

Физический факультет
Казанского государственного университета

Насыров А.М., Овчинников М.Н.

**Волновые процессы.
Часть 6. Самовоздействие электромагнитных волн.
(учебное пособие)**

Отпечатано на ризографе. Заказ ФФ 01/06. Тираж 50
ООП ТРО ВОИ. тел. 31-55-02

Казань- 1998.

Печатается по решению редакционно-издательского совета физического факультета Казанского государственного университета.

УДК 538.86+537.86

Насыров А.М., Овчинников М.Н.
Волновые процессы. Часть 6. Самовоздействие электромагнитных волн. Учебное пособие для студентов старших курсов и магистрантов радиофизического отделения физического факультета Казанского государственного университета. Казань, 1998г, с.

Рецензенты: заведующий кафедрой радиофизики, к.ф.-м.н., доцент Плеухов А.Н.

Аннотация:

Излагается теория нелинейных явлений при распространении мощных плоских электромагнитных волн в средах с сильной частотной дисперсией. В первой главе выводятся уравнения для нелинейных волн в средах с дисперсией. Вторая глава посвящена приближенным методам решения нелинейных волновых уравнений. В третьей главе описано явление самовоздействия плоских волн. В четвертой эффект самовоздействия исследуется на примере распространения мощных радиоволн в нижней ионосфере. Анализируются изменения амплитуды и характеристик модуляции радиоволн, формы импульсных сигналов вследствие эффекта самовоздействия.

Разделы 1,3,4 написаны профессором Насыровым А.М., раздел 2 - ст. преподавателем Овчинниковым М.Н.

©Физический факультет Казанского государственного университета, 1998г.

Введение.

В пособии рассматриваются нелинейные процессы в средах с сильной частотной (временной) дисперсией. Для радиоволн это наиболее типичная ситуация. Нелинейность процесса распространения радиоволн определяется нелинейным характером связи поля и индукции, т.е. нелинейностью электромагнитных свойств вещества.

Электромагнитные свойства вещества в макроскопической электродинамике определяются магнитной и диэлектрической проницаемостями μ и ϵ

$$\begin{aligned} B &= \mu H = \mu_0 H + M = (\mu_0 + \chi_M) H \\ D &= \epsilon E = \epsilon_0 E + P = (\epsilon_0 + \chi_E) E. \end{aligned} \quad (1в)$$

где M и P - намагниченность и поляризация среды, показывающие, насколько отличается индукция в среде от индукции в вакууме, χ_M и χ_E - магнитная и электрическая восприимчивости. На рис.1. показана зависимость $B = B(H)$ для ферромагнитной среды.

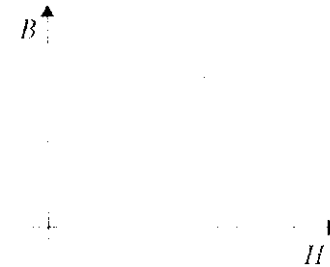


Рис.1. Зависимость $B = B(H)$ для ферромагнитной среды.

При малых H эта зависимость имеет приближенно линейный характер. При увеличении H наблюдается область насыщения. Такой характер кривой объясняется тем, что намагниченность среды M увеличивается пока растет число магнитных диполей, ориентированных вдоль поля. При больших H дальнейшее увеличение магнитного поля не приводит к пропорциональному росту B . Следовательно магнитная восприимчивость χ_M зависит от H . Эту зависимость можно представить в виде ряда

$$B = \mu_0 H + \chi_{1M} H + \chi_{2M} H^2 + \chi_{3M} H^3 + \dots \quad (1)$$

Аналогично, поляризация вещества в общем случае также нелинейно зависит от напряженности поля E . Поляризация элементарного объема среды под действием внешнего поля равна $P = Np$, где p - дипольный момент отдельных атомов и молекул, N - число молекул в единице объема. В общем случае смещение зарядов в атомах и молекулах под воздействием внешнего поля не пропорционально его величине, поэтому связь между напряженностью поля E и поляризацией является нелинейной. Как и в случае с магнитной индукцией электрическую индукцию можно представить в виде ряда

$$D = \epsilon_0 E + \chi_{1E} E + \chi_{2E} E^2 + \chi_{3E} E^3 + \dots \quad (2в)$$

$$\text{При этом } \epsilon = \epsilon_0 + \chi_{1E} E + \chi_{2E} E^2 + \chi_{3E} E^3 + \dots \quad (3в)$$

В малых полях члены с высокими значениями степеней электрического поля E малы, поэтому связь между D и E является линейной. Учет квадратичного и последующих членов дает заметный вклад в D в том случае, когда напряженность внешнего поля соизмерима с внутриатомными полями $E_a = 10^7 - 10^9 \text{ В/см}$. До появления мощных источников электромагнитного излучения при анализе экспериментальных данных можно было ограничиться приближением $\epsilon = const$. Эксперименты по воздействию мощным излучением на вещество (в оптическом диапазоне - излучением лазеров, в радиодиапазоне - мощными СВЧ и декаметровыми передатчиками и т.п.) привели к необходимости исследовать влияние внешних полей на электрические свойства среды.

В предыдущих лекциях [1,2,3] рассматривались волны в линейных средах. К ним мы будем относить среды, в которых различные пространственно-временные спектральные составляющие волновых процессов распространяются без искажений и не взаимодействуют друг с другом. Иными словами, они подчиняются принципу суперпозиции. "Линейность" среды не является ее свойством (хотя мы и говорим "линейные среды"), а зависит от силы внешнего поля. Линейная среда - это

идеализированная модель среды, не во всех случаях позволяющая описывать реальные процессы. Лишь при незначительных амплитудах волн можно пользоваться линейным приближением. Применимость линейной модели зависит от отношения амплитуды волны U к характерной величине $U_{\text{нр}}$, определяющей свойства среды. Например, в акустике роль $U_{\text{нр}}$ играет давление газа или внутреннее давление жидкости. В электродинамике роль $U_{\text{нр}}$ играет напряженность внутреннего поля, действующего на электроны и молекулы. Например, в плазме это так называемое внутреннее плазменное поле.

В линейных средах отношение $U/U_{\text{нр}}$ стремится к нулю, поэтому волновое уравнение становится линейным,

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L(U) = 0, \quad (4в)$$

где L - линейный оператор, описывающий дисперсионные и диссипативные свойства среды.

В нелинейных средах отношение $U/U_{\text{нр}}$ является конечной величиной. Это приводит к необходимости сохранения в волновом уравнении нелинейных членов:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L_1(U) = L_2(U^2) + L_3(U^3) + \dots,$$

где L_2, \dots, L_n - линейные операторы, имеющие порядок величины $\left(\frac{U}{U_{\text{нр}}}\right)^{n-1}$ по отношению к линейным членам. Учет нелинейных членов приводит к качественно новым явлениям. В частности в пособии мы рассмотрим явление самовоздействия.

Отметим следующее. Параметр $U/U_{\text{нр}}$ характеризует локальную нелинейность среды и указывает порядок величины относительного изменения амплитуды на длине волны λ возмущения. Если протяженность нелинейной среды l , то степень нелинейного взаимодействия волн определяется отношением

$\frac{U}{U_{\text{хар}}} \lambda$. Поэтому даже если $\frac{U}{U_{\text{хар}}} \ll 1$ суммарный нелинейный эффект может оказаться значительным из-за большой протяженности области взаимодействия $\frac{l}{\lambda} \gg 1$. Протяженность области взаимодействия волн определяется в значительной степени дисперсией и диссипацией в среде. Это вызвано тем, что энергообмен между гармониками определяется их фазовыми соотношениями. В средах без дисперсии все волны распространяются с одинаковыми волновыми скоростями, поэтому фазовые соотношения между всеми гармониками сохраняются. Если затухание волн мало, нелинейные эффекты накапливаются в процессе распространения. Поэтому в недиспергирующих (или слабо диспергирующих) средах при $l > \lambda \frac{U_{\text{хар}}}{U}$ всегда возникают сильные нелинейные искажения исходного профиля волны. В качестве примера на рис.2 показано изменение профиля волны в процессе распространения звуковой волны.

В средах с сильной дисперсией фазовые скорости гармоник различаются. Из-за этого перекачка энергии между различными модами оказывается незначительной, и нелинейные эффекты не накапливаются. Однако и таких средах существуют нелинейные эффекты, которые мы рассмотрим ниже.

Рассмотрим некоторые примеры нелинейных волновых явлений.

Пример 1. Нелинейные искажения профиля волны.

Пусть на границу среды падает плоская монохроматическая волна $U = A \sin(\omega t - \vec{K}\vec{r})$. Нелинейность приводит к последовательному возбуждению временных гармоник волны $U_n = A_n \sin(n\omega t - \vec{K}_n\vec{r}), n = 2, 3, \dots$. Таким образом, в процессе распространения происходит обогащение частотного спектрального состава волны, что в конечном итоге приводит к искажению синусоидального профиля волны. Это иллюстрируется рис.2.

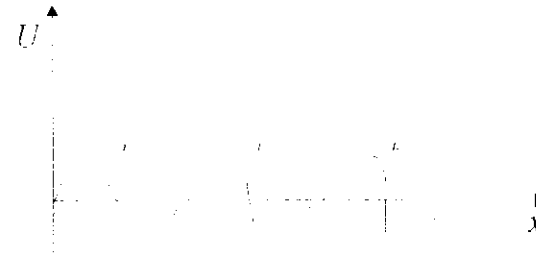


Рис.2.

Пример 2. Взаимодействие волн.

Одним из нелинейных эффектов является взаимодействие волн при распространении в среде.

Рассмотрим эффект на примере акустоэлектронного запоминающего устройства (АЗУ). Такое устройство реализуется на основе нелинейного взаимодействия поверхностных акустических волн (ПАВ) высокой частоты (1МГц-10МГц) с носителями токов в твердых телах (в слоистых структурах пьезоэлектрик -полупроводник). Схема АЗУ представлена на рис.3. Если импульсный сигнал ВЧ $S(t)$ подать на вход 1, он преобразуется в поверхностную акустическую волну, распространяющуюся вдоль поверхности пьезоэлектрика. Эта волна сопровождается появлением поперечного электрического поля, приводящего к локальным изменениям плотности заряда в приповерхностном слое полупроводника. Если на вход 3 подать сигнал $W(t)$, то вследствие нелинейного взаимодействия двух сигналов возникает электрический ток разностной частоты, вызывающий заряд поверхностных ловушек полупроводника. При этом функция распределения зарядов $Q(t)$ соответствует функции корреляции сигналов на входах 1 и 2.

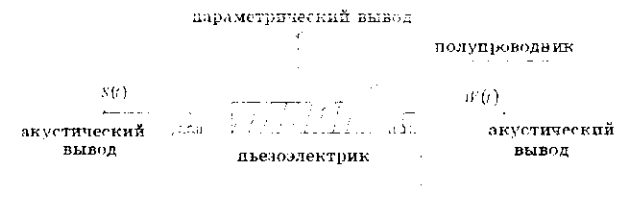


Рис.3.

Пример 3. Нелинейное просветление среды.

При определенных условиях поглощение некоторых сред может уменьшаться под действием распространяющейся волны. Так, например, в туманах и облаках капли воды могут испаряться вследствие их нагревания при поглощении электромагнитной волны. Уменьшение же размеров капель приводит к ослаблению поглощения. В результате среда "просветляется", и электромагнитная волна проходит через нее с меньшим ослаблением.

Пример 4. Самофокусировка электромагнитных волн.

На рис.4а. и рис.4б. показано распространение излучения рубинового лазера малой и большой мощности в нитробензоле. При малой мощности сечение луча в жидкости увеличивается. Луч "расплывается" за счет дифракции (рис.4а). При большой мощности сечение луча уменьшается, т.к. диэлектрическая проницаемость возрастает, и среда под действием поля начинает работать как фокусирующая линза (рис.4б).

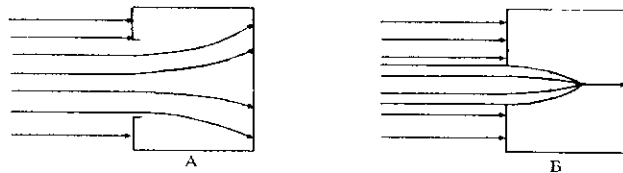


Рис.4.

Пример 5. Уединенные волны

Ярким примером нелинейных волн являются солитоны. Как уже показывалось выше, в нелинейной среде спектр сигнала обогащается высокочастотными гармониками. При этом импульс $S(t)$ искажается. Представим себе, что в среде распространяется колоколообразное по форме возмущение. За счет нелинейности происходит укручение переднего фронта волны в процессе распространения. В конце концов такая волна может опрокинуться, если среда обладает малой дисперсией. Если эффект нелинейности и дисперсии взаимно компенсируют друг друга, то колоколообразное возмущение будет распространяться без искажений формы. Так образуется уединенная волна, называемая также солитоном.

1. Уравнения для нелинейных волн в средах с дисперсией.

Ниже рассмотрим нелинейные процессы в средах с сильной дисперсией. Выбор именно этого раздела нелинейной теории волн связан с тем, что для радиоволн это наиболее типичная ситуация.

Для упрощения будем считать среду немагнитной. В этом случае уравнения Максвелла примут вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эти уравнения необходимо дополнить материальными уравнениями, которые можно выразить через поляризацию среды.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{B} = \vec{H},$$

где
$$\vec{P} = -\frac{e^2 N}{m\omega^2} \vec{E}. \quad (1.2)$$

В линейном приближении при учете частотной дисперсии материальное уравнение можно записать в виде:

$$\vec{P}_i(\vec{r}, t) = \int_0^t d\tau \hat{\chi} \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) \quad (1.3)$$

В сильных полях появляются дополнительные нелинейные члены поляризации

$$\vec{P}_{nl} = \vec{P}^{(2)} + \dots + \vec{P}^{(n)}, \quad (1.4)$$

где $P^{(j)}$ - нелинейные части поляризации j -го порядка.

Будем пользоваться феноменологическими выражениями для нелинейных частей поляризации:

$$P^{(2)} = \iint d\tau_1 d\tau_2 \hat{\chi}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \vec{E}(t - \tau_1) \vec{E}(t - \tau_1 - \tau_2) \quad (1.5a)$$

$$P^{(3)} = \iiint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \hat{\chi}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \vec{E}(t - \tau_1) \vec{E}(t - \tau_1 - \tau_2) \vec{E}(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) \quad (1.5b)$$

Пусть в среде распространяются несколько монохроматических волн.

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}) \exp(i\omega_j t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \vec{E}_j^*(\vec{r}) \exp(-i\omega_j t) \quad (1.6)$$

Нам будет интересовать нелинейный отклик среды на распространение этих волн. В начале рассмотрим случай, когда распространяются две волны с частотами ω_1 и ω_2 . В этом случае уравнение (1.6) переписывается так:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\vec{E}_1 \exp(i\omega_1 t) + \vec{E}_2 \exp(i\omega_2 t) \right] + \left[\vec{E}_1^* \exp(-i\omega_1 t) + \vec{E}_2^* \exp(-i\omega_2 t) \right] \right\} \quad (1.7)$$

Проанализируем случай, когда нелинейные свойства среды определяются квадратичным членом нелинейной поляризации. Подставляя (1.7) в (1.5а) имеем:

$$P^{(2)} = \frac{1}{4} \iint d\tau_1 d\tau_2 \hat{\chi}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \times \\ \times \left\{ \left[\vec{E}_1 e^{i\omega_1(t-\tau_1)} + \vec{E}_2 e^{i\omega_2(t-\tau_1)} \right] + \left[\vec{E}_1^* e^{-i\omega_1(t-\tau_1)} + \vec{E}_2^* e^{-i\omega_2(t-\tau_1)} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left[\vec{E}_1 e^{i\omega_1(t-\tau_1-\tau_2)} + \vec{E}_1^* e^{-i\omega_1(t-\tau_1-\tau_2)} \right] + \left[\vec{E}_2 e^{i\omega_2(t-\tau_1-\tau_2)} + \vec{E}_2^* e^{-i\omega_2(t-\tau_1-\tau_2)} \right] \right\}$$

Проведя арифметические действия под знаком интеграла, в подынтегральном выражении можно выделить члены на удвоенных частотах ($2\omega_1$ и $2\omega_2$), нулевой частоте ($\omega_1 - \omega_1$ и $\omega_2 - \omega_2$), на суммарной ($\omega_1 + \omega_2$) и разностной частотах ($\omega_1 - \omega_2$).

Обобщая для случая N волн можно аналогичными вычислениями убедиться, что в среде будут возбуждаться волны линейной и нелинейной поляризации

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum \vec{P}_q(\vec{r}) \exp(i\omega_q t) + k.c \quad (1.8)$$

на комбинационных частотах

$$\omega_q = \sum_{j=1}^N m_j \omega_j, \quad m_j = 0, +1, -1.$$

В среде будут возбуждаться электромагнитные волны на этих же комбинационных частотах. Возбуждение гармоник соответствует случаю: $m_j = 1, \quad \omega_j = \omega_1$.

$$\omega_q = \sum_{j=1}^N \omega_j = \begin{cases} \omega_1 + \omega_1 = 2\omega_1 & N = 2 \\ \omega_1 + \omega_1 + \omega_1 = 3\omega_1 & N = 3 \\ \dots\dots\dots \\ \omega_1 + \omega_1 + \dots + \omega_1 = n\omega_1 & N = n \end{cases} \quad (1.9)$$

Классификацию нелинейных волновых процессов можно провести по типу нелинейности, на которой развивается процесс (например, квадратичная, кубическая нелинейность), а также по числу волн, участвующих во взаимодействии (например, трехволновый процесс).

В качестве примера рассмотрим нелинейности различного порядка.

1. Квадратичная нелинейность.

Выше мы уже проанализировали появление этой нелинейности и пришли к выводу, что каждое из электромагнитных полей возбуждает две квадратичные поляризации на удвоенной и нулевой частотах

$$\vec{P}_q^{(2)} = \frac{1}{2} \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j + \omega_j) \vec{E}_j \vec{E}_j, \quad (1.10a)$$

$$\vec{P}_q^{(2)} = \frac{1}{2} \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j - \omega_j) \vec{E}_j \vec{E}_j^*,$$

и на суммарной и разностной частотах:

$$\vec{P}_q^{(2)} = \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j + \omega_k) \vec{E}_j \vec{E}_k, \quad (1.10б)$$

$$\vec{P}_q^{(2)} = \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j - \omega_k) \vec{E}_j \vec{E}_k^*.$$

Это означает, что в результате акта взаимодействия каких-либо волн в среде возникает третья волна на комбинационной частоте. Поэтому говорят, что на квадратичной нелинейности происходит трехчастотное взаимодействие.

2. Кубическая нелинейность.

В процессе одного взаимодействия одновременно могут участвовать четыре волны различных частот. В общем случае

четырёхволнового взаимодействия три волны с частотами $\omega_j, \omega_k, \omega_l$ возбуждают в среде волны кубичной по полю поляризации на комбинационных частотах

$$\omega_q = \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l.$$

При этом наблюдаются следующие эффекты:

- Каждая из распространяющихся волн возбуждает третью гармонику (так называемое трехчастотное вырождение).

$$\bar{P}_q^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_j + \omega_k + \omega_l) \bar{E}_j \bar{E}_k \bar{E}_l \quad (1.11)$$

- Каждая волна может испытать самовоздействие, связанное с возникновением нелинейной поляризации на собственной частоте (так называемое одночастотное вырождение).

$$\bar{P}_q^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_j + \omega_k - \omega_l) \bar{E}_j \bar{E}_k \bar{E}_l^* \quad (1.12)$$

Благодаря такому эффекту диэлектрическая проницаемость зависит от интенсивности волны (эффект самовоздействия)

$$\varepsilon(\omega_j) = \varepsilon_0(\omega_j) + \varepsilon_2(\omega_j) \bar{E}_j \bar{E}_j^* \quad (1.13)$$

Диэлектрическая проницаемость может изменяться также под действием другой частоты (эффект взаимодействия волн).

$$\bar{P}_q^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_j + \omega_k - \omega_l) \bar{E}_j \bar{E}_k \bar{E}_l^* \quad (1.14)$$

$$\varepsilon(\omega_j) = \varepsilon_0(\omega_j) + \varepsilon_2(\omega_j, \omega_k) \bar{E}_k \bar{E}_k^* \quad (1.15)$$

Влияние одной волны на другую через изменение диэлектрической проницаемости называется кросс-модуляцией, или перекрестной модуляцией.

3. Высшие нелинейности.

На высших нелинейностях электрической восприимчивости среды $\hat{\chi}^{(n)}$ могут развиваться эффекты генерации высших гармоник и смещения частот. На нелинейностях нечетного порядка волны испытывают самовоздействие, т.к. нелинейная поляризация имеет ту же частоту, что и волна

$$\bar{P}_q^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \hat{\chi}^{(n)}(\omega_j) \left[\bar{E}_j \bar{E}_j^* \right]^{n-1/2} \bar{E}_j \quad (1.16)$$

В результате самовоздействия появляется нелинейное изменение диэлектрической проницаемости среды. В изотропной среде $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{nl}(|E|^2)$.

2. Методы решения нелинейных волновых уравнений.

Для анализа нелинейных электромагнитных процессов необходимо решить уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (a) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} & (c) \\ \vec{B} = \vec{H} & (d) \end{cases} \quad (2.1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

Сведем систему (2.1) к волновому уравнению. Для этого применим операцию rot к уравнению (2.1б) и подставим в него уравнение (2.1а) с учетом (2.1г) и правила $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} = \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t}$. Тогда получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D}. \quad (2.2)$$

С учетом (2.1в) и разложения поляризации на линейную и нелинейную части $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}''$ получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}') = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}'' \quad (2.3)$$

Напомним, что $\vec{E} = \frac{1}{2} \sum \vec{E}_j \exp(i\omega_j t) + \text{K.C.}$, а

$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum \vec{P}_q \exp(i\omega_q t) + \text{K.C.}$, где $\omega_q = \sum_{j=1}^N m_j \omega_j$. К.С. -

комплексно сопряженное. Таким образом под знаками дифференциальных операторов у нас находятся суммы полей $\{\vec{E}_j\}$ и $\{\vec{P}_q\}$, зависящих от координат \vec{r} .

Попробуем теперь перейти от сумм полей $\{\vec{E}_j\}$ и $\{\vec{P}_q\}$ к волновым уравнениям для отдельных волновых полей \vec{E}_j . Для

этого в уравнении (2.3) соберем члены при соответствующих временных множителях $\exp(i\omega_k t)$ и, учитывая что

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(i\omega_k t) = i\omega_k \exp(i\omega_k t),$$

$$\vec{P}'(\omega_j) = \chi(\omega_j) \vec{E},$$

$$1 + 4\pi \hat{\chi}(\omega_j) = \hat{\epsilon}_0(\omega_j), \text{ где } \hat{\epsilon}_0(\omega_j) = \hat{\epsilon}'(\omega_j) + i\hat{\epsilon}''(\omega_j),$$

получим:

$$\sum_j \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_j - \frac{\omega_j^2}{c^2} \hat{\epsilon}_0(\omega_j) \vec{E}_j \right) \exp(i\omega_j t) = \frac{4\pi\omega_q^2}{c^2} \sum_q \vec{P}_q(\vec{r}) \exp(i\omega_q t) \quad (2.4)$$

Имея в виду, что уравнение (2.4) выполняется для любого времени t , мы приходим к выводу, что оно может быть удовлетворено только при выполнении условий (2.4) для каждой компоненты E_j набора $\{E_j\}$:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_j - \frac{\omega_j^2}{c^2} \hat{\epsilon}_0 \vec{E}_j = \frac{4\pi\omega_q^2}{c^2} \vec{P}_q'' \quad (2.5)$$

Действительно, пусть мы имеем уравнение вида

$$\sum_{j=1}^N f_j(x) \exp(i\omega_j t) = 0, \quad (2.6)$$

которое выполняется при любом t . Нетрудно убедиться, что это возможно только при

$$f_j(x) = 0.$$

2.1. Метод возмущений. (Вычисление волновых полей путем последовательных приближений.)

Предположим, что среда является слабо нелинейной и величина нелинейной поляризации мала по отношению к величине поля на границе, т.е.

$$\frac{|\bar{P}^{nl}|}{|\bar{E}|} = \mu, \quad \mu \ll 1 \quad (2.7)$$

Разложим по малому параметру μ электрические поля.

$$\bar{E}_i = \bar{E}_{i(0)} + \mu \bar{E}_{i(1)} + \mu^2 \bar{E}_{i(2)} + \dots \quad (2.8)$$

Здесь индекс в скобках показывает порядок малости. Подставим (2.8) в выражение для определения нелинейной поляризации $\bar{P}^{nl} = \bar{P}^{(2)} + \bar{P}^{(3)} + \dots = f(\bar{E}_i, \bar{E}_j, \dots)$, имея в виду, что для конкретной задачи мы считаем известными тензоры восприимчивости $\hat{\chi}^{(1)}$. Тогда можно записать для нелинейной части поляризации

$$\bar{P}_i^{nl} = \mu \bar{P}_{i(0)} + \mu^2 \bar{P}_{i(1)} + \mu^3 \bar{P}_{i(2)} + \dots \quad (2.9)$$

Мы записываем, по-прежнему, в скобках порядок малости с учетом отношения (2.7).

Теперь будем собирать члены одинакового порядка малости для уравнения (2.5), подставив в него (2.8) и (2.9) и принимая во внимание порядок малости величин.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot rot } \bar{E}_{i(0)} - \frac{\omega_i^2}{c^2} \hat{\epsilon}_0(\omega_i) \bar{E}_{i(0)} = 0 \\ \text{rot rot } \bar{E}_{i(1)} - \frac{\omega_i^2}{c^2} \hat{\epsilon}_0(\omega_i) \bar{E}_{i(1)} = \frac{4\pi\omega_i^2}{c^2} \bar{P}_{i(0)}^{nl} \quad (a) \\ \text{rot rot } \bar{E}_{i(2)} - \frac{\omega_i^2}{c^2} \hat{\epsilon}_0(\omega_i) \bar{E}_{i(2)} = \frac{4\pi\omega_i^2}{c^2} \bar{P}_{i(1)}^{nl} \quad (b) \\ u \quad m. \partial. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Мы получили цепочку уравнений Гельмгольца, для которой выражение в правой части есть известное выражение, полученное

в результате решений уравнений на предыдущих этапах. Таким образом, сначала с учетом начальных и граничных условий из (2.10а) мы находим решение $E_{i(0)}$, вычисляем

$$P_{i(0)} = \hat{f}(E_{i(0)}, E_{j(0)})$$

$$\text{и подставляем } P_{i(0)} \text{ в (2.10б). Затем находим}$$

$$E_{i(1)}, \text{ вычисляем } P_{i(1)} = \hat{g}(E_{i(1)}, E_{j(1)}) \text{ и подставляем в (2.10в) и}$$

т.д. Так, последовательно решая уравнения Гельмгольца для всех волновых полей, вычисленных в предыдущем приближении, мы постоянно приближаемся к точному решению задачи. Отметим однако, что этот метод хорошо работает только при малых возмущениях, когда амплитуды возбужденных волн малы по отношению к амплитудам падающих.

2.2. Метод медленно изменяющихся амплитуд.

Пусть на слабо нелинейную и слабо поглощающую среду падают плоские волны. При этом амплитуды волн изменяются на малую величину при прохождении волной расстояний порядка длины волны λ (в силу слабого поглощения). Представим поле и поляризацию в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_i = \bar{e}_i A_i(\mu \bar{k} \bar{r}) \exp(i \bar{k}_i \bar{r}) \\ \bar{P}_q = \bar{p}_q P_q(\mu \bar{k} \bar{r}) \exp(i \bar{k}_{p,q} \bar{r}) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

где \bar{e}_i и \bar{p}_q - единичные векторы поляризации, A_i и P_q - медленно изменяющиеся амплитуды, $\mu \ll 1$ - малый параметр, $\bar{k}_{p,q}$ - волновой вектор нелинейной поляризации на частоте ω_q , равный

$$\bar{k}_{p,q} = \sum_{j=1}^N m_j \bar{k}_j, \quad m_j = 0, \pm 1, \quad (2.12)$$

$$k_i = \frac{\sqrt{\epsilon'_0} \omega_i}{c}, \quad (2.13)$$

Медленность изменения амплитуд означает, что

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial A_i}{\partial \bar{r}} \right| \ll \left| \bar{k}_i \right| \\ \left| \frac{\partial^2 A_i}{\partial \bar{r}^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial A_i}{\partial \bar{r}} \right| \end{cases} \quad (2.14)$$

что и выполняется при $\mu \ll 1$.

Рассмотрим, как могут располагаться соответствующие вектора при условии, что линейную и нелинейную среду разделяет плоскость $z=0$, а магнитное поле \vec{H} перпендикулярно плоскости рисунка (считаем, что магнитная проницаемость равна 1). В общем случае вектор индукции \vec{D} не обязательно коллинеарен вектору \vec{E} и, соответственно, вектор Умова-Пойтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$ не коллинеарен волновому вектору \vec{k} (см. рис.2.1.).

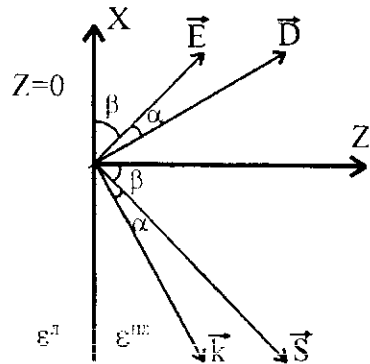


Рис.2.1.

Будем считать далее, что векторы поляризации совпадают с векторами нормальных волн. В этом случае выполняется уравнение

$$\left[\bar{k}_i \left[\bar{k}_i \vec{E}_i \right] \right] + \frac{\omega_i^2}{c^2} \hat{\epsilon}'_0 \vec{E}_i = 0 \quad (2.15)$$

где $\alpha_j = \frac{\varepsilon''}{2 \cos \beta_j} \frac{\omega_j^2}{c^2 k_j}$ - коэффициент поглощения.

В правой части (2.19) содержится осциллирующий множитель $\exp[i(k_j - k_{p,q})z]$, который максимален при

$$\bar{k}_i = \bar{k}_{p,q} = \sum_{j=1}^N m_j \bar{k}_j. \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) составляет условие фазового согласования или фазового синхронизма. При соблюдении этого условия фазовая скорость волны на частоте ω_j равна фазовой скорости волны нелинейной поляризации на той же частоте. Это приводит к сильному обмену энергией между волнами в среде и нарастанию нелинейных эффектов.

3. Самовоздействие плоских волн.

На нечетных нелинейностях (3-го, 5-го и т. д. порядков) происходит самовоздействие волн. Суммируя все нелинейные члены, ответственные за самовоздействие электромагнитных волн, можно ввести нелинейную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{nn}(|E|^2) \quad (3.1)$$

где ε_0 - диэлектрическая проницаемость линейной среды при $|E| \rightarrow 0$, ε_{nn} - нелинейная добавка, зависящая от интенсивности поля. В общем случае ε_{nn} - комплексная величина

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{nn}' - i\varepsilon_{nn}'' \quad (3.1a)$$

Если среда слабонелинейная, т. е. $|\varepsilon_{nn}| \ll |\varepsilon_0|$ и слабопоглощающая, т. е. $|\varepsilon''| \ll |\varepsilon'|$, то для описания самовоздействия плоских монохроматических волн можно воспользоваться методом медленно изменяющихся амплитуд и волновое уравнение свести к укороченному уравнению для амплитуды

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\varepsilon_0'' \omega}{2c\sqrt{\varepsilon_0'}} A = -i \frac{2\pi\omega}{c\sqrt{\varepsilon_0'}} P^{nn} \quad (3.2)$$

Так как мы рассматриваем эффект самовоздействия, то осциллирующий член положим равным нулю. С учетом того, что волновое число равно $k_j = \frac{\omega_j}{c} \sqrt{\varepsilon_0'}$ уравнение (3.2) запишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\varepsilon_0'' k}{2\varepsilon_0'} A = -i \frac{4\pi k}{2\varepsilon_0'} P^{nn} \quad (3.2a)$$

Примем во внимание, что $4\pi P^{nn} k = \varepsilon'' A$.

Уравнение (3.2a) перепишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{k}{2\varepsilon_0'} (\varepsilon_0'' + i\varepsilon''_n) A = -\frac{k}{2\varepsilon_0'} (\varepsilon_0'' + i\varepsilon_{nn}' + \varepsilon_{nn}'') A \quad (3.2b)$$

Вместо комплексной амплитуды используем действительную амплитуду и фазу и запишем:

$$A = A_0 \cdot \exp(-ik\psi) \quad (3.3)$$

Здесь ψ - добавка к фазе плоской волны, возникающая из-за нелинейности среды. Подставим (3.3) в (3.2):

$$\frac{dA_0}{dz} \cdot \exp(-ik\psi) + A_0(-ik) \exp(-ik\psi) + \frac{d\psi}{dz} + \frac{ik(\varepsilon_{nl}' + i\varepsilon_0'')}{2\varepsilon_0} \cdot A_0 \exp(-ik\psi) = 0$$

Подставим сюда выражение для ε_{nl}' , получим:

$$\frac{dA_0}{dz} + A_0(-ik) \frac{d\psi}{dz} + \frac{ik(\varepsilon_{nl}' - i\varepsilon_{nl}'' + i\varepsilon_0'')}{2\varepsilon_0} \cdot A_0 = 0$$

или:

$$\frac{dA_0}{dz} + \frac{k\varepsilon_{nl}''}{2\varepsilon_0} A_0 + \frac{k\varepsilon_0''}{2\varepsilon_0} + ikA_0 \left(-\frac{d\psi}{dz} + \frac{\varepsilon_{nl}'}{2\varepsilon_0} \right) = 0$$

Разделяя действительные и мнимые части, получим:

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\varepsilon_{nl}'}{2\varepsilon_0}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dA_0}{dz} = -\left(\frac{k\varepsilon_{nl}''}{2\varepsilon_0} + \frac{k\varepsilon_0''}{2\varepsilon_0} \right) \cdot A_0, \quad (3.5)$$

Обозначая

$$\alpha_l = \frac{k\varepsilon_0''}{2\varepsilon_0}, \quad \alpha_{nl} = \frac{k\varepsilon_{nl}''}{2\varepsilon_0} \quad (3.6)$$

перепишем эту систему в следующем виде

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\varepsilon_{nl}'}{2\varepsilon_0}, \quad \text{причем } \varepsilon_{nl}'' = \varepsilon_{nl}''(A_0^2) \quad (3.4a)$$

$$\frac{dA_0}{dz} = -\alpha \cdot A_0, \quad \alpha = \alpha_l + \alpha_{nl} \quad (3.5a)$$

3.1. Нелинейное поглощение.

Рассмотрим случай, когда поглощение в среде велико и волна экспоненциально затухает: $A_0 = E_0 \exp(-\alpha_l z)$.

Предположим, что линейное поглощение мало, т. е.

$$\alpha_l \approx 0 \quad (3.7)$$

Разложим ε_{nl}'' в ряд по полю и ограничимся первым членом разложения, т. е. будем считать

$$\varepsilon_{nl}'' = \varepsilon_2'' A_0^2 \quad (3.8)$$

Тогда коэффициент нелинейного поглощения будет

$$\alpha_{nl} \approx \frac{k\varepsilon_2'' A_0^2}{2\varepsilon_0} \quad (3.9)$$

Используя принятые выше значения α_l и α_{nl} , уравнение (3.5) приведем к виду:

$$\frac{dA_0}{dz} = -\frac{k\varepsilon_2''}{2\varepsilon_0} A_0^3 \quad (3.10)$$

Проинтегрируем уравнение (3.10). Для этого запишем его так:

$$\frac{dA_0}{dz} = aA_0^3, \quad \frac{dA_0}{A_0^3} = adz$$

$$\int \frac{dA_0}{A_0^3} = \int adz + c = az + c$$

$$-2 \cdot \frac{1}{A_0^2} = az + c$$

Начальное условие $A_0|_{z=0} = E_0$. Отсюда $c = -\frac{2}{A_0^2}|_{z=0} = -\frac{2}{E_0^2}$.

Таким образом решение уравнения имеет вид:

$$-\frac{1}{A_0^2} = az - \frac{2}{E_0^2} = \frac{aE_0^2 z - 2}{E_0^2}, \quad \frac{1}{A_0^2} = \frac{1 - \frac{aE_0^2 z}{2}}{E_0^2}$$

Окончательно получаем:

$$A_0^2 = \frac{E_0^2}{1 + \frac{k\varepsilon_2'' E_0^2}{\varepsilon_0'} z} \quad (3.11)$$

Из этого выражения видно, что в среде с нелинейным поглощением волна с большей амплитудой затухает быстрее.

Преобразуем (3.11) к виду:

$$A_0^2 = \frac{E_0^2}{\frac{\varepsilon_0'}{k\varepsilon_2'' E_0^2} + z} \cdot \frac{\varepsilon_0'}{k\varepsilon_2'' E_0^2} = \frac{\varepsilon_0'}{k\varepsilon_2''} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon_0'}{k\varepsilon_2'' E_0^2} + z}$$

Если $z > \frac{\varepsilon_0'}{k\varepsilon_2'' E_0^2}$, то $A_0^2 \approx \frac{\varepsilon_0'}{k\varepsilon_2''} \cdot \frac{1}{z}$. Т. е. в зоне поглощения амплитуда волны не зависит от величины поля на границе.

3.2. Нелинейное просветление среды.

При определенных условиях поглощение среды может уменьшаться под действием распространяющихся волн. В результате происходит просветление среды. Эффект индуцированного просветления может наблюдаться при прохождении оптического излучения через газы, полупроводники, при распространении радиоволн через туман. Простейшей моделью, описывающей закон уменьшения поглощения среды под действием поля волны, может служить дифференциальный закон:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \gamma \alpha A_0^2 = 0 \quad (3.13)$$

здесь γ - параметр нелинейного взаимодействия волны со средой. Из (13) следует, что коэффициент поглощения α уменьшается экспоненциально:

$$\alpha = \alpha_0 \exp[-\gamma W(t)] \quad (3.14)$$

где $W(t) = \int_0^t A_0^2(t_1, z) dt_1$ - объемная плотность энергии, прошедшей через данную точку к моменту времени t .

Волна входит в сильно поглощающую среду, поэтому просветление сначала более эффективно идет вблизи границы поглощающей среды. Затем область просветления продвигается вглубь среды. Проведем анализ процесса. Для этого нужно совместно решить уравнения (3.5) и (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dz} &= -\alpha A_0, \alpha = \alpha_i + \alpha_{nl}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \gamma \alpha A_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Граничные условия: $A_0(0, t) = E_0(t)$, начальные условия: $\alpha(z, 0) = \alpha_0$.

Точное решение этой задачи выглядит так [1]:

$$\begin{aligned} A_0^2 &= \frac{E_0^2(t)}{1 + [\exp(2\alpha_0 z) - 1] \exp(-\gamma W_0)} \\ \alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + [\exp(\gamma W_0) - 1] \exp(-2\alpha_0 z)} \\ W_0 &= \int_0^t E_0^2(t_1) dt_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Волна первоначально сильно затухает в области, где $\alpha_0 z \gg 1$. При большой начальной энергии волны, когда выполнено условие $\gamma W_0 \gg \alpha_0 z \gg 1$, для коэффициента поглощения следует $\alpha \ll \alpha_0$, и $A_0 \approx E_0$. Происходит просветление среды, и волна практически не испытывает затухания в области, где выполнено условие $z > \alpha_0^{-1}$. На рис.3.1. показана зависимость амплитуды волны от расстояния при просветлении среды в различные моменты времени: $t_1 < t_2 < t_3$.

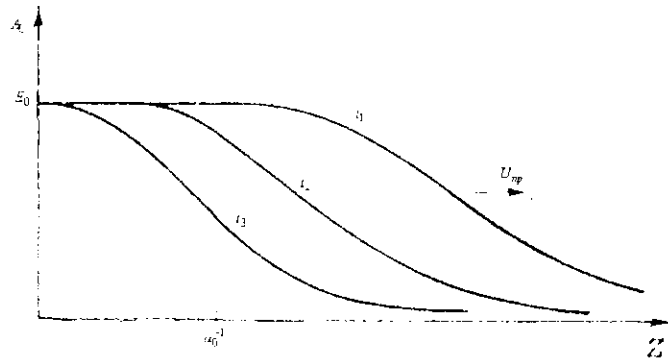


Рис.3.1. Зависимость амплитуды волны от расстояния при просветлении среды (моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$).

Протяженность **зоны просветления** $z_{пр}$ в каждый момент времени определяется уравнением $2\alpha_0 z_{пр} = \gamma W_0(t)$. Скорость перемещения фронта просветления:

$$u_{пр} = \frac{dz_{пр}}{dt} = -\frac{\gamma E_0^2(t)}{2\alpha_0}$$

Чем больше интенсивность волны E_0^2 на входе в среду, тем быстрее происходит просветление среды. В следующем разделе этот эффект демонстрируется на примере распространения мощных радиоволн в ионосфере.

3.3. Нелинейная дисперсия.

Пусть затухание мало, т.е. $\alpha \rightarrow 0$. Тогда из (3.5) следует: $A_0 = E_0 = const$. Из (3.4) получим

$$\psi = \frac{\varepsilon'_{nl}(E_0^2)}{2\varepsilon'_0} z. \quad (3.17)$$

Полное поле запишем в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k_{nl} z)) + \frac{1}{2} \vec{E}_0^* \exp(-i(\omega t - k_{nl} z)). \quad (3.18)$$

Теперь $k_{nl} = k \left(1 + \frac{\varepsilon'_{nl}}{2\varepsilon'_0} \right)$, а фазовая скорость

$$v_{nl} = \frac{c}{k_{nl}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'_0} \left(1 + \frac{\varepsilon'_{nl}}{2\varepsilon'_0} \right)} \approx v_0 \left(1 - \frac{\varepsilon'_{nl}}{2\varepsilon'_0} \right). \quad (3.19)$$

Поскольку ε'_{nl} может быть любого знака, возможно как уменьшение, так и увеличение фазовой скорости.

4. Эффект самовоздействия плоских волн в ионосфере.

В разделе 3 показано, что в поле сильной электромагнитной волны может измениться состояние среды (например, из-за зависимости поглощения волн от их амплитуд), что в свою очередь приводит к изменению параметров распространяющейся волны. Рассмотрим этот эффект на примере распространения мощной электромагнитной волны в ионосферной плазме.

Предположим, что на границу среды падает плоская волна, распространяющаяся вдоль оси z . Ее поле на границе среды (в плоскости $z = 0$) зададим в виде $\vec{E}_0 \cos \omega t$. Переходные процессы исключим из рассмотрения и будем считать, что частота волны в процессе распространения не изменяется и остается неизменными во времени диэлектрическая проницаемость ϵ и проводимость σ среды. Т.е. рассматриваем стационарную задачу. Это возможно, если мы будем рассматривать процессы, развивающиеся после включения поля через интервал $\Delta t \gg 1/\delta \nu_c$ (где δ -доля энергии, теряемой электроном при соударении, ν_c -частота соударения электронов с молекулами и ионами). При этом значения ϵ и σ зависят от амплитуды поля. Из-за этой зависимости и развивается эффект самовоздействия в ионосфере.

В линейной теории волн предполагается, что амплитуды волн настолько малы, что не в состоянии изменить свойств среды распространения. В частности, это относится к распространению волн в ионосфере Земли. Отсюда следует, что если амплитуда падающей на ионосферу волны удваивается, то и амплитуда отраженной волны тоже удваивается. При этом показатели преломления и поглощения остаются неизменными. Однако, если говорить строго, то воздействие радиоволн на плазму остается линейным только при отсутствии электронных соударений, либо когда амплитуда волны бесконечно мала. Если же есть соударения и амплитуда волны конечна, то отклик среды на воздействие волны уже не остается линейным. При прохождении волны через плазму тепловая энергия электронов увеличивается, и поэтому

возрастает частота соударений электронов с нейтральными частицами ν_{em} и ионами ν_{ei} . Согласно [3]:

$$\nu_{em} = \nu_{em0} \sqrt{\frac{T_e}{T}}$$

$$\nu_{ei} = \nu_{ei0} \sqrt{\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^3}$$

(ν_{em0}, ν_{ei0} -невозмущенные радиоволной частоты соударений, T_e, T_i, T - температуры электронов, ионов, нейтральных атомов и молекул).

Изменение ν_{em} и ν_{ei} приводит к изменению поглощения радиоволн. Чем больше энергия волны, тем сильнее изменение поглощения, и соотношение между амплитудами падающей и отраженной волн не остается линейным. Таким образом, взаимодействие между радиоволной и поглощающей плазмой оказывается нелинейным процессом.

В этом учебном пособии мы ограничиваемся изучением нелинейных процессов, связанных с нагревом плазмы, в частности, лишь эффектом самовоздействия.

Необходимо сразу указать, что влиянием поля на электромагнитные процессы в плазме можно пренебречь, если напряженность поля $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ удовлетворяет условию

$$E_0 \ll E_p = \sqrt{\frac{3mk_b}{e^2} T \delta (\omega^2 + \nu_{эфф0}^2)} = 4.2 \cdot 10^{-10} \sqrt{T \delta (\omega^2 + \nu_{эфф0}^2)} \frac{B}{см}$$

где $\nu_{эфф0}$ -эффективное число соударений в равновесной плазме;

δ - эффективная (средняя) относительная доля энергии, передаваемой электроном при соударении с тяжелыми частицами

(для упругих соударений $\delta = \delta_{упр} = \frac{2m}{m_i}$); k_b - постоянная

Больцмана, T - температура плазмы, ω -частота поля, E_p - внутривлазменное поле. В этом поле средняя энергия электрона изменяется на величину порядка $k_b T$.

В сильных полях $E_0 > E_p$ свойства плазмы существенно изменяются. В ионосфере в области высоких частот $\omega^2 \gg v_{эфф0}^2$ значение E_p равно: при $\omega = 2 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ ($\lambda_0 \approx 1 \text{ км}$), $E_p \approx 10^{-3} \text{ В/м}$; при $\omega = 2 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ ($\lambda_0 \approx 100 \text{ м}$), $E_p \approx 10^{-2} \text{ В/м}$. В ионосферной плазме нелинейность может проявиться в полях, которые не представляются особенно большими для современных радиопередающих средств. Естественно, нелинейные процессы характерны и для лабораторной плазмы. В непроводящих чистых жидкостях и твердых телах (кроме сегнетоэлектриков) положение иное. Здесь влиянием поля на свойства среды можно пренебречь вплоть до полей порядка $10^5 - 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, приближающихся по величине к полям атомного масштаба $E_a \approx \frac{e}{d^2} \approx 10^8 \frac{\text{В}}{\text{см}}$ (где d - размеры атомов или постоянная кристаллической решетки). В металлах и полупроводниках электроны проводимости могут быть уподоблены электронам в газообразной плазме. Однако, область нелинейности в металлах практически трудно достижима, т.к. созданию большого поля в металле препятствует большая электропроводность. В полупроводниках нелинейность наблюдается без особого труда.

4.1. Нелинейное волновое уравнение.

Запишем уравнения Максвелла и материальные уравнения

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \text{div} \vec{H} &= 0, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \text{div} \vec{D} &= 4\pi \rho, \\ & & \vec{D} &= \hat{\epsilon} \vec{E}, \\ & & \vec{j} &= \hat{\sigma} \vec{E}. \end{aligned}$$

В случае плазмы $\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\epsilon} - 1}{4\pi} \vec{E} \right)$. В общем случае $\hat{\sigma}, \hat{\epsilon}$ - тензоры.

Будем рассматривать гармонические поля $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$. В этом случае уравнения Максвелла и материальные уравнения приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{i\omega}{c} \vec{D}, & \text{div} \vec{H} &= 0, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{i\omega}{c} \vec{H}, & \text{div} \vec{D} &= 4\pi \rho, \\ & & D_i &= \epsilon_{ij}(\omega) E_j, \\ & & j_i &= \sigma_{ij}(\omega) E_j. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы магнитное поле, получим:

$$\text{rot rot} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\vec{D} - i \frac{4\pi}{\omega} \vec{j} \right) = 0. \quad (4.1)$$

В декартовой системе координат справедливо соотношение: $\text{rot rot} = -\Delta + \text{grad div}$. Поэтому можно предыдущее уравнение переписать в виде:

$$\Delta \vec{E} - \text{grad div} \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\vec{D} - i \frac{4\pi}{\omega} \vec{j} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) нелинейное, т.к. входящие в него величины $\hat{\sigma}, \hat{\epsilon}$ в общем случае зависят от \vec{E} .

Упростим задачу, считая, что плазма изотропна. В ионосфере это приближение справедливо на высотах менее 100 км. В этом случае материальные уравнения запишутся в виде:

$$\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma(\omega) \vec{E}.$$

При этом уравнение (4.2) преобразуется к виду:

$$\Delta \vec{E} - \text{grad div} \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \vec{E} = 0, \quad (4.3)$$

где $\epsilon' = \epsilon(\omega) - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma(\omega)$ - комплексная диэлектрическая проницаемость.

В сильных полях диэлектрическая проницаемость становится зависящей от величины поля, т.е.

$$\varepsilon' = \varepsilon'(\omega, \vec{r}, \vec{E}_0(\vec{r})). \quad (4.4)$$

В случае плазмы:

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N(\vec{r})}{m\omega[\omega - i\nu_{эфф}(T_c)]}.$$

Изменения диэлектрической проницаемости в поле волны обусловлены зависимостью частоты соударений $\nu_{эфф}$ от электронной температуры, которая определяется величиной электромагнитного поля.

4.2. Нелинейная геометрическая оптика плоской волны.

Уравнение (4.3) достаточно сложно. Сделаем ряд упрощающих задачу предположений. Будем полагать, что свойства среды медленно изменяются в пространстве на масштабах порядка длины волны. Этим обеспечивается применение метода геометрической оптики для решения нашей задачи. Считаем, что ионосфера является плоскослоистой и ее свойства изменяются вдоль координаты z , т.е. $\varepsilon = \varepsilon(z), \sigma = \sigma(z)$. В этом случае уравнение (4.3) упрощается и принимает вид:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(z, |E|) E = 0. \quad (4.5)$$

В этом уравнении под E можно понимать любую из компонент электрического поля E_x или E_y . По начальным условиям считаем $E_z(0) = 0$. На границе среды $E_{z=0} = E(0)$.

Будем искать решение уравнения (4.5) в виде бегущей волны:

$$E(z) = E_1(z) \exp\left[i \int k dz - \frac{\omega}{c} \int \chi dz\right], \quad (4.6)$$

где $k = \frac{\omega}{c} n$ - волновое число, n - показатель преломления, χ - показатель поглощения среды.

В плазме справедливы следующие соотношения:

$$n = \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon'(z)} = \frac{\varepsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} \right]^{1/2},$$

$$\chi = \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon'(z)} = \frac{\varepsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} \right]^{1/2}.$$

Если среда обладает свойствами диэлектрика, т.е. $\varepsilon > \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, то

$$\text{справедливо приближение } n = \sqrt{\varepsilon}, \chi = \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}}.$$

Подставим решение (6) в уравнение (5). Получим уравнение для амплитуды поля в среде $E_1(z)$. Для этого запишем уравнение (6) в виде:

$$E(z) = E_1(z) \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right].$$

Мы учли, что $k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \mu$ и при $\mu = 1$ $k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'}$; $k' = k + i\chi$.

Первая производная поля по координате z равна:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} &= \frac{dE_1}{dz} \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right] + E_1(z) \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \right) \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right] = \\ &= \left(\frac{dE_1}{dz} + E_1(z) \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \right) \right) \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right]. \end{aligned}$$

Вторая производная:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dz^2} &= \left[\frac{d^2 E_1}{dz^2} + \frac{dE_1}{dz} \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \right) + E_1 \left(i \frac{\omega}{c} \varepsilon'^{-1/2} \frac{d\varepsilon'}{dz} \right) \right] \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right] + \\ &+ \left(\frac{dE_1}{dz} + E_1 \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \right) \right) \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \right) \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right] = \\ &= \left[\frac{d^2 E_1}{dz^2} + \frac{dE_1}{dz} \left(2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \right) + E_1 \left(i \frac{\omega}{c} \varepsilon'^{-1/2} \frac{d\varepsilon'}{dz} - \varepsilon' \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \exp\left[i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'} dz\right]. \end{aligned}$$

Подставляя значения производной $d^2 E/dz^2$ в уравнение (4.5) и сокращая член $\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'}z\right)$, приходим к уравнению:

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + \frac{2i\omega\sqrt{\varepsilon'}}{c} \frac{dE_1}{dz} + \frac{i\omega}{2c\sqrt{\varepsilon'}} \frac{d\varepsilon'}{dz} E_1 = 0. \quad (4.7)$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\left[\frac{\lambda}{4\pi} \frac{d\varepsilon'}{dz} \varepsilon'^{-\frac{3}{2}} \right] \frac{d^2 E_1}{dz^2} + i\pi\lambda\varepsilon'^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varepsilon'}{dz} \left[4\varepsilon' \left(\frac{d\varepsilon'}{dz} \right)^{-1} \frac{dE_1}{dz} + E_1 \right] = 0$$

В этом уравнении можно пренебречь членом со второй производной, если коэффициент перед ним

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{d\varepsilon'}{dz} \varepsilon'^{-\frac{3}{2}} \ll 1.$$

Тогда уравнение для амплитуды поля будет иметь вид:

$$\frac{dE_1}{dz} + \frac{\varepsilon'^{-1}}{4} \frac{d\varepsilon'}{dz} E_1 = 0. \quad (4.8)$$

Решение этого уравнения

$$E_1(z) = E(0)\varepsilon'^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.9)$$

Здесь $E(0)$ поле на границе среды $E_{z=0} = E(0)$. В справедливости (4.9) можно убедиться подстановкой в (4.8).

Таким образом в геометрическом приближении амплитуда поля изменяется при распространении волны вдоль оси z согласно соотношения

$$E(z) = \frac{E(0)}{\varepsilon'^{\frac{1}{4}}} \exp\left(i \int_0^z \sqrt{\varepsilon'} dz\right). \quad (4.10)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость ε' зависит от амплитуды поля $|\vec{E}(z)|$. Поэтому (4.10) является интегральным уравнением. Из (4.10) следует, что амплитуда поля в среде равна:

$$E_0(z) = |E(z)| = \frac{E_0(0)}{(n^2 + \chi^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{\omega}{c} \int_0^z \chi dz\right). \quad (4.11)$$

Здесь $E_0(0)$ -амплитуда поля на границе среды. Нелинейность задачи обусловлена влиянием амплитуды электромагнитной волны на показатель преломления и поглощения:

$$n = n(z, E_0(z)) \text{ и } \chi = \chi(z, E_0(z)).$$

Рассматривая в качестве примера плазму ионосферы можно считать, что вдали от области отражения, часто можно пренебречь зависимостью показателя преломления от амплитуды поля (т.е. $n \neq n(E_0(z))$). В этом случае уравнение (4.11) можно упростить:

$$E_0(z) = \frac{E_0(0)}{(n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\omega}{c} \int_0^z \chi dz\right).$$

Продифференцируем это уравнение по z , получим уравнение (4.11) в дифференциальной форме:

$$\frac{dE_0(z)}{dz} + \frac{E_0(z)}{2n} \frac{dn}{dz} + \frac{\omega\chi}{c} E_0(z) = 0. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.11) и (4.12) - это уравнения нелинейной геометрической оптики для плоской волны, распространяющейся нормально к слою плазмы.

Уравнение (4.12) можно решить численным интегрированием.

Аналитические решения получаются только для простых моделей.

4.3. Самовоздействие мощной электромагнитной волны в ионосфере.

4.3.1. Изменение амплитуды волны.

Будем интересоваться поведением волны вдали от точки отражения. Тогда можно считать, что показатель преломления не зависит от высоты $n = n_0 \neq n_0(z)$. В этом случае в уравнении

$$(4.12) \quad \frac{dn}{dz} = 0, \text{ и оно упрощается:}$$

$$\frac{dE_0}{dz} + \frac{\omega}{c} \chi(z, E_0) E_0 = 0 \quad (4.13)$$

Коэффициент поглощения в плазме дается выражением:

$$\chi = \frac{2\pi e^2 N v_c}{m\omega_0 n_0 (\omega^2 + v_c^2)} \quad (4.14)$$

Чтобы выделить нелинейность, перепишем его в виде:

$$\chi(z, E_0) = \chi_0(z) \left[\frac{N(T_c) v_c(T_c)}{N_0 v_{c0}} \right] \left[\frac{\left(\frac{\omega}{v_{c0}}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\omega}{v_{c0}}\right)^2 + \left(\frac{v_c(T_c)}{v_{c0}}\right)^2} \right] \quad (4.14a)$$

Здесь $\chi_0(z)$ коэффициент поглощения для случая слабой волны (т.е. величина, не зависящая от поля), $v_c(T_c) = v_{em} + v_{ci}$ - эффективная частота соударений электронов с нейтральными частицами и ионами. Частота соударений зависит от электронной температуры и, следовательно, от амплитуды поля. v_{c0}, T_{c0} - частота соударений и температура электронов в невозмущенной волной плазме. Уравнение (4.13) можно проинтегрировать, считая, что v_{c0}, T_{c0} не изменяются вдоль оси z .

В качестве конкретного примера рассмотрим слабоионизированную плазму. В ней основную роль играют соударения электронов с молекулами. В этом случае

$$\frac{v_c(T_c)}{v_{c0}} = \sqrt{\frac{T_c(0)}{T}}$$

Воспользуемся "элементарной теорией" плазмы. В нашем случае этого достаточно для выяснения качественной картины процесса, а также получения формул, пригодных для практического использования. В элементарной теории состояние плазмы характеризуют двумя величинами: средней скоростью направленного движения электронов \bar{v} и эффективной электронной температурой T_e .

Скорость $\bar{v}_c = \bar{v}_c$ связана с плотностью полного тока и соотношением:

$$\bar{j} = eN\bar{v}_c, \quad (4.15)$$

где N - концентрация электронов.

Эффективная температура определяется выражением:

$$\frac{3}{2} k_b T_e = \bar{k} = \frac{mv_c^2}{2} \quad (4.16)$$

Здесь k_b - постоянная Больцмана, \bar{k} - средняя кинетическая энергия электронов. Усреднение ведется по всем электронам, т.к. распределение электронов по скоростям не всегда является максвелловским, введенная выше температура имеет смысл некоторой эффективной температуры.

Уравнение движения электронов дается формулой

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \left[\dot{\vec{r}} \vec{H} \right]$$

\vec{H} - магнитное поле, c - скорость электромагнитной волны в вакууме.

Скорость $\dot{\vec{r}}$ уменьшается под влиянием соударений электронов с молекулами и ионами. Время, в течение которого средний импульс уменьшается на величину $m v_c$ обозначим через $\tau_c = v_c^{-1}$ (v_c - частота соударений электронов). Обусловленная соударениями сила трения между электронами и частицами сорта k , движущимися со скоростью $\dot{\vec{r}}_k$ определяется выражением:

$$-m v_{ck} (\bar{v}_c - \bar{v}_k) = -m v_{ck} (\dot{\vec{r}}_c - \dot{\vec{r}}_k)$$

С учетом силы трения уравнение движения электрона примет вид:

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v}_e \vec{H}] - \sum_k m v_{ek} (\vec{v}_e - \vec{v}_k) \quad (4.17)$$

Средними скоростями тяжелых частиц (ионы, атомы, молекулы) можно пренебречь в сравнении со средней скоростью движения электронов. Поэтому уравнение (4.17) можно упростить:

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v}_e \vec{H}] - m v_e \vec{v}_e \quad (4.18)$$

Здесь $v_e = \sum_k v_{ek}$ - эффективная частота соударений электронов.

Уравнение (4.18) справедливо при любых значениях электрического поля. Однако, в сильных полях эффективная частота соударений зависит от величины поля:

$$v_{эфф} = v_e(T_e) = v_e(E_0).$$

Это следует из зависимости частот соударений от температуры [3]

$$v_{эфф,e} = v_{m,0} \left(\frac{T_e}{T} \right)^{1/2},$$

$$v_{эфф,i} = v_{i,0} \left(\frac{T}{T_e} \right)^{1/2}.$$

В слабом поле $T_e = T$ и величина $v_{эфф}$ является независимым параметром. В сильном поле плазма разогревается и T_e зависит от E . Поэтому необходимо уравнение (4.18) решать совместно с уравнением (4.17) для температуры T_e .

В рамках используемого нами приближения "элементарной теории" уравнение для T_e получается из соображений о балансе энергии. Электрическое поле производит над электронами плазмы в единицу времени работу:

$$\vec{j} \vec{E} = e N \vec{v}_e \vec{E}$$

В среднем в единицу времени электрон теряет за счет соударений энергию, равную:

$$\delta v_{эфф} \left(\bar{k} - \frac{3}{2} \chi T \right) = \frac{3}{2} \chi \delta_{эфф} (T_e - T).$$

Здесь δ - относительная доля энергии, теряемая электронами при соударении. В общем случае δ зависит от T_e и, следовательно, от E .

Баланс энергии в среде запишем в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} k_b N T_e \right) = \vec{j} \vec{E} - \frac{3}{2} k_b \delta v_{эфф} N (T_e - T)$$

Отсюда следует:

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e}{k_b} \vec{v}_e \vec{E} - \delta(T_e) v_{эфф}(T_e) (T_e - T) \quad (4.19)$$

Решая совместно уравнения (4.18) и (4.19) получим зависимость скорости v_e и температуры T_e от величины электрического поля \vec{E} .

Поле будем считать гармоническим $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$, внешнее магнитное поле положим равным нулю $H = 0$, $\delta = const$. Из (4.18) и (4.19) следует:

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{E}_0 \cos \omega t - m v_e \vec{v}_e,$$

$$\vec{v}_e = - \frac{e \vec{E}_0}{m} \frac{v_e - i \omega}{v_e^2 + \omega^2},$$

для гармонического поля

$$\vec{v}_e = - \frac{e \vec{E}_0}{m} \frac{(v \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{v_e^2 + \omega^2} \quad (4.20)$$

Подставим выражение (4.20) в уравнение (4.19), получим:

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 E_0^2}{3 m k_b (\omega^2 + v^2)} (v + v \cos 2\omega t + \omega \sin 2\omega t) - \delta v (T_e - T)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$T_c = T + \frac{e^2 E_0^2}{3mk_b \delta (\omega^2 + \nu^2)} \left(1 + \frac{(\delta \nu^2 - 2\omega^2)\delta}{4\omega^2 + \delta^2 \nu^2} \cos 2\omega t + \frac{\omega \nu (2 + \delta)\delta}{4\omega^2 + \delta^2 \nu^2} \sin 2\omega t \right) \quad (4.21)$$

В высокочастотном пределе $\omega \gg \delta \nu$ с точностью до членов порядка $\frac{\delta \nu}{\omega}$ и δ , имеем из (4.21):

$$T_c - T = \frac{e^2 E_0^2}{3mk_b \delta (\omega^2 + \nu^2)} = \frac{2\bar{E}^2}{3mk_b \delta (\omega^2 + \nu^2)} \quad (4.22)$$

\bar{E}^2 - среднее значение величины $E^2 = E_0^2 \cos^2 \omega t$ во времени. Уравнение (4.22) удобно представить в виде:

$$\frac{T_c}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2 \frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu^2(T_c)} \frac{\delta_0}{\delta(T_c)}, \quad (4.23)$$

где ν_0 - частота столкновений электронов в слабом поле, E_p - внутривлазменное поле.

В постоянном электрическом поле справедливы соотношения

$$\bar{\nu}_c = \frac{e\bar{E}}{m\nu_c(T_c)}, \quad T_c = T + \frac{2e^2 E^2}{3mk_b \delta(T_c) \nu^2(T_c)}$$

Из уравнения (4.23) ясен смысл критерия слабого поля. В поле с амплитудой $E_0 \ll E_p$ плазма слабо возмущена и $T_c \approx T$.

Характер зависимости $\frac{T_c}{T}$ от $\frac{E_0}{E_p}$ представлен на рис.4.1.

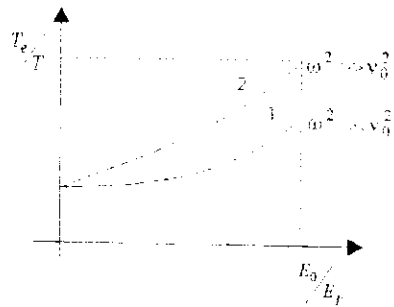


Рис.4.1. Температура электронов при соударениях с молекулами (1) $\omega^2 \ll \nu^2_{c0}$, (2) $\omega^2 \gg \nu^2_{c0}$. [2]

Ниже без подробного вывода дается формула изменения T_c в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле. В этом случае в

высокочастотном пределе $\omega \gg \delta \nu_c$ температура электронов приближенно определяется уравнением [2]

$$\frac{T_c}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2 \Phi_p, \quad (4.24)$$

где

$$\Phi_p = \cos^2 \beta + \frac{\sin^2 \beta}{2} (\omega^2 + \nu_c^2) \left[\frac{1}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_c^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_c^2} \right],$$

$\beta = (\bar{E}\bar{H})$ - угол между электрическим вектором волны и вектором внешнего магнитного поля, ω_H - гирочастота электронов.

Из (4.24) видно, что при $\omega = \omega_H$ имеет место резонансное возрастание температуры электронов. Оно является следствием резонансного увеличения проводимости плазмы. Это явление называют гиромагнитным или циклотронным резонансом. На рис.4.2. приведена расчетная зависимость $\frac{T_c}{T}$ от $\frac{\omega}{\omega_H}$, заимствованная из [2].

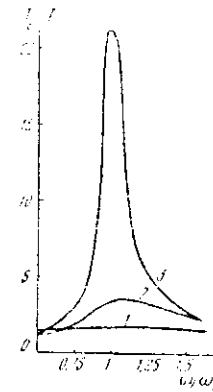


Рис.4.2. Частотная зависимость температуры электронов:
 $\left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2 = 0.4$. 1) $\nu_{c0}/\omega_H = 1$;
 2) $\nu_{c0}/\omega_H = 0,316$;
 3) $\nu_{c0}/\omega_H = 0,1$.

Для того, чтобы решить задачу до конца, необходимо определить, как изменяется температура электронов в поле высокочастотной электромагнитной волны.

$$\frac{\tau-1}{\tau+1} \exp\left(\frac{4\nu_0^2\tau}{(\omega^2 + \nu_0^2)}\right) = \frac{\tau_0-1}{\tau_0+1} \exp\left(\frac{4\nu_0^2\tau_0}{(\omega^2 + \nu_0^2)}\right) \exp(-2k(z)), \quad (4.28)$$

где: $K(z) = \frac{\omega}{c} \int_0^z \chi_0(z) dz$ - полное линейное поглощение волны в среде от ее границы ($z=0$) до рассматриваемой точки z ,

$\tau_0 = \sqrt{T_0(E_0(0))} / T$, $E_0(0)$ - амплитуда поля на границе $z=0$.

Используя (4.26) и (4.28), получим выражение для амплитуды поля на высоте z (т.е. в глубине плазмы). Удобно для анализа записать амплитуду поля в виде

$$E_0(z) = E_0(0) \exp(-K) \cdot P, \quad (4.29)$$

где P - множитель самовоздействия волны.

Множитель P зависит от амплитуды поля на границе среды, частоты и глубины проникновения волны в плазму:

$$P = P\left(\frac{E_0(0)}{E_p}, \frac{\omega}{\nu_{c0}}, K\right).$$

Если волна слабая, то эффект самовоздействия отсутствует (или очень мал), поэтому $P \cong 1$. В глубине среды при $K(z) \gg 1$ волна всегда становится слабой и $\tau \rightarrow 1$. Тогда из (4.28) находим:

$$\tau(z) = 1 + 2 \exp\left(-\frac{4\nu_0^2}{(\omega^2 + \nu_0^2)}\right) C \exp(-2K),$$

где $C = \frac{\tau_0-1}{\tau_0+1} \exp\left(\frac{4\nu_{c0}^2\tau_0}{(\omega^2 + \nu_{c0}^2)}\right)$.

Из (4.26) при $\tau \rightarrow 1$ следует: $E_0 = E_p \sqrt{2(\tau-1)}$. Подставив сюда τ из предыдущего уравнения, имеем:

$$E_0 = 2E_p \sqrt{C} \exp\left(-\frac{2\nu_0^2}{(\omega^2 + \nu_0^2)} - K\right).$$

Т.о. при $K \gg 1$

$$P = \frac{2E_p}{E_0(0)} \sqrt{\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1}} \exp\left(\frac{2\nu_0^2(\tau_0 - 1)}{(\omega^2 + \nu_0^2)}\right). \quad (4.30)$$

В предельном случае высокой частоты $\omega^2 \gg \nu_0^2 \delta_0 (\tau_0 - 1)$ множитель самовоздействия $P < 1$.

При высокой частоте волны коэффициент поглощения растет с ростом температуры электронов T_e , т.е. с ростом амплитуды E_0 . Если поля очень большие, превышающие внутриплазменное поле $E_0(0) \gg E_p$ (т.е. при $\tau_0 \gg 1$) множитель P падает при увеличении $E_0(0)$ пропорционально отношению $E_p/E_0(0)$. В этом случае амплитуда волны, проходящей в глубь среды, не увеличивается с ростом $E_0(0)$, а стремится к постоянной величине, не зависящей от $E_0(0)$:

$$E_0(z) \rightarrow 2E_p \exp(-K). \quad (4.31)$$

Имеет место эффект насыщения. Поглощение волны столь сильно растет с ростом ее амплитуды, амплитуда проходящей в глубину плазмы волны перестает зависеть от ее значения на границе среды. Этот эффект демонстрируется кривой 1 на рис.4.3.

Если выполнено условие $\omega^2 \ll 2\nu_0^2 \tau_0$, т.е. в случае низких частот множитель P в глубине плазмы сильно растет с ростом $E_0(0)$. Это вызвано тем, что коэффициент поглощения на низких частотах $\omega < \nu_0$ падает с ростом температуры электронов T_e . При этом множитель самовоздействия в очень сильных полях равен [2]:

$$P = \frac{2E_p}{E_0(0)} \exp\left(2\sqrt{\left(\frac{\nu_0^2}{(\omega^2 + \nu_0^2)}\right)^2 \frac{E_0(0)}{E_p}}\right). \quad (4.32)$$

Множитель самовоздействия P экспоненциально растет с ростом $E_0(0)$. Этот случай иллюстрирует кривая 2 на рис.4.3.

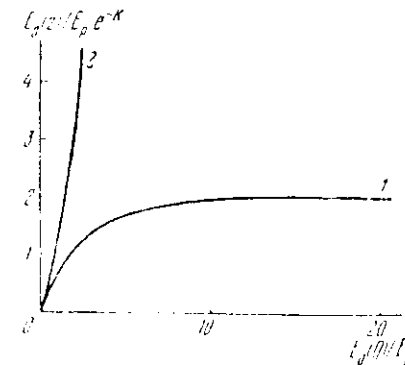


Рис.4.3. Амплитуда поля волны в глубине плазмы [2].

4.3.2. Изменение модуляции радиоволны в результате эффекта самовоздействия.

Эффект самовоздействия может оказать сильное воздействие на радиосигналы, распространяющиеся в ионосфере. В настоящем разделе приведены данные о самовоздействии модулированных по амплитуде волн. В отличие от предыдущих разделов пособия в этом разделе не содержится подробный вывод формул. Студенты, желающие подробно ознакомиться с проблемой, могут воспользоваться монографией [2].

Зададим поле волны, промодулированной по амплитуде низкой частотой Ω , падающей на границу плазмы, в виде:

$$E|_{z=0} = E_0(0) [1 + \mu_0 \cos \Omega t] \quad (4.33)$$

Волна вызывает периодически изменяющиеся с частотой Ω возмущения проводимости $\sigma = \sigma(\Omega)$ и диэлектрической проницаемости $\epsilon = \epsilon(\Omega)$, приводящие к изменению модуляции исходной волны. Нас интересует случай, когда модулированная волна является сильной. Рассмотрим два случая: частота модуляции волны низкая и высокая.

1) Низкая частота модуляции Ω .

Будем предполагать, что частота Ω настолько низка, что амплитуда волны в плазме уменьшается лишь за время, много

большее времени релаксации температуры электронов. Это означает, что выполняется условие

$$\Omega \ll \delta_0 v_{e0}, \quad (4.34)$$

где δ_0 - доля энергии, теряемая электроном при соударении с тяжелой частицей; v_{e0} - частота соударений электронов с тяжелыми частицами. Индекс "0" означает, что рассматриваются значения, соответствующие плазме, невозмущенной мощной радиоволной.

Поле волны в плазме можно представить в виде (см. предыдущий раздел и принятые там обозначения)

$$E(z, t) = E|_{z=0} P e^{-K} \quad (4.35)$$

Запишем амплитуду модулированной волны в следующем виде:

$$E = E_0(z) \left[1 + \mu_{\Omega}(z) \cos \Omega t + \mu_{2\Omega} \cos 2\Omega t + \dots \right] \quad (4.36)$$

Через $\mu(z)$ обозначена эффективная глубина модуляции волны в плазме:

$$\mu(z) = \frac{E_{max}(z) - E_{min}(z)}{E_{max}(z) + E_{min}(z)} \quad (4.37)$$

В (5): $E_{max} = E[E_0(0)(1 + \mu_0), z]$ и $E_{min} = E[E_0(0)(1 - \mu_0), z]$ - максимальные и минимальные значения, которые принимает амплитуда поля волны, изменяясь во времени в точке с координатой z .

Будем считать выполненным условие $\mu \ll 1$. В этом случае можно разложить в выражении (4.37) $E(\mu_0)$ по степеням μ_0 и ограничиться первыми членами разложения. Тогда

$$\mu = \mu_0 \left[\frac{E_0(0)}{E} \frac{\partial E}{\partial E_0(0)} \right]_{\mu=0} \quad (4.38)$$

Определим выражение $\frac{\partial E}{\partial E_0(0)}$ при $\mu_0 = 0$, т.е. для случая немодулированной волны. Ранее было показано, что в геометрикооптическом приближении (выполняющемся вдали от области отражения радиоволны от ионосферы), уравнение для поля имеет вид:

$$\frac{dE_0}{dz} + \frac{\omega}{c} \chi(z, E_0) = 0 \quad (4.39)$$

Входящий в это уравнение коэффициент поглощения χ можно представить в виде:

$$\chi(z, E_0) = \chi_0(z) \left[\frac{N(T_c) v_c(T_c)}{N_0 v_c} \right] \left[\frac{\frac{\omega^2}{v_{e0}^2} + 1}{\frac{\omega^2}{v_{e0}^2} + \frac{v_c^2(T_c)}{v_{e0}^2}} \right] \quad (4.40)$$

В слабоионизированной плазме, пренебрегая температурной зависимостью концентрации электронов (т.е. считая $N \neq N(T_c)$) из (4.39) и (4.40) следует:

$$f(E) = \int \frac{dE}{E} \cdot \frac{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2}{\tau} = f[E_0(0)] - K(z) \quad (4.41)$$

Здесь обозначено, как и ранее:

$$\tau^2 = \frac{T(E_0)}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p} \right)^2 \frac{\omega^2 + v_{e0}^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2}$$

$K(z) = \frac{\omega}{c} \int_0^z \chi_0(z_1) dz_1$ - полное линейное поглощение радиоволны в плазме.

Из (4.41) следует:

$$\frac{\partial E}{\partial E_0(0)} = \frac{\tau}{\tau_0} \cdot \frac{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} \cdot \frac{E}{E_0(0)}$$

τ_0 - значение τ на границе плазмы, равнос $\tau_0 = \sqrt{\frac{T_e(E_0(0))}{T}}$.

Отсюда для глубины модуляции получаем:

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{\tau}{\tau_0} \cdot \frac{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau_0^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} \quad (4.42)$$

Стационарная температура электронов (т.е. величина τ) монотонно возрастает с ростом E . На границе плазмы, где

$E = E_0(0)$, τ имеет максимальное значение и равно τ_0 . В глубине плазмы τ монотонно убывает до значения $\tau = 1$.

Рассмотрим изменение глубины модуляции μ для различных частот волны:

1). Высокая частота: $\omega^2 \gg v_{e0}^2 \tau_0^2$.

Глубина модуляции волны в плазме уменьшается вследствие эффекта самовоздействия. В этом случае

$$\mu \approx \mu_0 \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Поскольку в глубине плазмы $\tau < \tau_0$, то $\mu < \mu_0$. Т.е. происходит демодуляция волны. В глубине плазмы поглощение велико ($k \gg 1$), значение $\tau \rightarrow 1$, поэтому справедливо соотношение:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\tau_0} \quad (4.43)$$

Демодуляция сильной высокочастотной волной может быть очень значительной. В случае $\tau_0 \gg 1$ демодуляция будет полной.

2). Низкая частота: $\omega^2 \ll v_{e0}^2 \tau_0^2$

В этом случае, напротив, значение μ увеличивается вследствие эффекта самовоздействия. Из (4.42) следует:

$$\mu \approx \mu_0 \frac{\tau_0}{\tau}.$$

Поскольку выполняется соотношение $\tau_0 > \tau$, то $\mu > \mu_0$. В глубине плазмы $\tau \rightarrow 1$ (т.е. температура не увеличивается при распространении радиоволн, т.к. волна стала слабой), поэтому:

$$\mu \approx \mu_0 \tau_0 \quad (4.44)$$

Полученные выше результаты иллюстрируются приведенными ниже графиками, заимствованными из монографии [2]. На рис.4.4. приведена зависимость глубины модуляции в плазме от

отношения $E_0(0)/E_p$ для случаев высоких и низких частот.

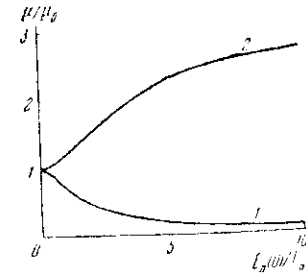


Рис.4.4. Глубина модуляции волны в плазме. 1) $\omega \gg v_{e0}$; 2) $\omega \ll v_{e0}$. [2]

При $\omega > v_{e0}$ глубина модуляции немонотонно зависит от $E_0(0)/E_p$. Минимальное значение достигается при

$$E_{0min} = E_p \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{v_{e0}^2}\right) - 1} \text{ и равно:}$$

$$\mu_{min} = \mu_0 \frac{2\omega v_{e0}}{\omega^2 + v_{e0}^2} \quad (4.45)$$

На рис.4.5. представлена зависимость μ/μ_0 от частоты волны.

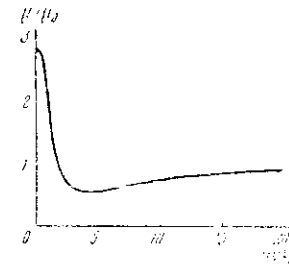


Рис.4.5. Частотная зависимость глубины модуляции [2].

Зависимость μ от начальной глубины модуляции иллюстрирует рис.4.6. При $\mu < 0.5$ и $\mu_0 < 0.5$ зависимость μ от μ_0 близка к линейной. Относительное изменение глубины модуляции (т.е. отклонение μ/μ_0 от единицы) велико при малых

μ_0 значениях и невелико при больших μ_0 . При $\mu_0 \rightarrow 1$ отношение $\frac{\mu}{\mu_0}$ всегда близко к единице.

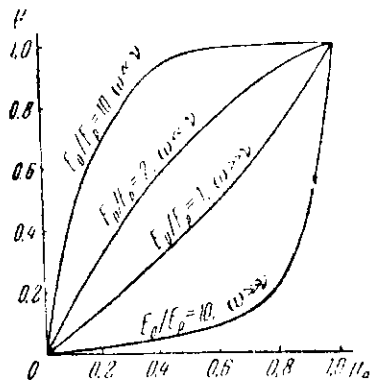


Рис.4.6. Глубина модуляции в плазме в зависимости от глубины модуляции падающей волны [2].

В сильных полях искажения модуляции незначительны при малых μ_0 (т.е. неглубокой модуляции исходной волны) и очень велики при $\mu_0 \rightarrow 1$. Рис.4.7. иллюстрирует изменения модуляции сильных радиоволн в плазме при $\mu_0 = 1$.

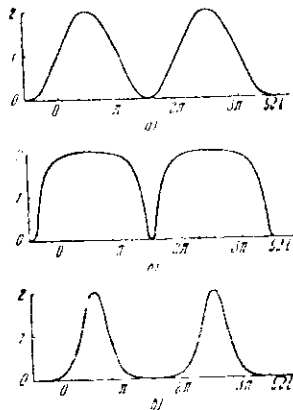


Рис.4.7. Искажение формы модуляции [2]; $E_0(0)/E_p = 10,$

$\mu_0 = 1.$

- а) Волна на границе плазмы.
- б) Волна в глубине плазмы, $\omega \gg \nu_{e0}$
- в) Волна в глубине плазмы, $\omega \ll \nu_{e0}$

3). Произвольное значение частоты модуляции.

При произвольной частоте модуляции Ω необходимо совместно решать уравнения для температуры электронов T_e и для

амплитуды радиоволны. В слабоионизированной плазме эта система уравнений имеет вид [2]:

$$\frac{dE}{dz} + \frac{\omega}{c} \chi_0(z) E \frac{\tau(\omega^2 + v_{e0}^2)}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\delta_0 v_{e0}}{2} (\tau^2 - 1) = \frac{e^2 E^2}{6mT} \left(\frac{v_{e0}}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} \right) \quad (4.47)$$

На границе плазмы:

$$E|_{z=0} = E_0(0) [1 + \mu \cos \Omega t] \quad (4.48)$$

Будем считать выполненным условие $\mu \ll 1$ и искать решение уравнений (4.46), (4.47) в виде:

$$E = E(z) [1 + \mu(z) \cos(\Omega t - \varphi(z))] \quad (4.49)$$

Опустим процедуру решения этой задачи. Подробный вывод дан в [2].

Решение системы (4.46), (4.47) дает для глубины модуляции:

$$\mu(z) = \mu_0 \exp \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau(z)} \frac{(\delta' v_{e0} \tau)^2}{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2} \cdot \frac{\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2}{\tau(\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2)} d\tau \right\} \quad (4.50)$$

Здесь $\delta' = \delta_0 \left[1 + \frac{v_{e0}^2 (\tau^2(z) - 1)}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2(z)} \right]$.

Фаза волны в глубине плазмы равна:

$$\varphi(z) = \int_{\tau_0}^{\tau(z)} \frac{\delta' v_{e0} \Omega}{\Omega^2 + (\delta' v_{e0} \tau)^2} \cdot \frac{\omega^2 - v_{e0}^2 \tau^2}{\omega^2 + v_{e0}^2 \tau^2} d\tau \quad (4.51)$$

Для низких частот модуляции $\Omega \ll \delta_0 v_{e0}$ при увеличении Ω влияние самовоздействия на модуляцию волны ослабевает.

Уменьшается значение $|\mu - \mu_0|$ с ростом Ω . Это следует из того факта, что при увеличении частоты Ω значение интеграла в выражении (4.50) уменьшается и экспоненциальный член стремится к единице. Поэтому в пределе $|\mu - \mu_0| \rightarrow 0$.

Для высоких частот модуляции $\Omega \gg \delta'v_{e0}\tau_0$ разность $|\mu - \mu_0|$ убывает как $(\delta'v_{e0}/\Omega)^2$. В высокочастотном пределе $\omega^2 \gg v_{e0}^2$ получаются простые соотношения для μ и φ :

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{(\delta'v_{e0}\tau)^2 + \Omega^2}{(\delta'v_{e0}\tau_0)^2 + \Omega^2}} \quad (4.52)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\Omega}{\delta'v_{e0}\tau_0} - \arctg \frac{\Omega}{\delta'v_{e0}\tau} \quad (4.53)$$

Зависимость μ/μ_0 и φ от $\Omega/\delta'v_{e0}$ представлена на рис.4.8.

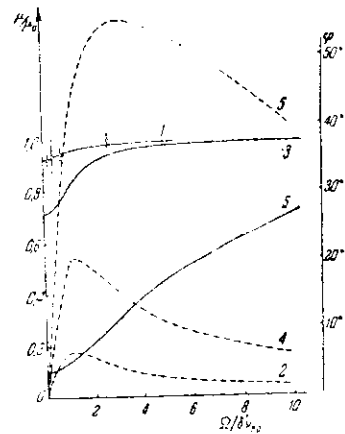


Рис.4.8. Зависимость глубины и фазы (пунктир) от частоты модуляции. Кривые 1,2,3,4,5 соответствуют значениям $\frac{E_0(0)}{E_p} = 0,4; 0,75; 1; 1,73; 10$. Точки - результаты эксперимента.[2]

Глубина модуляции монотонно убывает с ростом частоты модуляции Ω . Сдвиг фазы φ немонотонно зависит от Ω . Он мал при низких ($\Omega \ll \delta'v_{e0}$) и высоких ($\Omega \gg \delta'v_{e0}$) частотах модуляции. Максимальное значение

$$\varphi_{max} = \arctg \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} - \arctg \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (4.54)$$

достигается при $\Omega_{max} = \delta'v_{e0} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}}$.

Фазовая модуляция.

За счет самовоздействия в плазме изменяются не только амплитуда, но и фаза волны. Следствием этого является появление за счет нелинейных эффектов фазовой модуляции при распространении модулированной по амплитуде радиоволны. При малых значениях индекса модуляции μ_0 сдвиг по фазе можно представить в виде[2]:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi|_{\mu_0=0} + \mu_0 \left[E_0(0) \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_0(0)} \right] \cos \Omega t + \dots \quad (4.55)$$

Первый член в этом выражении дает постоянный фазовый сдвиг. Поэтому индекс фазовой модуляции равен

$$\beta = \mu_0 \left[E_0(0) \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_0(0)} \right] \quad (4.56)$$

Зависимость $\Delta\varphi[E_0(0)]$ определяется формулой:

$$\Delta\varphi = \arctg \frac{v_{e0}\tau_0}{\omega} - \arctg \frac{v_{e0}\tau}{\omega} + \left(\frac{\chi_0}{n_0} \right) \left\{ \frac{\tau_0(\omega^2 + v_{e0}^2)}{\omega^2 + v_{e0}^2\tau_0^2} - \frac{\tau(\omega^2 + v_{e0}^2)}{\omega^2 + v_{e0}^2\tau^2} \right\} \quad (4.57)$$

Здесь $\left(\frac{\chi_0}{n_0} \right)$ - среднее значение отношения показателей поглощения и преломления на пути волны к возмущенной области ионосферы. В общем случае выражение (4.56) очень сложное. Его можно упростить в глубине плазмы, когда выполняются условия $k(z) \gg 1$, $\tau(z) \rightarrow 1$. В этом случае

$$\beta = \mu_0 \frac{\tau_0^2 - 1}{\tau_0} \frac{\omega v_{e0}}{\omega^2 + 2v_{e0}^2\tau_0^2 - v_{e0}^2} \left[1 + \left(\frac{\chi_0}{n_0} \right) \frac{(\omega^2 + v_{e0}^2)(\omega^2 - v_{e0}^2\tau_0^2)}{\omega v_{e0}(\omega^2 + v_{e0}^2\tau_0^2)} \right] \quad (4.58)$$

Из выражения (4.58) следует, что индекс фазовой модуляции незначителен при высоких ($\omega^2 \gg v_{e0}^2\tau_0^2$) и низких ($\omega^2 \ll v_{e0}^2\tau_0^2$) частотах.

Максимальное значение индекса фазовой модуляции в зависимости от частоты ω достигается при $\omega_{max} = v_{c0} \sqrt{2\tau_0^2 - 1}$ и равно:

$$\beta_{max} = \mu_0 \frac{\tau_0^2 - 1}{2\tau_0 \sqrt{2\tau_0^2 - 1}} \quad (4.59)$$

Значение β_{max} растет с ростом амплитуды поля на границе плазмы вследствие зависимости температуры электронов $\tau_0 = \sqrt{T_e[E_0(0)]/T}$ от амплитуды поля. При больших $\tau_0 \gg 1$ достигается значение $\beta_{max} = \frac{\mu_0}{2\sqrt{2}}$.

4.3.3. Нелинейное искажение формы импульса.

Искажениями радиоимпульса в линейной среде, связанными с частотной дисперсией ниже будем пренебрегать. Это означает, что рассматривается распространение радиоволн вдали от области отражения и длительность радиоимпульса t имеет достаточно большую величину:

$$t_1 \gg \sqrt{\frac{\pi z}{c} \frac{d^2}{d\omega^2} [n(\omega)]} \quad (4.60)$$

где z - глубина проникновения волны в ионосферу, $n(\omega)$ - показатель преломления, ω - круговая частота.

Амплитуду поля волны на границе плазмы зададим выражениями:

$$E|_{z=0} = \begin{cases} 0, & t < 0, t > t_1 \\ E_0(0), & 0 \leq t < t_1 \end{cases} \quad (4.61)$$

Полное решение задачи можно найти в [2]. Отличие от выше приведенных задач состоит в том, что для выявления искажений импульсов из-за эффекта самовоздействия необходимо решать нестационарное уравнение, т.е. совместно решать уравнение для

температуры электронов T_e и амплитуды поля $E(z)$ с учетом времени распространения импульса до области z . Необходимость учета нестационарности вызвана отставанием реакции среды (в данном случае изменений электронной температуры) от момента прихода импульса в ионосферу. На рис.4.9. показано качественно возмущение температуры T_e .

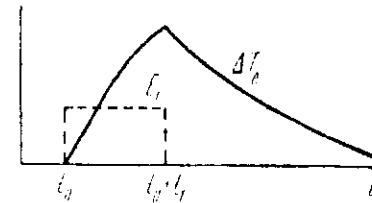


Рис.4.9. Возмущение температуры электронов.

В глубине плазмы амплитуду волны можно представить в виде:

$$E(z,t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, t > t_0 + t_1 \\ E_1(z) \left[1 - q \left\{ 1 - \exp[-\delta_0 v_{c0} (t - t_0)] \right\} \right], & t_0 < t < t_0 + t_1 \end{cases} \quad (4.62)$$

Здесь t_0 момент включения поля в точке z_1 , определяющийся временем прохождения волны от границы плазмы до интересующей нас точки z :

$$t_0 = \frac{1}{c} \int_0^z n_0^{-1}(z_1) dz_1. \quad (4.63)$$

$$q = \int_0^z \Delta T_e [E_1(z)] \frac{\omega}{c} \left(\frac{d\chi}{dT_e} \right)_{t_0} dz \quad (4.64)$$

$$E_1(z) = \frac{E_0(0)}{\sqrt{n_0(z_1)}} \exp \left(-\frac{\omega}{c} \int_0^z \chi_0(z) dz \right) \quad (4.65)$$

$E_1(z)$ - амплитуда волны в точке z в линейном приближении.

Из уравнения (4.62) следует:

а) в течение времени $t - t_0 \approx \frac{1}{\delta_0 v_{c0}}$ амплитуда поля в плазме нарастает (при $q < 0$) или убывает (при $q > 0$).

б) при $t - t_0 \gg \frac{1}{\delta_0 v_{c0}}$ устанавливается стационарное состояние,

в) если $t_1 < \frac{1}{\delta_0 v_{c0}}$, то промежуточный импульс большой амплитуды ($E_0(0) \approx E_p$) сильно деформируется за счет нелинейности.

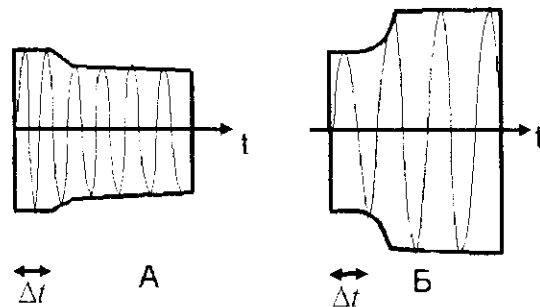


Рис.4.10 Качественная картина изменения формы радиоимпульса при самовоздействии (а- эффект нелинейного поглощения, б- эффект нелинейного просветления среды).

Физическая причина деформации импульса заключается в следующем. Поглощение волны в плазме при учете нелинейности зависит от температуры электронов T_e . Температура достигает стационарного значения за время $t \approx (\delta_0 v_{c0})^{-1}$. За это время происходит установление стационарного значения коэффициента поглощения энергии радиоволны. Передний фронт импульса проходит в неразогретой, невозмущенной плазме. За времена, меньшие $(\delta_0 v_{c0})^{-1}$, амплитуда импульса определяется лишь линейным поглощением. С развитием эффекта самовоздействия амплитуда импульса в зависимости от величины q либо уменьшается, либо растет. В очень сильных полях процесс

деформации импульса аналогичен описанному выше. Форма импульса приближенно описывается также зависимостью (4.62), в которой величину q нужно заменить на $(1 - p)$, где p -множитель самовоздействия.

Характерная форма импульса при развитии самовоздействия схематически изображена на рис.4.10.

Литература.

Основная.

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн, М: Наука, 1979 и 1985г.
2. Гуревич А.В., Шварцбург А.Б. Нелинейная теория радиоволн в ионосфере. М: Наука, 1973.
3. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме, М: Наука, 1967.
4. Гершман Б.К., Ерухимов Л.Н., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме, М: Наука, 1984.

Дополнительная.

1. Бломберген Н. Нелинейная оптика, М: Мир, 1966.
2. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики, М: Наука, 1989.
3. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда, М: Наука, 1975.
4. Васьков В.В. и др. Самовоздействие мощного электромагнитного импульса в верхних слоях ионосферы // Известия ВУЗов, Радиофизика, 1975, т.18, №10, с.1426-1429.
5. Матюгин С.Н., Митяков И.А., Рыжов В.А., Шлюгер И.С. Самовоздействие мощных радиоволн в D-области ионосферы // Известия ВУЗов, Радиофизика, 1975, т.18, №10, с.1549-1551.

Оглавление.

Введение.	1
1. Уравнение для нелинейных волн в средах с дисперсией.	7
2. Методы решения нелинейных волновых уравнений.	12
2.1. Метод возмущений.	14
2.2. Метод медленно меняющихся амплитуд.	15
3. Самовоздействие плоских волн.	19
3.1. Нелинейное поглощение.	21
3.2. Нелинейное просветление среды.	22
3.3. Нелинейная дисперсия.	24
4. Эффект самоздействия плоских волн в ионосфере.	26
4.1. Нелинейное волновое уравнение.	28
4.2. Нелинейная геометрическая оптика плоской волны.	30
4.3. Самовоздействие мощной электромагнитной волны в ионосфере.	34
4.3.1. Изменение амплитуды волны.	34
4.3.2. Изменение модуляции радиоволны в результате эффекта самовоздействия.	43
4.3.3. Нелинейное искажение формы импульса.	52
Литература.	55