Марат М. Арсланов

ЗНАМЕНИТЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Казань, КФУ, 2012

УДК 519.5
ББК 22.14

Арсланов М. М.
Знаменитые математические проблемы. — Казань: Казанский федеральный университет, 2012 — 25 с.

Пособие предназначено для студентов-магистров, специализирующихся по математике.

Знаменитые математические проблемы[1].

Надо пытаться решать важные задачи, не считаясь с их трудностью. Их решения навсегда войдут в историю науки и принесут людям большую пользу. Так поступали наши великие предшественники. Не следует увлекаться решением легких и малонужных задач только потому, что они не требуют больших усилий. Ученые, которые это делают, могут увлечь на этот неправильный путь и своих учеников.

Академик И.М. Виноградов

Развитие математики во многом стимулируется математическими проблемами. Хорошо поставленная математическая проблема, решение которой не удается найти, говорит о необходимости критического пересмотра существующих методов исследования, о недостаточности той совокупности знаний, к которой относится проблема, и, таким образом, способствует дальнейшему развитию этой области науки.

Каждый исторический период развития математики содержал проблемы, которые занимали умы лучших математиков того времени, чьи усилия привели к серьезному продвижению науки, а их имена вошли в золотой фонд математической культуры. Для древнего периода - это три знаменитые задачи греческих математиков: об удвоении куба (с помощью циркуля и линейки построить куб, объем которого в два раза превосходит объем заданного куба), трисекции угла (теми же средствами разделить угол на три равные части) и квадратуры круга (таким же образом построить квадрат, площадь которого равна площади заданного круга). "Эти проблемы стали средством проникновения в новые области математики. В связи с этими проблемами были открыты конические сечения, некоторые кривые третьего и четвертого порядков и трансцен-

[1] Расширенный вариант лекции, прочитанной в марте 2011 года для учителей математики Республики Татарстан.

дентная кривая, названная квадратиссой"[2].

В средние века усилия многих математиков были направлены на поиски решения в радикалах уравнений выше второй степени, то есть в возможности записи корней уравнения, исходя из его коэффициентов, применением лишь четырех арифметических операций и операции извлечения корня целой натуральной степени.

История навсегда сохранила имена итальянских математиков С.Ферро, Н. Тартальи, Дж. Кардано и Л. Феррари, нашедших общие решения уравнений третьей и четвертой степеней, норвежского математика Н.-Г. Абеля, который доказал невозможность такого решения для уравнений выше четвертой степени (им построен пример уравнения пятой степени с рациональными коэффициентами, неразрешимого в радикалах), и французского математика Э. Галуа, нашедшего необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять уравнения для того, чтобы они имели решения в радикалах. В своей работе Галуа впервые ввел понятие группы, теперь занимающее центральное место в современной алгебре и открыл основные свойства групп. Как пишет А.Н. Колмогоров, "от работ Галуа и Абеля берет свое начало также понятие поля алгебраических чисел, приведшее к созданию новой науки - алгебраической теории чисел"[3].

Более общая проблема - поиск решения уравнений от нескольких переменных с целыми коэффициентами (т.н. диофантовых уравнений). Важность поиска решений таких уравнений обусловлена, в частности, тем, что многие математические проблемы сводятся к решению конкретного диофантова уравнения, точнее к вопросу о существовании решения конкретно заданного диофантова уравнения.

Проблему нахождения алгоритма, который бы позволил по произвольному диофантовому уравнению определить, имеет оно решение в целых числах или нет, знаменитый немецкий математик Д. Гильберт сформулировал в своем докладе "Математические проблемы", прочитанном на Международном математическом конгрессе в Париже в в 1900 году, под номером десять среди двадцати трех важнейших проблем математики (о проблемах Гильберта см. ниже). С тех пор были предприняты многочисленные попытки поиска такого алгоритма, оказавшиеся

---

[2] Д.Я. Стройк. Краткий очерк истории математики, пер. с немецкого. Изд-во "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1990, с. 56.

[3] А.Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии, Изд-во "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1991, с. 73.

безуспешными. Возникло подозрение о неразрешимости этой проблемы (а также целого ряда других проблем, связанных с поиском соответствующего алгоритма).

Однако, пользуясь только интуитивным представлением об алгоритме нельзя доказать отсутствие алгоритма решения конкретной математической задачи. Возникает необходимость сделать понятие "алгоритм" точным математическим понятием. Для этого нужно описать условия, которые присущи любому алгоритму, причем совокупность этих условий должна быть "полна" в следующем смысле: если для конкретной математической проблемы окажется, что для ее решения не существует алгоритма, удовлетворяющего этой совокупности условий, то мы должны согласиться с тем, что проблема ”алгоритмически неразрешима”, то есть алгоритм его решения не будет найден и в будущем (последнее нужно, чтобы исключить дальнейшие попытки поиска такого алгоритма).

Такое уточнение понятия "алгоритм" было сделано в 30-х годах прошлого столетия в работах А. Тьюринга (машины Тьюринга), Э. Поста (машины Поста), А. Черча (λ-конверсии Черча), а также А.А. Маркова (нормальныt алгоритмs Маркова). Соответствующее утверждение об алгоритмической разрешимости математической проблемы только если для ее решения существует алгоритм в смысле одного из этих уточнений, носит название "тезиса Черча-Тьюринга-Маркова". Ясно, что этот тезис не может быть доказан, так как он ставит знак равенства между двумя разными по характеру понятиями - интуитивным понятием "алгоритм" и точным ее математическим описанием. В принципе, тезис Черча-Тьюринга-Маркова когда-нибудь может быть опровергнут: это произойдет, если будет предъявлено описание, которое согласуется с интуитивным понятием алгоритма, но не принадлежит ни одному из выше названных классов. Существует много аргументов в пользу тезиса Черча-Тьюринга-Маркова, главным из которых является следующий. Все эти уточнения эквивалентны в следующем смысле: если существует алгоритм решения задачи по одному из этих описаний, то можно построить алгоритм решения той же задачи по любому из остальных описаний

Работы Тьюринга и его коллег перестроили здание современной математики. В ней появились новые, теперь уже достаточно развитые направления, связанные с исследованием и классификацией алгоритмически неразрешимых проблем. Как оказалось, многие проблемы, алгоритмы решения которых долгие годы не удавалось найти, алгоритмически неразрешимы. В частности, такой оказалась и проблема существования решения произвольного диофантова уравнения. Это доказал в 1971 году молодой ленинградский математик Ю.В. Матиясевич.

Среди знаменитых математических проблем, которые столетиями будоражили умы лучших математиков мира

- "Великая Теорема Ферма" об отсутствии решения в целых числах уравнения вида $x^n + y^n = z^n$, при $n > 2$. Проблема возникла во второй половине семнадцатого столетия при изучении научного наследия выдающегося французского математика П. Ферма и оставалась нерешенной вплоть до последнего времени, несмотря на усилия многих математиков. Решение было найдено в конце XX столетия английским математиком Э. Уайлсом, привлекшим для ее решения сложный аппарат алгебраической теории чисел и теории эллиптических кривых.

- Гипотеза Гольдбаха о возможности разложения произвольного натурального числа, большего или равного шести, в сумму трех простых чисел (эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута). Гипотеза была сформулирована Гольдбахом в письме к Эйлеру от 7 июня 1972 года. В ответном письме от 30 июня того же года Эйлер выдвинул встречную гипотезу о том, что каждое четное число, большее двух, есть сумма двух простых чисел. Нетрудно проверить, что из справедливости гипотезы Эйлера следует справедливость гипотезы Гольдбаха (достаточно из нечетного числа, большего шести, отнять число 3 и к полученному четному числу применить гипотезу Эйлера).

Теперь гипотезу о возможности представления *нечетных* натуральных чисел, больших пяти, в виде суммы трех натуральных чисел принято называть *тернарной* (или *ослабленной*) проблемой Гольдбаха, а гипотезу Эйлера - *бинарной* проблемой Гольдбаха. Тернарная проблема Гольдбаха была доказана И. М. Виноградовым в 1937 году для всех достаточно больших (как установили ученики Виноградова, не превосходящих 106846168) нечетных чисел[4)]. Однако число 106846168 слишком велико (содержит около семи миллионов цифр), чтобы тернарную проблему Гольдбаха считать полностью решенной: прямая проверка гипотезы для всех меньших чисел за реальное время невозможна даже с использованием современных компьютеров. В 1997 году французский математик Жан-Марк Дезуйе, голландский математик Херман тэ Риле, американский математик Г. Эффингер и российский математик Д.В Зиновьевым

[4)]Ранее (1923 г.) это было установлено английскими математиками Г.Харди и Дж. Литлвудом в предположении справедливости обобщеной гипотезы Римана.

в совместной работе[5] доказали, что обобщённая гипотеза Римана влечёт справедливость слабой проблемы Гольдбаха для чисел $> 10^{20}$. Справедливость гипотезы для меньших, чем 10^{20}, чисел легко проверить на компьютере. В той же работе 1937 года И.М. Виноградов доказал, что почти все чётные числа представимы в виде суммы двух простых чисел[6]. Далее, французский математик О.Ремер в 1995 году установил, что любое целое число представимо в виде суммы не более чем чем шести простых чисел[7].

Наконец, в 1966 году китайский математик Чэнь Цзинжунь доказал, что любое достаточно большое чётное число представимо либо в виде суммы двух простых чисел, либо в виде суммы простого числа и произведения двух простых чисел (например, $60 = 11 + 7 \times 7$).

- проблема о нахождении закона распределения простых чисел на числовой прямой - одна из наиболее трудных проблем теории чисел, также все еще не имеющая полного решения, несмотря на многочисленные усилия (крупный вклад в исследование этой проблемы внесли наши соотечественники П.Л. Чебышев, И.М. Виноградов, Ю.В. Линник, Н.Г. Чудаков, Л.Г. Шнирельман), и многие другие. Подробнее об этой проблеме см. на стр. 10

Начиная с 18-го столетия предпринимались попытки систематизировать важнейшие математические проблемы с целью направить усилия математиков на их решения, к этому же периоду относятся и дошедшая до нас информация о поощрениях ученых за решения конкретных математических проблем денежными премиями.

Первая известная в истории крупная премия в 125 тысяч ливров[8] была учреждена Парижской Академией Наук в 1725 году. Премия присуждалась один раз в два года за решение заранее объявленной математической проблемы. Среди наиболее известных имен, получивших эту

---

[5] J-M. Deshouillers G. Effinger, H. te Riele, D. Zinoviev. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, Electronic Research Announcements of the AMS, Band 3, 1997, S. 99-104.

[6] Слова "почти всех" означает, что доля непредставимых четных чисел $\leq n$, если они есть, с ростом n стремится к нулю.

[7] Ранее (1930 г.) Л.Г. Шнирельманом было доказано, что любое целое число представимо в виде суммы не более чем 300000 простых чисел.

[8] Французская денежная единица того времени. В то время это была громадная сумма. Для сравнения: годовое жалованье квалифицированного французского рабочего того времени составляло около 300 ливров.

премию - Даниил и Иоганн Бернулли (в 1734 году за исследование влияния солнечной атмосферы на орбиты планет), Л. Эйлер (в 1748 году за исследование "проблемы трех тел", в данном случае это Юпитер, Сатурн и солнце). В 1772 году премию получили Л. Эйлер и Л. Лагранж за работы по той же проблеме. Лагранж в 1765 году снова получил премию Парижской академии наук за исследование траекторий движения спутников Сатурна, а О. Коши в 1815 году за исследование уравнений, характеризующих распространение волн. В 1830 году премии Парижской академии наук были удостоены совместно Н.-Г. Абель (посмертно) и К. Якоби за открытие (независимо друг от друга) эллиптических функций, а в 1880 году премия была вручена А. Пуанкаре за разработку теории автоморфных функций и установление связи между неевклидовой геометрией и зарождающейся в те годы теорией римановых поверхностей.

В 1746 году знаменитый французский математик Ж.Даламбер за свой труд "Размышления об общей причине ветров (Reflexions sur la cause generale de vents)"[9)] получил премию, учрежденную Берлинской академией наук В 1823 году великий немецкий математик К. Гаусс за работу о конформном отображении одной поверхности на другую получил премию, учрежденную Датской академией наук.

В 1906 году было оглашено завещание немецкого банкира еврейского происхождения и любителя математики Пауля Вольфскеля (Paul Wolfskehl), в котором он назначил премию в 100 тысяч золотых немецких марок за доказательство "Великой Теоремы Ферма". Королевское общество наук Геттингена создало специальный комитет, который в 1907 году опубликовал условия получения премии. В частности, было предусмотрено, что если проблема имеет положительное решение, то претендент на премию должен дать описание условий, которым должны удовлетворять натуральные числа n, при которых уравнение имеет решение. Как известно, проблема оставалась нерешенной вплоть до 1997 года. Премию Вольфскеля получил в 1997 году решивший эту проблему английский математик Э. Уайлс. На тот момент денежное ее содержание составило 75 тысяч немецких марок (примерно 37 тысяч долларов США).

Блистательный пример постановки важнейших проблем математики был дан на втором Международном математическом конгрессе, который проходил в августе 1900 года в Париже. На нем выдающийся немецкий

[9)] Об этой работе Даламбера пишут, что она произвела революцию в применении дифференциальных уравнений.

математик Д. Гильберт выступил с докладом "Математические проблемы", в котором перечислил двадцать три "наиболее интересные", с точки зрения самого Гильберта, математические проблемы, "исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки". Эти проблемы, ставшие знаменитыми как "проблемы Гильберта", оказали исключительное влияние на математику XX столетия. Как пишет П.С. Александров, к решению проблем Гильберта "были приложены усилия талантливейших математиков. Развитие идей, связанных с содержанием указанных проблем, составило значительную часть математики XX века"[10]. К настоящему времени почти все проблемы Гильберта решены. Нерешенными остаются восьмая, двенадцатая и шестнадцатая проблемы. Несмотря на достигнутые успехи в их решении, нерешенными можно считать и четвертую и шестую проблемы. В четвертой проблеме речь идет о построении геометрий, "близких" к обыкновенной евклидовой геометрии. Несмотря на большое количество работ в этом направлении (прежде всего работы ученика Гильберта Г.Хамеля, другого немецкого математика П. Функа, а также американского математика Г. Буземана), проблема слишком расплывчато сформулирована, чтобы понять, ее решение получено или нет. В (амбициозной) шестой проблеме речь идет об "аксиоматическом построении тех физических дисциплин, в которых математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика", причем аксиоматическое построение физических дисциплин Гильберт предлагал провести по образцу аксиом геометрии.[11] По этой проблеме большие успехи достигнуты в аксиоматическом изложении теории вероятностей. Здесь первые значительные успехи были достигнуты в работах С.Н. Бернштейна и Р.Мизеса. Фундаментальный вклад в аксиоматическое построение теории вероятностей внес А.Н. Колмогоров. Однако, "живая математическая дисциплина с очень широкими связями буквально со всеми областями знания всегда будет требовать тщательного изучения ее основ с различных позиций. И

---

[10] П.С. Александров. Предисловие к книге "Проблемы Гильберта", Изд-во "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1969, с. 5.

[11] Таким образом, Гильберт рассматривал теорию вероятностей как раздел физики, в которой "математика играет выдающуюся роль", – весьма распространенная в то время точка зрения. Но, как пишет Б.В. Гнеденко, "с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей" и "сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения" ("Проблемы Гильберта". Москва: Наука, 1969, с. 116).

как бы хорошо ни были разработаны аксиоматические основы математической дисциплины, пока она развивается, будут продолжаться поиски иных методов ее логического обоснования".[12)]

Среди авторов решений проблем Гильберта много российских (точнее: советских) математиков: Л.С. Понтрягин и А.И. Мальцев (вклад в решение пятой проблемы), А.О. Гельфонд (решение седьмой проблемы), И.М. Виноградов и Л.Г. Шнирельман (вклад в решение восьмой проблемы - гипотезы Гольдбаха), В.И. Арнольд и А.Н. Колмогоров (тринадцатая проблема), И.Р. Шафаревич (вклад в решение двенадцатой проблемы), Ю.В. Матиясевич (десятая проблема), В.Л. Попов (решение четырнадцатой проблемы), И.Г. Петровский (вклад в решение шестнадцатой и двадцатой проблем), Б.Н. Делоне (вклад в решение восемнадцатой проблемы), С.Н. Бернштейн (девятнадцатая проблема и вклад в решение двадцатой проблемы), О.А. Ладыженская и Н.Н. Уральцева (вклад в решение двадцатой проблемы). Кроме того, многие советские ученые принимали участие в разработке направления, вызванного (не очень определенно сформулированной) двадцать третьей проблемой Гильберта: Л.С. Понтрягин, А.Г. Сигалов, О.А. Ладыженская и Н.Н. Уральцева, Л.А. Люстерник, М.М. Вайнберг, Л.Г. Шнирельман и другие. Работы казанского математика академика АН РТ Т.К. Сиразетдинова 60-х годов прошлого столетия по разработке теории оптимальных процессов с распределенными параметрами также можно рассматривать как вклад в решение этой проблемы Гильберта.

Пока не найдено решение восьмой проблемы, в которой вокруг гипотезы Римана о распределении комплексных нетривиальных нулей дзета-функции Римана объединены несколько проблем теории чисел, в частности, упомянутые выше проблема Гольдбаха и проблема поиска закона распределения простых чисел. Закон распределения простых чисел гласит, что количество $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих наперед заданное натуральное число n, оценивается как отношение $\frac{n}{\ln n}$. Другими словами $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}\right) = 1$. Выдающийся немецкий математик Бернхард Риман обнаружил, что эта гипотеза тесно связана с поведением определенной им функции комплексной переменной $\zeta(x)$, теперь носящей название дзета-функции Римана (подробнее об этом на стр. 20). Теорема о распределении простых чисел была доказана в 1896 году независимо

[12)] Б.В. Гнеденко. К шестой проблеме Гильберта. В сб.: "Проблемы Гильберта". Москва: Наука, 1969, с. 119).

друг от друга французским математиком Жаком Адамаром и бельгийским математиком Валле-Пуссеном, с помощью дзета-функции Римана. Позднее (1948 г.) А. Сельбергом и П. Эрдёшом были найдены и "элементарные" доказательства теоремы о простых числах, не использующие дзета-функцию Римана и комплексный анализ.

Существуют целый ряд хороших приближений для $\pi(n)$. Одно из них было указано Гауссом. Оно выражается формулой $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Известно, что существуют точки, в которых $\pi(x)$ изменяется настолько резко, что становится больше $Li(x)$. Такие числа до сих пор не найдены и, может быть, никогда и не будут найдены, но они существуют, известно даже, что одно из них не превосходит $10^{10^{10^{34}}}$. (По поводу этого числа Г. Харди заметил, что оно, пожалуй, наибольшее из всех, когда-либо служивших в математике какой-нибудь определённой цели.)

Известно, что рост $\pi(x)$ точнее оценивается как

$$\pi(x) = li(x) + O(xe^{-\sqrt{\ln x}}),$$

где $li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ - интегральный логарифм.

Существует все еще не доказанная гипотеза о еще более точном приближении для $\pi(x)$:

$$\pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x} \ln x).$$

В 1901 году шведский математик Хельге фон Кох установил, что эта гипотеза эквивалентна гипотезе Римана о нулях дзета-функции Римана $\zeta(x)$.

Гипотеза Римана является также одной из семи "Проблем тысячелетия" (см. ниже), которые были обозначены как "Проблемы Гильберта 21-го столетия". Говорят, что на вопрос о том, каковы будут его действия, если он по какой-либо причине проспит пятьсот лет и вдруг проснется, Гильберт ответил, что самым первым делом он спросит, была ли доказана гипотеза Римана.

В конце 19-го столетия шведский инженер-химик и промышленник А. Нобель (1833-1896) учредил ежегодные премии[13)] ученым, сделавшим крупные открытия в области физики, химии, физиологии, медицины, а

[13)] В 2010 году размер премии составил около полутора миллионов американских долларов.

также за литературные произведения и за деятельность по укреплению мира. Первое присуждение премии состоялось в 1901 году, и с того времени нобелевские премии стали настолько популярными, что, наверное, нет более престижного научного звания, чем звание нобелевского лауреата.

В 1968 году к списку наук, за открытия в которых присуждается нобелевская премия, добавилась экономика[14)]. Как видим, в этом списке отсутствует математика. Но нет оснований полагать, что Нобель отказал математике по каким-то личным причинам (как это иногда пытаются представить). По-видимому, причина кроется в следующих словах Нобеля, которыми он предварил создаваемый им нобелевский фонд: "... проценты от которого должны будут ежегодно присуждаться в виде премии тем, чьи работы предыдущего года принесут великую пользу человечеству". Открытия в области математики трудно (по крайней мере по формальным признакам) причислить к событиям, которые приносят "великую пользу человечеству", в отличие, например, открытий в области физики или медицины.

Все же есть математики, удостоенные нобелевской премии, правда, они получили за работы в области экономики. Среди них - советский математик академик Л.В. Канторович (1912-1986), который в 1975 году был удостоен нобелевской премии за создание теории оптимального использования ресурсов.

В 30-х годах прошлого столетия по инициативе канадского математика Джона Филдса (1863-1932) была учреждена золотая медаль для математиков за выдающиеся достижения, которая получила название "филдсовской медали" и теперь считается эквивалентом нобелевской премии в области математики. Вручение медали сопровождается денежным призом (в настоящее время в размере 15 тысяч американских долларов), но в отличие от нобелевской премии ее присуждают один раз в четыре года, специально созданным для этой цели "филдсовским комитетом". Церемония вручения премии происходит во время работы Международного математического конгресса, который также проводится один раз в четыре года. Первое вручение премии состоялось в 1936 году на Международном математическом конгрессе в Осло, через четыре года после

[14)] Премия учреждена Банком Швеции и средства для премий по экономике выделяются не из наследства Альфреда Нобеля, а из средств этого банка. Поэтому вопрос о том, считать ли эту премию "истинно нобелевской", является дискуссионным.

смерти Филдса. Первоначально предполагалось, что на каждом Математическом конгрессе будут присуждаться по две премии, но со временем их количество выросло от трех до четырех, в зависимости от решения филдсовского комитета. Премии присуждаются ученым, возраст которых на время присуждения премии не превосходит 40 лет[15]), хотя в положении о филдсовской медали такое условие не оговаривается. Последнее присуждение филдсовских премий произошло в прошлом (2010) году, на состоявшемся в Индии Международном математическом конгрессе. Среди четырех филдсовских лауреатов 2010 года есть и российский (правда, теперь бывший) ученый - С.К. Смирнов. Другие российские (и советские) ученые, обладатели филдсовской премии - С.П. Новиков (1970, на церемонии вручения не присутствовал, так как ему было отказано в выездной визе), Г.А. Маргулис (1978, по той же причине на церемонии вручения не присутствовал), В.Г. Дринфельд (1990), Е.И. Зельманов (1994), М.Л. Концевич (1998), В.А. Воеводский (2002), Г.Я. Перельман (2006г., от получения премии отказался). К сожалению, все они, кроме С.П. Новикова, В.Г. Дринфельда и Г.Я. Перельмана, теперь работают в дальнем зарубежье, преимущественно в американских университетах. С.П. Новиков, хотя и является профессором Мерилендского университета США, все же сохраняет позиции в МГУ и Математическом институте РАН имени В.А. Стеклова в Москве. В.Г. Дринфельд в 1998 году также эмигрировал в США (в настоящее время он является профессором Чикагского университета), но сохраняет позицию и в Институте математики Национальной академии наук Украины в Харькове.

Хотя филдсовская медаль и считается эквивалентом нобелевской премии в математике, размер её призового фонда, как видим, существенно уступает размеру нобелевской премии. С этой точки зрения наиболее близкой к нобелевской премии является абелевская премия по математике, названная так в честь норвежского математика Н.-Г. Абеля, учрежденная правительством Норвегии в 2002 году. Начиная с 2003 года абелевская премия ежегодно присуждается выдающимся математикам

---

[15])Английский математик Эндю Уайлс, решивший проблему Ферма, филдсовскую медаль не получил единственно по этой причине - в год решения проблемы ему исполнилось 41 год. Я был участником Международного математического конгресса, состоявшегося летом 1998 года в Берлине, где ему могли бы вручить эту награду, и где Уайлс выступил с пленарным докладом, после которого председатель Филдсовского комитета торжественно вручил ему специально для него изготовленную серебряную медаль.

современности без возрастных ограничений. Денежный размер премии сопоставим с размером Нобелевской премии и в долларовом эквиваленте составляет (на 2010 год) около одного миллиона долларов США. Целью учредителей премии было не только поощрение математиков с мировым именем, но и популяризация современной математики. Среди лауреатов абелевской премии такие выдающиеся математики, как Жан-Пьер Серр (2003), Майкл Ф. Атья (2004), Джон Г. Томпсон (2007) и другие. Из наших соотечественников этой престижной премии в 2009 году был удостоен М.Л. Громов, воспитанник ленинградской математической школы, ученик В.А. Рохлина, защитивший в 1973 году в Ленинградском университете докторскую диссертацию, и теперь также работающий за рубежом (Франция), "за его революционный вклад в геометрию". Последнее вручение абелевской премии состоялось в 2010 году, премия была вручена американскому ученому Джону Т. Тэйту ”за огромное и продолжительное влияние, оказанное им на развитие теории чисел”, а также ”за его новаторские исследования, повлиявшие на современную математику”.

В России первые престижные денежные премии за математические работы присуждались в Московском (премия имени Н.Д. Брашмана за лучшую работу в области математики) и Казанском университетах. В 1895 году Казанским физико-математическим обществом под руководством профессора А.В. Васильева по случаю празднованию 100-летнего юбилея Н.И. Лобачевского была учреждена международная премия имени Н.И. Лобачевского. Первое присуждение премии состоялось в 1897 году и на основании отзыва Ф. Клейна она была присуждена Софусу Ли за его работу по теории представлений групп, а автору отзыва Ф. Клейну была послана специальная золотая медаль, учрежденная по этому поводу. Премии регулярно вручались до 1912 года (в 1904 г. ее получил Д. Гтльберт), а также в 1927 (Герман Вейль) и в 1937 (Эли Картан) годах.

В 1947 г. Постановлением Совета Министров СССР вручение премии имени Н.И.Лобачевского была передана в ведение Академии Наук СССР. Сначала были учреждены основная и поощрительная премии для советских ученых. В 1951 г. они были вручены соответственно А.Д. Александрову и Н.В. Ефимову. В 1956 г. вышло новое Постановление СМ СССР, согласно которому учреждалась лишь одна премия с периодичностью в 3 года. В годы войны присуждения премий были приостановлены, а после войны они возобновились уже в новом качестве: в виде золотой медали имени Н.И. Лобачевского Академии наук СССР. Среди награжденных премией имени Лобачевского в этот период такие выдающиеся математики, как А.Д. Александров (1951), П.С. Александров (1972), Б.Н. Делоне (1977), С.П. Новиков (1981), А.Н. Колмогоров (1986), Л.С. Понтрягин (1966), В.И. Арнольд (1992), Г.А. Маргулис (1996), Ю.Г. Решетняк (2000).

В ознаменование 200-летия со дня рождения Н.И. Лобачевского постановлением Кабинета Министров СССР была учреждена медаль имени Лобачевского, присуждаемая Ученым Советом Казанского университета. Согласно Положению о порядке присуждения медали, "медаль присуждается один раз в пять лет советским и зарубежным ученым за выдающиеся работы в области геометрии". Конкурс проводится одновременно и совместно с конкурсом на премию им. Н. И. Лобачевского Российской академии наук, в состав жюри конкурса входят представители РАН и сотрудники Казанского университета. Первое присуждение медали состоялось в 1992 году. Медаль была присуждена профессору Казанского университета А.П. Нордену за создание метода нормализации и работы по теории неевклидовых пространств. В 1997 году состоялось еще одно присуждение медали - М.Л. Громову за цикл работ по теории погружений и белорусскому математику Б.П. Комракову за исследования по теории групп Ли и теории однородных пространств. Последнее (на 3012 год) присуждение медали состоялось в 2002 году. Медаль была присуждена профессору Нанькайском (Китай) и Калифорнийского университетов Ш.Черну . С тех пор, к сожалению, медали им. Н.И. Лобачевского не присуждались.

На рубеже двух тысячелетий Математический институт Клэя в Кембридже (США, Массачусетс) назначил миллионные (в долларах США) премии за решения "семи проблем тысячелетия" (the Millenium Prize Problems). В отличие от проблем Гильберта, где им были перечислены новые проблемы, призванные стимулировать дальнейшее развитие науки, в число семи проблем тысячелетия вошли наиболее трудные и важные для последующего развития науки известные математические проблемы, на безуспешные поиски решений которых были направлены усилия многих математиков, работающих на рубеже этих двух тысячелетий. Эти семь проблем были выбраны Научным консультативным комитетом Института при участии ряда выдающихся математиков современности. Совет директоров Института назначил денежный приз в 7 миллионов долларов за их решения, по одному за каждую проблему.

24 мая 2000 года в Париже состоялось "Собрание тысячелетия", в котором известный английский математик Уильям Т. Гауэрс (лауреат

филдсовской премии 1998 года) прочел лекцию "О значении математики", а (уже упомянутые выше) Джон Т. Тэит и Майкл Атья (он является еще и лауреатом филдсовской премии 1966 года) рассказали о самих проблемах.

К сожалению, я не имею возможности более подробно остановиться на этих проблемах, хотя, безусловно, каждая из них этого заслуживает. Ограничусь лишь перечислением (в том порядке, в каком они следуют в списке проблем) их формулировок:

1) Гипотеза Берча и Свиннертона-Дайера о множестве рациональных решений уравнений эллиптических кривых;

2) Гипотеза Ходжа из алгебраической геометрии об описании классов когомологий на комплексных проективных многообразиях, реализуемых алгебраическими подмногообразиями;

3) Проблема о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса, которые описывают движение вязкой жидкости;

4) Гипотеза Пуанкаре о гомеоморфности односвязных поверхностей сфере;

5) "P против NP" проблема[16)] (проблема о совпадении или различии классов сложности P и NP);

6) Гипотеза Римана о распределении нетривиальных нулей дзета-функции Римана (это - восьмая проблема Гильберта, тесно связанная с проблемой распределения простых чисел);

7) Проблема существования для любой простой компактной калибровочной группы G теории Янга-Миллса для пространства R^4(проблема из области физики элементарных частиц).

Более подробно остановлюсь на двух проблемах - проблеме о равенстве классов P и NP и гипотезе Римана (восьмая.проблема Гильберта).

[16)]В оригинале "The P versus NP Problem".

"P против NP" проблема

Проблема была сформулирована американским математиком С. Куком (1971) и ооветским математиком Л.Левиным (1973) . Они оба, независимо друг от друга, установили NP полноту задачи проверки выполнимости булевых функций и поставили проблему о равенстве классов P и NP, теперь известную как *проблема Кука-Левина.* Таким образом, проблема спрашивает, верно ли, что языки, распознаваемые недетерминированными вычислительными устройствами за полиномиальное время, распознаваемы за полиномиальное время и детерминированными вычислительными устройствами. Для того, чтобы сделать это предложение более понятным, нужно дать необходимые определения.

Прежде всего нужно привести определение вычислительного устройства. В теории алгоритмов для этих целей служат *машины Тьюринга*, определенные в 1936 году выдающимся английским математиком Аланом Тьюрингом для описания класса вычислимых с помощью интуитивных алгоритмов функций. Согласно тезису Черча-Тьюринга класс задач, решаемых на машинах Тьюринга совпадает по объему с классом задач, решаемых с помощью интуитивных алгоритмов. Другими словами, машины Тьюринга способны выполнить все те работы, которые выполняют обычные компьютеры, причем нетрудно доказать, что время работы машины Тьюринга можно выразить в виде некоторого полинома от числа шагов, совершаемых компьютером.

Задачи, решаемые компьютерами, в теории алгоритмов принято делить на "легко-решаемые" и "трудно-решаемые". К первому классу относятся те задачи, время решения которых на обычных компьютерах полиномиально зависит от размера входных данных. Ко второму классу относятся те задачи, для которых такого алгоритма не существует (или, по крайней мере, пока такой алгоритм не найден). К трудно-решаемым задачам относятся и задачи, требующие зкспоненциального или большего времени. Ясно, что такие задачи, в отличие легко-решаемых задач, нельзя назвать разрешимыми за реальное время.

Так как легко-решаемые на обычных компьютерах задачи легкорешаемы и на машинах Тьбринга, их исследование можно проводить, изучая их поведение на машинах Тьюринга. .

Машина Тьюринга содержит бесконечную в обе стороны ленту, разделённую на ячейки, конечное множество внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ и читающую головку, которая в каждый момент времени обозревает некоторую ячейку ленты и находится в некотором внутреннем состоянии. В процессе работы машины Тьюринга читающая головка может перемещаться на одну клетку влево (L) и вправо (R) по ленте, читать и записывать в ячейки ленты символы некоторого конечного алфавита Σ. Выделяется особый пустой символ λ, заполняющий все клетки ленты, кроме тех из них, на которых записаны входные данные (их конечное число). *Работа машины Тьюринга* определяется частичным отображением $\delta : \{Q, S\} \to \{Q \times S \times \{R, L\}\}$, где $S = \{\Sigma, \lambda\}$. Если $\delta(q, s) = (q', s', X)$, то это означает, что машина Тьюринга, обозревая ячейку, содержащую символ s и находясь во внутреннем состоянии q, переходит в состояние q', меняет s на s' и передвигает читающую головку на одну клетку влево ($X = L$) или вправо ($X = R$). Некоторые состояния машины Тьюринга могут быть помечены как *заключительные*, и переход в любое из них означает конец работы машины Тьюринга, ее остановку. Такая остановка машины Тьюринга называется *допустимой*. Ясно, что в этом случае $\delta(q, s)$ не определена. Может случиться, что $\delta(q, s)$ не определена и тогда, когда q не является заключительным состоянием. В этом случае машина Тьюринга также останавливается (*недопустимая остановка*). Кроме того, одно из внутренних состояний машины Тьюринга называется *начальным* и обозначается через q_1.

Если функция $\delta(q, s)$ не однозначна (т.е. для значений аргумента (q, s) могут существовать несколько значений функции $(q_1, s_1, X_1), (q_2, s_2, X_2), \ldots, (q_k, s_k, X_k)$), то машина Тьюринга называется *недетерминированной*.

Язык L определяется следующим образом. Пусть Σ некоторый (конечный) алфавит. Обозначим через Σ^* множество всех слов над Σ (т.е. множество всех строк, составленный из символов алфавита Σ). Тогда язык L над Σ определяется как произвольное фиксированное подмножество Σ^*. Например, если $\Sigma = \{0, 1\}$, то языками над Σ являются множество $\{0, 10, 100, 110, \ldots\}$ всех четных чисел, множество $\{10, 11, 101, 111, \ldots\}$ всех простых чисел в двоичной записи.

Машина Тьюринга *распознает язык* L, если начав работать над произвольным словом $\alpha \in \Sigma^*$ (на ленте машины Тьюринга пишется слово α, а читающая головка устанавливается возле крайнего слева символа α и приводится в состояние q_1) она совершает допустимую остановку тогда и только тогда, когда $\alpha \in L$. Машина Тьюринга распознает язык L *за полиномиальное время*, если существует полином $p(n)$ такой, что для любого слова α длины n (α содержит n символов) языка Σ, машина

Тьюринга распознает α за не более чем $p(n)$ машинных шагов.

Класс P (от англ. polynomial) - множество языков, распознаваемых машинами Тьюринга за полиномиальное время. Аналогично, класс NP (от англ. non-deterministic polynomial) - множество языков, распознаваемых недетерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время.

Класс NP содержит такие фундаментальные задачи, как задача коммивояжера, проблема выполнимости булевых функций (для заданной булевой функции требуется определить, принимает она при некотором наборе значений аргументов значение "ИСТИНА" или нет). Ни для одной из них на сегодняшний день не найден полиномиального детерминированного алгоритма их решения, но они разрешимы за полиномиальное время на недетерминированных машинах Тьюринга.

Из определений классов P и NP видно, что $P \subseteq NP$. Равенство классов P и NP означало бы, что если существует недетерминированный алгоритм решения некоторой задачи за полиномиальное время, то существует и обычный (детерминированный) алгоритм решения этой задачи также за полиномиальное время.

Проблема $P = NP$ может быть сформулирована и по другому[17)]: если положительный ответ на какой-то вопрос можно быстро проверить (за полиномиальное время), то правда ли, что ответ на этот вопрос можно быстро найти (за полиномиальное время и используя полиномиальную память)?

Например, рассмотрим следующую задачу. Верно ли, что среди чисел $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ есть такие, что их сумма равна некоторому наперед заданному числу A?

Ясно, что в случае наличия положительного решения легко построить полиномиальный алгоритм проверки правильности найденного решения: достаточно выполнить несколько операция сложения чисел. Однако, до сих пор неизвестно, существует ли полиномиальный алгоритм поиска таких чисел. Решение можно найти, перебирая всевозможные суммы чисел, составленные из элементов этого множества (таких сумм 2^n), но снова остается открытым вопрос о существовании полиномиального алгоритма, позволяющего осуществить такой перебор.

[17)] Christos H. Papadimitriou amd Kenneth Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982, 512 pp. Русский перевод: Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность, Изд-во Мир,1984, 512 с.

Гипотеза Римана

Проблема связана с поисками закономерности, описывающей распределение простых чисел среди натуральных. В своей (единственной по теории чисел) работе "О количестве простых чисел, не превышающих данной величины" от 1859 года Бернхард Риман установил, что закон распределения простых чисел выражается через распределение так называемых "нетривиальных нулей" определенной им[18] функции $\zeta(x)$ от комплексной переменной, теперь носящей название дзета-функции Римана. В этой работе Риман указал и явную формулу, связывающую функцию $\pi(x)$ - количество простых чисел, не превосходящих x - с некоторой суммой по нулям дзета-функции. По словам В.Н. Чубариков[19], "это открытие Римана сделало эпоху в теории простых чисел".

Дзета-функция Римана определяется с помощью ряда Дирихле:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

где $s \in C$ - множество комплексных чисел.

В полуплоскости $\{s : Re(s) < 0\}$ функция имеет нули лишь в чётных точках: $0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6)\dots$, они называются *тривиальными нулями* $\zeta(s)$. Если $s-$ положительное вещественное число или комплексное, но $Re(s) > 1$, то $\zeta(s) \neq 0$. Поэтому все нетривиальные нули $\zeta(s)$ являются комплексными числами и расположены в полосе $\{s : 0 \leq Re(s) \leq 1\}$. Известно также, что они расположены симметрично относительно вещественной оси и относительно вертикали $Re(s) = \frac{1}{2}$ (эта прямая называется *критической прямой*). Гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули дзета-функции $\zeta(s)$ находятся на этой критической прямой.

[18] Как функция вещественной переменной дзета-функция $\zeta(s)$ была введена 1737 году Л. Ъйлером, доказавшим знаменитое тождество Эйлера $\zeta(x) = \prod_{p \in S} \frac{1}{1-p^{-s}}$ (S-множество простых чисел), она также использовалась Л.Дирихле и П.Л. Чебышевым при изучении закона распределения простых чисел. Риман рассматривал $\zeta(s)$ как функцию комплексной переменной. Она определена в полуплоскости $Re(s) > 1$ с абсолютно сходящимся рядом и является аналитической функцией. Риман рассматривал ее аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

[19] В.Н. Чубариков. Простые числа, дзета-функция Римана и триглнометрические суммы. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 2011.

Доказательство гипотезы Римана является одной из важнейших проблем современной математики, которое бы позволило ответить на целый ряд открытых вопросов о поведении простых чисел на числовой прямой. Решение этой проблемы находит приложения также в нескольких других разделах современной математики, а также в таких прикладных науках, как криптография, квантовая механика. Доказательство гипотезы Римана может привести к прорыву в развитии криптографии и, в частности, в области безопасности Интернета.

На сегодняшний день проверены первые 10^{13} (!) нулей дзета-функции Римана, и все они, как оказалось, расположены на критической прямой.

Недавно мировая научная общественность была взбудоражена известием о том, что петербургский математик Г.Я. Перельман получил решение одной из этих семи проблем - гипотезы Пуанкаре[20)]. Таким образом, на сегодняшний день нерешенными остаются шесть проблем тысячелетия.

В конце прошлого столетия появился еще один список проблем, составленный выдающимся американским математиком, лауреатом Филдсовской премии Стивеном Смейлом. Список был составлен Смейлом по просьбе академика Владимира Игоревича Арнольда, занимавшего тогда пост президента международного математического союза. Список проблем Смейла содержит восемнадцать нерешенных математических проблем, которые, по мнению самого Смейла, могут быть решены в текущем столетии. Список, как и Проблемы Тысячелетия, среди прочих включает все еще нерешенную восьмую проблему Гильберта - гипотезу Римана, а также $P = NP$-проблему, проблему решения уравнений Навье - Стокса, (доказанную Григорием Перельманом) гипотезу Пуанкаре, а также шестнадцатую проблему Гильберта о взаимном расположении ветвей действительной алгебраической кривой на плоскости и алгебраи-

---

[20)] Перельман отказался получить денежный приз, учрежденный Институтом Клэя. Как выше говорилось, за решение проблемы Пуанкаре ему была присуждена и Филдсовская медаль, от которой он также отказался. Причины обоих отказов не совсем понятны. Из некоторых высказываний Перельмана следует, что это, в частности, связано с тем, что Перельман не причисляет себя к математическому сообществу, поэтому и не выполняет его решения. Известно, что в настоящее время он живет в своей петербургской квартире отшельником. Перельман имеет ученую степень кандидата физико-математических наук, работал в Петербургском отделении Математического института РАН научным сотрудником, но уволился.

ческой поверхности в пространстве.

Ниже перечисляются проблемы Смейла в том порядке, в каком он их сам сформулировал.

1. Обобщённая гипотеза Римана. Гипотеза состоит из того же утверждения, что и гипотеза Римана, но для обобщенных дзета-функций, известных как L-функции Дирихле.

2. Гипотеза Пуанкаре.(Доказана Г,Я. Перельманом)

3. Равенство классов P и NP.

4. Оценка количества целочисленных корней полиномов от одной переменной.

5. Оценка вычислительной сложности решения полиномиальных диофантовых уравнений.

6. Конечность количества точек относительного равновесия внебесной механике

7. Распределение точек на двумерной гиперсфере

8. Расширение математической теории общего равновесия на экономическую теорию.

9. Полиномиальный алгоритм для определения допустимости систем линейных неравенств

10. Закрывающая лемма Пага

11. Является ли одномерная динамика гиперболичной в общем случае?

12. Централизаторы диффеоморфизмов

13. Шестнадцатая проблема Гильберта.

14. Аттрактор Лоренца. (Решена Уориком Такером методами дискретной алгебры)

15. Существование и гладкость решений уравнений Навье - Стокса.

16. Проблема якобиана.

17. Решение систем алгебраических уравнений (Частично решена К. Белтраном и Л. М. Мигелем)

18 Выяснение пределов искусственного и человеческого интеллектов

Расскажу еще об одном достижении современной науки и связанной с ней проблеме. Как известно, в наше время на развитие многих направлений науки большое влияние оказывают те разделы математики, которые связаны с развитием компьютерных технологий. Мощные компьютеры позволяют получить решения таких задач, о которых еще совсем недавно можно было только мечтать. Следующий громадный скачок будет осуществлен с созданием первых квантовых компьютеров, пока существующих только на бумаге и в головах ученых. Чтобы понять, что это значит для науки, приведу такой пример. Для направления дискретной математики, связанного с защитой информации и носящего название "криптография", принципиальное значение имеет умение разложить достаточно большие натуральные числа на простые сомножители. Но если даже каждая элементарная частица нашей планеты вдруг превратится в мощный современный компьютер (!), и мы сумеем каким-то образом заставить их всех вместе и непрерывно работать над задачей разложения на множители какого-нибудь натурального числа, содержащего, скажем, 2000 цифр, для этого не хватит всего времени жизни нашей Вселенной. А на одном квантовом компьютере это можно будет сделать за считанные минуты!

Может создаться впечатление, что дальнейшее развитие науки сможет позволить со временем сконструировать и такие компьютеры, которые будут способны решить любые математические проблемы. (Известно, что о такой возможности еще в 17-м столетии мечтал великий немецкий математик и философ Г. Лейбниц.) Однако существование неразрешимых математических проблем, о которых говорилось в начале параграфа, говорит об обратном. Более того, многое из того, что способен установить человеческий разум, не сможет сделать никакой, даже самый умный компьютер будущего. Поясню это на следующем примере.

Рассмотрим множество $\mathtt{Th}(\mathtt{Z})$ всех предложений языка логики предикатов первого порядка, истинных в упорядоченной группе $\mathtt{Z}$ целых чисел. Предложениями языка первого порядка в данном случае являются слова, составленные по правилам математической логики с использованием кванторов всеобщности $\forall$ и существования $\exists$, навешиваемым к так называемым предметным переменным (в данном случае эти переменные над целыми числами и записи $\forall x$ и $\exists x$ соответственно интерпретируются как слова "для каждого целого числа x" и "существует такое целое число x"), логических символов & (интерпретируется как союз "и"). $\vee$ (союз "или"), $\to$ (импликация, интерпретируется как слова "если ..., то"), $\neg$ (интерпретируется как отрицание того, что за этим знаком следует), а также нелогических (математических) символов $+$ и $-$ (соответственно операции сложения и вычитания целых чисел), $<$ (отношение "меньше"), а также т.н. выделенных символов 0 и 1, которые соответствуют числам 0 и 1. В предложении каждая переменная должна быть связана некоторым квантором (в противном случае истинность предложения будет зависеть от значения, которое принимает не связанная никаким квантором переменная). Например, предложение

$$\forall x \forall y (\exists z (z + z = x) \& (x < y) \& \neg(\exists u (x < u \& u < y)) \to \neg(\exists v (v + v = y)))$$

означает, что любое число, которое расположено непосредственно за произвольным четным числом (это – левая часть импликации) не является четным числом (правая часть импликации).

Множество Th(Z) называется теорией группы Z (поэтому такое обозначение). Так как приведенное выше предложение истинно на Z, оно входит в теорию Th(Z). Мы видим, что язык логики предикатов первого порядка позволяет теории Th(Z) охватить всего лишь те истинные предложения Z, которые составлены только с использованием математических знаков $+$, $-$ и $<$, то есть теория Th(Z) хотя и не тривиальна, но довольно бедна.

В 1929 году польский математик М. Пресбургер установил, что теория Th(Z) разрешима, то есть существует алгоритм, который позволяет распознавать истинность или ложность в Z любого предложения описанного выше вида. Это был первый пример содержательной разрешимой математической теории. Позднее были найдены новые разрешимые теории, интересные с содержательной точки зрения.

С математической точки зрения разрешимые теории "неинтересны": от человека никаких мыслительных способностей не требуется - достаточно задать интересующий тебя вопрос механическому устройству, реализующему алгоритм распознавания истинности предложений языка теории, чтобы тут же получить требуемый ответ.

Но возникает вопрос о вычислительной сложности такой разрешающей процедуры: действительно ли мы сможем получить требуемый ответ "тут же", или для этого потребуется некоторое время ожидания, и если "да", то сколько?

Как выяснилось, для всех известных более-менее интересных примеров разрешимых теорий не существует алгоритмов, позволяющих получить ответы за реальное, приемлемое с практической точки зрения время. Например, для нашей теории $\mathtt{Th}(\mathtt{Z})$, как было установлено американскими математиками М.Дж. Фишером и М. Рабином, такой разрешающий алгоритм требует в среднем выполнения $2^{2^{kn}}$ машинных шагов, где n количество символов предложения, а k - некоторое целое положительное число, большее единицы, ***и эта оценка не может быть улучшена***. Другими словами, для любого алгоритма распознавания предложений из $\mathtt{Th}(\mathtt{Z})$, найдется бесконечно много предложений, для которых этот алгоритм потребует выполнения не менее $2^{2^{kn}}$ количества действий, где n - количество символов, участвующих в составлении предложения. Чтобы понять вычислительную сложность такого алгоритма вспомним известную задачу о количестве зерен на шахматной доске: если класть на первую клетку шахматной доски одно зерно, а на каждую следующую клетку зерен в два раза больше, то всего понадобится $1+2+2^2+\ldots+2^{63}=2^{64}-1$ зерно, что составляет примерно $1,200$ триллионов тонн зерна (!). (Подсчитано, что за всю историю существования человечества во всем мире было собрано меньшее количество пшеницы). Ясно, что на сегодняшний день такие теории нельзя рассматривать как "реально разрешимые". Существуют ли содержательные теории с разрешимыми за реальное время алгоритмами распознавания их истинных предложений? Ответ на этот вопрос неизвестен. Нетрудно понять, что он тесно связан с описанными выше $P=NP$ проблемой и проблемой создания квантовых компьютеров.