КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И.УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Часть 1. Основные понятия

Учебно-методическая разработка

КАЗАНЬ - 1995

Предлагаемая учебно-методическая разработка рассчитана на студентов физических и радиофизических специальностей 2-4 курсов университетов.

Разработка состоит из трех частей:

Часть 1. Основные понятия;

Часть 2. Электромагнитные волны диапазона радиочастот;

Часть 3. Распространение радиоволн в неоднородных и анизотропных средах.

При подготовке курса использованы монографии и учебные пособия, список которых приведен в конце каждой из трех частей методической разработки. В конце разделов предлагаются задачи. Для некоторых из них приведены подробные решения, что позволяет студентам самостоятельно изучить ряд разделов курса.

Автор: доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой радиоэлектроники
Казанского университета
НАСЫРОВ АЛЬБЕРТ МАХМУТОВИЧ.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Понятие волны - одно из важнейших общих понятий физики. В окружающем мире происходит много явлений, проявляющих черты колебательных и волновых процессов: волны при землетрясении, волны на воде, звуковые волны, волны механических колебаний в струне, волны температуры, зарядовые волны, волны де Бройля в квантовой механике, электромагнитные волны и т.д. Несмотря на многообразие ситуаций и различие в способах описания, можно выделить общее в протекании процессов различной физической природы.

Что принято понимать под колебательным процессом? Это ограниченные в пространстве (и часто повторяющиеся) движения в окрестности некоторого среднего положения. Колебательный процесс можно описать конечным набором параметров, изменяющихся во времени. Например, для математического маятника - это угол отклонения нити от вертикали; для связанных контуров - напряжения и токи в первом и втором контурах. Волна - это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью. Если характерные размеры системы $L<cT$ (где c - скорость распространения возмущения, T -время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном. В случае $L>cT$ процесс можно считать волновым, а систему распределенной. Если говорить о радиотехнике, то теория колебаний была развита раньше, чем волновые принципы. Исторически это было связано с использованием на начальном этапе освоения радиодиапазона длин волн, намного превосходящих размеры радиоэлектронных устройств, и для анализа их работы можно ограничиться колебательными представлениями. С переходом к более коротким волнам размеры передающих и приемных устройств оказались соизмеримы и больше длины рабочей волны. Это потребовало перехода к представлениям о радиосистемах с распределенными параметрами, работу которых можно было анализировать, используя волновые принципы.

Волновые процессы в настоящее время интенсивно изучаются в различных областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, радиофизике, акустике, гидродинамике и других областях науки. Механизмы распространения возмущений в этих областях сильно различаются друг от друга. Однако имеются характеристики, общие для волн всех типов. Важнейшими среди них являются энергия, импульс, скорость распространения возмущения. Подобно движущемуся объекту бегущие волны несут энергию и обладают импульсом. Для распространения волны между двумя точками пространства нужно определенное время. Это означает, что волны обладают конечной скоростью. Ясно, что ее величина в различных средах сильно отличается. По приведенным выше характеристикам волны внешне схожи с каким-либо движущимся объектом. Однако необходимо иметь в виду, что отдельные частицы среды не распространяются с волнами. Они колеблются относительно своих положений равновесия в поперечном или продольном направлении. В качестве волн наблюдается не распространение частиц (отдельных осцилляторов) в среде, а их фазовые соотношения.

При волновом движении существуют три скорости, представляющие различные физические величины. 1) Скорость частиц - это скорость гармонических колебаний осциллятора около положения равновесия; 2) волновая (или фазовая) скорость - скорость распространения в среде поверхностей с одинаковой фазой; 3) групповая скорость - скорость распространения группы волн (или волнового пакета). Перенос энергии в среде осуществляется с групповой скоростью. Для монохроматических волн фазовая и групповая скорости совпадают.

Для многих видов волн характерно свойство <u>линейности.</u> Волны называют линейными, если они не влияют на распространение других волн и вследствие этого их совокупность представляет собой простую сумму этих волн. Многие волны близки к линейным. В общем же случае волны бывают нелинейными. В настоящее время нелинейные волновые процессы интенсивно исследуются в различных областях физики (изучение нелинейных процессов при распространении мощных звуковых волн, эффекты взаимодействия световых волн, генерируемых оптическими квантовыми генераторами, эффекты взаимодействия мощного электромагнитного излучения с плазмой и т.д.). Увеличение мощности используемых в физическом эксперименте и на практике источников звуковых волн, световых и радиополей привело к тому, что нелинейные эффекты при распространении волн приобрели столь же большое значение, как и нелинейные процессы в теории колебаний.

В настоящем учебном пособии мы рассмотрим ряд особенностей электромагнитных волн радиодиапазона. Многие фундаментальные свойства электромагнитных волн изучаются в курсах "Оптика" и "Электродинамика" в пособии повторяется ряд сведений из этих курсов. Однако основное внимание в нем уделено вопросам распространения электромагнитных волн, которые в них не затрагиваются.

Ряд важных фундаментальных величин и понятий физики радиоволн, являющихся общими для волн любой природы, вводится на примере простейших типов волн - поперечных волн на струне. Это сделано для упрощения выводов и для облегчения понимания обсуждающихся вопросов. К ним относится вывод волнового уравнения, понятие импульса, фазовой и групповой скорости, согласование сред с различными импедансами.

1.1 Волновое уравнение.

В теории волн фундаментальное значение имеет линейное волновое уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа:

$$\Delta U - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \Delta \text{ - оператор Лапласа}$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (1.1.1)$$

Это уравнение называют волновым уравнением. Роль этого уравнения аналогична роли уравнения гармонического осциллятора в теории колебаний:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \omega^2 x = 0.$$

Выведем волновое уравнение для поперечных бегущих волн в непрерывной среде. В качестве модели среды рассмотрим непрерывную однородную струну, левый конец которой находится в точке x=0. Будем воздействовать на этот конец струны поперечной гармонической силой. Рассмотрим вертикальное смещение U короткого отрезка струны, который можно считать простым гармоническим осциллятором. Вертикальные смещения U этого осциллятора изменяются в зависимости от времени t и координаты x. Волновое уравнение позволяет связать смещение U с t и x. Для упрощения задачи будем считать поперечные волны на струне плоскополяризованными.

Пусть линейная плотность струны равна ρ, а натяжение вдоль струны - T. Полагаем величину натяжения постоянной величиной, не зависящей от смещения U и координаты x. Обратимся к рис.1.1. Рассмотрим участок струны длиной $ds=[1+(\partial U/\partial x)^2]^{1/2}dx$. На одном конце этого элемента действует натяжение T, направленное под углом θ к оси x, на другом под углом $\theta+d\theta$. Если величина $\partial U/\partial x$ мала, то $(\partial U/\partial x)^2<<1$. Поэтому можно считать, что $ds\approx dx$ и масса элемента $m=\rho ds\approx\rho dx$.

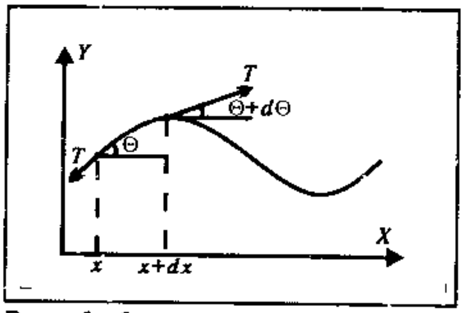

Рис.1.1

Запишем уравнение элемента струны, используя закон Ньютона:

$$F = m\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Сила, действующая на элемент ds в направлении положительных смещений U,равна $T[\sin(\theta+dx)-\sin\theta]$. Следовательно,можно записать

$$\rho dx\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T\,[\,\sin(\theta + dx) - \sin\theta].$$

Для малых значений угла θ справедливо соотношение $\sin\theta\cong tg\theta=\partial U/\partial x$. Поэтому сила равна $T[(\partial U/\partial x)_{x+dx}-(\partial U/\partial x)_x]$. Разность в квадратных скобках равна произведению функции $\partial U/\partial x$ на dx. Следовательно, сила равна $T(\partial^2 U/\partial x^2)dx$. Учитывая это, для уравнения движения элемента dx струны получаем:

$$T\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dx = \rho\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dx \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Отношение T/ρ имеет размерность квадрата скорости c^2. Это позволяет переписать предыдущее уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \qquad (1.1.2)$$

Это и есть волновое уравнение, связывающее ускорение гармонического осциллятора в среде со второй производной его смещения по координате x. В этом уравнении c - волновая (или фазовая) скорость, с которой перемещаются плоскости одинаковой фазы. В рассматриваемом здесь случае волн на струне фазовая скорость c_ϕ равна корню квадратному отношения натяжения к плотности

$$c_\phi = \sqrt{T/\rho}.$$

В рассматриваемом примере значением T определяются упругие свойства среды распространения волны, а величиной ρ - инерция среды, связанная с накоплением энергии. Связь волновой скорости со свойствами упругости среды (связанной с накоплением потенциальной энергии в среде) и ее инерционными свойствами (связанной с накоплением кинетической или индуктивной энергии) проявляется для всех типов волн, в том числе и для электромагнитных волн.

Решением волнового уравнения является любая функция вида:

$$U=f_1(ct-x) \quad \text{или} \quad U=f_2(ct+x).$$

Полное решение является суперпозицией частных решений:

$$U=f_1(ct-x)+f_2(ct+x).$$

Покажем, что это действительно так. Обозначим через f'_1 производную функции f_1 по аргументу ct-x. Тогда

$$\partial U/\partial x=-f_1'(ct-x), \quad \partial^2 U/\partial x^2=f_1''(ct-x).$$

Производные по времени:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=cf_1'(ct-x), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2 f_1''(ct-x).$$

Подставляя значения частных производных по x и t в волновое уравнение, убеждаемся, что функция $f_1(ct-x)$ является его решением. Аналогично можно убедиться в том, что и функция $f_2(ct+x)$ является решением этого уравнения.

Если возбуждать струну в точке x=0 внешней силой, совершающей гармоническое колебание $U=a\sin\omega t$, то по струне будут распространяться гармонические бегущие волны. При этом смещение U в точке с координатами x в момент времени можно представить в виде:

$$U=a\sin(\omega t-\varphi).$$

Под действием волны, бегущей по струне вправо, осциллятор, расположенный в точке x справа, начинает движение с некоторым запаздыванием φ по фазе относительно осциллятора в точке x=0. Значение $\varphi=2\pi x/\lambda$, где λ – длина волны. Поэтому при $x=\lambda$ фазовый сдвиг равен 2π радиан. Следовательно, мы определили длину волны λ как расстояние между двумя любыми осцилляторами, имеющими разность фаз 2π радиан.

Для фиксированного x смещение U(x,t) является гармонической функцией времени, для фиксированного времени t функция U(x,t) представляет синусоиду в пространстве.

Эквивалентны следующие формы записи функции U=f(ct–x):

$$U = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(ct-x) = a\sin 2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right) =$$
$$= a\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) = a\sin(\omega t - Kx), \quad (1.1.4)$$

Здесь введены обозначения: $k=2\pi/\lambda=\omega/c$ - волновое число, λ - длина волны, $\omega=2\pi c/\lambda=2\pi f$ - круговая (циклическая) частота, f - линейная частота, c - скорость распространения плоскости равных фаз (т.н. фазовая скорость).

Часто бывает удобным использовать функцию U(x,t) в виде $U=ae^{i(\omega t-kx)}$.

Волновое число определяется скоростью возрастания фазового угла, приходящейся на единицу длины, для фиксированного момента времени и равно $k=\omega/c$.

Выше были записаны выражения для гармонической волны, бегущей вправо. Если волна бежит влево, то знак величины фазового угла нужно изменить на обратный, т.к. колебания в точке x начинаются раньше, чем в x=0. Поэтому аргумент (ct-x) соответствует волне, распространяющейся вправо, а (ct+x) - влево.

На рис.1.2 показана гармоническая бегущая волна. Вынуждающая сила создает в точке x=0 гармоническое движение с периодом T. Длина бегущей волны λ. Каждая точка струны повторяет в более поздний момент времени гармоническое движение точки x=0.

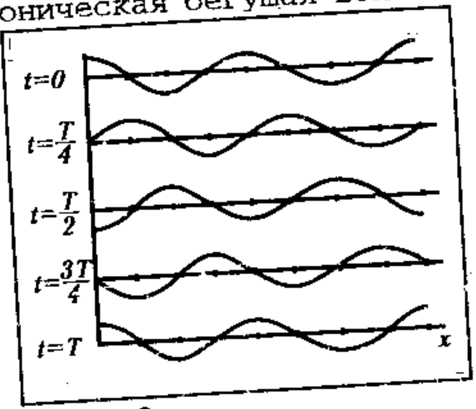

Рис.1.2

1.2 Фазовая скорость.

Очень важной величиной для гармонической бегущей волны является фазовая скорость. Она характеризует скорость, с которой возмущение передается по системе осцилляторов, т.е. dx/dt.

Определим фазовую функцию $\varphi(x,t)$ волны как аргумент волновой функции $\sin(\omega t-kx)$, т.е. $\varphi=\omega t-kx$. Для фиксированного расстояния x фаза φ линейно растет со временем (член ωt). Для фиксированного момента времени фаза линейно уменьшается с ростом расстояния (член $-kx$). Если следить за каким-либо гребнем (или впадиной) волны, т.е. за максимумом (или минимумом) функции $\sin\varphi(x,t)$, то необходимо при увеличении времени переходить ко все большим значениям x с тем, чтобы фаза φ была постоянной. Соотношение между x и t для точек постоянной фазы определяется из равенства полного дифференциала от фазы нулю:

$$d\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dt+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx=\omega dt-kdx=0, \qquad (1.2.1)$$

отсюда:

$$V_\phi=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}. \qquad (1.2.2)$$

Учитывая соотношения $\omega=2\pi f$, $k=2\pi/\lambda$, $f=T^{-1}$, можно получить различные формы записи волновой (фазовой) скорости:

$$V_\phi=\frac{\omega}{k}=\lambda f=\frac{\lambda}{T}. \qquad (1.2.3)$$

Здесь T - период колебаний.

1.3 Импеданс (волновое сопротивление) среды.

Выше было показано, что при описании бегущих волн величиной, характеризующей среду, является фазовая скорость. Выражение для фазовой скорости в случае волн на струне является комбинацией параметров Т и ρ, определяющих возвращающую силу и инерцию. Бегущие волны переносят энергию и импульс. Величиной, которая характеризует скорость, с которой энергия распространяется вдоль среды при возбуждении ее внешней силой, является характеристический импеданс (или просто импеданс, или волновое сопротивление) для волн в среде.

Получим выражение для импеданса в случае волн в непрерывной струне, на которую в ее начале (точка x=0) действует поперечная гармоническая сила. Будем считать, что струна в точке x=0 возбуждается "передатчиком". В состоянии равновесия поперечная составляющая силы, действующей со стороны струны на "передатчик", отсутствует. При возбуждении волны возникает поперечная составляющая силы, с которой левый конец струны в точке x=0 действует на передатчик:

$$F_x = T\sin\theta = T\cos\theta\sin\theta/\cos\theta = T_o tg\theta = T_o\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (1.3.1)$$

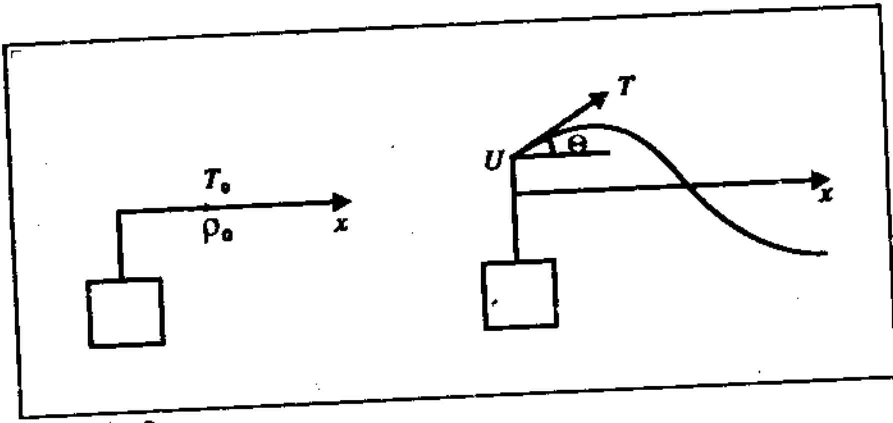

Рис.1.3

Если струна бесконечной длины, в ней распространяются бегущие волны.

$$U=U_0\cos(\omega t-kx) \qquad (1.3.2)$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=kU_0\sin(\omega t-kx), \quad \frac{\partial U}{\partial t}=-\omega U_0\sin(\omega t-kx). \qquad (1.3.3$$

Воспользуемся выражением для фазовой скорости в виде $V_\phi=\omega/k$. Из (1.3.3) следует:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{V_\phi}\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (1.3.4)$$

Подставляя это значение в (1.3.1) для поперечной составляющей силы, имеем:

$$F_x=-\left(\frac{T_0}{V_\phi}\right)\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (1.3.5)$$

Величина $\partial U/\partial t$ - поперечная скорость струны в точке ее возбуждения. При "излучении" бегущих волн сила, с которой среда (струна) воздействует на передатчик, является демпфирующей силой. Она обратно пропорциональна фазовой скорости распространения волн в среде. Величину $Z=T_0/V_\phi$ называют характеристическим импедансом среды. Для струны импеданс является поперечным импедансом и равен:

$$Z=\frac{F}{V}=\frac{\textit{поперечная сила}}{\textit{поперечная скорость}}. \qquad (1.3.6)$$

Для поперечных бегущих волн на струне $V_\phi=\sqrt{T_0/\rho_0}$, поэтому

$$Z=\frac{T_0}{V_\phi}=\sqrt{T_0\rho_0}=\rho_0 V_\phi. \qquad (1.3.7)$$

Самым важным свойством демпфирующей силы является то, что она вызывает "поглощение (рассеяние)" энергии. В рассматриваемом примере со струной излучаемая "передатчиком" мощность равна произведению поперечной силы, с которой передатчик воздействует на струну в точке x=0, на поперечную скорость струны в этой точке. Для мгновенной мощности в случае бегущих волн имеем:

$$P(t)=\left(Z\frac{\partial U}{\partial t}\right)\frac{\partial U}{\partial t}=Z\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2. \qquad (1.3.8)$$

Мощность P(t) можно выразить через поперечную силу, действующую на выходной зажим "передатчика":

$$P(t)=\left[-T_0\frac{\partial U}{\partial x}\right]\left[-V_\phi\frac{\partial U}{\partial x}\right]=\frac{V_\phi}{T_0}\left[-T_0\frac{\partial U}{\partial x}\right]^2=\frac{1}{Z}\left[-T_0\frac{\partial U}{\partial x}\right]^2. \qquad (1.3.9$$

Выражения (1.3.8) и (1.3.9) эквивалентны.

Для электромагнитных волн роль, аналогичную поперечной скорости струны $\partial U/\partial t$, играет поперечное магнитное поле B_y, а роль возвращающей силы $-T_0\partial U/\partial x$ играет поперечное электрическое поле E_x. Поэтому волновое сопротивление распространению электромагнитных волн равно:

$$Z=\frac{E_x}{B_y}.$$

Излучаемая передатчиком в точке x=0 мощность равна энергии, переносимой волной в единицу времени в направлении распространения. В произвольной точке x:

$$P(x,t)=\frac{[-T_0\partial U(x,t)/\partial x]^2}{Z}. \qquad (1.3.10)$$

Мощность волны пропорциональна квадрату ее напряженности (амплитуды). Рассмотрим гармоническую волну, записав ее в виде:

$$U=U_0\cos(\omega t-kx+\varphi). \qquad (1.3.11)$$

Мгновенное значение мощности P(t) пропорционально U^2. Выберем коэффициент пропорциональности равным 2 (это достигается соответствующим выбором единиц измерения величины U). Тогда

$$P(t)=2U^2=2U_0^2\cos^2(\omega t-kx+\varphi)=$$

$$=U_0^2[1+\cos 2(\omega t-kx+\varphi)]. \qquad (1.3.12)$$

Из (1.3.12) видно, что мгновенная мощность изменяется во времени с удвоенным значением круговой частоты, т.е. 2ω. Среднее значение величины $\cos 2(\omega t-kx+\varphi)$ равно нулю. Поэтому средняя мощность равна $P=U_0^2$. Мгновенная мощность периодически изменяется между 0 и 2P с частотой 2ω. Необходимо иметь в виду, что мощность волны величина, имеющая направление. Мощность P(t) в направлении +x равна мощности - P(t) в направлении −x.

1.4 Отражение и прохождение волн.

Большинство задач, решаемых в теории и практике распространения волн, связано с изучением распространения волн в неоднородных средах. Одной из самых простых задач является исследование процессов при падении волны на границу раздела двух сред с различными свойствами. Рассмотрим поведение бегущей волны на границе раздела двух сред, воспользовавшись ранее введенным понятием импеданса.

Передатчик, воздействующий на открытую среду, возбуждает бегущие волны. Со стороны среды на выходные зажимы передатчика действует сила сопротивления, пропорциональная характеристическому импедансу. Передатчик не различает, когда он излучает в открытую среду и когда он нагружен на эквивалент среды. Например, если заменить антенну радиопередатчика ее активным эквивалентным сопротивлением, каких-либо изменений в работе передатчика мы не обнаружим. Т.е. передатчик этой замены не "чувствует". В случае струны мы можем нагрузить "передатчик", возбуждающий ее, непосредственно на поршень, демпфирующий колебания на выходе "передатчика". В этом случае на выход передатчика будет действовать точно такая же сила сопротивления, как и в случае присоединения его к бесконечной струне. Это возможно в случае равенства импедансов струны и ее эквивалента (демпфирирующего поршня):

$$Z_{экв} = Z = \sqrt{T_o \rho_o}\,.$$

В этом случае можно считать, что импеданс нагрузки согласован с импедансом среды распространения (струны).

Нас будет интересовать вопрос, как отреагируют волны, распространяющиеся в среде, на резкое изменение импеданса в какой-либо точке. Рассмотрим бесконечно простирающуюся от $x=-\infty$ до $x=\infty$ струну, состоящую из двух частей с различными линейными плотностями ρ_1 и ρ_2, соединенных в точке $x=0$. Натяжение T считаем неизменным по всей длине струны. Волновые скорости и импедансы для отрезков 1 и 2 различаются и равны:

$$C_1 = \sqrt{T/\rho_1},\ C_2 = \sqrt{T/\rho_2},\ Z_1 = \rho_1 C_1,\ \ Z_2 = \rho_2 C_2.$$

Если бы выполнялось условие $Z_1=Z_2$, волна н почувствовала бы наличие границы, разделяюще среды в точке $x=0$. В интересующем нас случае $Z_1=$ можно представить распространение волны на струн следующим образом. В точке $x=-\infty$ находитс "передатчик", генерирующий волну, бегущую сторону положительных значений x. Запиш уравнение этой волны, считая ее гармонической, в форме:

$$U_{пад}(x, t) = U_0 Cos(\omega t - kx).$$

В точке x=0 струна подсоединена к эквивалентной нагрузке с импедансом Z_2. Уравнение волны в точке x=0:

$$U_{пад}\ (0, t)\ =\ U_0 Cos\omega t$$

В случае неравенства импедансов отрезка N1 струны и нагрузки (отрезок N2) в точке x=0 на струну N1 действует избыточная сила $Z_1\ [\partial U_{отр}(0,t)]/\partial t$, приводящая к распространению волны в направлении −x (т.е. к отражению). В непосредственной близости от точки x=0 смещение струны справа и слева от границы раздела равны, т.е. должно выполняться условие:

$$U_{пад}|_{x=0} + U_{отр}|_{X=0} = U_{прох}|_{X=0}\ .$$

Здесь $U_{пад}$, $U_{отр}$, $U_{прох}$ – амплитуды падающей, отраженной и проходящей волн. Записывая эти волны в виде:

$$U_{пад} = U_0 Cos(\omega t - k_1 x)\ ,$$

$$U_{отр} = U_1 Cos(\omega t + k_1 x)\ ,$$

$$U_{прох} = U_2 Cos(\omega t - k_2 x),$$

имеем условие на границе раздела сред для амплитуд волн:

$$U_o + U_1 = U_2. \qquad (1.4.1)$$

Другим условием, выполняющимся в точке x=0, является непрерывность поперечной силы $T(\partial U/\partial x)$. Согласно этому условию:

$$T\frac{\partial}{\partial x}[U_0 Cos(\omega t-k_1x)+U_1 Cos(\omega t+k_1x)]=$$
$$=T\frac{\partial}{\partial x}U_2 Cos(\omega t-k_2x)$$

или

$$-U_0Tk_1Sin(\omega t-k_1x)+k_1U_1TSin(\omega t+k_1x)=$$
$$=-U_2k_2TSin(\omega t-k_2x),$$

учитывая, что

$k_1=\omega/c_1,\ k_2=\omega/c_2,\ T/c_1=\rho_1c_1=Z_1,\ T/c_2=\rho_2c_2=Z_2,$

в точке $x=0$ *имеем*:

$$Z_1(-U_1+U_0)=Z_2U_2, \qquad (1.4.2)$$

Из уравнения (1) и (2) находим коэффициент отражения (по амплитуде):

$$R_{12}=\frac{U_{отр}}{U_{пад}}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} \qquad (1.4.3)$$

и коэффициент пропускания:

$$T_{12}=\frac{U_{прох}}{U_{пад}}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}. \qquad (1.4.4)$$

Эти коэффициенты не зависят от частоты ω, действительны и не вносят фазовых сдвигов. Значения R и T полностью определяются отношениями импедансов. Точно таким же выражением определяются коэффициенты отражения и прохождения для других типов волн (например продольных звуковых волн, волн в линиях передач, электромагнитных волн и т.д.)

Рассмотрим два случая: а) отношение импедансов Z_2/Z_1 равно бесконечности и б) $Z_2/Z_1=0$.

Если $Z_2/Z_1\to\infty$, то $R_{12}=-1$. Т.к. $R_{12}=-1$, то при сложении падающей и отраженной волн смещение (амплитуда) в точке x=0 равно нулю. Падающая волна отражается полностью, при этом ее фаза изменяется на π.

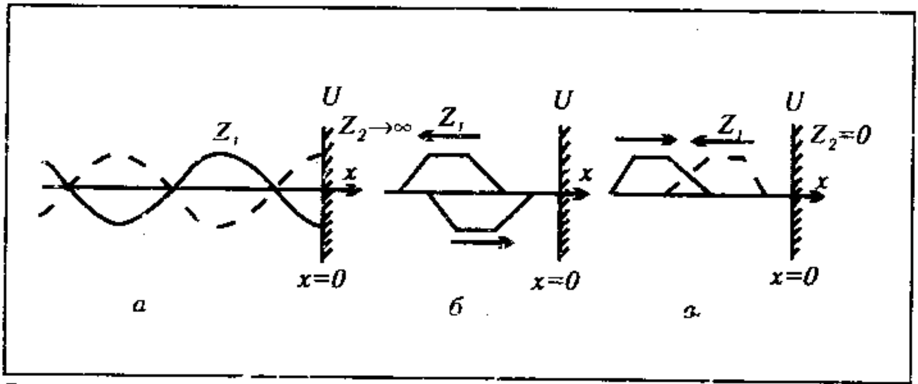

Рис.1.4

На рис.1.4 показан этот случай. Он соответствует возбуждению стоячих волн. Положительный импульс в падающей волне становится отрицательным после отражения. Сила, действующая на струну в точке x=0, в два раза больше, чем при полном согласовании. Избыточная сила затрачивается на образование отраженной волны с амплитудой, равной по величине, но противоположной по знаку амплитуде падающей волны.

Если $Z_2/Z_1=0$, коэффициент отражения смещения (амплитуды) равен $R_{12}=1$. В этом случае не наблюдается изменения фазы волны при отражении. Отражение импульса от свободного конца струны иллюстрирует рис.1.4б (отраженный импульс изображен пунктиром).

Рассмотрим, что происходит с энергией волны при ее падении на границу раздела сред с разными импедансами. Ясно, что скорость поступления энергии на границу x=0 равна энергии, переносимой волной в единицу времени. Падающая на границу энергия уносится отраженной и преломленной волнами. Если рассматривать единичный отрезок струны как гармонический осциллятор, совершающий колебания около равновесного положения с частотой ω волны, то он обладает энергией $E=(1/2)\rho\omega^2U^2_{пад}$. Скорость переноса энергии вдоль струны определяется произведением E на скорость распространения волны:

$$(1/2)\rho_1C_1\omega^2U^2_{пад}=(1/2)\varepsilon Z_1\omega^2U^2_{пад}.$$

Скорость уноса энергии:

$$\frac{1}{2}Z_1\omega^2U^2_{отр}+\frac{1}{2}Z_2\omega^2U^2_{прох}=\left(\frac{1}{2}\omega^2U^2_{пад}\right)\left(Z_1\frac{U^2_{отр}}{U^2_{пад}}+Z_2\frac{U^2_{прох}}{U^2_{пад}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\omega^2U^2_{пад}\right)\left[Z_1\frac{(Z_1-Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2}+Z_2\frac{(2Z_1)^2}{(Z_1+Z_2)^2}\right]=\frac{1}{2}\omega^2Z_1U^2_{пад}.$$

Т.о. мы показали, что вся энергия, переносимая волной к границе раздела падающей волной, уносится от нее отраженной и преломленной волнами. При согласовании импедансов ($Z_1=Z_2$) энергия не отражается.

1.5 Согласование импедансов двух сред.

Целью согласования импедансов является создание режима бегущей волны при распространении ее из одной среды в другую. Например, в радиотехнике такая задача возникает при подключении передатчиков и приемников при помощи фидеров к антеннам, либо подключении различных измерительных приборов к испытываемой аппаратуре и т.д. Возможно несколько путей решения этой задачи. Мы рассмотрим один из вариантов, пригодный для согласования импедансов в узкой полосе частот. Способ состоит в ведении между средами с импедансом Z_1 и Z_3 дополнительной среды с импедансом Z_2. Необходимо определить значение Z_2 и толщину (протяжность) согласующей среды.

Пусть среда 1 простирается от $x=-\infty$ до $x=0$ (см рис 1.5), среда 3 от $x=l$ до $x=+\infty$. Между ними располагается согласующая среда 2 с импедансом Z_2. Согласование будем проводить для волн с частотой ω.

Запишем выражение для падающей волны:

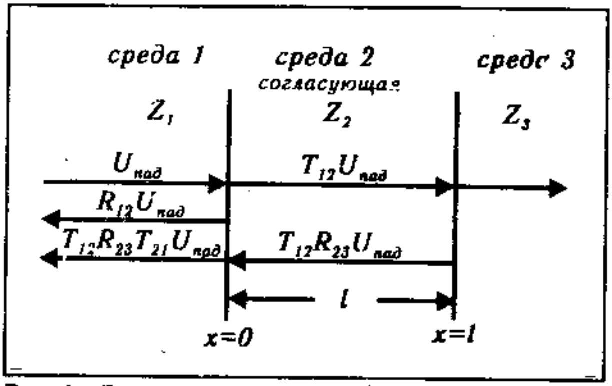

Рис1.5

$$U_{пад}(x,t) = U_0 Cos(\omega t - k_1 x). \qquad (1.5.1)$$

Эта волна частично отражается в точке x=0, т.к. здесь существует скачок импеданса. Амплитуда отраженной волны равна:

$$U_{отр}(0,t) = R_{12} U_0 Cos(\omega t + k_1 x).$$

Частично на границе x=0 волна (1) преломляется в среду 2 с коэффициентом T_{12}, отражается на границе x=l с коэффициентом отражения R_{23} и, пройдя по среде 2 расстояние 2l, преломляется на границе x=0 с коэффициентом T_{21}. Амплитуда этой волны, прошедшей в среду 1, равна:

$$U_{отр}(l,t) = T_{12} R_{23} T_{21} U_0 Cos(\omega t + k_1 x - 2k_2 l). \qquad (1.5.2)$$

Если коэффициенты отражения малы в сравнении с единицей (а это справедливо, если импедансы Z_1, Z_2, Z_3 мало отличаются друг от друга), можно пренебречь вкладом многократно отраженных волн и ограничиться рассмотрением только первых двух отражений. Если значения R_{12} и R_{21} малы, можно считать, что $T_{12}T_{21} = (1-R_{12})(1-R_{21}) = 1-R_{12}^2 \approx 1$. Отраженные в среду 1 волны (1) и (2) будут интерферировать, и результирующая амплитуда отраженной волны будет равна:

$$U_{отр} \approx R_{12} U_0 Cos(\omega t + k_1) + R_{23} U_0 Cos(\omega t + k_1 - 2k_2 l). \quad (1.5.3)$$

Путем подбора значения импеданса Z_2 можно добиться равенства коэффициентов отражения $R_{12}=R_{23}$. Учитывая, что $R_{12}=(Z_1-Z_2)/(Z_2+Z_1)$, $R_{23}=(Z_2-Z_3)/(Z_2+Z_3)$, для Z_2 получаем значение:

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (1.5.4)$$

При этом отраженную волну в среде можно представить в виде:

$$U_{отр} \approx R_{12} U_0 [Cos(\omega t + k_1 Z) + Cos(\omega t + k_1 Z - 2k_2 l)]. \quad (1.5.5)$$

Значение $U_{отр}$ равно нулю, если $2k_2 l=\pi$. Т.е. волна в согласующей среде должна пройти расстояние $2l=\lambda/2$ и протяженность этой среды должна быть равна:

$$l=\lambda/4. \quad (1.5.6)$$

Рассмотренный выше способ согласования имеет недостаток, связанный с тем, что он пригоден лишь для узкого интервала частот. Согласования в широкой полосе частот можно добиться с помощью устройства (среды), в котором импеданс монотонно изменяется на длине l, а на длине, равной четверти длины любой из передаваемых волн, изменяется на очень маленькую величину. Мы не будем анализировать этот случай подробно, предлагая студентам самостоятельно решить эту задачу.

1.6 Стоячие волны.

В реальных средах не всегда удается добиться согласования импедансов при распространении волны из одной среды в другую. Поэтому часто энергия отражается на границе. Посмотрим, что произойдет, если импеданс второй среды равен бесконечности.

При этом падающая волна полностью отражается с изменением фазы на π радиан. Поэтому амплитуды отраженной и падающей волн связаны соотношением:

$$U_{пад}=-U_{отр}. \qquad (1.6.1)$$

В результате сложения падающей и отраженной волн образуется стоячая волна. Для примера рассмотрим струну длиной l, жестко закрепленную на концах. Пусть в сторону положительных x распространяется волна:

$$U=U_{пад}e^{i(\omega t-kx)} \qquad (1.6.2)$$

в сторону отрицательных x:

$$U=U_{отр}e^{i(\omega t+kx)} \qquad (1.6.3)$$

Смещение в любой точке равно:

$$U=U_{пад}e^{i\omega t}(e^{-ikx}-e^{ikx})=-2iU_{пад}e^{i\omega t}\mathrm{Sin}kx. \qquad (1.6.4)$$

Подставим это решение в волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=i\omega U_{пад}e^{i\omega t}(e^{-ikx}-e^{ikx})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-\omega^2 U_{пад}e^{i\omega t}(e^{-ikx}-e^{ikx})=-\omega^2 U,$$

отсюда: $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+K^2U=0. \qquad (1.6.5)$$

Мы получили стационарное волновое уравнение, описывающее стоячие волны.

На концах струны амплитуда волны равна нулю: $U=0$ при $x=l$.

Поэтому из (1.6.4) следует:

$$\mathrm{Sin}kl=\mathrm{Sin}(\omega/c)l=0. \text{ т.е. } (\omega l/c)=n\pi.$$

На струне в данном случае могут существовать колебания с частотами

$$\omega_n=(n\pi c)/l \quad \text{или} \quad f_n=(nc)/2l.$$

Это так называемые нормальные частоты, соответствующие нормальным модам.

Если n>1, то на струне будет ряд точек, остающихся неподвижными. Их положение определяется из уравнения:

$$\sin\frac{\omega_n x}{c} = \sin\frac{n\pi x}{l} = 0,\ \text{или}\ \frac{n\pi x}{l} = m\pi\,(m=0\ldots n).$$

Это т.н. узловые точки (узлы).

Стоячие волны возникают из-за сложения возмущений, распространяющихся в противоположных направлениях. Узлы образуются, если амплитуды этих возмущений равны по величине и противоположны по знаку. В точках максимального смещения (пучностях) амплитуда равна удвоенной амплитуде падающей волны.

Если отражение от границы среды не полное, то бегущие в разных направлениях волны не точно компенсируют друг друга и не образуют идеальных узлов с нулевой амплитудой. В этом случае вводится понятие коэффициент стоячей волны (КСВ). Если амплитудный коэффициент отражения $(U_{пад})/(U_{отр})=r$, максимальная амплитуда равна $(U_{пад}+U_{отр})$, минимальная – $(U_{пад}-U_{отр})$, то коэффициент стоячей волны равен:

$$КСВ=\frac{U_{пад}+U_{отр}}{U_{пад}-U_{отр}}=\frac{1+r}{1-r},$$

В режиме стоячей волны полная энергия, переносимая в одном направлении, в точности равна энергии, переносимой в противоположном направлении. Поэтому полный поток энергии (т.е. энергия, переносимая в единицу времени через единичную площадь) в стоячей волне равен нулю.

1.7 Групповая скорость.

Ранее мы ввели понятие фазовой скорости, равной $V_ф=\omega/k$. В общем случае синусоидальные волны разных частот имеют различные фазовые скорости и, следовательно, различные значения волнового параметра $k=2\pi/\lambda$. Соотношение $\omega=f(k)$ между частотой и волновым числом (или периодом или длиной волны), называемое дисперсионным соотношением, приведено на рис.1.6.

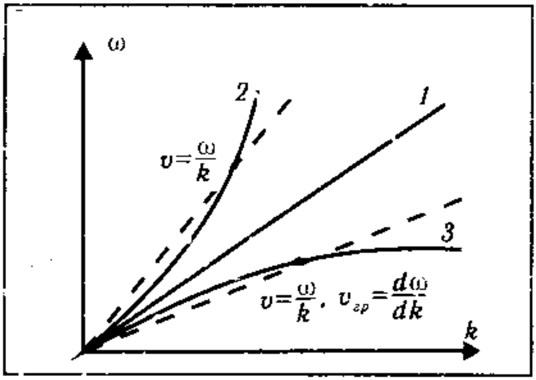

Рис.1.6

В точке с координатами (ω,k) кривой $\omega=f(k)$ волновая скорость равна $V_ф=\omega/k$, т.е. определяется наклоном прямой линии, проведенной из начала координат в точку (ω,k). Если функция $\omega=f(k)$ имеет вид прямой, проходящей через начало координат, то фазовая скорость одинакова для волн любой частоты. Такая мода называется <u>бездисперсной.</u> Чтобы понять, почему выбрано такое название, рассмотрим пакет волн из двух компонент с одинаковыми амплитудами, но разными частотами ω_1 и ω_2. Полагаем, что разность частот $\Delta=\omega_2-\omega_1$ мала. Будем описывать волны на частотах ω_1 и ω_2 в форме:

$$U_1=U_0 Cos(\omega_1-k_1x) \text{ и } U_2=U_0 Cos(\omega_2 t-k_2x).$$

Волна с частотой $(\omega_1+\omega_2)/2$ описывается формулой:

$$U=U_1+U_2=2U_0 Cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t-\frac{(k_1-k_2)}{2}x\right].$$

$$\cdot Cos\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t-\frac{(k_1+k_2)}{2}x\right].$$

Максимальная амплитуда этой волны равна $2U_0$. Она промодулирована в пространстве и времени медленно меняющейся огибающей с частотой $(\omega_1-\omega_2)/2$ и волновым числом $(k_1-k_2)/2$.

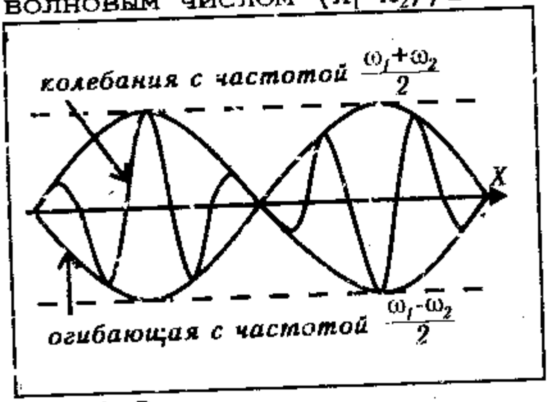

Рис.1.7

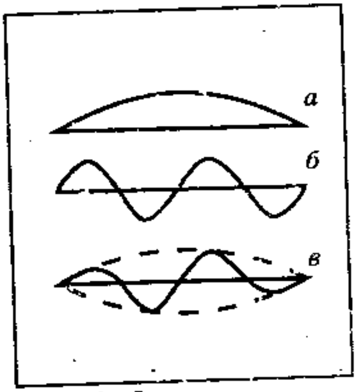

Рис.1.8

Вид волны представлен на рис 1.7.
Скорость распространения этой волны равна:

$$V_п = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Если скорости волн с частотами ω_1 и ω_2 одинаковы, т.е. $v_ф=\omega_1/K_1=\omega_2/K_2$, то $V_ф=V_п$ т.е. частотные гармоники и их сумма (пакет) будут распространяться с одинаковой скоростью. При этом профиль пакета на рис.1.7 при рассмотрении волны не уменьшится.

Если скорости отдельных частотных составляющих различаются, то одна из них будет опережать другую. При этом форма огибающей не будет сохраняться в процессе распространения.

Рассмотрим распространение сигнала посредством дисперсной моды. В общем случае волну с модулированной амплитудой можно представить в виде произведения низкочастотного импульса и высокочастотной несущей с частотой ω (рис.1.8). Обозначим через Ω круговую частоту модулирующей (низкочастотной) волны, а через ω_0 – высокочастотную несущую волну. Результат умножения этих двух волн равен: $U=U_0 Cos(\Omega t)(Cos\omega_0 t)$. Перепишем это выражение в виде:

$$U = \frac{1}{2}[Cos(\omega_o + \Omega)t + Cos(\omega_o - \Omega)t].$$

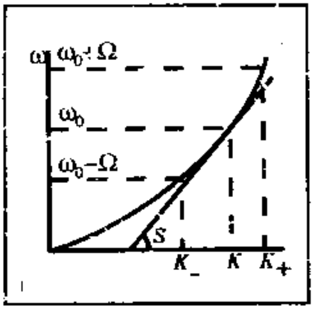

Рис.1.9

При передаче составляющих с круговыми частотами $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$ посредством дисперсной моды, они будут распространяться с различными скоростями. Обозначим через k_0 волновой вектор составляющей с частотой ω_0, S – наклон касательной к кривой $\omega=f(k)$ в точке $\omega=\omega_0$. (см.рис.1.9). Наклон $S=\Delta\Omega/|\Delta k|$. Приближенные значения $k(\omega_0+\Omega)$ и $k(\omega_0-\Omega)$ для частотных составляющих $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$ равны:

$$k(\omega_0+\Omega) = k_0 + (\Omega/s),$$

$$k(\omega_0-\Omega) = k_0 + (\Omega/s).$$

После прохождения волнами расстояния X их произведение U_x будет иметь вид:

$$U_x=\frac{1}{2}Cos\left[(\omega_0+\Omega)\,t-k_0X-\frac{\Omega X}{s}\right]+Cos\left[(\omega_0-\Omega)\,t-k_0X+\frac{\Omega X}{S}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{Cos\left[(\omega_0 t-k_0X)+\Omega\left(t-\frac{X}{S}\right)\right]+Cos\left[(\omega_0 t-k_0X)-\Omega\left(t-\frac{X}{S}\right)\right]\right.$$

Последнее выражение тождественно следующему:

$$U_x = [Cos(\omega_0 t-K_0X)]\,[Cos\Omega(t-X/s)].$$

Из этого выражения видно, что фазовая скорость несущей частоты (ω_0) равна:

$$V_ф=\omega_0/k_0\,.$$

Модулирующая волна $Cos(\Omega t)$ движется со скоростью

$$V_{гр} = S = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}.$$

Это т.н. <u>групповая скорость</u>, равная скорости распространения максимальной амплитуды пакета. С этой скоростью переносится энергия пакета волн. Групповая и фазовая скорости связаны соотношением:

$$V_{гр}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d}{dk}(kV_ф)=V_ф+k\frac{dV_ф}{dk}=V_ф-\lambda\frac{dV_ф}{d\lambda},\quad k=2\pi/\lambda.$$

В зависимости от знака производной $dV_ф/d\lambda$ групповая скорость может быть больше или меньше фазовой скорости. В случае $dV_ф/d\lambda>0$ $V_{гр}<V_ф$. Это т.н. случай нормальной дисперсии. При $dV_ф/d\lambda<0$, $V_{гр}>V_ф$. Это т.н. случай аномальной дисперсии. На рис.1.6 представлены три кривые $\omega=f(k)$, описывающие среду без дисперсии (1: $\omega/k=Const$, $V_ф=V_{гр}$), область нормальной дисперсии (2: $V_{гр}<V_ф$) и область аномальной дисперсии (3: $V_{гр}>V_c$).

Необходимо обратить внимание на следующее. Групповая скорость имеет физический смысл, когда она является действительной величиной. Это возможно, если среда обладает малым поглощением. Если не учитывать это, можно получить физически нереальный случай превышения групповой скоростью скорости света в вакууме.

Групповая скорость может быть отрицательной, т.е. направления волнового вектора и групповой скорости могут быть противоположны. Выше мы установили, что групповая скорость может быть выше и ниже фазовой скорости. Проиллюстрируем это на простом примере дисперсных мод. Рассмотрим распространение электромагнитной волны в волноводе. Распространение возможно, если частота волны выше критической частоты $\omega_{кр}$. На рис.1.10 представлены кривые ω=f(k) для двух различных мод волновода с критическими частотами $\omega_{кр1}$ и $\omega_{кр2}$. Критические частоты этих мод $\omega_{кр1}$ и $\omega_{кр2}$ определяются точками пересечения кривых ω=f(k) с осью ординат. На критической частоте k=0 и наклон касательной равен 0. Следовательно, групповая скорость равна 0. Фазовая скорость в этой точке равна бесконечности. Кривые на рис.1.10 – гиперболы, при больших значениях ω и k стремящиеся асимптотически к прямым, наклон которых определяется скоростью электромагнитной волны в вакууме. Мы видим, что при больших ω и k $V_ф$ и $V_{гр}$ стремятся асимптотически к скорости света.

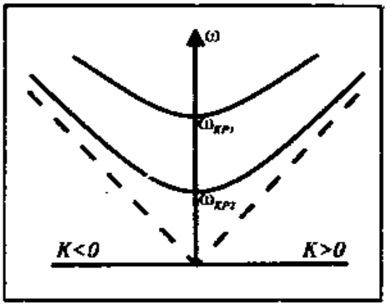

Рис.1.10

Групповая скорость - это скорость переноса энергии волны в среде. Она не может быть больше скорости света. Фазовая скорость, как мы видели выше, может быть больше скорости света. Физическая причина этого заключается в следующем (если речь вести об электромагнитных волнах). Электромагнитная волна, распространяясь в среде, действует на заряды с возмущающей силой eE(t). Если частота внешнего воздействия меньше резонансной частоты, то смещение заряда x(t) будет следовать за eE(t). Заряд будет колебаться в среде с внешней силой. Смещение заряда вызывает появление электрического поля, уменьшающего внешнее поле и, следовательно, уменьшение возвращающей силы. Это приводит к уменьшению фазовой скорости. Если $\omega>\omega_0$, смещение заряда находится в противофазе с внешней силой eE(t). Поле, образованное смещением заряда, усиливает внешнее поле E(t) и, следовательно, возвращающую силу. Это вызывает увеличение фазовой скорости, и она может стать больше скорости света.

Задачи к разделу 1.

Задача 1. <u>Вывести волновое уравнение идеальной линии передачи.</u>

Пояснения к решению задачи.

Различают волны свободные и направляемые. Направляемыми называются волны, распространяющиеся вдоль каких-либо тел. К таким телам относятся открытые металлические, диэлектрические и полупроводящие поверхности, однопроводные, многопроводные и коаксиальные линии, волноводы из полых труб, диэлектрические волноводы и др. Передающие линии можно разделить на две группы. К одной относятся линии, описываемые телеграфными уравнениями(например, коаксиальные линии, двухпроводные линии), к другой - требующие электродинамического подхода для анализа распространения радиоволн (например, волноводы). В линиях первой группы легко обнаруживается связь между волнами в этих линиях и плоскими волнами в свободном пространстве. Ниже мы рассмотрим волны в двухпроводной линии, т.к. любую линию передачи можно упрощенно представить в виде системы из двух проводов, к одному концу которых подключен генератор переменного тока. Представим, что плоская электромагнитная волна распространяется перпендикулярно плоскости чертежа. Если перпендикулярно линиям электрического поля поставить две идеально проводящие плоскости, они не исказят электромагнитного поля внутри этих плоскостей. Это означает, что между плоскостями будет распространяться плоская поперечная волна. Если теперь деформировать эти две плоскости, можно получить коаксиальную и двухпроводные линии. Эти рассуждения поясняются на рис.1.

Схематически линия представлена на рис.2. На рис.2а показан момент, когда к верхнему проводу в точке А приложено положительное напряжение относительно нижнего провода. При этом ток идет от точки А к точке В. Через полпериода положение изменяется на обратное (рис.2б). Распределение зарядов вдоль каждого провода изменяет знак каждые полпериода при возбуждении линии гармоническим напряжением. Носители зарядов колеблются около равновесных положений на расстояния, значительно меньшие длины волны. Ток в линии, вызванный движением зарядов, достигает максимального значения, когда максимально произведение плотности зарядов на скорость.

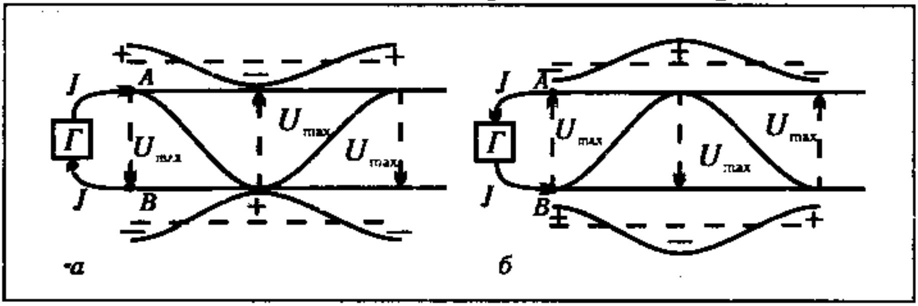

Рис.2

На рис.2а около проводов линии схематически изображено изменение плотности положительных и

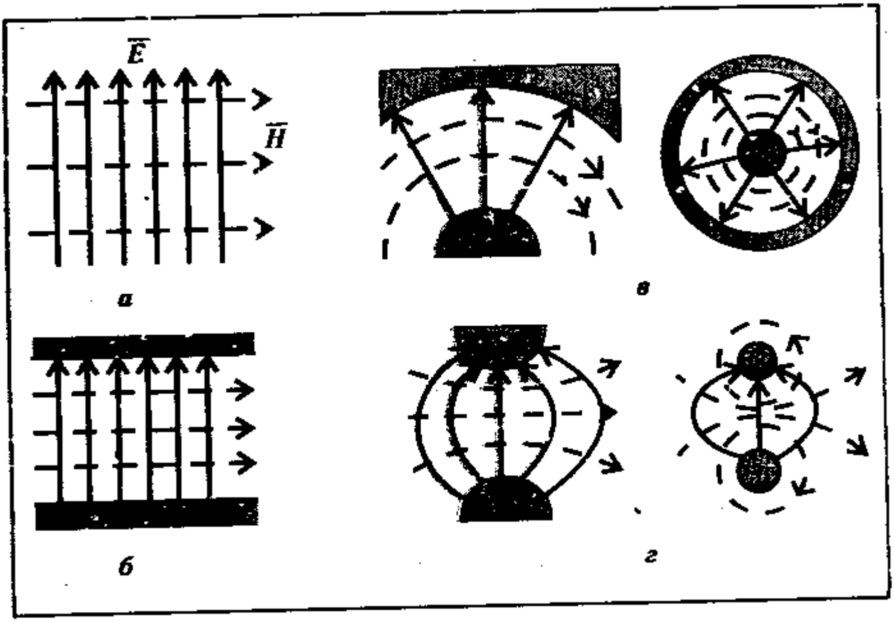

Рис.1

отрицательных зарядов.

Энергия непрерывно поступает в линию и переносится волнами, если ток и напряжение на выходе генератора находятся в фазе.

Идеальной линией передачи называют линию, активное сопротивление которой равно нулю. В такой линии нет потерь волновой энергии.

Решение. Погонную индуктивность и погонную емкость линии обозначим L_0 и C_0 . Рассмотрим элемент линии dx, длина которого много меньше длины волны λ напряжения U и тока J: $dx \ll \lambda$. Эквивалентная схема линии приведена на рис.3.

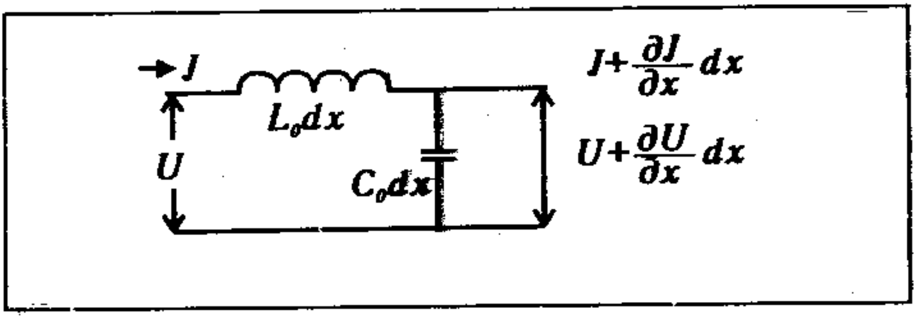

Рис.3

Напряжение на концах элемента dx равно произведению скорости изменения напряжения по длине $\partial U/\partial x$ на величину dx: $(\partial U/\partial x)\cdot dx$ На индуктивности падает напряжение, равное $-(L_0 dx)\partial J/\partial t$. Поэтому:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx=-L_0 dx\frac{\partial J}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial x}=-L_0\frac{\partial J}{\partial t}. \qquad (1)$$

Ток, протекающий по участку линии dx, заряжает емкость линии C_0dx до значения U, при этом часть тока равная $-(\partial J/\partial x)dx$, теряется. На емкости накапливается заряд $q=(C_0dx)U$, изменение которого во времени приводит к появлению тока $dJ=\partial q/\partial t=\partial/\partial t(C_0dx)U$. Поэтому можно записать:

$$-\frac{\partial J}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial t}(C_o dx)U, \quad \text{или} \quad \frac{\partial J}{\partial x} = -C_o\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (2)$$

Дифференцируя (1) по x, а (2) по t, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0, \text{где } V=\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \text{ -волновая скорость } (3).$$

Аналогично, дифференцируя (1) по t, а (2) по x, получим:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}=0. \qquad (4)$$

Т.о. мы получили волновые уравнения для тока и напряжения в линии передачи.

Мы нашли, что колебания зарядов в линии создают волны напряжения и тока, распространяющиеся со скоростью, определяемой произведением индуктивности (определяющей свойства инерции среды) на емкость (определяющей способность накапливать потенциальную энергию).

Уравнения (3) и (4), как было показано в предыдущих лекциях, допускают решения в виде:

$$U_{\pm} = U_{0_{\pm}}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(Vt\mp x), \quad J_{\pm} = J_{0_{\pm}}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(Vt\mp x). \qquad (5)$$

Индексы "+" и "-" относятся к волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях оси x.

Задача 2. <u>Получить выражения для тока и напряжения в линии передачи с потерями.</u>

<u>Решение.</u> Реальные линии обладают сопротивлением, приводящим к потерям волновой энергии. Потери в линии вызываются наличием сопротивления материала линии; его можно учесть, вводя в рассмотрение последовательно включенное сопрстивление R_0. В реальной линии возможен ток и поперек линии передачи, вызванный тем, что реальные диэлектрики, заполняющие пространство между проводами линии, обладают конечной проводимостью. Учтем это, включив параллельно емкости C_0dx шунтирующее сопротивление с проводимостью G_0dx. Теперь схема линии будет выглядеть так, как показано на рис.4.

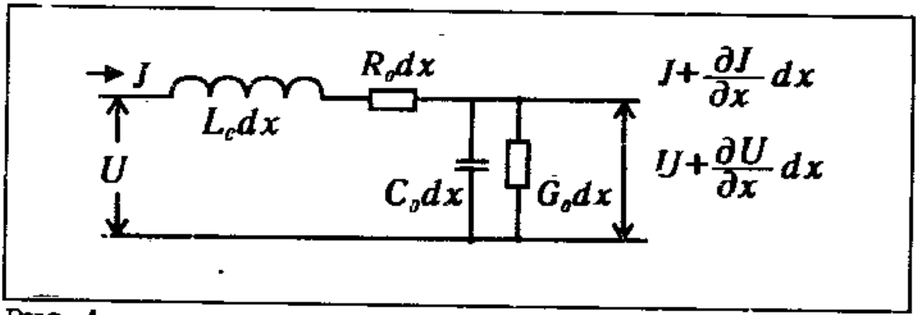

Рис.4

В рассматриваемом случае изменения напряжения и тока на элементе длиной dx определяются уравнениями:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-L_0\frac{\partial J}{\partial t}-R_0J \quad и \quad \frac{\partial J}{\partial x}=-C_0\frac{\partial U}{\partial t}-G_0U. \quad (6)$$

Будем предполагать, что напряжение и токи изменяются по гармоническому закону:

$U=U_0e^{i\omega t}$, $J=J_0e^{i\omega t}$.

В этом случае

$(\partial U)/(\partial t)=i\omega U$, $(\partial J)/(\partial t)=i\omega J$,

и уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-(R_0+i\omega L_0)J, \quad \frac{\partial J}{\partial x}=-(G_0+i\omega C_0)U. \quad (7)$$

При выводе (7) учтено, что ток через шунтирующий резистор равен $(G_0dx)U$. Дифференцируя уравнения (7), получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-(R_0+i\omega L_0)\frac{\partial J}{\partial x}=(R_0+i\omega L_0)(G_0+i\omega C_0)U,$$
$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}=-(G_0+i\omega C_0)\frac{\partial U}{\partial x}=(R_0+i\omega L_0)(G_0+i\omega C_0)J. \quad (8)$$

Обозначим константу распространения через

$$\gamma^2=(R_0+i\omega L_0)(G_0+i\omega C_0). \quad (9)$$

Представим ее в виде $\gamma=\alpha+ik$, где α - коэффициент затухания, k - волновое число.

Перепишем уравнения (8) в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\gamma^2 U=0, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}-\gamma^2 J=0. \quad (10)$$

Решения таких уравнений можно представить в виде гармонической волны, затухающей при распространении:

$$U=U_{0\pm}e^{\mp\alpha x}e^{i(\omega t\mp kx)} \quad J=J_{0\pm}e^{\mp\alpha x}e^{i(\omega t\mp kx)}.$$

Т.о. наличие потерь приводит к экспоненциальному затуханию волны, распространяющейся в обоих направлениях. Схематически это представлено на рис.5.

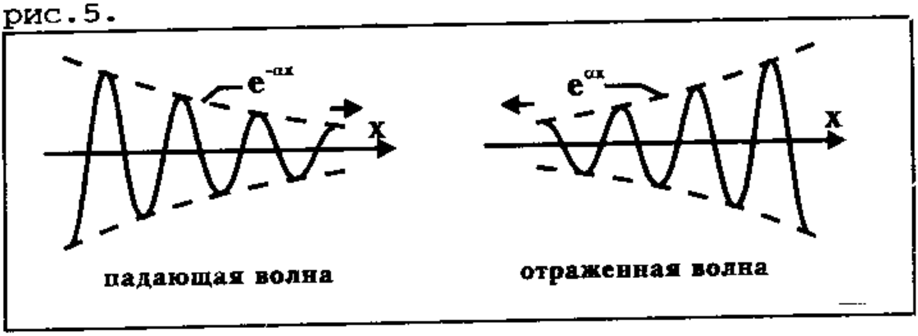

Рис.5

Задача 3. <u>Вывести волновое уравнение для линии с потерями.</u>

Решение: Напряжение и ток связаны между собой уравнениями в частных производных (т.н. телеграфными уравнениями первого порядка):

$$-\frac{\partial U}{\partial x}=R_0 J+L_0\frac{\partial J}{\partial t}, \quad -\frac{\partial J}{\partial x}=G_0 U+C_0\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Дифференцируя первое уравнение по x, второе по t, получим:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=R_0\frac{\partial J}{\partial x}+L_0\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial t}=-R_0\left(G_0U+C_0\frac{\partial U}{\partial t}\right)+L_0\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial t}$$

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial t}=G_0\frac{\partial U}{\partial t}+C_0\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Отсюда для U следует:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-L_0C_0\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-(R_0C_0+G_0L_0)\frac{\partial U}{\partial t}-R_0G_0U=0.$$

Аналогично можно получить уравнение для тока J. Полученное уравнение называется телеграфным уравнением второго порядка, которому по отдельности удовлетворяют U и J.

Задача 4. <u>Найти связь волнового сопротивления линии передачи без потерь с ее параметрами</u>.

Под волновым сопротивлением будем понимать величину

$$Z=\frac{U\pm}{J\pm}.$$

Для идеальной линии передачи воспользуемся уравнениями (1) и (6), получим:

$$U_{0\pm}\left(\mp\frac{2\pi}{\lambda}\right)Cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt\mp x)=-L_0J_{0\pm}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)VCos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt\mp x)$$

или

$$(\mp 1)\,U_{0\pm}=-VL_0J_{0\pm},$$

отсюда следует :

$$Z_\pm=\frac{U_\pm}{J_\pm}=\frac{U_{0\pm}}{J_{0\pm}}=\pm L_0V=\pm\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \qquad (11)$$

Т.о. волновое сопротивление становится отрицательным для волн, бегущих в сторону отрицательных значений x. Как и в случае поперечных волн на струне волновое сопротивление пропорционально связано с инерционными свойствами среды (в данном случае связанной с ее индуктивностью) и со свойством накопления потенциальной энергии (в случае линии, определяемой ее емкостными характеристиками).

Задача 5. <u>Решить задачу 4 для линии передачи с потерями.</u>

Решение. Полное решение уравнения (10) для тока представим в виде суммы амплитуд волн, бегущих в сторону положительных и отрицательных значений x.

$$J=J_{0+}e^{-\gamma x}+J_{0-}e^{\gamma x}.$$

Из уравнения (7) следует:

$$-\gamma\left(J_{0+}e^{-\gamma x}-J_{0-}e^{\gamma x}\right)=-\left(G_0+i\omega C_0\right)U.$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$\sqrt{\frac{R_0+i\omega L_0}{G_0+i\omega C_0}}\left(J_{0+}e^{-\gamma x}+J_{0-}e^{\gamma x}\right)=U=U_++U_-$$

Учитывая, что $J_+=J_{0+}e^{-\gamma x}$, $J_-=J_{0-}e^{\gamma x}$, это уравнение можно разбить на два:

$$U_+=+\sqrt{\frac{R_0+i\omega L_0}{G_0+i\omega C_0}}J_+ \quad и \quad U_-=-\sqrt{\frac{R_0+i\omega L_0}{G_0+i\omega C_0}}J_-$$

Отсюда волновое сопротивление для волны, бегущей в сторону положительных x, равно:

$$Z_{0+}=\frac{U_+}{J_+}=\sqrt{\frac{R_0+i\omega L_0}{G_0+i\omega C_0}}. \qquad (12)$$

Для волны, бегущей в сторону отрицательных x:

$$Z_{0-}=\frac{U_-}{J_-}=-\sqrt{\frac{R_0+i\omega L_0}{G_0+i\omega C_0}}. \qquad (13)$$

Задача 6. Вывести выражение для постоянной затухания и волнового числа в линии с потерями.

Решение. Преобразуем выражение для постоянной распространения γ в форме (9):

$$\gamma=\sqrt{R_0+i\omega L_0}\sqrt{G_0+i\omega C_0}=\omega\sqrt{L_0C_0}\cdot\sqrt{\frac{R_0}{\omega L_0}+i}\sqrt{\frac{G_0}{\omega C_0}+i}=$$

$$i\omega\sqrt{L_0C_0}\left[\sqrt{1-\frac{iR_0}{\omega L_0}}\cdot\sqrt{1-\frac{iG_0}{\omega C_0}}\right].$$

Предположим, что $R_0/\omega L_0$ и $G_0/\omega C_0$ малые величины. Тогда можно разложить члены под знаком корня в ряд и ограничиться первыми двумя членами разложения. При этом

$$\gamma\approx i\omega\sqrt{L_0C_0}\,[\,(1-\frac{i}{2}\frac{R_0}{\omega L_0}+\ldots)\,(1-\frac{i}{2}\frac{G_0}{\omega G_0}+\ldots)\,]=$$

$$i\omega\sqrt{L_0C_0}\left[1-\frac{i}{2}\frac{R_0}{\omega L_0}+\frac{i}{2}\frac{G_0}{\omega L_0}-\frac{1}{4}\frac{R_0G_0}{\omega^2L_0C_0}\right]=$$

$$i\omega\sqrt{L_0C_0}\left[1-\frac{i}{2}\left(\frac{R_0}{\omega L_0}+\frac{G_0}{\omega C_0}\right)\right]=$$

$$i\omega\sqrt{L_0C_0}+\frac{1}{2}\left(R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+G_0\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\right). \qquad (14)$$

Выше мы представили комплексное γ в виде $\gamma=\alpha+ik$. Приравнивая действительные и мнимые части равенства (14), получим для коэффициента затухания α и волнового числа k:

$$\alpha=\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+\frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \qquad (15)$$

$$K=\frac{\omega}{V}=\omega\sqrt{L_0C_0}\ . \qquad (16)$$

Задача 7. Получите выражение для амплитудных коэффициентов отражения и прохождения для токов и напряжений в линии передачи, нагруженной на сопротивление Z_L.

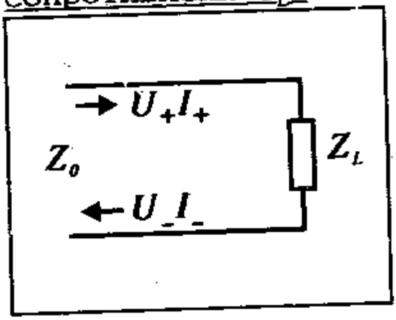

Рис. 6

Решение. Рассмотрим линию передачи конечной длины с волновым сопротивлением Z_0, нагруженную на нагрузку с импедансом Z_L. Напряжение на нагрузке и ток через нее равны:

$$U_++U_-=U_L,$$
$$J_++J_-=J_L$$

Введенные в рассмотрение импедансы равны:

$$\frac{U_+}{J_+}=Z_0,\quad \frac{U_-}{J_-}=-Z_0,\quad \frac{U_L}{J_L}=Z_L.$$

Очевидно, что амплитудные коэффициенты отражения для напряжения и тока равны:

$$\frac{U_-}{U_+}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0},\quad \frac{J_-}{J_+}=\frac{Z_0-Z_L}{Z_0+Z_L} \qquad (17)$$

Амплитудные коэффициенты прохождения равны:

$$\frac{U_L}{U_+}=\frac{2Z_L}{Z_L+Z_0},\quad \frac{J_L}{J_+}=\frac{2Z_0}{Z_L+Z_0}. \qquad (18)$$

Сравнивая формулы (17) и (18) с (1.4.3) и (1.4.4), видим их идентичность. Если импедансы линии и нагрузки равны $Z_L=Z_0$, то линия согласована. При этом вся энергия, поступающая в линию, переносится вдоль нее без отражения на нагрузке.

Задача 8. <u>Найдите напряжение и ток в произвольной точке короткозамкнутой линии ($Z_L=0$). Решение.</u> Т.к. $Z_L=0$, то из (17) следует $U_+=-U_-$. Т.е. волна напряжения полностью отражается. При этом фаза волны изменяется на π. Это приводит к возникновению в линии стоячих волн. В произвольной точке линии с координатой x волну можно представить в виде:

$$U_\pm=\pm Z_0 J_\pm e^{i(\omega t\mp Kx)}. \qquad (19)$$

Полное напряжение в точке x равно:

$$U_x=U_+ + U_- = U_{0+}(e^{-iKx}-e^{iKx})\,e^{i\omega t}=-i2U_{0+}SinKx\cdot e^{i\omega t}$$

При полном отражении $J_+=J_-$, поэтому:

$$J_x=J_+ + J_- = \frac{U_{0+}}{Z_0}\,(e^{-iKx}+e^{iKx})\,e^{i\omega t}=\frac{2U_{0+}}{Z_0}CosKxe^{i\omega t}$$

Т.о. в произвольном сечении линии передачи напряжение U_x изменяется как Sinkx, а ток J_x – как Coskx. Это означает, что в пространстве напряжение и ток сдвинуты по фазе на 90°, при этом напряжение отстает по фазе от тока. В стоячей волне в обоих направлениях переносится одинаковая энергия, поэтому полная переносимая энергия равна нулю.

Задача 9. Покажите, что короткозамкнутая четвертьволновая линия без потерь обладает бесконечным импедансом и, если ее соединить с другой линией передачи, она не будет влиять на основную гармонику, но замкнет накоротко вторую гармонику. Нарисуйте схему подключения такой линии к линии передач.

Задача 10. Необходимо передать импульс из 100-омной линии в 50-омную линию без образования отражения. Определите:

1) Каким по величине должно быть согласующее сопротивление и как его следует подключить к месту соединения?

Задача 11. Решите задачу 10 для случая распространения импульса из 50-омной линии в 100-омную при U_0=10 в.

Задача 12. Чему равна средняя мгновенная мощность волны

$$U=U_0[\cos(\omega t-kz)+(\cos(\omega t+kz)].$$

Задача 13. Используя связь между волновой $v_ф$ и групповой $v_{гр}$ скоростями, найдите выражение для $v_{гр}$ через показатель преломления среды n.

Указание: необходимо учесть, что волновое число

$$k=\omega/v_\phi=\omega n/c.$$

Задача 14. Для плазмы с показателем преломления

$$n=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где $\omega_p=\sqrt{4\pi e^2 N/m}$ - плазменная частота. Найдите выражение для групповой скорости. Докажите соотношение $v_{ср}v_{гр}=c^2$.

Литература

1 Дж. Пирс. Почти все о волнах. –М: Мир, 1976.
2 Пейн Е. Физика колебаний и волн. –М: Мир, 1979.
3 Крауфорд Ф. Волны. Берклеевский курс физики. Т.3. –М: Наука, 1984.

Оглавление

Сдано в набор 10.0).95. Подписано в печать 22. ?5. 5.
Форм.бум. 60x84 1/16. Печ. л. 2, 7. Тираж 200 3 ка 231.

Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420008 Казань, Ленина 4/5