Физический факультет
Казанского государственного университета

Насыров А.М., Овчинников М.Н.

Волновые процессы.
Часть 8. Акустические колебания и волны (учебное пособие).

Казань 2003

Печатается по решению редакционно-издательского совета физического факультета Казанского государственного университета.

УДК 534

Насыров А.М., Овчинников М.Н.
Волновые процессы. Часть 8. Акустические колебания и волны. Учебное пособие для студентов старших курсов и магистрантов радиофизического отделения физического факультета Казанского государственного университета. Казань, 2003. 32с.

Рецензент:
заведующий кафедрой радиоастрономии, д.ф.–м.н., профессор Тептин Г.М.

Аннотация:

Рассматриваются вопросы распространения, поглощения, излучения, отражения и преломления акустических волн в жидкостях и газах. Волновое уравнение выводится из уравнений гидродинамики. Вводятся характеристики акустических излучателей, понятие механического импеданса. Приводится расчет акустического поля создаваемого пульсирующей сферой, силы реакции поля, приведенной массы.

Оглавление

Таблица акустических величин и единиц измерения.

S – площадь, $м^2$

Ω – объем, $м^3$

F – сила, $Н$

ρ – плотность, $\frac{кг}{м^3}$

ξ – смещение, $м$

$\bar{V}$ – скорость частиц жидкости, акустическая колебательная скорость, $\frac{м}{с}$

V_n – нормальная составляющая колебательной скорости, $\frac{м}{с}$

V_Ω – объемная скорость, $\frac{м^3}{с}$

c_s – скорость звука, $\frac{м}{с}$

p – давление, $Па = \frac{Н}{м^2}$

p' – акустическое давление, $Па = \frac{Н}{м^2}$

L_p – уровень акустического давления, $дб$

η, η' – первый и второй коэффициенты вязкости, $Па \cdot с$

β_s – адиабатическая сжимаемость, $Па^{-1}$

Φ – потенциал скорости, $\frac{м^2}{с}$

f – частота, $Гц$

ω – циклическая частота, $\frac{рад}{с}$

$\bar{k}$ – волновой вектор

α – коэффициент поглощения звука, $м^{-1}$

$\tilde{E}_s = \dfrac{1}{\tilde{\beta}_s}$ – упругий модуль, $Па$

c_p – теплоемкость при постоянном давлении

c_V – теплоемкость при постоянном объеме

E – звуковая энергия, $Дж$

W – плотность звуковой энергии, $\dfrac{Дж}{м^3}$

Π – поток звуковой энергии (звуковая мощность), $Вт$

J – интенсивность звука, $\dfrac{Вт}{м^2}$

Z_m – механическое сопротивление (механический импеданс), $Н \cdot \dfrac{с}{м}$

$Z_a = \dfrac{p'}{V_\Omega}$ – акустическое сопротивление (акустический импеданс), $\dfrac{Па \cdot с}{м^3}$

$Z_s = Z_a S$ – удельное акустическое сопротивление, $\dfrac{Па \cdot с}{м}$

M – присоединенная масса, $кг$

Общие положения

Акустика – наука об упругих колебаниях и волнах, распространяющихся в газах, жидкостях, твердых телах. В процессе распространения акустических колебаний в веществе возникает череда механических деформаций типа растяжения – сжатия и сдвига. При этом осуществляется перенос энергии без переноса вещества. В жидкостях и газах распространяются лишь колебания в виде продольных волн. По частотным диапазонам различают инфразвук $f<16\,Гц$, слышимый звук $16\,Гц<f<20\,кГц$, ультразвук $2\cdot10^4\,Гц<f<10^9\,Гц$, гиперзвук $f>10^9\,Гц$.

Так же, как и в случае распространения электромагнитных волн, для акустических колебаний рассматриваются задачи распространения, преломления, рассеяния, волноводного распространения, излучения и т.д. В данном учебно-методическом пособии речь пойдет об акустических колебаниях в жидкостях и газах.

Волновое уравнение для линейной акустики

Как известно [1-3], движение сжимаемой невязкой жидкости (газа) описывается посредством уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho \overline{V} = 0 \tag{1}$$

и уравнения Эйлера (уравнения движения)

$$\rho\left[\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \left(\overline{V}\cdot\nabla\right)\overline{V}\right] = \rho\frac{d\overline{V}}{dt} = -\nabla p\,, \tag{2}$$

где ρ – плотность, $\overline{V}$ – скорость частиц жидкости, p – давление.

В случае распространения акустических колебаний для давления и плотности жидкости мы можем записать соотношение

$$\begin{cases} p = p_0 + p' \\ \rho = \rho_0 + \rho' \end{cases}, \tag{3}$$

где p_0 и ρ_0 – равновесные значения плотности и давления в среде, а p' и ρ' – изменения давления и плотности, возникающие в процессе распространения звуковой волны, причем в звуковой волне изменения давления и плотности обычно весьма малы, так что

$$p' << p_0, \ \rho' << \rho_0. \tag{4}$$

В этом приближении линеаризованное уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div\overline{V} = 0. \tag{5}$$

Здесь ρ' – изменение плотности среды, связанное со звуковой волной, $\overline{V}$ – колебательная скорость частиц жидкости. Всюду далее под $\overline{V}$ будем понимать акустическую колебательную скорость.

Малость колебаний частиц жидкости в звуковой волне означает, что их амплитуда заметно меньше длины волны $a << \lambda$. Как следствие, приходим к соотношению

$$\left| \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} \right| >> \left| \left(\overline{V} \cdot \nabla \right) \overline{V} \right|. \tag{6}$$

Действительно [1], учитывая, что за время τ (характерный период колебаний), частицы жидкости проходят расстояние порядка амплитуды волны $\sim a$, скорость движения частиц будет $V \sim a / \tau$, производная от скорости по времени $\sim V / \tau$, а по координатам $\sim V / \lambda$, где λ– длина волны.

Тогда $\left(\overline{V} \cdot \nabla \right) \overline{V} \sim \frac{a}{\tau^2} \frac{a}{\lambda}$, $\frac{\partial V}{\partial t} \sim \frac{a}{\tau^2}$ и при $a << \lambda$ мы можем считать, что $\left| \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} \right| >> \left| \left(\overline{V} \cdot \nabla \right) \overline{V} \right|$.

В результате, линеаризованное уравнение Эйлера запишется в виде

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, в процессе распространения звуковой волны возникают смещения частиц с колебательной скоростью $\overline{V}$, и возникает переменное звуковое давление p'.

Считая процесс распространения акустической волны адиабатическим, примем, что

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' = c_s^2 \rho', \tag{8}$$

Продифференцируем (5) по *t*, а к (7) применим оператор *div*, и получим с учетом (8)

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \rho' = 0. \tag{9}$$

где скорость звука в среде c_s – фазовая скорость звуковых волн.

Скорость звука в жидкостях и газах c_s можно вычислить [2] по формуле $c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \beta_s}}$, где β_s – адиабатическая сжимаемость, ρ_0 – плотность жидкости, для идеального газа $c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ – показатель адиабаты, c_p и c_V – теплоемкости при постоянном давлении и объеме, соответственно.

Для изотермической сжимаемости $\beta_T = \gamma \beta_s$, тогда $c_s = \sqrt{\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}$.

Скорость звука в воздухе ~ 330 м/с, в воде ~ 1500 м/с [4].

Аналогичное уравнение для звукового давления запишется как

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta p' = 0. \tag{10}$$

Заметим, что в акустике штрих в обозначении звукового давления часто опускают и пишут просто p, подразумевая именно звуковую часть давления.

При рассмотрении движения вязкой жидкости уравнение Эйлера (2) нужно заменить уравнением Навье-Стокса

$$\rho\left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V}\right] = -\nabla p + \eta \Delta \bar{V} + \left(\eta' + \frac{\eta}{3}\right) grad div \bar{V}, \tag{11}$$

где η и η' – соответственно первый и второй коэффициенты вязкости.

Первый коэффициент вязкости η – это “обычный” коэффициент вязкости, связанный со сдвиговыми напряжениями в жидкостях в неравновесных условиях, а второй коэффициент вязкости η' имеет отношение к внутренним силам в жидкости при растяжении – сжатии, что можно видеть из следующей записи для тензора вязких напряжений в жидкости:

$$\sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \eta' \delta_{ij} div\overline{V} \ ,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Отметим, что в гидродинамике и акустике часто используются методы теории подобия, для чего вводятся характерные числа:

число Струхаля $Sh = \frac{fL}{V}$, (12)

число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}$, (13)

число Маха $M = \frac{V}{c_s}$. (14)

Здесь f – характерная частота, L – характерный размер, V – средняя скорость потока жидкости, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – кинематическая вязкость, c_s – скорость звука в жидкости.

Представления волнового уравнения

Для потенциальных течений, а к таковым можно отнести и процесс распространения продольных упругих волн в жидкостях, удобно ввести функцию потенциала скорости Φ в виде:

$$\overline{V} = \nabla\Phi \ . \tag{15}$$

Соответствующее волновое уравнение для потенциала скорости:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta\Phi = 0 \ . \tag{16}$$

Акустическое давление теперь можно рассчитать с учетом (7):

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{17}$$

Иногда знаки в формулах (15) и (17) выбирают противоположным образом:

$$\bar{V} = -\nabla \Phi, \; p' = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Волновое уравнение можно записать в декартовой системе координат в виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \tag{18}$$

Частное решение для плоской волны, распространяющейся в направлении x, описываемой (18) имеет вид $\Phi = g(x - c_s t)$, где g – произвольная функция.

Для плоских гармонических волн, распространяющихся в направлении x, мы можем записать

$$\Phi(x,t) = \Phi_0 \exp(i(\omega t - kx)) \tag{19}$$

и получить (см. задача 1 в Приложении):

$$V = \frac{c_s \rho'}{\rho_0}. \tag{20}$$

Таким образом, условие $\rho' << \rho_0$ соответствует условию $|\bar{V}| << c_s$.

В цилиндрической системе координат (в представлении r, z, θ) волновое уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \tag{21}$$

а в сферической системе координат (в представлении r,φ,θ) как

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c_s^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\right.\\&\left.+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)=0\end{aligned} \tag{22}$$

В случае независимости от угловых координат и осевой координаты *z*, уравнения (21) и (22) запишутся в упрощенном виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c_s^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c_s^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0, \tag{24}$$

а частные решения в цилиндрической и сферической системе координат, как

$$\Phi_{цил}=\frac{1}{\sqrt{r}}g(r-c_st),\ \Phi_{сфер}=\frac{1}{r}g(r-c_st).$$

Затухание упругих волн

Изменение интенсивности J звуковой волны, распространяющейся в жидкости или газе в направлении x, весьма удовлетворительно описывается законом вида

$$J=J_0\exp(-2\alpha x), \tag{25}$$

где α – коэффициент поглощения, или для акустического давления

$$p'=p'_0\exp(-\alpha x). \tag{26}$$

Для вязких жидкостей можно получить коэффициент поглощения акустических волн, распространяющихся с частотой ω в виде формулы Стокса – Кирхгофа

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_s^3}\left[\frac{4}{3}\eta + \chi\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right)\right], \tag{27}$$

где $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, χ – температуропроводность.

Коэффициент поглощения в пресной воде в ультразвуковом диапазоне $\alpha \sim f^2 \cdot 25 \cdot 10^{-16}$ с^2/м [4].

С учетом поглощения плоская одномерная гармоническая звуковая волна может быть представлена в виде

$$\tilde{p} = p_0 \exp\left(i\left[\omega t - \tilde{k}x\right]\right), \tag{28}$$

где

$$\tilde{k} = k - i\alpha = k\left(1 - i\alpha\frac{c_s}{\omega}\right), \tag{29}$$

а знак тильды (~) означает комплексное число.

Введем комплексный модуль упругости [2]

$$\tilde{E}_s = E' + iE'' = \frac{1}{\tilde{\beta}_s}, \tag{30}$$

тогда из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\Phi} - \frac{\tilde{E}_s}{\rho}\Delta\tilde{\Phi} = 0 \tag{31}$$

нетрудно получить

$$E' = \frac{\left(1 - \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2\right)\rho_0 c_s^2}{\left(1 + \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2\right)^2}, \quad E'' = \frac{\alpha c_s}{\omega}\frac{2\rho_0 c_s^2}{\left(1 + \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2\right)^2}. \tag{32}$$

Добротность колебательной системы Q будет

$$Q = \frac{E'}{E''} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2}{\frac{2\alpha c}{\omega}} = \frac{\omega^2 - (\alpha c_s)^2}{2\alpha c_s \omega}. \quad (33)$$

При малом затухании, когда $\alpha << \frac{c_s}{\omega}$ выражения (37) упрощаются

$$E' \approx \rho_0 c_s^2, \; E'' \approx 2\rho_0 c_s^2 \frac{\alpha c_s}{\omega}, \; Q \approx \frac{\omega}{2 c_s \alpha} >> 1. \quad (34)$$

Отражение и преломление акустических волн

Пусть в жидкости 1 распространяется акустическая волна с амплитудой p'_1, волновым вектором $\bar{k}_1$ и она падает на вторую жидкость под углом θ_1 к нормали [1,2]. Плотность первой жидкости – ρ_1, скорость звука в ней c_1, во второй жидкости – ρ_2 и c_2, соответственно.

Возникает отраженная волна с амплитудой p'_1, волновым вектором $\bar{k}_1$ и углом отражения θ_1' и преломленная волна с амплитудой p'_2, волновым вектором $\bar{k}_2$ и углом преломления θ_2 (рис.1).

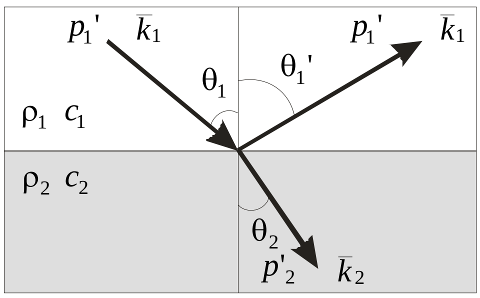

Рис.1

Нетрудно получить акустический закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_1'}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}. \quad (35)$$

Отсюда $\theta_1 = \theta_1'$ (угол падения равен углу отражения) и

$$\sin\theta_2 = \frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1. \tag{36}$$

Коэффициент прохождения r_p (отношение амплитуд давления прошедшей и падающей волн):

$$r_p = \frac{p'_2}{p'_1} = \frac{\varepsilon_\theta - 1}{\varepsilon_\theta + 1}, \text{ где } \varepsilon_\theta = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1}{\rho_1 c_1 \cos\theta_2}. \tag{37}$$

Энергия акустических волн

Полное изменение энергии в объеме Ω при наличии звуковой волны можно рассчитать по формуле [1]

$$E = \int\limits_\Omega \left(\frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{c_s^2 \rho'^2}{2\rho_0} \right) d\Omega, \tag{38}$$

а плотность звуковой энергии как

$$W = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{c_s^2 \rho'^2}{2\rho_0}, \tag{39}$$

что для плоской бегущей волны будет выглядеть просто (см.(20))

$$W = \rho_0 V^2. \tag{40}$$

Звуковая энергия измеряется в Дж.

Плотность звуковой энергии $W = \frac{E}{\Omega}$ – звуковая энергия, приходящая на единицу объема, измеряется в $\frac{Дж}{м^3}$.

Определим поток акустической энергии в пределах замкнутой области площади S

$$\overline{\Pi} = \oint\limits_S p'\overline{V} d\overline{S}. \tag{41}$$

Учитывая, что мощность $\mathrm{P} = \frac{\partial E}{\partial t} = |\Pi|$, поток звуковой энергии иногда называют звуковой мощностью, измеряют в Bm.

Интенсивность звука $J = \frac{\Pi}{S}$ – это поток звуковой энергии, приходящейся на единицу площади, измеряется в Вт/м^2.

Для бегущей волны (см. Приложение (задача 1))

$$J = Wc_s. \tag{42}$$

Акустическое давление часто измеряют в децибелах, используя формулу для уровня акустического давления L_p в виде

$$L_p = 20\log\frac{p'}{p_0}, \tag{43}$$

где $p_0 = 2\cdot10^{-5}$ Па – условное пороговое (граничное) значение давления. Аналогичное пороговое значение для интенсивности звука принимают равным $I_0 = 10^{-2}\,\frac{Bm}{м^2}$.

Децибел = 0.1 Бела, соответствует изменению интенсивности звука в $10^{0.1} \approx 1.26$ раза [4,5].

Электроакустическая аналогия и акустический импеданс

Существует аналогия между описанием распространения упругих колебаний в жидкостях и газах и распространением волн в колебательных системах типа грузиков, соединенных пружинками, динамикой токов в RLC – цепях [2,6,7]. В рамках такой аналогии можно ввести понятие акустического сопротивления (импеданса). При этом электрическому току I будет соответствовать колебательная скорость $\overline{V}$, напряжению U давление p', а акустический импеданс $Z == X + i\omega M$ – импедансу цепи переменного тока $Z = R + i\omega L$ (здесь R – активное сопротивление, L – индуктивность, M – присоединенная масса).

Введем понятие объемной колебательной скорости V_Ω [2,5], выражаемой через колебательную скорость $\overline{V}$, в виде интеграла по поверхности, совершающей колебания:

$$V_\Omega = \int \overline{V_n} d\overline{S}, \tag{44}$$

где $\overline{V_n}$ – нормальная к поверхности dS составляющая колебательной скорости.

Полное акустическое сопротивление (импеданс) выразим в виде:

$$Z_a = \operatorname{Re} Z_a + i \operatorname{Im} Z_a, \tag{45}$$

где $\operatorname{Re} Z_a$ – диссипация энергии в самой излучательной системе, включая затраты энергии на излучение звука (активное сопротивление), $\operatorname{Im} Z_a$ – реакция сил упругости и инерции (реактивное сопротивление).

$\operatorname{Re} Z_a = \dfrac{p'}{V_\Omega}$, где V_Ω – объемная колебательная скорость.

Чаще используется понятие удельного акустического сопротивления

$$Z_s = Z_a S. \tag{46}$$

Учитывая, что для многих ситуаций $V_\Omega = SV$ (волны от пульсирующей сферы, плоские бегущие волны, звук в волноводах), собственно акустическим импедансом среды называют отношение звукового давления к колебательной скорости частиц среды

$$Z_s = \frac{p'}{V} = \rho_0 c_s, \tag{47}$$

(здесь V – колебательная скорость, а не объем Ω).

Излучение звука

Колеблющееся в жидкости тело производит разрежения и сжатия [1,2,6]. В результате в жидкости будут распространяться упругие колебания. Задача об излучении звуковых волн колеблющимся телом предполагает решение волнового уравнения

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{48}$$

с граничным условием для нормальной составляющей скорости жидкости на границе с излучателем

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{n}}\right|_S = -\overline{V}_n(t) \tag{49}$$

и условием излучения

$$\Phi_{r\to\infty} = 0\left(\frac{1}{r}\right) \tag{50}$$

для сферической расходящейся волны.

Здесь и далее индекс n фиксирует значения нормальной компоненты скорости $\overline{V_n}$ и давления p_n на границе “излучатель-среда”.

Ниже всюду скорость колеблющегося тела мала по отношению к скорости звука $V_n << c_s$ или $a << \lambda$, т.е. линейная амплитуда колебаний тела мала по отношению к длине волны.

Полная мощность излучения

$$\mathrm{P} = \oint_S \overline{V_n} p dS = \frac{\rho_0 c_s}{16\pi^2 c_s^2}\oint_S \frac{1}{r^2}\left[\frac{dV_\Omega}{dt}\left(t - \frac{r}{c_s}\right)\right]^2 dS\,. \tag{51}$$

Используя понятие объемной скорости

$$V_\Omega = \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} \tag{52}$$

и объемного ускорения

$$\frac{dV_\Omega}{dt} = \frac{d^2\Omega}{dt^2} = \ddot{\Omega}\,. \tag{53}$$

для полной мощности излучения при излучении низких частот, когда $\lambda >> l$, где l – характерные размеры тела, можно получить выражение

$$\mathrm{P}\big|_{\lambda>>l} = \oint_S V_n p dS = \frac{\rho_0}{16\pi^2 c_s} \oint_S \frac{1}{r^2} < \ddot{\Omega}\left(t - \frac{r}{c_s}\right) >_t dS \,. \qquad (54)$$

В случае излучения высоких частот, когда $\lambda << l$, где l – линейные размеры тела, мощность излучаемого звука вычисляется как

$$\mathrm{P}\big|_{\lambda<<l} = \frac{\partial E}{\partial t} = \rho_0 c_s \oint_S < \overline{V}_n^2 >_t dS \,. \qquad (55)$$

Характеристики излучателей

В процессе излучения источник упругих волн (например, пульсирующая или осциллирующая сфера) часть своей энергии затрачивает на работу против сил реакции упругой внешней среды [2]. Эту работу сил сопротивления излучения за период излучения T можно рассчитать по формуле

$$A = -\int_0^T \overline{V}_n \overline{F}_r dt \,, \qquad (56)$$

где $\overline{F}_r$ – сила реакции среды.

Пусть элемент поверхности излучателя ds, имеет нормальную составляющую колебательной скорости $\overline{V}_n \exp(i\omega t)$, а давление акустического поля среды равно $p'_n \exp(i[\omega t + \Delta\varphi])$, где $\Delta\varphi$ – разность фаз между колебаниями скорости и давления. Обозначим через V_0 амплитуду скорости движения точки приведения сил давления и запишем безразмерный вектор скорости любой точки на поверхности излучателя в виде

$$\overline{D}_n = \frac{\overline{V}_n}{V_0} \,. \qquad (57)$$

Векторы $\overline{V}_n$ и $\overline{D}_n$ направлены по нормали к поверхности S. В частных случаях излучателей в виде пульсирующей сферы или пульсирующего цилиндра вектор $\overline{D}_n$ будет просто единичным вектором нормали $\overline{n}$.

Определим механический импеданс излучателя $\tilde{Z}_M$ как отношение амплитуды силы реакции поля излучения, действующей на поверхность излучателя к амплитуде скорости точки приведения V_0

$$\tilde{Z}_M = \frac{\tilde{F}_r^A}{V_0} = \frac{1}{V_0} \oint_S p'_n \, \overline{D_n} \exp(i\Delta\varphi) d\overline{S} . \tag{58}$$

Здесь и ниже верхний индекс A у величины показывает, что речь идет о ее амплитуде (без учета временной компоненты).

Если скорости отдельных точек излучающей поверхности различаются, величину $\tilde{Z}_M$ относят к отдельно избранной точке.

Формально, следовало бы записать $\tilde{V}_0$, но мы выбрали начальную фазу колебаний скорости нулевой, поэтому значок комплексной величины в $\tilde{V}_0$ ниже можно не ставить.

Для силы реакции поля излучения на поверхности излучателя мы можем записать (в комплексной форме)

$$\tilde{F}_r = \oint_S p'_n \, \overline{D}_n \exp\big(i(\omega t + \Delta\varphi)\big) d\overline{S} . \tag{59}$$

Или для ее амплитудной части

$$\begin{aligned} \tilde{F}_r^A &= \oint_S p'_n \, \overline{D}_n \exp(i\Delta\varphi) d\overline{S} = \\ &= \oint_S p'_n \, \overline{D}_n \cos\Delta\varphi dS + i\oint_S p'_n \, \overline{D}_n \sin\Delta\varphi dS = R_1^A + iR_2^A \end{aligned} \tag{60}$$

Таким образом, для импеданса можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_M &= \frac{1}{V_0} \oint_S p'_n \, \overline{D}_n \exp(i\Delta\varphi) d\overline{S} = \\ &= \frac{1}{V_0} \oint_S p'_n \, \overline{D}_n \cos\Delta\varphi d\overline{S} + \frac{i}{V_0} \oint_S p'_n \, \overline{D}_n \sin\Delta\varphi d\overline{S} = X + iY \end{aligned} \tag{61}$$

где X – активное сопротивление, Y – реактивное сопротивление.

Для компонент силы реакции излучения можно записать

$$\begin{cases} R_1^A = V_0 X \\ R_2^A = V_0 Y \end{cases} \tag{62}$$

Для расчета работы сил реакции поля за период T мы должны взять $\operatorname{Re} V_n(t)$ и $\operatorname{Re} p'_n(t)$ и записать

$$\begin{aligned} A &= -V_0 \int_0^T \oint_S p'_n \cos(\omega t + \varphi) \overline{D}_n \cos \omega t d\overline{S} dt = \\ &= -V_0^2 \int_0^T \left(X \cos^2 \omega t - Y \cos \omega t \sin \omega t \right) dt = -\frac{V_0^2}{2} XT \end{aligned} \tag{63}$$

Работу за период T можно вычислить и по общей формуле

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\int_0^T \oint_S p'^*_n V_n dS dt \right\}, \tag{64}$$

где p'^*_n – комплексно сопряженное p'_n, тогда

$$A = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} V_0^2 \int_0^T (X - iY) dt \right\} = -\frac{V_0^2}{2} XT . \tag{65}$$

Таким образом, среднее значение работы за период T зависит только от действительной части импеданса $\operatorname{Re} \widetilde{Z} = X$.

Вместе с тем мы можем разбить интервал времени T в (63) на 4 части

$$\int_0^{T/4} (*) dt + \int_{T/4}^{T/2} (*) dt + \int_{T/2}^{3T/4} (*) dt + \int_{3T/4}^{T} (*) dt , \tag{66}$$

где $(*) = V_0^2 X \cos^2 \omega t - V_0^2 Y \cos \omega t \sin \omega t$.

Нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned}
&V_0^2 \int_0^{T/4} X \cos^2 \omega t dt = V_0^2 \int_{T/4}^{T/2} X \cos^2 \omega t dt = \\
&= V_0^2 \int_{T/2}^{3T/4} X \cos^2 \omega t dt = V_0^2 \int_{3T/4}^{T} X \cos^2 \omega t dt = \frac{V_0^2 XT}{8} = \frac{V_0^2 X}{4\pi\omega}
\end{aligned} \tag{67}$$

и

$$\begin{aligned}
&V_0^2 \int_0^{T/4} Y \cos\omega t \sin\omega t dt = -V_0^2 \int_{T/4}^{T/2} Y \cos\omega t \sin\omega t dt dt = \\
&= V_0^2 \int_{T/2}^{3T/4} Y \cos\omega t \sin\omega t dt dt = -V_0^2 \int_{3T/4}^{T} Y \cos\omega t \sin\omega t dt dt = \frac{V_0^2 Y}{2\omega}
\end{aligned} \tag{68}$$

Знакопеременные слагаемые в (68) соответствуют работе излучателя против мнимой составляющей силы реакции поля $R_2\left(\mathrm{Im}\,\tilde{Z}_M = Y\right)$.

Мы можем представить работу, проделанную на протяжении каждой четверти периода, как накопление кинетической энергии $\frac{MV_0^2}{2}$ присоединенной массы жидкости или возвращении этой энергии источнику (см.(68)):

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{Y}{2\omega} V_0^2 . \tag{69}$$

Таким образом, величина $\frac{Y}{\omega} = M$ играет роль присоединенной массы жидкости соколеблющейся с излучателем. Появление этой массы обусловлено инерцией среды, окружающей излучатель.

Заметим, что сдвиг фаз можно представить в виде

$$\Delta\varphi = \arctan\frac{Y}{X} = \arctan\frac{M}{\omega X} . \tag{70}$$

Для характеристики направленности излучателя по давлению используем формулу для потенциала скорости

$$\Phi(\theta)=\frac{p(\theta)}{p(0)}\exp(i[\gamma(\theta)-\gamma(0)]), \tag{71}$$

где $\frac{p(\theta)}{p(0)}$ – амплитудная характеристика направленности, $[\gamma(\theta)-\gamma(0)]$ – фазовая характеристика

Собственная частота нагруженного преобразователя излучателя рассчитывается по формуле

$$\omega_n=\beta\omega_0, \tag{72}$$

где $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{m_э c_э}}$ – резонансная частота преобразователя без учета присоединенной массы, $m_э$, $c_э$ – эквивалентные механические масса и гибкость излучателя.

Коэффициент поправки к резонансной частоте излучателя с учетом присоединенной массы и реакции излучения можно определить как

$$\beta=\delta\sqrt{1-\left(\frac{X\delta^2}{2m_э\omega_0}\right)^2}, \quad \text{где } \delta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{M}{m_э}}}. \tag{73}$$

Пример. Пульсирующая сфера радиуса a [1,2].

Пусть на границе сферы радиуса a колебательная скорость задана в виде гармонической функции

$$V_n(t)=V_0\exp(i\omega t). \tag{74}$$

Такой излучатель называют пульсирующей сферой с частотой акустического излучения ω или длиной волны $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi c_s}{\omega}$. Здесь c_s – скорость звука в окружающей сферу жидкости с плотностью ρ_0. Возникающее звуковое поле будет иметь сферическую симметрию. В данном случае точкой приведения можно выбрать любую точку на поверхности сферы, а безразмерная скорость $\overline{D}_n$ будет одновременно и единичным вектором нормали вектором нормали $\bar{n}$ элемента поверхности dS.

Решая волновое уравнение:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \qquad (75)$$

с граничным условием на поверхности сферы

$$V_n(t)=\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=a}=V_0\exp(i\omega t) \qquad (76)$$

и, принимая во внимание условие излучения, получим для потенциала скорости:

$$\Phi=-\frac{1}{r}\frac{V_0a^2}{1+ika}\exp[i(\omega t-k(r-a))]. \qquad (77)$$

Колебательная скорость в жидкости будет

$$V(r,t)=\frac{V_0a^2}{1+ika}\frac{1+ikr}{r^2}\exp[i(\omega t-k(r-a))], \qquad (78)$$

а звуковое давление

$$p'=\frac{V_0a^2}{1+ika}\rho\frac{i\omega}{r}\exp[i(\omega t-k(r-a))]. \qquad (79)$$

Интенсивность излучателя рассчитывается как

$$J=\frac{1}{2}\operatorname{Re} p^*V=\frac{V_0^2a^4}{2\left(1+k^2a^2\right)}\frac{\rho_0c_sk^2}{r^2}. \qquad (80)$$

Нетрудно рассчитать разность фаз $\Delta\varphi$ для акустического давления и скорости

$$\Delta\varphi=\arctan\frac{1}{kr}. \qquad (81)$$

Механический импеданс пульсирующей сферы (на $r = a$) и с учетом $c_s = \frac{\omega}{k}$ (см. (58),(62) и Приложение (задача 1))

$$Z_M = \frac{F}{V} = \frac{p'S}{V} = 4\pi a^2 \rho_0 c_s \frac{ika}{1+ika} = X + iY . \quad (82)$$

Отсюда

$$X = 4\pi a^2 \rho_0 c_s \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2} , \quad (83)$$

$$Y = 4\pi a^2 \rho_0 c_s \frac{ka}{1+k^2 a^2} . \quad (84)$$

Из (74) рассчитываем приведенную массу

$$M = \frac{Y}{\omega} = \frac{3M_0}{1+k^2 a^2} , \quad (85)$$

где $M_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$ – масса жидкости в объеме сфере радиусом a. На низких частотах $(ka \ll 1)$ $M = 3M_0$, на высоких же частотах $M \to 0$.

Радиационное давление

Акустическое радиационное давление p_a – постоянное давление, испытываемое телом (препятствием), находящимся в постоянном акустическом поле [3] (не путать с силой реакции поля на излучатель!).

Если в (2) не пренебрегать малым членом $(\overline{V} \cdot \nabla)\overline{V}$, то можно записать силу акустического давления в виде

$$F_i = -\oint_S T_{ij} n_j dS , \quad (86)$$

где тензор $T_{ij} = p'\delta_{ij} + \rho_0 V_i V_j$, n_j – нормаль к поверхности S (для вязкого случая появится тензор вязкости, соответствующий уравнению Навье – Стокса). Для нахождения же постоянной составляющей силы F_i, следует взять среднее по времени $< F_i >_t$, где $< ... >_t$ – усреднение по времени.

Учитывая, что для гармонической волны $<p'_{(1)}>_t = 0$ в первом приближении при разложении $p' = p'_{(1)} + p'_{(2)} + ...$ по порядкам малости, получим, что

$$<F_i>_t = \rho_0 <V^2>_t \tag{87}$$

По порядку величины сила радиационного давления F_a может быть оценена как

$$F_a = \frac{l^2 p'^2}{\rho_0 c_s^2} \tag{88}$$

где l – характерный линейный размер препятствия, а l^2 – его площадь. Или в терминах радиационного давления

$$p_a = \frac{F_a}{l^2} = \frac{p'^2}{\rho_0 c_s^2}. \tag{89}$$

Таким образом, радиационное давление квадратично по малому акустическому давлению p' и величина его обычно весьма мала.

Приложение. Задачи [8]

<u>Задача 1</u>

Найти решение волнового уравнения для бегущей плоской волны.

Показать, что звуковая волна является продольной

Установить связь между возмущениями давления, плотности и колебательной скоростью в такой волне

<u>Решение</u>

1. Для плоской волны, распространяющейся по оси x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \tag{90}$$

где c_s – волновая скорость (скорость звука), $\Phi(x,t)$ – потенциал скорости. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi(x,t) = F_1(x - c_s t) + F_2(x + c_s t). \tag{91}$$

Здесь F_1 и F_2 – произвольные функции.

Для волны, распространяющейся в сторону положительных x потенциал скорости $\Phi(x,t)$ имеет вид:

$$\Phi(x,t) = F_1(x - c_s t). \tag{92}$$

Потенциал скорости вводится соотношением:

$$\overline{V} = grad\Phi . \tag{93}$$

Из (92) и (93) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту $V_x = V$. Т.е частицы среды в волне колеблются вдоль направления распространения, следовательно, звуковая волна является продольной.

2. В продольной волне колебательная скорость V связана с приращением давления p' и плотности ρ' алгебраическими соотношениями. Используя (93) и соотношение

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{94}$$

из (92) получаем

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(x - c_s t),\ p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho_0 c_s F_1(x - c_s t). \tag{95}$$

Следовательно

$$\frac{p'}{V} = \rho_0 c_s . \tag{96}$$

Соотношение (96) называют акустическим законом Ома, величину $\rho_0 c_s$ – волновым сопротивлением.

Воспользуемся уравнением состояния

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \rho' \tag{97}$$

где S – энтропия и учтено, что звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение.

Для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости имеем:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{V}{c_s} \tag{98}$$

Задача 2

Найти длину звуковой волны в воздухе на частоте $500\textit{Гц}$ при температуре t = 15°С и давлении p_0 = $10^5 \textit{Па}$. Плотность звука $\rho_0 = 1.26 \frac{\textit{кг}}{\textit{м}^3}$, показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1.14$.

Ответ

$$\lambda = \frac{c_s}{f} = \frac{1}{f}\sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \approx 0.7\textit{м}$$

Задача 3

Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p'_0 = 2 \cdot 10^{-4} \frac{H}{\textit{м}^2}$. Вычислить амплитуды колебательной скорости V_0 и смещения ξ_0, средние интенсивность J и плотность энергии волны в воздухе W на частоте $f = 1\textit{кГц}$ $\left(\rho_0 c_s = 420 \frac{\textit{кг}}{\textit{м}^2 \cdot c}\right)$.

Ответ

$$V_0 = \frac{p'_0}{\rho_0 c_s} = 4.7 \cdot 10^{-7}\,\frac{м}{с}$$

$$\xi_0 = \frac{V_0}{2\pi f} = 7 \cdot 10^{-11} м$$

$$J = \frac{p'^2_0}{2\rho_0 c_s} = 4.8 \cdot 10^{-11}\,\frac{Вт}{м^2}$$

$$W = \frac{I}{c} = 1.4 \cdot 10^{-13}\,\frac{Дж}{м^3}$$

Задача 4

Источник звука A в среде со скоростью звука c_1 расположен над поверхностью раздела, а приемник B в среде со скоростью звука c_2 – под поверхностью раздела (см. рис.2). Источник и приемник разнесены на горизонтальное расстояние d. Доказать, что время распространения сигнала вдоль луча, испытавшего преломление на поверхности раздела минимально, если луч подчиняется закону Снелиуса (т.н. принцип Ферма).

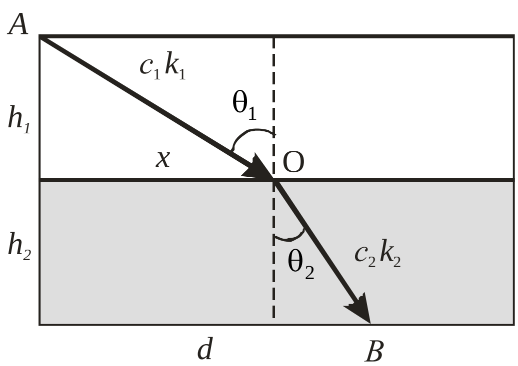

Рис.2

Решение

Закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_2}{k_1} = n, \tag{99}$$

где n – показатель преломления.

Время распространения сигнала от точки A до точки B:

$$t = \frac{AO}{c_1} + \frac{OB}{c_2} = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (d - x)^2}\ . \qquad (100)$$

Минимальное значение t определяется из отношения:

$$\frac{dt}{dx} == \frac{x}{c_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{h_2^2 + (d - x)^2}} = 0\ . \qquad (101)$$

Откуда

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \qquad (102)$$

<u>Задача 5</u>

Найти коэффициент отражения звука от плоского жидкого слоя с нормальным импедансом Z_2 и толщиной d, разделяющего два полупространства с нормальными индексами Z_1 и Z_3 (см. рис.3)

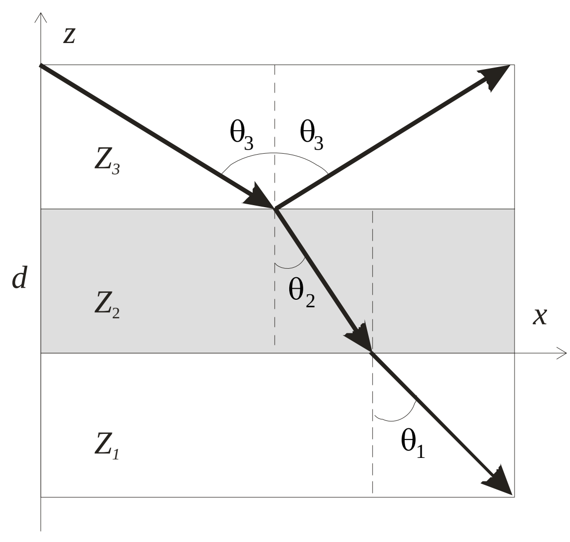

Рис.3

Решение

Нормальный импеданс каждой среды $Z_j = \dfrac{\rho_j c_j}{\cos\theta_j}$, $j = 1, 2, 3$.

Акустическое давление внутри слоя есть сумма полей двух плоских волн, имеющих отрицательную и положительную проекции волнового вектора на ось z (т.е. бегущих "вниз" и "вверх" на рисунке):

$$p_2 = \left[A\exp(-ia_2 z) + B\exp(ia_2 z)\right]\exp(ib_2 x). \tag{103}$$

В этой формуле опущен временной множитель $\exp(-i\omega t)$ и $a_2 = k_2\cos\theta_2$, $b_2 = k_2\sin\theta_2$, $k_2 = \omega/c_2$. Нормальная составляющая скорости в том же слое

$$v_2 = Z_2^{-1}\left[A\exp(-ia_2 z) + B\exp(ia_2 z)\right]\exp(ib_2 x). \tag{104}$$

Эти выражения позволяют рассчитать импеданс на нижней границе $(z = 0)$ слоя

$$Z_1 = \left[\frac{p_2}{v_2}\right]_{z=0} = Z_2\,\frac{A+B}{A-B}, \tag{105}$$

откуда определяется отношение амплитуд двух волн в слое:

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \tag{106}$$

Найдем входной $(z = d)$ импеданс слоя:

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= \left[\frac{p_2}{v_2}\right]_{z=d} = Z_2\,\frac{\exp(-ia_2 d) + (B/A)\exp(ia_2 d)}{\exp(-ia_2 d) - (B/A)\exp(ia_2 d)} = \\ &= Z_2\,\frac{Z_1\cos(a_2 d) - iZ_2\sin(a_2 d)}{Z_2\cos(a_2 d) - iZ_1\sin(a_2 d)} \end{aligned} \tag{107}$$

Перейдем к рассмотрению поля в верхней (третьей) среде, состоящего из суммы падающей и отраженной от слоя волн:

$$\begin{aligned} p_3 &= \left[C\exp\left(-ia_3(z-d)\right) + D\exp\left(ia_3(z-d)\right)\right]\exp(ib_3x), \\ v_3 &= Z_3^{-1}\left[C\exp\left(-ia_3(z-d)\right) + D\exp\left(ia_3(z-d)\right)\right]\exp(ib_3x). \end{aligned} \tag{108}$$

где $a_3 = k_3\cos\theta_3$, $b_3 = k_3\sin\theta_3$, $k_3 = \omega/c_3$. Отсюда находим другое выражение для входного импеданса слоя:

$$Z_{вх} = \left[\frac{p_3}{v_3}\right]_{z=d} = Z_3\frac{C+D}{C-D}. \tag{109}$$

Из этой формулы, учитывая выражение (107), находим коэффициент отражения звука от слоя:

$$V = \frac{D}{C} = \frac{Z_{вх} - Z_3}{Z_{вх} + Z_3} = \frac{Z_2(Z_1 - Z_3)\cos\psi - i\left(Z_2^2 - Z_1Z_3\right)\sin\psi}{Z_2(Z_1 + Z_3)\cos\psi - i\left(Z_2^2 + Z_1Z_3\right)\sin\psi} \tag{110}$$

где $\psi = k_2 d\cos\theta_2$, $k_2 = \omega/c_2$.

<u>Задача 6</u>

Найти коэффициент отражения звука от плоского слоя толщины d, разделяющего две одинаковые по своим характеристикам среды.

<u>Решение</u>

Полагая в формуле (110) $Z_1 = Z_3$, находим

$$V == \frac{i\left(Z_2^2 - Z_1^2\right)\sin\psi}{2Z_1Z_2\cos\psi - i\left(Z_2^2 + Z_1^2\right)\sin\psi} = \frac{s^{-1} - s}{s^{-1} + s + 2i\operatorname{ctg}\psi}, \tag{111}$$

где $s = \rho_2 c_{s2}\cos\theta_1 / \rho_1 c_{s1}\cos\theta_2$. Модуль коэффициента отражения:

$$|V| = \left(s^{-1} - s\right)\left[\left(s^{-1} + s\right)^2 + 4\operatorname{ctg}^2\left(k_2 d\cos\theta_2\right)\right]^{-1/2}. \tag{112}$$

Задача 7

При какой толщине жидкого слоя d, разделяющего две различные среды, свойства материала не влияют на прохождение звука из одной среды в другую?

Ответ

$d = \frac{\lambda}{2}$ (полуволновой слой)

См. задачу 5.

Задача 8

Рассчитать “просветляющий” слой, обеспечивающий наилучшую передачу звука из воды в воздух.

Решение

Наилучшую звукопрозрачность обеспечивает слой вещества с минимальной толщиной $d = \frac{\lambda}{4}$, если его удельное акустическое сопротивление удовлетворяет условию $Z = \sqrt{Z_1 Z_2}$, где $Z_1 = 1.5 \cdot 10^6 \frac{кг}{м \cdot с^2}$ и $Z_2 = 420 \frac{кг}{м \cdot с^2}$ – акустические сопротивления воды и воздуха.

Импеданс “просветляющего” слоя:

$$Z \approx 2.45 \cdot 10^4 \frac{кг}{м \cdot с^2}.$$

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика, Гидродинамика (том VI), Москва, Наука, 1988.
2. Л.Ф. Лепендин. Акустика, Москва, Высшая школа, 1978.
3. В.А. Красильников, В.В. Крылов, Введение в физическую акустику, Москва, Наука, 1984.
4. Справочник физических величин, Спб., Лениздат “Союз”, 2001, 160 стр.
5. Чертов А.Г. Физические величины. Справочник. М., Аквариум, 1997, 335 с.
6. В.Н.Тюлин. Введение в теорию излучения и рассеяния звука. М., Наука, 1976.
7. Ф. Крауфорд. Волны. БКФ, М., Наука, 1974, 528 с.
8. “Акустика в задачах” (под редакцией С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко). М., Наука, Физматлит, 1996, 336 стр.