взаимодействия. Полагая потенциал равным нулю в бесконечно удаленной точке от силового центра, для потенциальной энергии частицы найдем

$$U(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Так как квадрат скорости частицы в полярной системе координат имеет вид $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$, то для функции Лагранжа получаем выражение

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho}.$$

Составляя уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0,$$

найдем уравнения второго порядка

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0, \quad m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0,$$

которые являются обычными уравнениями движения частицы в полярной системе координат

$$ma_\rho = -\frac{\alpha}{\rho^2}, \quad ma_\varphi = 0,$$

где a_ρ и a_φ – радиальное и угловое ускорения частицы.

Пример 2. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения для материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести, в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Для случая декартовой системы проинтегрировать уравнения движения при произвольных начальных условиях.

Решение: Для построения функции Гамильтона используем соотношение (2), заменив в нем обобщенные скорости \dot{q}_α на импульсы p_α с помощью (1).

а. В декартовых координатах:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Тогда с помощью (2), находим

$$\mathcal{H}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz.$$

Подставляя это выражение в (3), получим уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0, & \dot{p}_y = 0, & \dot{p}_z = -mg, \\ \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{y} = \frac{p_y}{m}, & \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \end{cases}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} p_x(t) = p_{0x}, & p_y(t) = p_{0y}, & p_z(t) = p_{0z} - mgt, \\ x(t) = \frac{p_{0x}t}{m} + x_0, & y(t) = \frac{p_{0y}t}{m} + y_0, & z(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{p_{0z}t}{m} + z_0. \end{cases}$$

Здесь постоянные p_{0x} , p_{0y} , p_{0z} , x_0 , y_0 , z_0 определяют значения импульса и координат в начальный момент времени.

б. В цилиндрических координатах:

$$\mathcal{L}(\varrho, \varphi, z, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

$$p_\varrho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varrho}} = m\dot{\varrho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

$$\mathcal{H}(\varrho, \varphi, z, p_\varrho, p_\varphi, p_z) = \frac{1}{2m} \left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2 \right) + mgz.$$

в. В сферических координатах:

$$\mathcal{L}(\rho, \phi, \theta, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi \right) - mg\rho \cos \phi,$$

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \sin^2 \phi.$$

$$\mathcal{H}(\rho, \phi, \theta, p_\rho, p_\phi, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_\theta^2}{\rho^2 \sin^2 \phi} \right) + mg\rho \cos \phi.$$

Задачи

1. Составить функцию Лагранжа для математического маятника с массой m и длиной l при отклонении от положения равновесия на угол φ .
2. Записать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l , точка подвеса которого движется в горизонтальной плоскости по закону $x = x(t)$.
3. Записать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l , точка подвеса которого движется в вертикальной плоскости по закону $y = y(t)$ и $x = x(t)$.
4. Составить уравнение Лагранжа для материальной точки с массой m в поле силы тяжести.
5. Записать уравнения движения для малых колебаний математического маятника длины l , точка подвеса которого колеблется по горизонтали по закону $x = a \cos(\gamma t)$.
6. Найти функцию Лагранжа, описываемой гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2} + \frac{1}{2} \left(q_1 + q_2 \right)^2.$$

7. Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтониана равна

а. $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{p}, \vec{a}), \quad (\vec{a} = \text{const});$

б. $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r})}.$

8. Построить функцию Гамильтона и выписать канонические уравнения для ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого имеет вид:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2,$$

где ω , α , β – постоянные величины.

9. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса и момента количества движения $\vec{\mathcal{M}} = [\vec{r}, \vec{p}]$.
10. Определить скобки Пуассона, составленные из компонент полного вектора момента количества движения системы N -частиц
- $$\vec{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$
11. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа; q_1, q_2 – обобщенные координаты.
- а. $\mathcal{L} = 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 2q_1^2 + 4q_2^2$;
- б. $\mathcal{L} = 2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 3q_1^2 + 4q_1q_2$;
- в. $\mathcal{L} = 2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 4q_2^2 + 2q_1q_2$.

§6. Законы сохранения

Законы сохранения физических величин приводят к интегралам движения. *Интегралом движения* называется такая функция времени, координат и скоростей частиц, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями. Интегралы движения, содержащие скорости частиц, называются *первыми интегралами движения*. *Вторыми интегралами движения* называются такие функции времени, координат частиц и произвольных констант, которые при движении системы сохраняют постоянные значения.

Основные свойства пространства и времени и связанные с ними интегралы движения.

1. Из *однородности времени* следует закон сохранения полной энергии механической системы $\left(\frac{dE}{dt} = 0\right)$.
2. С *однородностью пространства* связан закон сохранения импульса механической системы $\left(\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0\right)$.
3. *Изотропность пространства* приводит к закону сохранения момента импульса механической системы $\left(\frac{d\vec{M}}{dt} = 0\right)$.

Пример 1. Пусть функция Гамильтона \mathcal{H} системы частиц не изменяется при бесконечно малом переносе (повороте). Вывести отсюда закон сохранения импульса (момента импульса).

Решение: Пусть $\vec{\varepsilon}$ – вектор бесконечно малого смещения; при этом

$$\vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{\varepsilon}, \quad \vec{p}_\alpha \rightarrow \vec{p}'_\alpha = \vec{p}_\alpha, \\ \mathcal{H}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) = \mathcal{H}(\vec{r}'_\alpha, \vec{p}'_\alpha).$$

Отсюда $\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0$. Используя уравнения Гамильтона, получаем

$$\dot{\vec{P}} = \sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha = - \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0, \quad \vec{P} = \text{const.}$$

При бесконечно малом повороте $\delta\vec{\varphi}$ (вектор угла поворота)

$$\vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_\alpha], \quad \vec{p}_\alpha \rightarrow \vec{p}'_\alpha = \vec{p}_\alpha + [\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_\alpha],$$

$$\mathcal{H}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) = \mathcal{H}(\vec{r}'_\alpha, \vec{p}'_\alpha),$$

$$\begin{aligned} & \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_\alpha} [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_\alpha] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}_\alpha} [\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_\alpha] \right\} = 0 \\ & = \sum_\alpha \left\{ -\dot{\vec{p}}_\alpha [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_\alpha] + \dot{\vec{r}}_\alpha [\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_\alpha] \right\} = -\delta\vec{\varphi} \sum_\alpha \frac{d}{dt} [\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha] \end{aligned}$$

или

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_\alpha [\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha] = \text{const.}$$

Ответ: $\vec{P} = \text{const}, \vec{\mathcal{M}} = \sum_\alpha [\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha] = \text{const.}$

Задачи

1. Материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = \mathcal{R} \cos(\omega t)$, $y = \mathcal{R} \sin(\omega t)$. Приведите сохраняющиеся величины при таком движении материальной точки.
2. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы:
 - а. в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) ;
 - б. в сферических координатах (ρ, ϕ, θ) .
3. Материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = \alpha \text{ch}(kt)$, $y = \beta \text{sh}(kt)$. Определить значения сохраняющихся при таком движении динамических величин и траекторию движения частицы.
4. Вывести с помощью канонических уравнений Гамильтона закон сохранения полной механической энергии.
5. Показать, что при движении в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ величина

$$\vec{A} = [\vec{\vartheta}, \vec{\mathcal{M}}] + \frac{\alpha \vec{r}}{r}$$

есть интеграл движения.

6. Заряд e движется в магнитном поле вида $\vec{\mathcal{H}} = q \frac{\vec{r}}{r^3}$ (поле магнитного монополя). Доказать, что величина $\vec{A} = \vec{\mathcal{M}} - \frac{eq\vec{r}}{c r}$ является интегралом движения.
7. Заряд e движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$. Доказать, что при таком движении сохраняется величина $A = (\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{H}}) + \frac{e}{2c} [\vec{r}, \vec{\mathcal{H}}]$, где $\vec{\mathcal{M}}$ – момент импульса заряда.

§7. Релятивистская механика

1. **Преобразования Лоренца** описывают изменения координат и времени при рассмотрении одних и тех же событий в различных инерциальных системах отсчета K и K' .

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right), \end{cases}$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ – релятивистский множитель. Если наблюдателя поместить в систему K' , то система K по отношению к нему движется со скоростью $-V$, направленной в сторону отрицательных значений оси x' .

Для преобразования координат и времени, измеренных в системе K , наблюдатель в системе K' получит сходные выражения:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right). \end{cases}$$

2. **Преобразования скоростей.** Если материальная точка движется в системе K' с известной скоростью

$$\vec{u}' \left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt} \right) = u'_x \vec{i}' + u'_y \vec{j}' + u'_z \vec{k}',$$

то скорость ее движения в системе K

$$\vec{u} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

может быть найдена с помощью преобразования Лоренца

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}, \\ u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \\ u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \end{array} \right.$$

3. **Сокращение длины.** Пусть горизонтальный размер неподвижного в системе K' тела измерен по оси x' и составляет l_0 . Наблюдатель из системы K в некоторый момент времени измеряет x -овые координаты концов тела, чтобы получить его горизонтальный размер l в системе K . Оказывается, что

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Происходит лоренцово сокращение продольного размера тела, или сокращение длины.

4. **Замедление времени.** Пусть в системе K' закреплены часы, которые отсчитали промежуток времени τ_0 . Наблюдатель, находящийся в системе K , по своим часам измерит соответствующий промежуток времени τ , связанный с промежутком в системе K' :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

5. **Относительность одновременности.** Пусть в системе K' в двух точках оси x' одновременно происходят два независимых события, причем их одновременность установлена по часам системы K . Если наблюдатель находится в системе K' , то для него события окажутся неодновременными: их разделяет промежуток времени

$$\Delta\tau' = \frac{V\Delta x'}{c^2},$$

где $\Delta x'$ – расстояние между точками, в которых произошли события.

6. **Релятивистский импульс** тела в системе K :

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя тела, \vec{u} – вектор скорости тела.

7. **Релятивистская энергия** тела в системе K :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Исключив из двух предыдущих соотношений скорость u , можно найти связь энергии тела и его импульса:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Из этого соотношения следует, что даже в состоянии покоя ($p = 0$) неподвижное тело обладает энергией $E = m_0 c^2$, которая носит название **энергия покоя**. Эта энергия зависит только от массы тела, а полученное выражение указывает на ее тождественную связь с массой.

8. **Кинетическая энергия** T тела может быть представлена как превышение полной энергии тела над его энергией покоя:

$$T = E - m_0 c^2.$$

Воспользовавшись этим определением, легко установить связь кинетической энергии и импульса тела:

$$p^2 = T \left(\frac{T}{c^2} + 2m_0 \right).$$

Пример 1. Два фотона движутся навстречу друг к другу. Какова относительная скорость одного фотона в системе отсчета, связанной со вторым фотоном?

Решение: Систему K будем считать лабораторной, а систему K' свяжем с первым фотоном так, чтобы его скорость была направлена в положительном направлении оси x . Воспользуемся преобразованиями скоростей

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}},$$

где $u_x = -c$ – скорость второго фотона в системе K , u'_x – скорость второго фотона в системе K' , $V = c$ – скорость первого фотона в системе K . Рассмотрим предыдущее выражение как уравнение относительно u'_x

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}.$$

Подстановка значений дает $u'_x = -c$, то есть полученное значение относительно скорости фотонов, как и следовало ожидать, не превышает скорости света

Ответ: $-c$.

Пример 2. Частица вылетает со скоростью u под углом α к оси x системы K . Под каким углом α' к оси x' системы K' движется частица? Какова ее скорость u' в этой системе?

Решение: В системе K проекции вектора скорости на оси x и y составляют

$$u_x = u \cos \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha.$$

Они задают модуль скорости и угол наклона вектора к оси x :

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_y}{u_x}\right).$$

Аналогичная связь между искомыми величинами и проекциями вектора скорости существует в системе K' . Воспользуемся преобразо-

ваниями координат и результатами предыдущей задачи:

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} = \frac{u \cos \alpha - V}{1 - \frac{uV \cos \alpha}{c^2}}, \\ u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{u \sin \alpha}{1 - \frac{uV \cos \alpha}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \end{cases}$$

В системе K' угол наклона вектора скорости к оси x составит

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{u'_y}{u'_x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u \sin \alpha}{u \cos \alpha - V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right),$$

а модуль вектора скорости

$$u' = \frac{\sqrt{\left(u \cos \alpha - V\right)^2 + \left(1 - V^2/c^2\right)^2 u^2 \sin^2 \alpha}}{1 - \frac{uV \cos \alpha}{c^2}}.$$

$$\text{Ответ: } u' = \frac{\sqrt{(u \cos \alpha - V)^2 + (1 - V^2/c^2)^2 u^2 \sin^2 \alpha}}{1 - uV \cos \alpha / c^2},$$

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{u \sin \alpha}{u \cos \alpha - V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right).$$

Пример 3. Собственное время жизни нестабильной частицы составляет τ_0 . Вычислить путь частицы до распада в лабораторной системе отсчета, если время жизни частицы в ней увеличивается до τ .

Решение: Систему K' свяжем с частицей, в которой она окажется покоящейся. Значит, скорость частицы совпадает со скоростью этой системы относительно неподвижной лабораторной системы K . За время τ частица вместе с системой K' пройдет в системе K путь $s = V\tau$. Следовательно, необходимо найти скорость V частицы в лабораторной системе. Эффект замедления времени дает связь

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

Откуда, $V = c\sqrt{1 - \tau_0^2/\tau^2}$. Пройденный путь $s = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}$.

Ответ: $s = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}$.

Задачи

1. Движущаяся частица обладает импульсом p , направленным вдоль оси x , и полной энергией E . Найти импульс и энергию частицы в системе отсчета, движущейся со скоростью V вдоль той же оси x . Каков будет результат, если вместо частицы движется фотон, то есть квант излучения?
2. Две одинаковые частицы, массы которых составляют m_0 , движутся с одинаковыми импульсами p , направленными навстречу друг другу. Найти массу частицы, получающейся в результате неупругого соударения первоначальных частиц. Что изменится, если частицы будут двигаться во взаимно перпендикулярных направлениях?
3. Стержень длиной l_0 направлен под углом α к оси x системы K . Какую длину будет иметь стержень в системе K' , движущейся со скоростью V в положительном направлении оси x системы K ?
4. На покоящуюся частицу массой M_1 налетает частица массой M_2 , кинетическая энергия которой равна T_2 . После столкновения частицы слипаются и движутся как единое целое. Найти массу образовавшейся частицы M и ее скорость V .
5. Стержень, собственная длина которого $l_0 = 5$ м, движется в продольном направлении со скоростью V относительно K системы отсчета. При каком значении V длина стержня в K системе будет $l = 3$ м?
6. Протон движется со скоростью $0.7c$. Найти импульс и кинетическую энергию протона.
7. С момента образования до распада π -мезон пролетел расстояние $s = 1.35$ км. Время жизни π -мезона в неподвижной системе

координат равно $\tau' = 5$ мкс. Определить время жизни π -мезона по часам в системе координат, движущейся вместе с ним.

8. Протон движется со скоростью, равной 0.8 скорости света. Навстречу ему движется электрон со скоростью 0.9 скорости света. Каковы их скорости относительно друг друга? Определить полную и кинетическую энергию электрона.
9. Релятивистский протон с импульсом \vec{p}_0 влетел в момент $t = 0$ в область, где имеется поперечное однородное электрическое поле с напряженностью \vec{E} , причем $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$. Найти зависимость от времени угла α , на который протон будет отклоняться от первоначального направления движения.
10. При каких значениях скорости частицы ее ньютоновский импульс отличается от релятивистского на 1% (на 10%)?
11. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0.6 до 0.8с? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§1. Кинематика материальной точки

1. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.
2. $a = -k\vartheta^2$.
3. $\vartheta = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{eA}{mk} \left(1 - \cos(kt) \right)$, $\vartheta_{min} = \frac{eA}{mk} (1 - \cos 0^\circ) = 0$,
 $\vartheta_{min} = \frac{eA}{mk} (1 - \cos \pi) = \frac{2eA}{mk}$.
4. $\vartheta_x = \frac{\vartheta\alpha}{y}$, $\vartheta_y = \text{th} \left(\frac{x}{\alpha} \right)$, $a_x = -\frac{\vartheta^2\alpha^2}{y^3} \text{sh} \left(\frac{x}{\alpha} \right)$, $a_y = \frac{\vartheta^2\alpha^2}{y^3}$,
 $a = \frac{\vartheta^2\alpha}{y^2}$.
5. Траектория – парабола $y = x \text{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2\vartheta_0^2 \cos^2 \alpha}$,
высота $H = \frac{\vartheta_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$, $L = \frac{\vartheta_0^2}{g} \sin 2\alpha$, $T = 2\frac{\vartheta_0}{g} \sin \alpha$.
6. $r = \alpha$, $\varphi = kt$, $z = \vartheta t$.
7. Окружность, $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha$, $s = \alpha kt$.
8. Линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $(x - R/4)^2 + y^2 = R^2/4$. Уравнения движения в сферических координатах: $\rho = R$, $\phi = kt/2$, $\theta = kt/2$.
9. $a = \sqrt{\frac{\vartheta_1^2 x_2^2 - \vartheta_2^2 x_1^2}{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}}$, $k = \sqrt{\frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.
10. а. $\vartheta(t) = \alpha x_0 \exp(\alpha t)$, $a(t) = \alpha^2 x_0 \exp(\alpha t)$;
б. $\langle \vartheta \rangle_s = \frac{\alpha(x_0 + s)}{\ln \left((x_0 + s)/x_0 \right)}$.

§2. Динамика материальной точки

$$1. y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

$$2. H_{max} = H + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 13.83 \text{ м},$$

$$x_{max} = v_0 t \cos \alpha = 23.8 \text{ м},$$

$$\text{где } t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}.$$

$$3. \text{ а. } F_c = -\frac{m v_0}{t} = -1.2 \cdot 10^4 \text{ Н; б. } l = \frac{m v_0^2}{2F_c} = 7.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$4. s = \frac{2\pi \mathcal{F}_0}{m\omega^2}.$$

$$5. t = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{k v_0}{mg} + 1 \right).$$

$$6. v = v_0 \exp\left(\frac{kt}{m}\right), \quad s = \frac{m v_0}{k} \left[\exp\left(\frac{kt}{m}\right) - 1 \right].$$

$$7. \Delta t = t_\beta - t_\alpha = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g(\cos \alpha + \cos \beta)}.$$

$$8. t = \frac{h}{v_0} \left(\frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) \left[\frac{1 - (v/v_0)^{1-\alpha}}{1 - (v/v_0)^{2-\alpha}} \right].$$

$$9. F = k^2 m r.$$

$$10. R_x = -a v_x, \quad \text{где } v_x = v_0 \exp\left(\frac{-ag}{P} t\right).$$

$$11. m_b = m(v_0^2 + 2a_0 H) / (v_0^2 + 2gH).$$

$$12. t = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{k v_0 + mgf}{k v_1 + mgf} \right).$$

$$13. v = \frac{Q}{mk} [1 - \cos(kt)] \sin \alpha.$$

14. $t_2 = t_1(1 + m_2/m_1)$.

§3. Движение в полях

1. Траектория – парабола, $y = \frac{eE}{2m\vartheta_0^2}x^2$.

2. $T = \frac{2m\vartheta_0}{eE}$.

3. Окружность с радиусом ϑ_0/ω_H , где $\omega_H = \frac{e\mu_0 H}{m}$ – электронная (циклотронная) частота.

4. $z = \frac{eE_0}{m\omega^2} \left(1 - \cos(\omega x/\vartheta_0) \right)$. Ось Oz направлена вдоль поля.

5. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\vartheta}_0 t + \frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} (1 - \cos(\omega t));$
 $\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 + \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} \sin(\omega t).$

6. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\vec{\vartheta}_0}{\omega} \sin(\omega t);$
 $\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 \cos(\omega t) - \vec{r}_0 \omega \sin(\omega t);$

траектория – эллипс в плоскости векторов \vec{r}_0 и $\vec{\vartheta}_0$, уравнение которого в системе координат с осью x вдоль вектора \vec{r}_0 имеет вид: $x^2 \sin^2 \alpha - xy \sin(2\alpha) + y^2 (\cos^2 \alpha + r_0^2 \omega^2 / \vartheta_0^2) = r_0^2 \sin^2 \alpha$, где α – угол между векторами \vec{r}_0 и $\vec{\vartheta}_0$, $\omega = \sqrt{k/m}$.

7. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{m}{k} \vec{\vartheta}_0 (1 - e^{-kt/m}) + \frac{m}{k} \vec{g} \left[t - \frac{m}{k} (1 - e^{-kt/m}) \right],$

$\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 e^{-kt/m} + \frac{m}{k} \vec{g} (1 - e^{-kt/m});$ траектория движения лежит

в плоскости векторов $\vec{\vartheta}_0$ и \vec{g} и описывается уравнением:

$$z = r_0 + x \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{mg}{k\vartheta_0 \cos \alpha} \right) + \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kx}{m\vartheta_0 \cos \alpha} \right).$$

8. $x(t) = \frac{x(0)}{\left[1 \pm x(0)t\sqrt{\frac{2A}{m}}\right]}$.
9. $\vec{F} = \{mk^2x, mk^2y, 0\}$
10. $\langle F \rangle = 2E/a$.
11. $\dot{x} = a\omega \operatorname{th}(\omega t)$, $x = a \ln(\operatorname{ch}\omega t)$, $\dot{y} = \frac{a\omega}{\operatorname{ch}\omega t}$, $y = a \operatorname{arcsin}(\operatorname{th}\omega t)$.

§4. Движение тел переменной массы

1. а. $m = m_0 e^{-gt/u}$; б. $m = m_0 e^{-(a+g)t/u}$.
2. $\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}u - \frac{\mathcal{R}(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}$.
3. а. $m = m_0 \exp\left(-\frac{n+1}{u}gt\right)$; б. $m = m_0 \exp\left(-\frac{ng}{u}t\right)$.
4. $T = u \ln\left(\frac{2}{a+g}\right)$.
5. Примерно 98 %.
6. $s = u^2 (\ln k)^2 / (2a)$.
7. $s = \frac{m_0 u e - 2}{\beta e}$.
8. $\vartheta(t) = u \ln(m_0/m) - gt$.
9. а. $\vartheta = \frac{F}{\mu} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$; б. $\vartheta = Ft/(m_0 + \mu t)$.
10. $\vartheta(t) = \vartheta_0 - gt + u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right)$.
11. $\vartheta = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - M}\right) - g\frac{M}{k}$;
 $z = u\frac{M}{k} - \frac{gM^2}{2k^2} - \frac{u}{k}(m_0 - M) \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - M}\right)$.

§5. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Скобки Пуассона

1. $\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$

2. Координаты тела массы m в инерциальной системе записываются в виде: $x = x(t) + l \sin \varphi$, $y = l \cos \varphi$;

функция Лагранжа: $\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi - m\ddot{x}l \sin \varphi.$

3. $\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi - m\ddot{x}(t)l \cos \varphi - m\ddot{y}(t)l \sin \varphi.$

4. $m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{g}.$

5. $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \alpha \cos(\gamma t)$, где $\omega_0^2 = g/l$, $\alpha = \frac{a\gamma^2}{l}.$

6. $\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2} - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)^2.$

7. а. $\mathcal{L} = \frac{m(\vec{p}/m - \vec{a})^2}{2}$; б. $\mathcal{L} = 0$; подобные “частицы” нельзя описывать с помощью функции Лагранжа.

8. $\mathcal{H}(p, x) = \frac{p^2}{2(1 + 2\beta x)^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3$, $\dot{x} = \frac{p}{1 + 2\beta x}$,
 $\dot{p} = \frac{\beta p^2}{(1 + 2\beta x)^2} - \omega^2 x - 3\alpha x^2.$

9. $\{\mathcal{M}_x, p_y\} = -p_z$, $\{\mathcal{M}_y, p_z\} = -p_x$, $\{\mathcal{M}_z, p_x\} = -p_y$,
 $\{\mathcal{M}_x, p_x\} = 0$, $\{\mathcal{M}_y, p_y\} = 0$, $\{\mathcal{M}_z, p_z\} = 0$,
 $\{\mathcal{M}_x, \vec{p}\} = [\vec{i}, \vec{p}]$, $\{\mathcal{M}_y, \vec{p}\} = [\vec{j}, \vec{p}]$, $\{\mathcal{M}_z, \vec{p}\} = [\vec{k}, \vec{p}].$

10. $\{\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y\} = -\mathcal{M}_z$, $\{\mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z\} = -\mathcal{M}_x$, $\{\mathcal{M}_z, \mathcal{M}_x\} = -\mathcal{M}_y.$

11. а. $\mathcal{H} = -6p_1^2 + p_1 p_2 - 2q_1^2 - 4q_2^2;$

б. $\mathcal{H} = p_1 p_2 - 2p_2^2 - 3q_1^2 - 4q_1 q_2;$

в. $\mathcal{H} = (1/8)p_1^2 + (1/8)p_2^2 - 4q_2^2 - 2q_1 q_2.$

§6. Законы сохранения

1. Полная энергия и момент импульса.
2. а. $\mathcal{M}_x = m(\varrho\dot{z} - z\dot{\varrho}) \sin \varphi - m\varrho z\dot{\varphi} \cos \varphi$,
 $\mathcal{M}_y = m(z\dot{\varrho} - \varrho\dot{z}) \cos \varphi - m\varrho z\dot{\varphi} \sin \varphi$,
 $\mathcal{M}_z = m\varrho^2\dot{\varphi}$,
 $\mathcal{M}^2 = m^2\varrho^2\dot{\varphi}^2(\varrho^2 + z^2) + m^2(\varrho\dot{z} - z\dot{\varrho})^2$.
 б. $\mathcal{M}_x = -m\rho^2(\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi)$,
 $\mathcal{M}_y = m\rho^2(\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi)$,
 $\mathcal{M}_z = m\rho^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}$,
 $\mathcal{M}^2 = m^2\rho^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2)$.
3. Сохраняются величины: момент импульса $\vec{\mathcal{M}} = \{0, 0, mk\alpha\beta\}$;
 полная энергия $E = \frac{mk^2}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$;
 z -проекция импульса $p_z = 0$.
 Уравнение траектории: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

§7. Релятивистская механика

1. $p'_x = \frac{p_x - \frac{EV}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, для фотона $E' = E \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$.
2. $M = 2m_0 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}$, $M = 2m_0 \sqrt{1 + \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}}$.
3. $l' = l \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cos \alpha$.
4. $M = (M_1 + M_2) \sqrt{1 + \frac{2M_1 T_2}{(M_1 + M_2)^2 c^2}}$, $V = \frac{c \sqrt{T_2(2M_2 c^2 + T_2)}}{(M_1 + M_2)c^2 + T_2}$.
5. $V = c \sqrt{1 - (l/l_0)^2} = 4/5c$.

6. $p = \frac{m\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} = 4.91 \cdot 10^{-19} \text{ кг}\cdot\text{м/с},$
 $T = mc^2 \left(\frac{1}{1 - \vartheta^2/c^2} - 1 \right) = 6.02 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}.$
7. $\tau = \tau' \sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2 \tau'^2}} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$
8. $u' = \frac{u + \vartheta}{1 + u\vartheta/c^2} = 2.97 \cdot 10^8 \text{ м/с},$
 $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} = 1.173 \text{ МэВ}, T = E - E_0 = 0.662 \text{ МэВ}.$
9. $\text{tg}\alpha = \vartheta_y/\vartheta_x = eEt/p_0.$
10. $\vartheta/c = \sqrt{\eta(2 - \eta)} = 0.14, \text{ при } \eta = 0.01 \text{ (} 0.45, \text{ при } \eta = 0.1).$
11. $A = 0.42m_0c^2.$ Соответствующая же работа, по нерелятивистской формуле, $A = 0.14m_0c^2.$

Приложение

Таблица основных интегралов

$$\int a du = au + C, \quad (a \in R, C = \text{const}, u = u(x)).$$

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1).$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C, \quad \int e^u du = e^u + C.$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C, \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$\int \cos u du = \sin u + C, \quad \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tgu} + C, \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctgu} + C.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{1}{a} \text{arctg} \left(\frac{u}{a} \right) + C.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C.$$

Основные тригонометрические формулы

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\text{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \text{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \text{th} x = \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x}.$$

Литература

- [1] Ландау Л.Д. Теоретическая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 1988.
- [2] Голдстейн Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. - М.: Наука, 1957.
- [3] Угаров В.А. Специальная теория относительности / В.А. Угаров. - М.: Наука, 1977.
- [4] Сафаров Р.Х. Задания для практических занятий по классической механике и специальной теории относительности / Р.Х. Сафаров. - Казань: Изд. Казгоспедуниверситета, 2004.
- [5] Коткин Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо. - М.: Наука, 1977.
- [6] Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. - М.: Физматлит, 2003.
- [7] Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: Наука, 1986.
- [8] Ольховский И.И. Задачи по теоретической механике для физиков / И.И. Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков. - М.: Изд. Моск. Унив., 1977.
- [9] Леушин А.М. Теоретическая механика. Задачник для физиков / А.М. Леушин, Р.Р. Нигматуллин, Ю.Н. Прошин. - Казань: Изд. КазГУ, 2002.
- [10] Лайтман А. Сборник задач по теории относительности и гравитации / А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. - М.: Мир, 1979.

- [11] Соколовский Ю.И. Элементарный задачник по теории относительности / Ю.И. Соколовский. - М.: Наука, 1971.
- [12] Иродов И.Е. Основные законы механики / И.Е. Иродов. - М.: Высш. шк., 1985.
- [13] Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - М.: Наука, 1966.