



**А. Н. Абызов, Чан Хоай Нгок Нян**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
tranhoaingocnhan@gmail.com*

## CS-РИККАРТОВЫ МОДУЛИ

Модуль  $M$  называется *риккартовым*, если для каждого  $\varphi \in S = \text{End}_R(M)$  имеет место равенство  $\text{Ker}\varphi = eM$ , где  $e^2 = e \in S$ . Модуль  $M$  называется *CS-модулем*, если каждый его подмодуль является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля  $M$ . Говорят, что подмодуль  $N$  модуля  $M$  *лежит над прямым слагаемым модуля  $M$* , если существуют такие подмодули  $N_1$  и  $N_2$ , что  $N_1 \oplus N_2 = M$ ,  $N_1 \subset \subset N$  и  $N_2 \cap N$  мал в  $N_2$ . Модуль  $M$  называется *d-CS-модулем*, если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля  $M$ . Модуль  $M$  называется *CS-риккартовым модулем*, если  $\text{Ker}\varphi$  является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля  $M$  для каждого  $\varphi \in S$ . Модуль  $M$  называется *d-CS-риккартовым модулем*, если  $\text{Im}\varphi$  лежит над прямым слагаемым модуля  $M$  для каждого  $\varphi \in S$ .

Риккартовы модули изучались в работах [1, 2]. В работах [3, 4] рассматривались CS-риккартовы кольца. Кольца, над которыми каждый конечно порожденный проективный правый модуль является риккартовым, были описаны в работе [2].

**Теорема 1.** *Следующие условия эквивалентны для кольца  $R$  и фиксированного  $n \in \mathbb{N}$ :*

- (1) *каждый  $n$ -порожденный проективный правый  $R$ -модуль является CS-риккартовым модулем;*
- (2) *свободный  $R$ -модуль  $R_R^{(n)}$  является CS-риккартовым модулем;*
- (3)  *$\text{Mat}_n(R)$  является правым CS-риккартовым кольцом;*

(4) каждый  $n$ -порожденный правый идеал кольца  $R$  имеет вид  $P \oplus S$ , где  $P$  – проективный  $R$ -модуль и  $S$  – сингулярный правый идеал кольца  $R$ .

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны для кольца  $R$ :

(1) каждый конечно порожденный проективный правый  $R$ -модуль является  $CS$ -риккартовым модулем;

(2) свободный  $R$ -модуль  $R_R^{(n)}$  является  $CS$ -риккартовым модулем для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ;

(3)  $Mat_n(R)$  является правым  $CS$ -риккартовым кольцом для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ;

(4) каждый конечно порожденный правый идеал кольца  $R$  имеет вид  $P \oplus S$ , где  $P$  – проективный  $R$ -модуль и  $S$  – сингулярный правый идеал кольца  $R$ .

Модуль  $M_R$  называется  $SIP$ -модулем, если пересечение любых двух прямых слагаемых модуля  $M_R$  является прямым слагаемым модуля  $M_R$ . Модуль  $M$  называется  $SSP$ -модулем, если сумма любых двух прямых слагаемых модуля  $M_R$  является прямым слагаемым модуля  $M_R$ . Модуль  $M$  называется  $SIP$ - $CS$  модулем, если пересечение любых двух прямых слагаемых модуля  $M_R$  является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля  $M$ . Модуль  $M$  называется  $SSP$ - $d$ - $CS$  модулем, если сумма любых двух прямых слагаемых модуля  $M_R$  лежит над прямым слагаемым модуля  $M$ .

**Теорема 3.**

(1) Каждый  $CS$ -риккартов модуль является  $SIP$ - $CS$  модулем.

(2) Каждый  $d$ - $CS$ -риккартов модуль является  $SSP$ - $d$ - $CS$  модулем.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lee G., Rizvi S. T., Roman C.S. *Rickart Modules* // Communications in Algebra. – 2010. – V. 38. – No 11. – P. 4005–4027.
2. Lee G., Rizvi S. T., Roman C.S. *Direct sums of Rickart modules* // J. of Algebra. – 2012. – V. 353. – P. 62–78.
3. Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R. *Extending Modules*. – Longman Scientific & Technical, 1994.
4. Nicholson W. K., Yousif M. F. *Weakly continuous and  $C_2$  rings* // Communications in Algebra. – 2001. – V. 29. – No 6. – P. 2429–2446.

**Е. Л. Авербух**

*Нижегородский государственный технический  
университет им. Р. Е. Алексева,  
Averbukh.Lena@gmail.com*

**АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ  
ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ**

Воздействие захваченных волн в шельфовой зоне велико за счет большого количества энергии, которое перераспределяется вдоль линии берега. Они воздействуют на формирование береговой линии, перенос примесей и донных отложений, а также взаимодействуют с прибрежными течениями. Поэтому задача исследования и численного моделирования опасных захваченных волн (к примеру, топографических захваченных, шельфовых волн) является актуальной.

Особенностью данной задачи является раздробленность данных и представлений о захваченных волнах как едином

целом. В литературе упоминание о таких волнах зачастую встречаются только с позиции общего понимания различных механизмов захвата и сфокусировано только на одном из типов волн.

Для решения поставленных задач, был разработан программно-аналитический комплекс, включающий численное решение на основе модифицированных конечно-разностных и псевдоспектральных методов, совместно с аналитическими решениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (соглашение № 14.132.21.1814) и стипендии Президента РФ молодым ученым и аспирантам, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики на 2013-2015 гг. (СП-202.2013.5).

**Д. Ю. Ахметов, А. М. Елизаров, Е. К. Липачёв**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
akhmetov.dy@gmail.com, amelizarov@gmail.com,  
elipachev@gmail.com*

**АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПЕРВИЧНОЙ  
ОБРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТАТЕЙ  
В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ  
ЭЛЕКТРОННОГО НАУЧНОГО ЖУРНАЛА**

Предложен метод автоматизации процесса первичной обработки научной статьи, использующей  $\TeX$ -нотацию, в журнальную информационную систему (см., напр., [1]). Первич-

ная обработка предполагает валидацию электронного документа, включая анализ электронного документа на соответствие требований редакции по стилистическому оформлению публикации, а также  $\text{\TeX}$ -компиляцию документа. Система позволяет на этапе загрузки статьи исключить возможные отклонения от редакционных правил и сообщить автору об обнаруженных ошибках при подготовке электронной публикации.

В общих чертах, схема автоматической обработки электронных публикаций совпадает со схемой, реализованной в электронном математическом журнале *Lobachevskii Journal of Mathematics* (см. [2]). Отличительной особенностью настоящего подхода является реализация методов автоматизации редакционных процессов на платформе *Open Journal Systems (OJS)* (см., напр., [3]).

Система *OJS* позволяет загружать статью в виде одного основного файла, как правило, формата *.pdf* или *.doc*, что достаточно для большинства научных журналов гуманитарного профиля. Для электронных журналов физико-математического направления должна быть предусмотрена возможность загрузки и обработки документов формата  $\text{\TeX}$ .

В работе [4] рассмотрен процесс обработки  $\text{\TeX}$ -документов на этапе *Layout*-редактирования. Нашей задачей была автоматизация обработки  $\text{\TeX}$ -документов непосредственно в момент загрузки научной статьи автором.

В большинстве случаев  $\text{\TeX}$ -документ состоит из нескольких файлов в формате  $\text{\TeX}$  и файлов в форматах *.png* или *.eps*, содержащих рисунки. Выходом из этой ситуации является загрузка *zip*-архива, в котором содержатся все файлы документа. Целесообразно основной файл статьи обозначать именем *main.tex*. Алгоритм стилистической проверки включает этап извлече-

ния  $\text{\TeX}$ -документов из архива и последующее преобразование в формат `.pdf`.

Следующей особенностью алгоритма является использование на сервере, обслуживающем платформу OJS, полнофункционального  $\text{\TeX}$ -компилятора, в качестве которого на этапе апробации применен пакет `MikTeX`.

В системе OJS предусмотрен механизм изменения поведения встроенных функций и расширения их возможностей путем интеграции специальных плагинов [5], написанных на языке программирования PHP. Текущая реализация алгоритма предполагает изменение системного файла `\www\classes\file\ArticleFileManager.inc.php` платформы OJS. Разработана функция

$$\textit{CompileTeXtoPDF}(\$dir, \$new - Fi - le - Na - me),$$

позволяющая по имени папки, содержащей файл `$newFileName` (загруженный архив), осуществлять распаковку архива и компиляцию файла `main.tex`. Кроме того, эта функция осуществляет замену zip-архива откомпилированным pdf-файлом, если таковой имеется, и выводит пользователю отчеты компиляций.

Архитектура OJS (см., напр., [6]) и синтаксис языка PHP (см., напр., [7]) накладывают специфичные ограничения на созданную функцию:

- так как в системе используется единая точка входа для любых запросов, после вызова команд компиляции  $\text{\TeX}$ - и `dvi`-файлов необходимо осуществлять программный переход на каталог сайта во избежание некорректной работы при выполнении команды `chdir($dirMain)`;

- вызов компиляторов осуществляется при помощи оператора `exec($compiler, $file)`, где `$compiler` – путь к компилятору, образованный из двух переменных: `$dirMain` – путь к каталогу сайта и `$stroka` – путь к компилятору относительно переменной `$dirMain`; переменная `$stroka` содержит в качестве разделителя папок знак “/”, т. е. представляет собой строку вида “/texmf/miktex/bin/latex” и, в случае размещения платформы OJS на Linux-сервере, разделители “/” следует определять автоматически: `define ('DIPSEP', DIRECTORY_SEPARATOR)`, в данном выражении переменная `DIPSEP` является разделителем, вычисленным относительно операционной системы.

Вызов функции `CompileTeXtoPDF($dir,$newFileName)` осуществляется путем проверки типа загруженного файла внутри функции `handleWrite()`. Если загружен архив, то осуществляем вызов названной функции, иначе используется стандартный алгоритм OJS.

Обработка архива производится стандартными средствами языка PHP и, как следствие, предполагается использование только zip-формата (см., напр. [7]). После обработки zip-архива происходит эмуляция действий системы OJS и осуществляется замена загруженного zip-архива полученным pdf-файлом. Данный этап алгоритма реализован двумя способами: повторным вызовом функции `handleWrite()` из функции `CompileTeXtoPDF()`, а также программным переопределением загруженного файла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-07-00667 и 12-07-97018-р\_поволжье).



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Tools and Platforms*. – URL: <http://www.openoasis.org/>
2. Елизаров А. М., Липачёв Е. К., Малахальцев М. А. *Веб-технологии в работе электронного математического журнала Lobachevskii Journal of Mathematics* // Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ: Тр. Всеросс. научн. конф. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – С. 355–356.
3. *Open Journal Systems / Public Knowledge Project*. – URL: <http://pkp.sfu.ca/ojs/>.
4. Chen S. *LaTEX Galley Plugin for Open Journal Systems*. – Simon Fraser University and Zhejiang University, 2010.
5. *OJS in an Hour*. – URL: <http://pkp.sfu.ca/files/OJSinanHour.pdf>.
6. *OJS Technical Reference*. – URL: <http://pkp.sfu.ca/ojs/OJS-TechnicalReference.pdf>.
7. Котеров Д. В., Костарев А. Ф. *PHP 5*. – СПб.: БХВ–Петербург, 2005. – 1120 с.

**И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
victor.banderov@ksu.ru, ildar.badriev1@mail.ru*

**ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ  
ВАРИЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ  
МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК**

Рассматривается задача об определении положения равновесия мягкой сетчатой осесимметричной оболочки, представляющей из себя в недеформированном состоянии цилиндр заданного радиуса  $r_0$  длины  $l$ . Сетчатая оболочка образована

двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей в продольном и циркулярном направлениях. В работе [1] показано, что эта задача сводится к решению вариационного неравенства в банаховом пространстве. Необходимость привлечения аппарата вариационных неравенств вызвана тем, что при математическом описании задачи надо использовать ограничение на перемещения, естественно возникающее при рассмотрении осесимметричной оболочки, означающее отсутствие ее самопересечения.

Предполагается, что функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения непрерывна, не убывает и имеет степенной рост на бесконечности. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывается. Установлены свойства оператора, входящего в вариационное неравенство – псевдомонотонность [2] и коэрцитивность. Это дало возможность для исследования его разрешимости использовать известные результаты теории монотонных операторов [2].

При дополнительных предположениях относительно функций, характеризующей физические соотношения в нитях, установлено, что оператор в вариационном неравенстве является потенциальным и ограничено липшиц-непрерывным [3]. Поэтому для его решения можно использовать предложенный ранее в [4] итерационный метод. Доказано, что итерационная последовательность ограничена и все ее слабо предельные точки являются решениями исходного вариационного неравенства.

Каждый шаг итерационного процесса сводится к решению вариационного неравенства с оператором двойственности [2], обладающего лучшими свойствами по сравнению с исходным

вырождающимся оператором.

В случае, когда функции, характеризующие физические соотношения в нитях, являются липшиц-непрерывными, доказано, что оператор, входящий в вариационное неравенство, является обратно сильно монотонным [5], при этом установлена слабая сходимость итерационной последовательности к некоторому решению исходного вариационного неравенства.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31515, 13-01-00908).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдюшева Г. Р., Бадриев И. Б., Бандеров В. В., Задворнов О. А., Тагиров Р. Р. *Математическое моделирование задачи о равновесии мягкой биологической оболочки. I. Обобщенная постановка* // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2012. – Т. 154. – Кн. 4. – С. 57–73.
2. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
3. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
4. Бадриев И. Б., Задворнов О. А., Саддек А. М. *Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 7. – С. 891–898.
5. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.

**И. Б. Бадриев, М. Т. Сингатуллин**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ildar.badriev1@mail.ru, m.t.singatullin@gmail.com*

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ  
ПОДЗЕМНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВЫСОКОВЯЗКИХ  
ЖИДКОСТЕЙ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ  
ФИЛЬТРАЦИИ**

Изучаются установившиеся процессы подземной фильтрации несжимаемых высоковязких жидкостей, следующих многозначным законам фильтрации с предельным градиентом [1]. Обобщенные постановки задач формулируются в виде смешанных вариационных неравенств с обратным сильно монотонным оператором и выпуклым, липшиц-непрерывным, вообще говоря, недифференцируемым, функционалом. К указанным задачам сводятся задачи об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти [2].

Для решения вариационных неравенств с операторами монотонного типа предложены итерационные методы расщепления, не требующие обращения исходного оператора. Основную трудность при этом представляет решение возникающих на каждой итерации задач минимизации. В случае задач фильтрации эту задачу удалось решить в явном виде благодаря тому, что можно эффективно вычислить субдифференциал функционала, сопряженного к минимизируемому. При этом каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевой задачи для оператора Лапласа.

Следует отметить, что предложенные методы позволяют находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации – это прибли-

женные значения градиента решения, а также приближенные значения скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации (в частности, с помощью приближенных значений градиента решения можно определять границы предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти), что весьма полезно с практической точки зрения.

Был разработан комплекс программ в среде MatLab. Проведены численные эксперименты для модельных задач. Исследована зависимость границ застойных зон (множеств в области фильтрации, где модуль градиента давления меньше предельного, т. е. движение фильтрующейся жидкости отсутствует) от величины скачка в многозначном законе фильтрации.

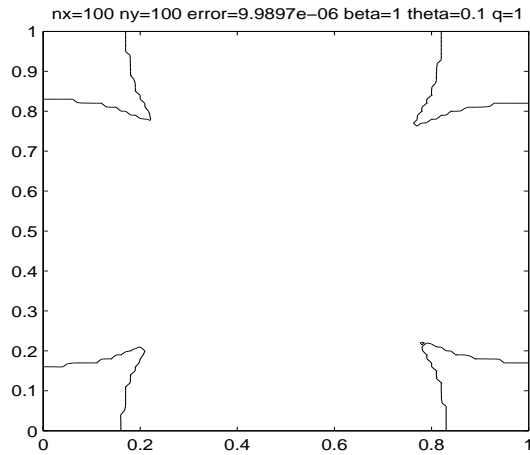


Рис. 1.

На рисунках 1–5 изображены границы застойных зон в случае фильтрации в квадратном единичном пласте при наличии скважины с дебитом  $q = 1$  в центре пласта. Значение предельного градиента  $\beta$  равно 1, значение  $\theta$  величины скачка в

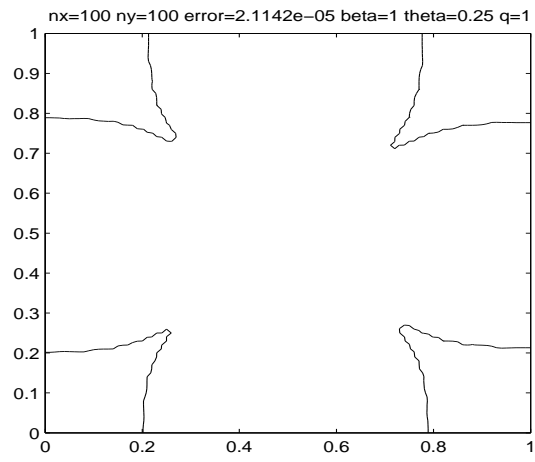


Рис. 2.

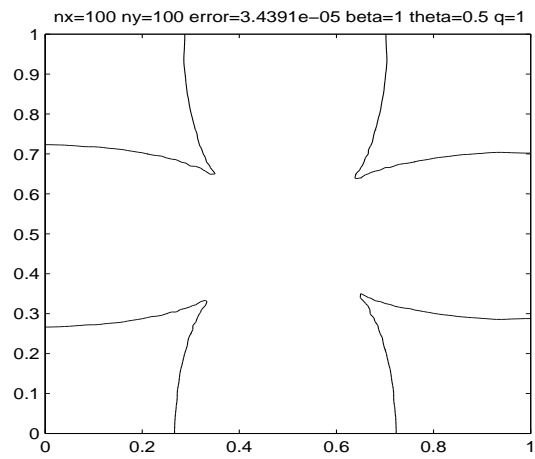


Рис. 3.

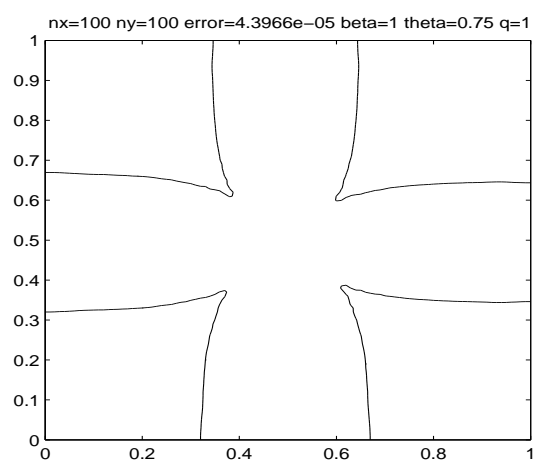


Рис. 4.

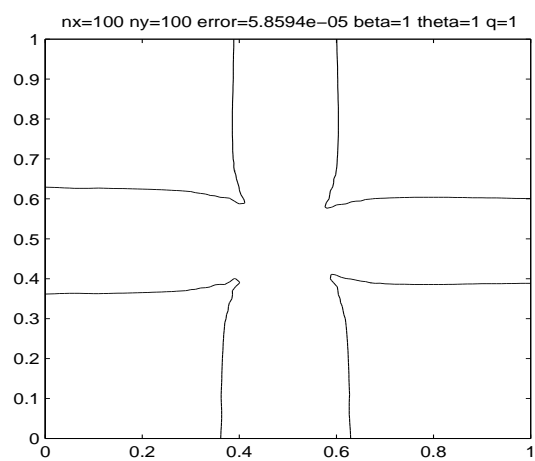


Рис. 5.

многозначном законе фильтрации менялось от 0.1 до 1. Как видно из рисунков, застойные зоны при этом увеличиваются, что соответствует физике моделируемого явления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97022).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лапин А. В. *Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19. – № 3. – С. 689–700.

2. Ентов В. М., Панков В. Н., Панько С. В. *Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти*. – Томск: Изд-во Томского государственного университета, 1989. – 196 с.

**В. В. Бандеров, В. С. Желтухин, В. Ю. Чебакова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

*Victor.Banderov@ksu.ru, vzheltukhin@gmail.com,*

*vchebakova@mail.ru*

#### **ПРОГРАММЫЙ КОМПЛЕКС РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА В АРГОНЕ**

Рассмотрена задача о нахождение основных параметров нестационарного высокочастотного емкостного (ВЧЕ) разряда пониженного давления в одномерном приближении, которая,



как показано в работе [1], представляет собой нелинейную систему краевых и начально-краевых задач. А именно, уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, уравнения диффузии–конвекции для ионной и электронной концентрации, уравнение непрерывности для метастабилей, и уравнения для электронной и газовой температур.

Данная система краевых и начально-краевых задач характеризуется несколькими особенностями, осложняющими разработку алгоритма и численного метода ее решения. Во-первых, она состоит из задач разного типа: начально-краевых задач для уравнений с частными производными параболического типа и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых время входит как параметр. Во-вторых, наличие разных временных масштабов изменения основных характеристик установившегося состояния ВЧЕ-разряда пониженного давления. В-третьих, возникновение больших градиентов плотности заряженных частиц и напряженности электрического поля в приэлектродных слоях на границах расчетной области, то есть если в квазинейтральной области мы имеем процесс с доминированием диффузии (регулярно возмущенная задача), то в приэлектродных областях наблюдается случай сильного доминирования конвекции (сингулярно возмущенная задача). Это приводит к появлению областей сильного изменения решения, в частности, пограничными и внутренними переходными слоями. В-четвертых, представленная система задач является нелинейной, как по отдельным входящим в нее уравнениям, так и в целом.

Для численной реализации модели использовалась неявная конечно-разностная схема с равномерным разбиением сетки и сносом нелинейности на предыдущий слой, а также

линеаризацией по методу Ньютона. Оператор конвективно-го переноса аппроксимировался методом направленных разностей. Применение интегро-интерполяционного метода обеспечило консервативность конечно-разностной схемы [2].

Разработан комплекс программ в среде Matlab, с помощью которого производилось численное моделирование рассматриваемых процессов. Программы написаны в соответствии с модульным принципом, что позволило осуществить раздельное программирование, отладку и тестирование составных частей пакета программ, а также простую модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня сложности. Для создания графического интерфейса использовалась специализированная среда GUIDE (см. [3, 4]).

Для ряда модельных задач были проведены численные эксперименты. Расчеты проводились до выхода процесса на установившийся периодический режим, когда достигался полный баланс заряда в межэлектродном промежутке: заряд, который уносится за период на электрод электронам, и в точности компенсируется выносом положительного заряда ионами. Результаты расчетов, проведенных нами, показали хорошее качественное совпадение с результатами, приведенными в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 11-01-00864, 12-01-00955, 13-01-00908, 13-01-31515) и Министерства образования РФ (соглашение № 14.В37.21.1948).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Желтухин В. С., Чебакова В. Ю., Шнейдер М. Н. *Математическая модель ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях* // Материалы Международной научной конференции “Плазменные технологии исследования, модификации и получения материалов различной физической природы”

(16-18 октября 2012 г.). – Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2012. – С. 93–96.

2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.

3. Бадриев И. Б., Бандеров В. В., Задворнов О. А. *Разработка графического пользовательского интерфейса в среде MatLab*. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2011. – 112 с.

4. Бандеров В. В. *Создание пользовательского интерфейса при разработке программных комплексов в среде MATLAB // Сеточные методы для краевых задач и приложения*. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 48–49.

5. Lymberopoulos D. P., Economou D. J. *Fluid simulations of glow discharge & effect of metastable atoms in argon // J. Appl. Phys.* – 1993. – V. 73. – No 8. – P. 3668–3679.

**И. С. Балафендиева, Д. В. Бережной**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
e\_xo@mail.ru, Dmitri.Berezhnoi@ksu.ru*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ПОДЗЕМНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

Настоящая работа посвящена разработке и численной реализации методики решения задач деформирования элементов трехмерных конструкций, взаимодействующих между собой и

с окружающим их физически нелинейным грунтовым массивом, с учетом контактного взаимодействия. С помощью созданной методики решена задача по определению несущей способности опоры мостового перехода [1], проведен расчет осадки грунтового массива в зоне прокладки тоннелей метрополитена [2, 3], а также напряженно-деформированного состояния футляра магистрального трубопровода высокого давления, проходящего под железнодорожным полотном. Предложенная методика расчета позволяет эффективно решать трехмерные задачи пластического деформирования грунтовых массивов, взаимодействующих с расположенными в них конструкциями, в условиях сложного силового нагружения. Следует отметить, что разработанная численная методика дает результаты, хорошо согласующиеся с данными натурных испытаний. Следовательно, на ее основе можно рассчитывать подобные конструкции и получать достоверные результаты.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бережной Д. В., Кузнецова И. С., Саченков А. А. *Моделирование пластического деформирования многослойного грунта в зоне опоры многопролетного моста* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152. – Кн. 1. – С. 116–125.
2. Балафендиева И. С., Бережной Д. В., Егоров Д. А. *Расчет осадок в многослойном физически нелинейном грунте при прокладке тоннелей метрополитена* // Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2012. – № 2. – С. 23–26.
3. Балафендиева И. С., Бережной Д. В. *Моделирование деформирования железобетонной обделки тоннеля в грунте с учетом одностороннего контактного взаимодействия ее бло-*

ков // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – №2 (55). – Вып. 1. – С. 8–16.

**Р. И. Бикмухаметов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ravil.bkt@gmail.com*

## О $\Sigma_2^0$ -НАЧАЛЬНЫХ СЕГМЕНТАХ ВЫЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Одно из направлений исследований вычислимых линейных порядков сосредоточено на изучении алгоритмической сложности начальных сегментов. М. Роу [1] показал, что  $\Pi_1^0$ -начальный сегмент вычислимого линейного порядка имеет вычислимое представление. С другой стороны, им был построен пример вычислимого линейного порядка с  $\Pi_3^0$ -начальным сегментом, не имеющим вычислимой копии. Р. Коулз, Р. Доуни и Б. Хусаинов [2] показали, что существует вычислимый линейный порядок с  $\Pi_2^0$ -начальным сегментом, не изоморфным никакому вычислимому линейному порядку. К. Амбос-Шпис, С. Б. Купер и С. Лемпп [3] в совместной работе установили, что  $\Sigma_2^0$ -начальный сегмент любого вычислимого линейного порядка имеет вычислимую копию. Мы покажем, что любой вычислимый порядок, не имеющий наибольшего элемента, является  $\Sigma_2^0$ -начальным сегментом, наперед заданной  $\Sigma_2^0$ -степени, некоторого вычислимого линейного порядка.

**Теорема.** *Для любого вычислимого линейного порядка  $\mathcal{L} = \langle L, <_L \rangle$  без наибольшего элемента и любого множества  $M \in \Sigma_2^0$ , существует такой вычислимый линейный порядок  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{A} + \eta$ , что  $\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$  и  $\mathcal{A} \equiv_T M$ .*

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Raw M. J. S. *Complexity of automorphisms of recursive linear orders* // Ph.D. Thesis. – University of Wisconsin-Madison. – 1995.
2. Coles R. J., Downey R., Khossainov B. *On initial segments of computable linear orders* // Order. – 1997. – V. 14. – No 2. – P. 107–124.
3. Ambos-Spies K., Cooper S. B., Lempp S. *Initial segments of recursive linear orders* // Order. – 1997. – V. 14. – No 2. – P. 101–105.

**А. К. Габимова, Д. В. Бережной**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
mech.ayten@gmail.com*

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОДНОРОДНЫХ,  
ОРТОТРОПНЫХ И МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН  
И ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ**

При построении физических моделей многослойных ортотропных оболочек используются всевозможные подходы, основанные как на различных гипотезах для каждого слоя оболочки, так и на единых гипотезах для всех слоев тонкостенной конструкции. В первом случае порядок разрешающей системы зависит от количества слоев. Во втором случае порядок системы не зависит от числа слоев, что открывает, в частности, широкие возможности для эффективного применения метода конечных элементов. Часто ортотропные многослойные конечные элементы (КЭ) получают на основе трехмерного изотропного восьмиузлового КЭ оболочки, полученного при дискретизации трехмерных уравнений теории упругости в

криволинейной системе координат и использовании некоторых оболочечных гипотез.

В данной работе вводятся аппроксимации радиус-вектора, ковариантных и контравариантных базисных векторов, метрических тензоров, перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Технология использования метода двойной аппроксимации по точкам суперсходимости и методика понижения порядка аппроксимаций деформаций поперечного сдвига в трехмерной постановке подробно описаны в [1]. Определяется матрица упругих констант для ортотропного материала. Упругие характеристики и углы намотки могут быть в общем случае различны для каждого слоя конечного элемента.

В заключении следует отметить, что разработанная численная методика исследования напряженно-деформированного ортотропных и многослойных пластин и оболочек дает результаты, хорошо согласующиеся с теоретическими значениями и результатами других авторов. Следовательно, на ее основе можно рассчитывать подобные конструкции и получать достоверные результаты.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31212, 13-97057, 13-01-97058).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бережной Д. В., Сагдатуллин М. К., Голованов А. И. *Многослойный ортотропный конечный элемент оболочек средней толщины* // Вестник Саратовск. гос. технич. ун-та. – 2011. – № 3 (57). – Вып. 1. – С. 9–19.

**А. Н. Герасимов, А. М. Елизаров**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
sav241@mail.ru, amelizarov@gmail.com*

## **СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЦИИ НОВОСТНЫХ ЛЕНТ КАК ОБЛАЧНЫЙ СЕРВИС ЭЛЕКТРОННОГО НАУЧНОГО ЖУРНАЛА**

Как известно, неотъемлемым элементом современного веб-портала является сервис формирования новостей (новостная лента). Как правило, все электронные научные издания имеют собственные веб-порталы, а для электронных научных журналов немаловажным является механизм своевременного оповещения пользователей информацией о прохождении представленных ими статей, а также о грантах, конкурсах и других актуальных новостях.

В докладе представлен алгоритм сбора информации с новостных лент выбранного набора научных журналов, последующего анализа и распределения новостей по категориям и степени важности, на основе которых создаются новостные ленты, согласованные с условиями и настройками индивидуальной подписки. Алгоритм реализован с применением технологий облачных вычислений (см., напр., [1]). Обеспечена поддержка мобильных устройств на платформе Windows Phone, IOS, Android версии 2.1 и выше.

Сервис на стороне сервера разработан с использованием языка WSDL (см. [2]). Для передачи структурированных сообщений применяется протокол SOAP (Simple Object Access Protocol). Взаимодействие клиентской части с сервисом осуществляется в синхронном режиме (см., напр., [3]), что обеспечивает своевременное обновление новостей клиенту для чтения



лент новостей.

Информационная система содержит инструменты аналитики, позволяющие отслеживать активность пользователей, отображать местонахождение мобильных пользователей, определять предпочтения подписчиков и выделять наиболее просматриваемые новости. Модуль аналитики реализован на основе облачного сервиса Google Analytics (см., напр., [4, 5]).

В настоящее время проводится внедрение разработанной системы в виде пилотного проекта в информационной системе электронного научного журнала “Электронные библиотеки” ([www.elbib.ru](http://www.elbib.ru)).

Работа поддержана РФФИ (проекты №№ 12-07-00667, 12-07-97018-р\_поволжье).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вууа R., Broberg J., Goscinski A. *Cloud computing: principles and paradigms*. – John Wiley & Sons, Inc., 2011. – 674 p.
2. *Web Services Description Language (WSDL) Version 2.0. W3C Recommendation*. – <http://www.w3.org/TR/2007/REC-wsdl20-20070626>.
3. Суэринг С., Конверс Т., Парк Д. *PHP и MySQL. Библия программиста*. – М.: Изд-во “Диалектика”, 2010. – 912 с.
4. Клифтон Б. *Google Analytics: профессиональный анализ посещаемости веб-сайтов*. – М.: ООО “Издательский дом Вильямс”, 2009. – 400 с.
5. Ledford J., Teixeira J., Tyler M. E. *Google Analytics. Third Edition*. – Wiley Publishing, Inc., 2010. – 435 p.

**О. В. Глазырина, М. Ф. Павлова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
glazyrina-olga@ya.ru, travlova@kpfu.ru*

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ  
ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ**

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область  $R^n$ ,  $\Gamma$  — граница  $\Omega$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ . В области  $Q_T$  рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u) k_i(x, \nabla u, Bu)) = f, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где  $B$  — оператор вида  $Bu(t) = \int_{\Omega} g(x) u(x, t) dx$ ,  $g$  — известная функция.

Уравнения вида (1) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения в точке определяется глобальным состоянием среды (см., например, [1]).

Будем предполагать, что  $a_i(x, \xi_0)$  и  $k_i(x, \xi, \nu)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), непрерывны по  $\xi_0$ ,  $\nu$  и  $\xi$ , измеримы по аргументу  $x$  и удовлетворяют условиям, обеспечивающим ограниченность, коэрцитивность и монотонность по градиенту оператора

$$Lu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u) k_i(x, \nabla u, Bu)),$$

действующего из  $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$  в  $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ .

Обобщенное решение задачи (1)–(2) определяется соотношениями

$$u \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega)),$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{п. в.с. в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$$

и уравнением (1), понимаемым как равенство элементов в пространстве  $L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$ .

В работе [2] доказано существование обобщенного решения задачи (1) – (2) при  $f \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$ ,  $u_0 \in L_2(\Omega) \cap W_p^1(\Omega)$ . В [3] доказана теорема единственности при условии, что  $L$  — сильно монотонный оператор и при дополнительных предположениях на коэффициенты уравнения (1) и оператор  $B$ .

Также для задачи (1)–(2) в случае, когда  $\Omega$  —  $n$ -мерный параллелепипед, исследованы неявная и явная разностные схемы. Доказана сходимость этих разностных схем при минимальных условиях на гладкость исходных данных. Для явной разностной схемы теорема о сходимости справедлива в предположении, что

$$\tau \leq c \frac{h^2}{4n^{2/p}}, \quad 1 < p < 2; \quad \tau \leq c \frac{h^{p+n(p-2)/2}}{2^pn}, \quad p \geq 2;$$

и

$$\tau \frac{n}{h^{p+n(p-2)/2}} \rightarrow 0, \quad \text{если } p \geq 2; \quad \tau \frac{n^{2/p}}{h^2} \rightarrow 0, \quad \text{если } 1 < p < 2;$$

при  $\tau, h \rightarrow 0$ . Здесь  $\tau$  — шаг по  $t$ ,  $h = \min_{1 \leq i \leq n} h_i$ ,  $h_i$  — шаг по оси  $x_i$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-31515).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Chipot M., Molinet L. *Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems* // *Applicable Analysis*. – 2001. – V. 80. – № 3/4.

2. Павлова М. Ф. *О разрешимости нелокальных нестационарных задач с двойным вырождением* // *Дифференц. уравнения*. – 2011. – Т. 47. – № 8. – С. 1148–1162.

3. Глазырина О. В., Павлова М. Ф. *О единственности решения одной нелокальной нелинейной задачи с сильно монотонным по градиенту пространственным оператором* // *Изв. вузов. Математика*. – 2012. – № 3. – С. 92–95.

**А. П. Гогин, М. М. Карчевский**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
alexg@list.ru, Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru*

**О СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА  
СМЕШАННЫХ МЕТОДОВ  
ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ**

Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $\Omega \subset R^2$  — ограниченная многоугольная область,  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $a(x, \eta) = (a_1(x, \eta), a_2(x, \eta))$ ,  $a_0(x, \eta)$  — заданные функции, непрерывные при  $\bar{\eta} = (\eta_0, \eta) \in R^3$ , для всех  $x \in \Omega$ .

Определим, следуя [1], конечноэлементные пространства

$$\begin{aligned} M_h &= \{v_h \in L_p; v_h|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ N_h &= \{q_h \in H_q; q|_K \in N_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ X_h &= M_h \times N_h, \end{aligned}$$

где через  $N_k(K)$  обозначено одно из пространств  $BDM_k(K)$ ,  $RT_k(K)$ ,  $BDM_{[k]}(K)$ ,  $RT_{[k]}(K)$ . Под приближенным решением задачи (1), (2), аналогично [2], понимается пара  $(u_h, j_h) \in X_h$  такая, что

$$\int_{\Omega} (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))v_h) dx = \int_{\Omega} f v_h(x) dx$$

$$\forall v_h \in M_h,$$

$$\int_{\Omega} j_h(u_h) \cdot q_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h.$$

Показано, что если при  $p > 1$  выполнены условия

$$\begin{aligned} |\bar{a}(x, \xi)| &\leq c_1(1 + |\xi|^{p-1}) \quad \forall x \in \Omega, \xi \in R^3, \\ (\bar{a}(x, \xi) - \bar{a}(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) &\geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \xi, \eta \in R^3, \\ \bar{a}(x, \xi) \cdot \xi &\geq c_2|\xi|^p - c_3 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in R^3, \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — положительные постоянные, а через  $\bar{a}(\cdot)$  обозначена вектор-функция вида  $\bar{a}(\cdot) = (a_0(\cdot), a_1(\cdot), a_2(\cdot))$ . то существуют последовательности решений  $u_h$  и  $j_h(u_h)$  и функция  $u^*$  такие, что  $u_h \rightharpoonup u^*$ ,  $j_h(u_h) \rightharpoonup \nabla u^*$  в  $L_p(\Omega)$ , причем функция  $u^*$  является точным решением задачи (1), (2).

При выполнении условий типа сильной эллиптичности и ограниченной нелинейности

$$\begin{aligned} (\bar{a}(x, \bar{\eta}) - \bar{a}(x, \bar{\xi})) \cdot (\eta - \xi) \cdot (|\eta| + |\xi|)^{2-p} &\geq c_0|\eta - \xi|^2 \\ \forall \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^3, \quad \eta, \xi \in R^2, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$|\bar{a}(x, \bar{\eta}) - \bar{a}(x, \bar{\xi})| \leq c_1 |\bar{\eta} - \bar{\xi}|^{p-1} \quad \forall \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^3, x \in \Omega,$$

в случае  $1 < p < 2$ , и

$$(\bar{a}(x, \bar{\eta}) - \bar{a}(x, \bar{\xi})) \cdot (\eta - \xi) \geq c_2 |\eta - \xi|^p \quad \forall \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^3, \eta, \xi \in R^2, x \in \Omega,$$

$$|\bar{a}(x, \bar{\eta}) - \bar{a}(x, \bar{\xi})| \leq c_3 |\bar{\eta} - \bar{\xi}| \cdot (|\bar{\eta}| + |\bar{\xi}|)^{p-2} \quad \forall \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^3, x \in \Omega,$$

в случае  $p \geq 2$ ;  $c_0, c_1, c_2, c_3$  — положительные постоянные, получены оценки точности предлагаемого метода в соболевских пространствах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97022).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods* // Springer series in Comp. Math. — 1991.
2. Карчевский М. М. *Об одном подходе к построению смешанных схем МКЭ для квазилинейных эллиптических уравнений* // Материалы Пятого Всероссийского семинара “Сеточные методы для краевых задач и их приложения”, Казань 17–21 сентября 2004 г. — Казань: Изд-во Казанского ун-та. — 2004. — С. 108–111.

**А. А. Горшков**

*Нижегородский национальный исследовательский  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
tiger-nn@mail.ru*

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДВОЙСТВЕННОЙ  
РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
И ОПТИМИЗАЦИИ В РАВНОМЕРНО  
ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Проблемы, связанные с различными проявлениями неустойчивости (некорректности) в задачах оптимизации, оптимального управления и, в частности, в задачах выпуклого программирования, хорошо известны. Они возникают уже в “самых простых” по виду оптимизационных задачах (см., например, [1]) и находят выражение в фактах несуществования классических решений как прямых, так и двойственных задач, неустойчивости этих решений при возмущении исходных данных. В случае достаточно сложных реальных задач, в том числе и многих задач современного естествознания, требующих для своего решения применения приближенных методов и использования компьютерных вычислений, указанные проблемы несуществования, неустойчивости являются центральными и требуют их обязательного учета.

Оказывается, преодолевать проблемы некорректности в задачах выпуклого программирования, а также в сводящихся к ним задачах оптимального управления, обратных задачах можно на пути применения методов теории двойственности, регуляризации и одновременного перехода к рассмотрению понятия минимизирующей последовательности допустимых эле-

ментов в качестве основного понятия оптимизационной теории, то есть, другими словами, перехода с языка оптимальных элементов на язык минимизирующих последовательностей [1].

Рассмотрим задачу минимизации:

$$f^0(z) \rightarrow \min, A^0 z = h^0, g_i^0(z) \leq 0, i = 1, \dots, m, z \in D \subset Z, \quad (1)$$

где  $f^0 : D \rightarrow R$  – липшицевый строго равномерно выпуклый непрерывный функционал,  $A^0 : Z \rightarrow H$  – линейный непрерывный оператор,  $g_i^0 : D \rightarrow R, i = 1, \dots, m$  – липшицевы непрерывные выпуклые функционалы,  $g^0(z) \equiv (g_1^0(z), \dots, g_m^0(z))^*$ ,  $h^0 \in H$  – заданный элемент,  $D$  – выпуклое замкнутое ограниченное множество,  $Z, H$  – равномерно выпуклые пространства.

Метод двойственной регуляризации позволяет решить задачу (1), а следовательно и оптимизационные задачи сводящиеся к ней [2]. Рассмотрение задач выпуклого программирования в рефлексивных (в частности равномерно выпуклых) пространствах с ограничениями, которые задаются операторами, действующими также в рефлексивные пространства, существенно расширяет класс задач оптимального управления, обратных задач, которые могут непосредственно к ним быть сведены. Прежде всего, это происходит за счет присоединения к нему новых оптимизационных и обратных задач, связанных с уравнениями в частных производных. Последнее объясняется, в частности: 1) улучшением свойств регулярности решений уравнений в частных производных с увеличением степени суммируемости их коэффициентов и, как следствие, улучшением свойств дифференцируемости функции Лагранжа задачи; 2) улучшением аналогичных свойств решений сопряженных уравнений принципа максимума в задачах оптимального управления при погружении образов операторов, задающих



ограничения, в функциональные классы суммируемых с  $p$ -ой степенью функций при  $1 < p < 2$ ,  $p > 2$ ,  $p \neq +\infty$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00199-а) и Минобрнауки РФ (шифр заявки 1.1907.2011).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сумин М. И. *Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 602–625.

2. Горшков А. А. *О двойственной регуляризации в задаче выпуклого программирования в равномерно выпуклом пространстве* // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2013. – № 3(1). – С. 172-180.

**С. В. Гулакова, И. В. Тестова, В. Н. Попов**

*Северный (Арктический) федеральный университет*

*имени М.В. Ломоносова,*

*s.gulakova@narfu.ru, testovairina@mail.ru, v.popov@narfu.ru*

#### **АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИЛЬЯМСА В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ**

В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о течении Пуазейля. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, используется модель Вильямса кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения [1]. При постановке задачи изменение давления на средней длине свободного пробега молекул газа полагается малым, что позволяет рассмотреть

решение задачи в линеаризованном виде. В этом случае отыскание функции распределения молекул газа по координатам и скоростям сводится к решению уравнения

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu, C) + \frac{1}{C} = \\ = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) d\mu' \int_0^{+\infty} \exp(-C'^2) C'^5 \psi(x, \mu', C') dC', \quad (1) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\psi(-d, \mu, C) = 0, \quad 0 < \mu < 1, \quad (2)$$

$$\psi(d, \mu, C) = 0, \quad -1 < \mu < 0. \quad (3)$$

Общее решение (1) найдено в пространстве обобщенных функций. Подстановка в построенное общее решение граничных условий (2), (3) приводит к системе двух связанных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши, которые после преобразования сводятся к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси. Коэффициенты в разложении решения уравнения (1) по собственным векторам дискретного спектра находятся из условия разрешимости построенной краевой задачи Римана. Использование формул Сохоцкого-Племеля для нахождения коэффициентов в разложении решения (1) по собственным векторам непрерывного спектра приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого ищется в виде степенного ряда. С учетом найденной функции распределения построен профиль массовой скорости газа в канале и вычислено значение приходящегося на единицу ширины канала потока массы газа. Проведен численный анализ полученных выражений. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными в [2] – [5].

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Латышев А. В., Юшканов А. А. *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения*. – М.: Мир, 2004. – 271 с.
2. Попов В. Н., Тестова И. В., Юшканов А. А. *Математическое моделирование течений газа в каналах*. – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic publishing, 2012. – 116 p.
3. Loyalka S. K., Hickey K. A. *Plane Poiseuille flow near continuum regimes for a rigid spheres* // *Physica A*. – 1989. – V. 160. – No 3. – P. 395–408.
4. Siewert C. E. *Poiseuille, thermal creep and couette flow: results based on the CES model linearized Boltzmann equation* // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. – 2002. – V. 21. – P. 579–597.
5. Baricello L. B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C. E. *Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model* // *ZAMP*. – 2001. – V. 52. – P. 517–534.

**И. А. Гундырев**

*Омский государственный университет  
им. Ф. М. Достоевского,  
gundyrev@omsu.ru*

**СТРОЕНИЕ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ  
НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ  
С ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКОЙ И ИХ ГРУПП  
ПОДОБИЙ**

**Определение 1.** *Метрическое пространство  $X$  называется однородным (подобно однородным), если группа его изометрий (подобий) действует транзитивно на  $X$ .*

Простейшим примером подобно однородного неоднородного метрического пространства с внутренней метрикой является открытая евклидова полупрямая. В теореме 2.1 статьи [1] доказано, что подобно однородное пространство однородно тогда и только тогда, когда оно полно.

**Предложение 1.** (см. [1]) *Локально компактное подобно однородное пространство с внутренней метрикой допускает транзитивную метризуемую связную локально компактную (относительно компактно-открытой топологии) группу подобий  $G$ .*

Обозначим через  $\mathbb{R}_+$  мультипликативную группу положительных вещественных чисел и через  $\alpha: G \rightarrow \mathbb{R}_+$  коэффициент подобия. Основным результатом:

**Теорема 1.** *Пусть  $(X, \rho)$  — локально компактное подобно однородное неоднородное пространство с внутренней метрикой;  $G$  — связная транзитивная локально компактная группа подобий пространства  $(X, \rho)$ , существование которой гарантировано предложением 1;  $I$  — подгруппа изометрий пространства  $(X, \rho)$  в группе  $G$ . Тогда*

- 1) *топологическая группа  $G$  изоморфна полупрямому топологическому произведению  $\mathbb{R}_+ \ltimes I$ .*
- 2) *пространство  $(X, \rho)$  гомеоморфно прямому топологическому произведению  $c^{-1}(a) \times \mathbb{R}_+$ , где  $c^{-1}(a)$  — произвольное множество уровня функции  $c$  (радиуса полноты) на  $(X, \rho)$ .*

В [2] построен пример локально полного подобно однородного неоднородного пространства, показывающий существенность условия локальной компактности в теореме 1. В [3] теорема 1 была доказана при дополнительных условиях на пространство, конформно эквивалентное пространству  $(X, \rho)$ .

**Лемма П. Д. Андреева.** Пусть пространство  $(X, \rho)$  и группы  $G, I$  удовлетворяют условиям теоремы 1. Если топологическая группа  $G$  допускает непрерывный гомоморфизм  $\Theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ , удовлетворяющий условию

$$\alpha(\Theta(t)) = t \text{ для любого } t \in \mathbb{R}_+,$$

то пространство  $(X, \rho)$  гомеоморфно прямому топологическому произведению  $c^{-1}(1) \times \mathbb{R}_+$ , а группа  $G$  изоморфна  $\mathbb{R}_+ \triangleleft I$ .

**Предложение 2.** (см. [4]) Для любой связной локально компактной группы  $G$  существует компактная группа  $K$ , односвязная группа Ли  $L$  и локально изоморфный эпиморфизм  $\pi: K \times L \rightarrow G$ .

Доказательство теоремы 1, основанное на лемме П. Д. Андреева, предложении 2 и классических результатах в теории топологических групп, дает положительное решение гипотезы Берестовского, сформулированной в [1]. Теорема 1 остается верной для группы всех подобий пространства  $(X, \rho)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Берестовский В. Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 11. – С. 3–22.
2. Андреев П. Д. Полулинейные метрические полурешетки на  $\mathbb{R}$ -деревьях // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 6. – С. 3–13.
3. Гундырев И. А. О подобно однородных локально-компактных пространствах с внутренней метрикой // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 4. – С. 28–42.
4. Berestovskii V., Plaut C. Homogeneous spaces of curvature bounded below // J. of Geomet. Anal. – 1999. – V. 9. – No 2. – P. 203–219.

Д. Н. Даутова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
*dautovadn@gmail.com*

## АСИМПТОТИКА МОДУЛЕЙ РОМБОВИДНЫХ ОКОН

Исследование свойств конформных модулей двусвязных областей, четырехсторонников и емкостей конденсаторов в комплексной плоскости представляет несомненный интерес, поскольку имеет важные приложения в геометрической теории функций комплексного переменного. В данной работе мы занимаемся изучением искажения модулей при квазиконформных отображениях, которые являются растяжениями вдоль одной из координатных осей, и нахождением асимптотики модуля двусвязной ромбовидной области, когда коэффициент растяжения  $M \rightarrow \infty$ . Тем самым мы даем частичное решение проблемы, поднятой проф. М. Vuorinenom.

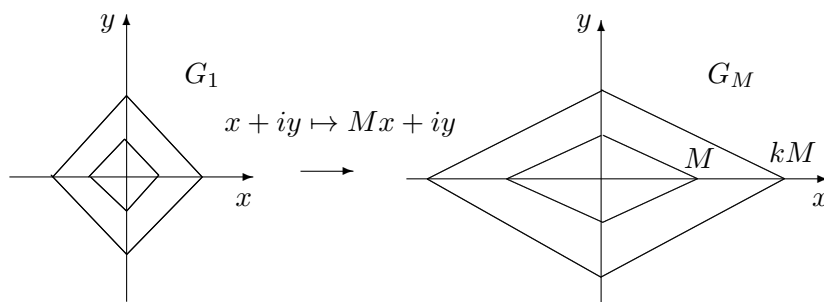


Рис. 1

Пусть дана двусвязная область

$$G_1 = \{(x, y) \mid 1 < |x| + |y| < k\}, \quad k > 1,$$

которая является разностью двух гомотетичных ромбов. Требуется исследовать поведение модуля этой области при неограниченном растяжении ее вдоль одной из осей координат.

Пусть растяжение происходит вдоль оси  $OX$ , т. е. имеет вид  $x + iy \mapsto Mx + iy$ , где  $M > 0$  — коэффициент растяжения. Тогда  $G_1$  переходит в область

$$G_M = \{(x, y) \mid 1 < |x/M| + |y| < k\}.$$

С использованием свойств конформного модуля двусвязной области, принципа симметрии для конформных отображений и для семейств кривых, теорию сходимости к ядру по Каратеодори и теорию простых концов Г. Д. Суворова, сначала для последовательности параметров

$$M_n = \frac{n(k-1) + \sqrt{n^2(k-1)^2 - 4}}{2},$$

а затем и для любых вещественных  $M$  доказана следующая

**Теорема.** *Модуль двусвязной области  $G_M$ , которая является разностью двух гомотетичных ромбов, эквивалентен  $\frac{k-1}{4M}$ ,  $M \rightarrow \infty$ , где  $k$  — коэффициент подобия ромбов.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Betsakos D., Samuelsson K., Vuorinen M. *The computation of capacity of planar condensers* // Publications De L'institut Mathematique. — 2004. — V. 75. — No 89. — P. 233–252.
2. Dubinin V., Vuorinen M. *On conformal moduli of polygonal quadrilaterals* // Israel J. of Math. — 2009. — V. 171. — No 1. — P. 111–125.
3. Hakula H., Rasila A., Vuorinen M. *On moduli of rings and quadrilaterals: Algorithms and experiments* // SIAM J. of Scientific Comp. — 2011. — V. 33. — No 1. — P. 279–302.

**Р. П. Докучаев**

*Волгоградский государственный университет,  
dokuch90@mail.ru*

## НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА ТРИАНГУЛЯЦИЯХ

Ряд прикладных задач [1, 3] приводит к необходимости решения уравнения минимальной поверхности. При решении данного уравнения итерационным методом градиентного спуска для функционала площади  $S(u)$  появляется вопрос о скорости сходимости итерационного процесса. Скорость сходимости итерационного метода напрямую связана со значением константы в аналоге неравенства Пуанкаре на триангуляциях.

Напомним, что неравенство Пуанкаре имеет вид

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \left[ \left( \int_{\Omega} u dx \right)^2 + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \right],$$

где функция  $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ . Константа  $C$  участвует в определении скорости сходимости итерационного процесса приближенного решения уравнения минимальной поверхности.

Пусть область  $\Omega_1 = [a, b] \times [c, d]$  разбита на прямоугольники вида  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , где  $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $y_j = c + \frac{j}{m}(d - c)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Положим  $h = \frac{b-a}{n}$  и  $\tau = \frac{d-c}{m}$ . Разобьем каждый из прямоугольников на два треугольника диагональю, проведенной с нижнего левого угла в верхний правый угол. Предположим, что в каждой точке  $(x_i, y_j)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m$ , задано значение сеточной функции  $u_{ij}$ . Ранее была доказана справедливость аналога неравенства Пуанкаре сначала в случае  $u_{ij} = 0$  на границе области  $\Omega_1$ , а затем и для произвольных граничных значений.



Мы рассматриваем области более общего вида.

Пусть область  $\Omega_2$  имеет следующий вид [2]  $\Omega_2 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ , где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – заданные на отрезке  $[a, b]$  липшицевы функции, то есть  $\left| \frac{\psi(x_{t+1}) - \psi(x_t)}{x_{t+1} - x_t} \right| \leq L_1$  и  $\left| \frac{\varphi(x_{t+1}) - \varphi(x_t)}{x_{t+1} - x_t} \right| \leq L_2$ , где  $L_1, L_2 - \text{const}$ . Пусть  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  – разбиение отрезка  $[a, b]$ . Положим  $f_\tau(x) = \tau\psi(x) + (1 - \tau)\varphi(x)$ . Разобьем отрезок  $[0, 1]$  точками  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = 1$  и в области  $\Omega_2$  рассмотрим сетку, задаваемую системой точек:  $A(x_i, y_j) = (x_i, f_{\tau_j}(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$ .

Разбивая одной из диагоналей все трапеции вида  $A_{ij}A_{i+1,j}A_{i,j+1}A_{i+1,j+1}$ , где  $i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1$ , получим триангуляцию области  $\Omega_2$ . Предположим, что в каждой точке  $A_{ij}$ ,  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$ , задано значение сеточной функции  $u_{ij}$ .

**Теорема.** В области  $\Omega_2$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m u_{ij}^2 \leq C \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{a}_{ij}^2 + \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{b}_{ij}^2 \right) + \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m u_{ij} \right)^2,$$

где  $\tilde{a}_{kj} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{T_{kj}}$ ,  $\tilde{b}_{kj} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{T_{kj}}$ ,  $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n} (\psi(x_k) - \varphi(x_k))$ ,  $C = 8 \max^2 [\lambda, b - a] \cdot \max [1, \max^2(L_1, L_2) + \frac{1}{2}]$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97034 p\_поволжье\_a).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдюшев А. А., Мифтахутдинов И. Х., Осипов П. П. *Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности* // Изв. КазГАСУ. Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2009. – № 2(12). – С. 86–92.

2. Клячин А. А. *Равномерная триангуляция плоских областей* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. – 2011. – № 2(15). – С. 43–49.

3. Михайленко В. Е., Ковалев С. Н. *Конструирование форм современных архитектурных сооружений*. – Киев: Будівельник, 1978. – 138 с.

**А. Ю. Долгоносова, Н. И. Жукова**

*Нижегородский государственный университет,*

*dolgonosova@rambler.ru, n.i.zhukova@rambler.ru*

### **ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНЯТИЮ СЛОЕНИЯ С ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ**

Будем обозначать через  $(M, F)$  гладкое слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$ , а через  $\mathfrak{X}_F(M)$  – модуль гладких векторных полей (над алгеброй гладких функций), касательных к этому слоению. Предположим, что слоение  $(M, F)$  задано  $N$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ .

Если на многообразии  $N$  существует такая линейная связность  $\nabla^N$ , что каждый локальный диффеоморфизм  $k_{ij}$  является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных связностью  $\nabla^N$  на открытых подмножествах  $f_i(U_i \cap U_j)$  и  $f_j(U_i \cap U_j)$ , то мы говорим, что  $(M, F)$  – слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ .

Напомним, что векторное поле  $X \in \mathfrak{X}(M)$  называется *слоеным* или *базовым*, если для любого  $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$  скобка Ли  $[X, Y]$  принадлежит  $\mathfrak{X}_F(M)$  [1].

Линейная связность  $\nabla$  на  $M$  называется *проектируемой относительно слоения*  $(M, F)$ , если на  $N$  существует такая линейная связность  $\nabla^0$ , что каждая субмерсия  $f : U \rightarrow V$  из  $N$ -коцикла, определяющего  $(M, F)$ , удовлетворяет равенству

$$f_*(\nabla_{X_U} Y_U) = \nabla_{f_*(X_U)}^0 f_*(Y_U)$$

для любых слоеных векторных полей  $X, Y$  на  $M$ .

Гладкое распределение  $\mathfrak{N}$  на многообразии линейной связности  $(M, \nabla)$  называется *геодезически инвариантным* [2], если для любых  $x \in M$  и  $X \in \mathfrak{N}_x$  геодезическая  $\gamma_X(s)$ , удовлетворяющая начальным условиям  $\gamma_X(0) = x$  и  $\dot{\gamma}_X(0) = X$ , является интегральной кривой распределения  $\mathfrak{N}$ .

Обозначим через  $H$  группу Ли  $GL(R, q)$ , а через  $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(R, q)$  ее алгебру Ли. Пусть  $\pi : P \rightarrow M$  — проекция расслоения трансверсальных реперов для слоения  $(M, F)$ . Тогда  $P(M, H)$  — главное  $H$ -расслоение. Рассмотрим произвольную связность  $Q$  в этом  $H$ -расслоении, то есть,  $q$ -мерное  $H$ -инвариантное распределение на многообразии  $P$ . При этом на  $P$  определена  $\mathfrak{h}$ -значная 1-форма связности  $\omega$ . Будем говорить, что слоение  $(M, F)$  является *слоением с трансверсально проектируемой линейной связностью в смысле Молино* [1], если для любого векторного поля  $X$ , касательного к слоению  $(M, F)$ , выполняются следующие два равенства:

$$1) i_X(\omega) = 0, \quad 2) i_X(d\omega) = 0,$$

то есть, если  $\omega$  и  $d\omega$  — базовые формы.

**Теорема.** Пусть  $(M, F)$  — гладкое слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$ . Тогда следующие три условия эквивалентны:

- 1)  $(M, F)$  — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ ;
- 2)  $(M, F)$  — слоение с трансверсально проектируемой линейной связностью в смысле Молино;
- 3) для любого  $q$ -мерного распределения  $\mathfrak{M}$ , трансверсального слоению  $(M, F)$ , на многообразии  $M$  существует трансверсально проектируемая линейная связность  $\nabla^{\mathfrak{M}}$ , относительно которой оба распределения  $\mathfrak{M}$  и  $TF$  геодезически инвариантны.

**Предложение.** *Линейная связность  $\nabla^{\mathfrak{M}}$ , удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы, не имеет кручения тогда и только тогда, когда распределение  $\mathfrak{M}$  интегрируемо.*

**Замечание.** *Построенная нами специальная линейная связность  $\nabla^{\mathfrak{M}}$  существенно использовалась при задании структуры бесконечномерного многообразия, моделируемого на  $LF$ -пространствах, в группе автоморфизмов слоения  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью [3].*

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2012 – 2013 годы” (проект № 14.В37.21.0361) и НИР по заданию Минобрнауки РФ (проект № 1.1907.2011).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Molino P. *Riemannian foliations*. – Progress in Math. Boston.: Birkhauser, 1988. – 339 p.
2. Lewis A. D. *Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics* // Rep. Math. Phys. – 1998. – V. 42. – P. 135–164.
3. Zhukova N. I., Dolgonosova A. Yu. *The automorphism groups of foliations with transverse linear connection* // Cent. Eur. J.

Math. – 2013. – V. 11(12). – P. 2076–2088. DOI: 10.2478/s11533-013-0307-8.

**А. А. Евсева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
aleksandra25\_10@mail.ru*

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ИГР**

Игры издавна занимали одно из важных мест в жизни детей. Каждый школьник может рассказать свои собственные представления о тактике ведения игр от крестиков-ноликов и морского боя до шашек или шахмат. Но мало кто из них представляет, что именно математика объясняет: почему тот или иной шаг ведет к победе или проигрышу. На занятиях математического кружка очень полезно было бы научить ребят понимать и использовать математические методы поиска оптимальных стратегий в играх.

Игры, в которых участвуют два игрока, являются антагонистическими – выигрыш одного игрока означает проигрыш другого. Кроме того, игры также бывают с полной и неполной информацией. Примерами игр с полной информацией являются крестики-нолики, шашки или шахматы, а с неполной – морской бой, домино или карточные игры.

Для представления процесса любой игры можно использовать модель ориентированного графа или дерева, описывающего всевозможные ходы. В реальных играх деревья позиций разветвляются довольно широко, что делает поиск выигрышного хода довольно сложным. Однако если у игры существует своя определенная стратегия, то с использованием некоторых

математических законов можно попытаться “просчитать” ситуацию наперед.

Например, в основе домино лежат арифметические и цифровые законы. Морской бой обладает определенными геометрическими тонкостями. Крестики-нолики объединяют в себе и арифметические, и геометрические нюансы. Теории карточных игр и шахматам посвящено множество специализированной литературы, в которой описаны математические закономерности поиска оптимальных решений этих игр.

Помимо поиска выигрышных стратегий особый интерес вызывают математические задачи, связанные с данными играми. Полезно будет познакомить ребят с математическими этюдами, отражающими ту или иную математическую идею. Вот примеры подобных заданий:

1. Пусть в домино играют четверо, причем каждый сам за себя. Существует ли такой расклад, при котором первый игрок выигрывает, а второму и третьему не удастся выложить ни одной кости? (Использование арифметических навыков.)

2. Можно ли покрыть костями домино квадрат  $8 \times 8$ , из которого вырезаны противоположные углы? (Используется идея “шахматного домино”, т. е. раскраски доски в два цвета.)

3. Какое наименьшее число выстрелов достаточно произвести по доске карты морского боя  $10 \times 10$ , чтобы наверняка попасть в линкор? (Используется идея раскраски поля в 4 разных цвета.)

4. Докажите, что при правильной игре в крестики-нолики “пять в ряд” или вообще “ $n$  в ряд” – на бесконечной доске, крестикам при любом  $n$  гарантирована ничья. (Используется метод доказательства от противного.)

5. Расставьте на пустой шахматной доске восемь ферзей

так, чтобы они не нападали друг на друга. (Используется идея разбиения плоскости на геометрические фигуры.)

Итак, решая задачи, связанные с той или иной игрой, учащиеся с одной стороны получают возможность вспомнить об особенностях данных игр, а с другой – познакомиться с интересными математическими подходами, имеющих прямое отношение к этим играм.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гик Е. Я. *Три игры: домино, морской бой, крестики-нолики*. – М.: МЦНМО, 2013. – 72 с.
2. Панов В. Н. *Шахматы для начинающих*. – М.: Изд-во “Советская Россия”, 1960. – 168 с.

**В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
vzhegalov@yandex.ru, sozontova-elena@rambler.ru*

#### ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В области  $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$  рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, y) &= a_{11}(x, y) \int_{x_0}^x [\lambda(t, y)\varphi_1(t, y) + \mu(t, y)\varphi_2(t, y)]dt + \\
 &+ a_{12}(x, y) \int_{y_0}^y [\nu(x, \tau)\varphi_1(x, \tau) + \sigma(x, \tau)\varphi_2(x, \tau)]d\tau + f_1(x, y), \\
 \varphi_2(x, y) &= a_{21}(x, y) \int_{x_0}^x [\lambda(t, y)\varphi_1(t, y) + \mu(t, y)\varphi_2(t, y)]dt + \\
 &+ a_{22}(x, y) \int_{y_0}^y [\nu(x, \tau)\varphi_1(x, \tau) + \sigma(x, \tau)\varphi_2(x, \tau)]d\tau + f_2(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\Delta(x, y) = \det \|a_{ik}(x, y)\| \neq 0.$$

Целью исследования является выделение случаев разрешимости этой системы в явном виде.

Полученные результаты могут быть сформулированы в терминах обозначений

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda a_{11} + \mu a_{21} + (\ln \Delta)_x, & \beta &= \lambda a_{12} + \mu a_{22}, \\ \gamma &= \nu a_{11} + \sigma a_{21}, & \delta &= \nu a_{12} + \sigma a_{22} + (\ln \Delta)_y \end{aligned} \quad (2)$$

и тождеств

$$(\ln \beta)_{xy} + 2\alpha[\delta + (\ln \beta)_y] \equiv \alpha_y - \delta_x + \beta\gamma, \quad (3)$$

$$2\alpha[\delta + (\ln \beta)_y] \equiv \beta\gamma, \quad (4)$$

$$\delta_x \equiv \alpha_y - (\ln \beta)_{xy}, \quad (5)$$

$$\beta\gamma - 2\alpha[\delta + (\ln \beta)_y] \equiv \xi_1(x)\eta_1(y), \quad (6)$$

$$2\delta[\alpha + (\ln \gamma)_x] \equiv \beta\gamma, \quad (7)$$

$$(\ln \gamma)_{xy} + 2\delta[\alpha + (\ln \gamma)_x] \equiv \delta_x - \alpha_y + \beta\gamma, \quad (8)$$

$$\delta_x \equiv \alpha_y + (\ln \gamma)_{xy}, \quad (9)$$

$$\beta\gamma - 2\delta[\alpha + (\ln \gamma)_x] \equiv \xi_2(x)\eta_2(y). \quad (10)$$

Существенную роль при этом играют предположения

$$\beta \neq 0, \quad \gamma \neq 0. \quad (11)$$

**Теорема 1.** Пусть при выполнении первого неравенства из (11) имеет место хоть одно из тождеств (3), (4), или найдутся такие функции  $\xi_1(x)$ ,  $\eta_1(y)$ , что одновременно с (5) удовлетворяется (6). Тогда система (1) разрешима в квадратурах.



**Теорема 2.** *Теорема 1 остается справедливой, если заменить первое неравенство (11) вторым, а тождества (3), (4), (5), (6) соответственно на (7), (8), (9), (10). При этом роль  $\xi_1(x)$ ,  $\eta_1(y)$  должны играть  $\xi_2(x)$ ,  $\eta_2(y)$ .*

Понятно, что соотношения (3) – (11) могут быть записаны непосредственно через коэффициенты системы (1): для этого достаточно подставить в них значения (2).

В заключение отметим, что изложенные результаты получены путем развития основной идеи работы [1].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Zhegalov V.I. *Solution of Volterra partial integral equations with the use of differential equations* // Differential Equations. – 2008. – V. 44. – No 7. – P. 900–908.

**С. В. Журо, В. Н. Попов, И. В. Тестова**

*Северный (Арктический) федеральный университет*

*им. М. В. Ломоносова*

*zhuro2008@yandex.ru, testovairina@mail.ru, v.popov@narfu.ru*

#### ИНТЕГРАЦИЯ

#### КОМПЛЕКСНО-ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ MICROSOFT SHAREPOINT И 1С: ПРЕДПРИЯТИЕ

По мере развития производственных компаний все большую популярность приобретают комплексно-информационные системы. Они в значительной мере облегчают управление предприятием, ведение документации, информирование и внутреннее общение сотрудников, обеспечивая надежное хранение и совместное использование различных документов.

В настоящее время рынок интернет-порталов является одним из наиболее быстрорастущих. Все большее количество руководителей решают укрепить рыночную позицию своей компании путем внедрения современных информационных технологий. Поэтому за последние годы на российский рынок вышло много различных порталых решений, отличающихся друг от друга возможностями, удобством, требованиями и ценой. Некоторые компании, находя более приемлемые для себя решения, принимают решения об изменении используемых информационных систем. В этом случае возникает вопрос о необходимости интеграции данных между этими системами. Для ее осуществления большинство систем имеет огромные возможности. Задача стоит лишь в выборе способа, настройке и организации обмена.

В рамках работы разработан метод интеграции комплексно-информационной системы Microsoft SharePoint 2010 с 1С: Предприятием 8.2 путем синхронизации данных между этими системами, осуществляемой путем использования soap-запросов. С помощью soap-запросов можно добавлять, удалять, редактировать списки, работать с файлами и выполнять многие другие действия. Возможности 1С и SharePoint обрабатывать такие запросы позволяют наиболее быстро и просто переносить информацию из базы данных одной системы в другую, обеспечивая сохранность переносимых данных.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ноэл М., Спенс К. *Microsoft Sharepoint 2010. Полное руководство*. – М.: ООО И.Д. Вильямс, 2011. – 880 с.
2. Радченко М. Г., Хрусталева Е. Ю. *1С: Предприятие 8.2. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы*. – М.: ООО 1С-Паблишинг, 2009. – 874 с.

**Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
damir.zh@mail.ru, Iskander.Kalimullin@ksu.ru*

**О НЕКОТОРЫХ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ  
ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫХ  
ПЕРЕСТАНОВОК**

Мы будем рассматривать группу  $\mathcal{C}$  всех вычислимых перестановок на  $\omega$  и класс  $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$  всех примитивно рекурсивных перестановок. Пусть  $\langle \mathcal{P} \rangle$  это наименьшая подгруппа, содержащая  $\mathcal{P}$ .

Для каждого  $n > 0$  определим подклассы  $\mathcal{P}_n^+$  и  $\mathcal{P}_n^-$  из подгруппы  $\langle \mathcal{P} \rangle$  следующим образом:

$$\mathcal{P}_n^+ = \{\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_3 \dots \pi_n^{(-1)^{n+1}} : \pi_1, \dots, \pi_n \in \mathcal{P}\};$$

$$\mathcal{P}_n^- = \{\pi_1^{-1} \pi_2 \pi_3^{-1} \dots \pi_n^{(-1)^n} : \pi_1, \dots, \pi_n \in \mathcal{P}\}.$$

Для любого  $n \geq 1$   $\mathcal{P}_n^+$  есть класс всех “суперпозиций длины, не большей  $n$ ” перестановок, принадлежащих  $\mathcal{P}_1^+ \cup \mathcal{P}_1^-$ , из которых записанная слева принадлежит  $\mathcal{P}_1^+$ .

Ясно, что  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^+$ ,  $\mathcal{P}_n^+ \cup \mathcal{P}_n^- \subseteq \mathcal{P}_{n+1}^+ \cap \mathcal{P}_{n+1}^-$  для всех  $n$ . Также выполнены следующие равенства:

$$\text{для нечётных } n : \{p^{-1} | p \in \mathcal{P}_n^+\} = \mathcal{P}_n^- \ \& \ \{p^{-1} | p \in \mathcal{P}_n^-\} = \mathcal{P}_n^+$$

$$\text{для чётных } n : \{p^{-1} | p \in \mathcal{P}_n^+\} = \mathcal{P}_n^+ \ \& \ \{p^{-1} | p \in \mathcal{P}_n^-\} = \mathcal{P}_n^-$$

Графиком перестановки  $p$  будем называть следующее множество:

$$\text{graph } p = \{\langle x, y \rangle : y = p(x)\}.$$

Задача, которую в [2] рассмотрел В. В. Козьминых, состояла в том, чтобы проверить условие  $(\mathcal{P}_{k+1}^+ \cap \mathcal{P}_{k+1}^-) / (\mathcal{P}_k^+ \cup \mathcal{P}_k^-) \neq \emptyset$

для любого  $k = \overline{1, 5}$ , т. е. установить, существует ли примитивно рекурсивная перестановка  $q \in (\mathcal{P}_{k+1}^+ \cap \mathcal{P}_{k+1}^-) / (\mathcal{P}_k^+ \cup \mathcal{P}_k^-)$ . Для решения этой задачи В. В. Козьминых для каждого класса  $\mathcal{P}_k^+$  и  $\mathcal{P}_k^-$  построил свой критерий принадлежности к нему примитивно рекурсивных перестановок.

Мы, в свою очередь, хотим усилить этот результат и построить вычислимую перестановку  $q$  с условием  $q^2 = e$ . Тогда наша задача разбивается на два случая:

- 1) При  $k = 2n$  достаточно построить вычислимую перестановку  $q$  такую, что,  $q \in \mathcal{P}_{2n+1}^+ / (\mathcal{P}_{2n}^+ \cup \mathcal{P}_{2n}^-)$  для  $n = \overline{1, 2}$ .
- 2) При  $k = 2n + 1$  надо построить вычислимую перестановку  $q$  такую, что  $q \in (\mathcal{P}_{2n+2}^+ \cap \mathcal{P}_{2n+2}^-) / \mathcal{P}_{2n+1}^+$  для  $n = \overline{0, 2}$ .

Полученные результаты для  $k = 1, 2$  можно сформулировать в виде следующих двух теорем. (Случаи  $k = \overline{3, 5}$  исследуются в настоящее время).

**Теорема 1.** *Существует вычислимая перестановка  $q \in (\mathcal{P}_2^+ \cap \mathcal{P}_2^-) / (\mathcal{P}_1^+ \cup \mathcal{P}_1^-)$  такая, что  $q^2 = e$ .*

**Лемма 1.** *Существует перестановка  $p$ , такая, что  $\text{graph } p$  является примитивно рекурсивным и  $p \neq \alpha_i(x)$ , где  $\{\alpha_i\}_{i \in \omega}$  является вычислимой нумерацией всех примитивно рекурсивных функций.*

**Теорема 2.** *Существует вычислимая перестановка  $q \in (\mathcal{P}_3^+ \cap \mathcal{P}_3^-) / (\mathcal{P}_2^+ \cup \mathcal{P}_2^-)$  такая, что  $q^2 = e$ .*

Для доказательства этой теоремы используются следующие две леммы:

**Лемма 2.** *Существует вычислимая перестановка  $p \in \mathcal{P}_2^+ / \mathcal{P}_2^-$  такая, что  $p^2 = e$ .*

**Лемма 3.** *Существует вычислимая перестановка  $r \in \mathcal{P}_2^- / \mathcal{P}_2^+$  такая, что  $r^2 = e$ .*

И. Ш. Калимуллин в своей статье [1] поставил вопрос: возможно ли перенести результаты, полученные в [2], на случай перестановок, вычисляемых за полиномиальное время.

В полиномиальном случае для каждого  $n > 0$  определим подклассы  $\mathcal{Pol}_n^+$  и  $\mathcal{Pol}_n^-$  перестановок, вычисляемых за полиномиальное время следующим образом:

$$\mathcal{Pol}_n^+ = \{\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_3 \dots \pi_n^{(-1)^{n+1}} : \pi_1, \dots, \pi_n \in \mathcal{Pol}\};$$

$$\mathcal{Pol}_n^- = \{\pi_1^{-1} \pi_2 \pi_3^{-1} \dots \pi_n^{(-1)^n} : \pi_1, \dots, \pi_n \in \mathcal{Pol}\}.$$

В [1] было доказано, что для каждой вычислимой перестановки  $p$  существуют вычисляемые за полиномиальное время перестановки  $\pi_i$ , где  $1 \leq i \leq 3$ , такие, что  $p = \pi_1 \pi_2^{-1} \pi_3 \pi_1^{-1} \pi_2 \pi_1^{-1}$ . Также в [1] были найдены критерии в полиномиальном случае для классов  $\mathcal{Pol}_2^+$  и  $\mathcal{Pol}_2^-$ .

На данном этапе исследования стоит проблема нахождения критериев принадлежности перестановок, вычисляемых за полиномиальное время, к остальным классам  $\mathcal{Pol}_k^+$  и  $\mathcal{Pol}_k^-$  из иерархии вычисляемых перестановок. Тогда станет возможным построение иерархии групп вычисляемых перестановок в полиномиальном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-31389, 12-01-97008) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных - докторов наук МД-4838.2013.1.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kalimullin I. Sh. *On primitive recursive permutations* // In: Cooper S.B., Goncharov S.S. eds. *Computability and models*. New

York, NY: Kluwer Academic/Plenum Publishers. – 2003. – P. 249–258.

2. Козьминых В. В. *О представлении частично рекурсивных функций в виде суперпозиций* // Алгебра и логика. – 1972. – Т. 11. – № 3. – С. 270–294.

3. Соар Р. И. *Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечисляемых множеств : пер. с англ. / Р. И. Соар.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2000. – 576 с.

**Н. В. Зайцева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
queen-natalya@mail.ru*

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ  
ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ  
УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ**

Рассматривается смешанная задача для  $B$ -гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода и доказывается единственность ее решения.

Пусть  $D = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$  – прямоугольная область в координатной плоскости  $Oxt$ .

В области  $D$  рассмотрим  $B$ -гиперболическое уравнение

$$\square_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - B_x u = 0, \quad (1)$$

где  $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x}$  – оператор Бесселя.

Требуется найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C^2(D) \cap C^1(D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1) \cap C(\bar{D}), \quad (2)$$

$$\square_B u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$u(l, t) + \int_0^l u(x, t) x^k dx = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – заданные, достаточно гладкие функции,  $\Gamma_0 = \{(x, t) | 0 \leq t \leq T, x = 0\}$ ,  $\Gamma_1 = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, t = 0\}$ .

**Теорема.** *Смешанная задача (2) – (6) не может иметь более одного решения.*

Для доказательства единственности решения задачи воспользуемся методом от противного. Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – два предполагаемых решения задачи (2) – (6). Тогда их разность  $\omega = u_1 - u_2$  удовлетворяет условиям (2) – (4), однородным начальным условиям

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad \omega_t|_{t=0} = 0, \quad (5_0)$$

и интегральному условию

$$\omega(l, t) + \int_0^l \omega(x, t) x^k dx = 0. \quad (6_0)$$

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$x^k v_t \square_B v \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x^k \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left( x^k \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Полагая здесь  $v = \omega$ , с учетом того, что  $\omega$  удовлетворяет уравнению (2), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x^k \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( x^k \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

Интегрируя последнее равенство по  $x$  на отрезке  $[0, l]$  и дифференцируя два раза по  $t$  условие (6<sub>0</sub>), после некоторых преобразований приходим к выводу, что  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ , и, следовательно,  $\omega = c$ . Из этого равенства и начальных условий (5<sub>0</sub>) следует, что  $c = 0$  и, следовательно,  $\omega = 0$  и  $u_1 = u_2$ . Теорема доказана.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бейтман Г. *Высшие трансцендентные функции. Т. 2.* – М.: Наука, 1966. – 296 с.
2. Ватсон Г. Н. *Теория бесселевых функций. Часть первая.* – М.: И.Л., 1949. – 799 с.

**Т. В. Зыкова**

*Сибирский федеральный университет,  
zykovatv@mail.ru*

#### **ОБ ИНТЕГРАЛЕ МЕЛЛИНА-БАРНСА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Интегральные преобразования Меллина для решения общей системы алгебраических уравнений исследовались в ряде работ (см. [1], [2]), в которых прямое преобразование было вычислено с помощью линеаризации системы (замены переменной специального вида). Идея линеаризации алгебраического



уравнения принадлежит Меллину. В работе [3] вычисляется преобразование Меллина мономиальной функции решения общей полиномиальной системы. В настоящей работе получено интегральное представление типа Меллина-Барнса мономиальной функции вектор-решения системы полиномиальных уравнений специального вида с указанием множества сходимости.

Рассмотрим приведенную система двух полиномиальных уравнений

$$y_i^{m_i} + x_i y^{\lambda^{(i)}} - 1 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

с двумя переменными коэффициентами  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ . Составим матрицы из показателей мономов системы (1):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} - m_1 & \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} - m_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что  $\tilde{\Delta} := \det \tilde{\Psi} > 0$ . Введем векторы

$$\tilde{\psi}_1^\perp = \left( \lambda_1^{(2)}, m_1 - \lambda_1^{(1)} \right), \quad \tilde{\psi}_2^\perp = \left( m_2 - \lambda_2^{(2)}, \lambda_2^{(1)} \right),$$

ортогональные вектор-строкам матрицы  $\tilde{\Psi}$ .

Справедлива

**Теорема 1.** *Мономиальная функция  $\frac{1}{y^\mu(-x)}$ , составленная из координат решения системы (1), представляется следующим интегралом Меллина-Барнса*

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^2} \prod_{i=1}^2 \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i} \langle \tilde{\psi}_i, z \rangle\right) \Gamma(z_i)}{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i} \langle \psi_i, z \rangle + 1\right)} \right] \times \\ \times Q(z_1, z_2) x_1^{-z_1} x_2^{-z_2} dz_1 dz_2,$$

где полином

$$Q(z_1, z_2) = \frac{1}{m_1 m_2} \left( \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2^{(1)} z_1 + \mu_2 \lambda_1^{(2)} z_2 - \tilde{\Delta} z_1 z_2 \right),$$

а вектор  $\gamma \in \mathbb{R}^2$  выбирается из открытого множества

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_i + \langle \tilde{\psi}_i, u \rangle > 0, i = 1, 2 \right\}.$$

Множество сходимости интеграла (2) в переменных  $\theta = \arg x$  определяется неравенствами

$$|\theta_i| < \frac{\pi}{m_i} (m_i - \lambda_i^{(i)}), \quad \left| \langle \tilde{\psi}_i^\perp, \theta \rangle \right| < \frac{\pi}{m_i} \tilde{\Delta}, \quad i = 1, 2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31021-мол\_а).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Антипова И. А. *Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды* // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44. – № 5. – С. 972–980.
2. Степаненко В. А. *О решении системы  $n$  алгебраических уравнений от  $n$  неизвестных с помощью гипергеометрических функций* // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия физ.-мат. науки. – 2003. – № 2. – С. 35–48.
3. Antipova I. A., Zyкова T. V. *Mellin transform for monomial functions of the solution to the general polynomial system* // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2013. – V. 6. – No 2. – P. 475–486.

**Т. В. Зыкова**

*Сибирский федеральный университет,  
zykovatv@mail.ru*

**О ВЕБ-ОРИЕНТИРОВАННОЙ СРЕДЕ MOODLE  
В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ  
СИБИРСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

Использование различных электронных обучающих курсов позволяет визуализировать учебный материал и развивать познавательную деятельность студентов. Однако при создании таких курсов возникают вопросы, связанные с отсутствием универсальной технологии их разработки, в частности вариативностью выбора дидактических материалов. В данной работе представлены примеры подходов к представлению дидактического материала (контента) в обучении дисциплине “Математический анализ”, базирующихся на основе интеграции математических и информационных дисциплин. Такие подходы в настоящее время реализуются в институте космических и информационных технологий СФУ при поддержке электронных обучающих курсов [1]. В обучении сочетаются традиционные формы лекционных и практических занятий с самостоятельной домашней работой в онлайн-режиме с использованием лично ориентированной веб-программы.

Необходимость повышения качества образования в соответствии с требованиями, представленными в компетентностном формате стандартов третьего поколения ФГОС, актуализирует теоретические и методические проблемы, связанные с формированием профессиональной компетентности студентов вузов на основе комплексного использования различных подходов в

обучении, опирающихся на различные образовательные парадигмы: компетентностную, знаниевую, личностно ориентированную и др. Фактически обучение следует осуществлять на основе полипарадигмального подхода при ведущей роли компетентностного подхода [2]. В данной работе вопросы, связанные с разработкой электронных обучающих курсов для различных дисциплин в рамках полипарадигмального подхода, способствующего формированию профессиональной компетентности студентов инженерных вузов, рассматриваются на примере обучения математике и формирования математической компетентности. Концепция обучения математике на основе полипарадигмального подхода опирается на следующие принципы обучения: пролонгированной компетентности, профессионального контекста, прикладной значимости, междисциплинарной интеграции, математико-информационного дополнения, оперативной рефлексивности, исторической преемственности.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зыкова Т. В., Сидорова Т. В., Шершнева В. А., Цибульский Г. М. *Опыт использования веб-ориентированной среды Moodle в обучении математике студентов инженерного вуза на основе полипарадигмального подхода* // Информатика и образование. – 2013. – Т. 244. – № 5. – С. 37–40.

2. Носков М. В., Шершнева В. А. *Математическая подготовка как интегрированный компонент компетентности инженера (анализ государственных образовательных стандартов)* *Alma mater* // Вестник высшей школы. – 2005. – № 7. – С. 9–13.

Д. О. Калишева

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
darja-kalisheva@rambler.ru*

## СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ЖЕСТКОГО ТЕЛА В МАГНИТНЫХ ОПОРАХ ЗА СЧЕТ УПРАВЛЕНИЯ

Имеется модель, в которой небольшое ферромагнитное жесткое тело массы  $m$  должно удерживаться на расстоянии  $z_0$  от магнита. На тело действует сила тяжести и магнитная сила.

Данная модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -mg + \frac{L_0 z_0}{2} \cdot \frac{(I_0 - I)^2}{(z_0 - z)^2}; \\ L(z)\dot{I} + RI &= U. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $L(z) = \frac{L_0}{1 - \frac{z}{z_0}}$  – индуктивность электромагнита,  $I$  – ток управления.

Данная система является неустойчивой [5], поэтому, чтобы удержать тело в состоянии равновесия, необходимо ввести систему управления. В данной работе неустойчивость будет парироваться за счет управления по напряжению.

Система (1) – автономная динамическая система третьего порядка, в которой  $(z, \dot{z}, I)$  – фазовые переменные. Предположим, что напряжение  $U$  представляет собой линейную комбинацию управляющих параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  и имеет вид:  $U = \alpha z + \beta \dot{z} + \gamma I$ .

Управление нужно осуществлять таким образом: с установки, состоящей из электромагнита и ферромагнитного жесткого тела, измерительной системой снимаются показатели текущей

координаты и тока, а также вычисляется скорость. В зависимости от этих показателей с учетом неравенств на управляющие параметры  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  формируется управляющее напряжение, которое возвращает систему в состояние равновесия.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баландин Д. В., Коган М. М. *Управление движением вертикального жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 5. – С. 3–17.
2. Вышков Ю. Д., Иванов В. И. *Магнитные опоры в автоматике*. – М.: Энергия, 1978. – 160 с.
3. Журавлев Ю. Н. *Активные магнитные подшипники: теория, расчет, применение*. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с.
4. Знышев В. В. и др. (НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского), Друмов В. В. и др. (ФГУП ОКБМ им. И.И. Африкантова, Нижний Новгород) *Моделирование динамики вертикального неоднородного гибкого ротора на электромагнитном подвесе* // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Механика. – Нижний Новгород: Изд. ННГУ, 2006. – Вып. 1(7). – С. 14–19.
5. Earnshaw S. *On the nature of the molecular forces* // Transactions Cambridge Phil. Society. – 1842. – V. 7. – P. 97–112.

**М. Р. Камилов, В. А. Рыжов, Е. В. Биряльцев,  
Д. В. Бережной**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
marselk@mail.ru, vrizov@mail.ru, igenbir@yandex.ru,  
bereznoi.dmitri@mail.ru*

**ВОЗМОЖНОСТЬ ИЗУЧЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ  
ГЕОЛОГИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА НА ОСНОВЕ  
ПОЛНОВОЛНОВОГО ЧИСЛЕННОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Небольшие глубины исследования (до 100 м) обычно определяют выбор метода преломленных волн (МПВ) как основного в инженерной сейсморазведке. Малая глубинность исследований диктует необходимость использовать высокочастотную модификацию метода, что дает возможность более детального расчленения разреза по упругим свойствам. В то же время значительная степень поглощения в верхней части геологического разреза энергии упругих волн определяет использование систем наблюдения, состоящих из коротких годографов.

Одной из модификаций сейсмических методов, применимых к изучению ЗМС и ВЧР, является метод MASW [1], основанный на восстановлении разреза поперечных скоростей по форме дисперсионной кривой поверхностной волны Релея. Однако ограничением этого метода является то, что невозможно разделить низкочастотное волновое поле по типам волн вблизи пункта возбуждения из-за их интерференции между собой.

В данной работе изучим возможность восстановления свойств среды по динамическим характеристикам ее отклика, не выделяя в нем определенные типы волн, а анализируя волновой процесс, как он есть. Для того чтобы использовать

форму кривой отклика для восстановления свойств разреза, воспользуемся комплексом полноволнового численного моделирования [2].

Для решения обратной задачи – восстановления характеристик разреза по его отклику на импульсное воздействие, заранее было решено множество прямых задач в условиях плоскопараллельного залегания группы пластов, причем моделировались также и случаи, когда нижележащие пласты имеют пониженные скорости относительно вышележащих в различных модификациях.

Проверка принципиальной работоспособности метода производилась с использованием численного моделирования. Для этого было промоделировано несколько тестовых разрезов с различными видами неоднородностей в них.

Восстановление скоростного разреза проводилось по следующему алгоритму. Для каждой точки профиля, где был произведен удар, выполнялся поиск максимально схожей формы отклика от этого удара с откликами в базе моделей. Скоростной разрез максимально схожей модели подставлялся в точку удара. В качестве метрики схожести откликов был взят коэффициент корреляции Пирсона. Таким образом, был восстановлен каждый тестовый разрез.

Идея использовать отклик среды полностью без разделения его на типы волн кажется весьма перспективной с точки зрения детальности и информативности восстановления. Очевидно, что данный подход сопровождается ресурсоемкими вычислениями, которые, вероятно, сдерживали его развития ранее. Безусловно, прямой перебор всех возможных вариантов это не оптимальный путь развития такого подхода. В качестве априорной информации могут быть использованы результаты уже



известных методов. Предполагается, что дальнейшее развитие данного подхода будет происходить в направлении последовательного адаптивного восстановления характеристик модели среды.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Park C. B., Miller R. D., Xia J. *Multichannel analysis of surface waves* // Geophysics. – 1999. – V. 64. – P. 800–808.

2. Галимов М. Р., Биряльцев Е. В. *Некоторые технологические аспекты применения высокопроизводительных вычислений на графических процессорах в прикладных программных системах* // Вычисл. мет. и програм. – 2010. – Т. 11. – С. 77–93.

**Л. П. Каминский, В. А. Степанов**

*Сибирский федеральный университет,*

*kami-lev@yandex.ru, wowchegg@mail.ru*

#### ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ КРИПТОГРАФИЯ

##### 1. Описание работы тригонометрического шифра

Шифр был разработан В.П.Сизовым и успешно представлен на Всероссийскую конференцию “РусКрипто” в 2005 году [1].

**Алгоритм шифрования.** По координатной оси  $X$  расставляются компьютерные символы в любом порядке. Каждому символу соответствует свой порядковый номер от 1 до 256. Всего используется в компьютере 256 символов. По оси  $Y$  расставляем те же самые символы в любом (таком же или другом) порядке. Функция, посимвольно переводящая исходный текст

в шифротекст

$$Y = X + 256 \cdot (\cos(Z + N \cdot \Delta x)) \pmod{256},$$

где  $X$  — порядковый номер того символа который нужно зашифровать;  $Z, \Delta x$  — любые числа, являющиеся секретными параметрами нашего ключа. Остальные параметры не являются секретными.  $Z, \Delta x \in (-\infty; +\infty)$   $N$  — номер по счету шифруемого символа в исходном тексте;  $256$  — мощность исходного алфавита. Мощность исходного алфавита может быть любой.

**Алгоритм дешифровки.** Тригонометрический шифр является примером симметричного алгоритма шифрования, следовательно:

$$X = Y - 256 \cdot (\cos(Z + N \cdot \Delta x)) \pmod{256}.$$

## 2. Математические уязвимости и генетический алгоритм

В 2011 году был разработан генетический алгоритм, ставящий под сомнение надежность тригонометрического шифра [2]. В нашем примере мы выбрали косинус, имеющий период  $2\pi$ . Рассмотрим следующие выражения:

$$\cos((Z + 2\pi) + N \cdot \Delta x) = \cos(Z + N \cdot \Delta x),$$

$$\cos(Z + N \cdot (\Delta x + 2\pi)) = \cos(Z + N \cdot \Delta x).$$

Второе выражение справедливо только для целого  $N$ , что выполняется. Таким образом, задача имеет не одно решение, а целое множество, каждое из которых отличается на  $2\pi$  по любой координате. Это “уязвимое место” справедливо и для остальных модификаций криптосхемы. Для получения текста, близкого к исходному, в качестве решения можно рассматривать не точку (пару секретных параметров), а некоторую ее

окрестность. Простые практические исследования показали, что в окрестности  $10^{-5}$  в тексте уже легко прослеживается смысл. Этот факт снижает пространство поиска с  $R^2$  до прямоугольника

$$0 < Z < 2\pi, 0 < \Delta x < 2\pi.$$

На нем построим равномерную сетку с шагом  $h = 10^5$ . Решениями будут служить точки в узлах сетки. Для их представления потребуется хранить 5 разрядов после запятой по каждой координате. Количество элементов в пространстве решений составит

$$(2\pi \cdot 10^5)^2 \approx 4 \cdot 10^{11}.$$

Однако решить даже такую задачу полным перебором, в отличие от генетического алгоритма, за приемлемое время не представляется возможным.

### 3. Способы улучшения

На данный момент существует два основных способа улучшения алгоритма тригонометрического шифра:

- 1) Использование функции с большим периодом, так как период влияет на количество переборов вариантов ключа с нужной точностью. (Период  $k\pi$  – количество вариантов ключа пропорционально  $k^2$ )
- 2) Введение третьего параметра ключа. Данное улучшение позволит перейти от плоскости, на осях которой расположены параметры ключа, к объему. Теперь для того, что бы найти тройку параметров с точностью  $10^{-5}$ , потребуется уже не  $10^{10}$ , а  $10^{15}$  переборов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сизов В. П. *Криптографические алгоритмы на основе тригонометрических функций.*
2. Городилов А. Ю., Митраков А. А. *Криптоанализ тригонометрического шифра с помощью генетического алгоритма* // Вест. Пермск. ун-та. – 2011. – № 4(8).

**Д. В. Капитанов**

*Нижегородский государственный университет*

*им. Н. И. Лобачевского,*

*dis-kdv@mail.ru*

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНО  
ЗАКРЕПЛЕННОГО СТЕРЖНЯ ПОСЛЕ ПОТЕРИ  
УСТОЙЧИВОСТИ**

Рассматриваются малые низкочастотные плоские изгибные колебания однородного прямого консольно закрепленного стержня с сжимающей продольной нагрузкой на свободном конце. Вывод уравнения и краевых условий осуществляется с использованием принципа Гамильтона-Остроградского [1].

Граница устойчивости определяется при помощи двух различных подходов. Первый подход реализован в виде основанного на методе Бубнова-Галёркина представления проблемы собственных значений с использованием двух первых функций сравнения [2, 3], в результате чего получена система дифференциальных четвёртого порядка уравнений в полных производных. В разработанном алгоритме на каждом шаге малого изменения нагрузки от нуля до некоторого значения система исследуется на устойчивость в соответствии с критерием

Рауса-Гурвица. Второй подход состоит в использовании точной формулировки проблемы собственных значений. Полученная в результате задача на собственные значения с учётом краевых условий сводится к системе из десяти нелинейных уравнений с десятью неизвестными. На каждом шаге изменения параметра нагрузки система решается итерационным методом Ньютона, причём в качестве начальных значений берутся значения, приведённые в литературе для стержня при отсутствии нагрузки [4], а в дальнейшем значения, полученные на предыдущем шаге. Важной особенностью исследования является то, что разработанный подход позволяет получить точное решение задачи, так как не ограничивается традиционным учётом только небольшого числа низших форм колебаний [5].

Для исследования поведения стержня после потери устойчивости необходимо рассмотреть изменения структуры по меньшей мере четырёхмерного фазового пространства. В соответствии с общими представлениями теории динамических систем [6] и анализа сущности возникающих физических процессов с учётом нелинейных факторов и демпфирования следует ожидать бифуркацию в виде рождения устойчивого предельного цикла из устойчивого до бифуркации состояния равновесия. С использованием метода нелинейных форм колебаний [7 – 9] можно найти форму, по которой происходит потеря устойчивости, и понизить минимальный порядок системы до второго и исследовать характер изменения структуры фазовой плоскости.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фролов К. В. *Динамика конструкций гидроаэроупругих систем*. – М.: Наука, 2002.
2. Болотин В. В. *Неконсервативные задачи теории упругой*

*устойчивости*. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы*. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1979.

4. *Справочник по динамике сооружений* / Под ред. Б.Г. Корнева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972.

5. Капитанов Д. В., Овчинников В. Ф., Смирнов Л. В. *Неконсервативная устойчивость трубопровода и консольного стержня* // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2010. – № 2. – С. 117–123.

6. Горяченко В. Д. *Элементы теории колебаний: Учеб. пособие для вузов*. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001.

7. Shaw S. W., Pierre C. *Normal modes for nonlinear vibratory systems* // J. Sound Vibration. – 1993. – V. 164. – P. 58–124.

8. Avramov K. V. *Analysis of forced vibrations by nonlinear modes* // Nonlinear Dynamics. – 2008. – V. 53. – P. 117–127.

9. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. *Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления*. – М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2010.

Э. Н. Карабашева

Казанский государственный архитектурно-строительный  
университет, // *enge.happy@mail.ru*

**ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С ДВУСТОРОННИМ  
РАЗНОГО ПОРЯДКА ЗАВИХРЕНИЕМ  
НА БЕСКОНЕЧНОСТИ**

Рассматривается краевая задача Гильберта для функций аналитических в верхней полуплоскости. Задача состоит в определении аналитической и ограниченной в области  $D$  функции  $\Phi(z)$  по заданному краевому условию:

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t), \quad t \in \partial D,$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  – заданные на контуре  $L$  непрерывные действительные функции точки  $t$  контура  $L$ . Считаем выполненным условие  $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$ .

Функция  $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$  может быть представлена в виде:

$$\nu(t) = \begin{cases} \nu^- t^{\rho^-} + \tilde{\nu}(t), & t < 0, \quad 0 \leq \rho^- < 1, \\ \nu^+ |t|^{\rho^+} + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \quad 0 \leq \rho^+ < 1, \end{cases}$$

где  $\rho^-$ ,  $\rho^+$ ,  $\nu^-$  и  $\nu^+$  являются известными числами. Считается, что  $(\rho^-)^2 + (\rho^+)^2 \neq 0$ . Функция  $\tilde{\nu}(t)$  удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси, а вне некоторого интервала  $(-R, R)$  условие Гельдера предстает в виде неравенства

$$|\tilde{\nu}(t_1) - \tilde{\nu}(t_2)| \leq K \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^\alpha,$$

где  $K > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Общее решение задачи предоставляется формулой

$$\Phi(z) = ie^{\Gamma(z)} e^{(iP_1(z) - Q_1(z))} e^{(iP_2(z) - Q_2(z))} F(z),$$

где  $\Gamma(z)$  – интеграл Шварца с плотностью  $\tilde{\nu}(t)$ ,  $F(z)$  – произвольная целая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на порядок и рост. Конструктивные построения функций  $P_1(z)$ ,  $Q_1(z)$ ,  $P_2(z)$ ,  $Q_2(z)$  обеспечивают аналитическую реализацию особенности на бесконечности функции  $\nu(t)$ .

Стоит отметить, что данная задача при  $\rho^- = \rho^+$  в близкой постановке была рассмотрена в работе [1] и при том же самом условии  $\rho^- = \rho^+$  исследовалась в работах [2], [3]. Получается, что задача с двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности относится к еще не рассмотренному случаю задачи Гильберта.

При сделанных предположениях в классе ограниченных функций найдены формулы общего решения однородной и неоднородной задач. Для получения решения неоднородной задачи разработан алгоритм построения некоторой целой функции с заданными свойствами. Была проведена работа по полному исследованию разрешимости однородной задачи в классе функций ограниченных и аналитических в верхней полуплоскости. Получены условия существования и единственности решения задачи. Описано множество решений задачи в случаях неединственности решения.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сандрыгайло И. Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16–23.
2. Salimov R., Shabalin P. *The Riemann-Hilbert boundary value problem with a countable set of coefficient discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2* // Operator Theory: Advances and Applications. – Springer Basel AG, 2012. – V. 221. – P. 571-585.



3. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Однородная задача Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности порядка  $1/2 \leq \rho < 1$*  // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 11. – С. 67–71.

**А. В. Карамов, Д. В. Бережной**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
akaratovvnedru@mail.ru*

### **РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ГРУНТОВЫХ МАССИВОВ С УЧЕТОМ ДИЛАТАНСИИ МКЭ**

Известно, что в зависимости от режимов и условий нагружения и свойств геоматериала развитие деформации может протекать в режимах дилатансии и уплотнения. На определенном интервале давлений больших различий в особенностях поведения геологических сред не проявляется. В условиях сдвига прочность грунта сильно зависит от гидростатического давления, а сдвиговая деформация обычно сопровождается изменением объема. С ростом давления происходит увеличение эффективной прочности. В ходе сдвиговой деформации имеет место дилатансия, рассеянное накопление микротрещин с увеличением эффективного объема. Разрушение в основном протекает по межзерненным границам, а в полосах локализации заметно разрыхление среды. Различие в поведении плотных и пористых пород проявляется при давлениях, превышающих некоторую пороговую величину. Тогда с ростом давления эффективная прочность пористых пород начинает снижаться. Чем выше пористость, тем ниже этот порог. При таких давлениях в пористых средах начинается интенсивное разрушение

зерен, скелета породы, в результате чего поровое пространство сокращается, имеет место уплотнение, или контракция. В этом случае могут формироваться не только полосы локализованного сдвига с уплотнением, но и зоны локализованного уплотнения, в которых сдвиговая составляющая мала.

В зоне локализации иногда можно выделить несколько слоев, различающихся по степени поврежденности и пористости. При одних условиях пористость и поврежденность среды растут от краев к центру полосы. В других условиях в центральном слое наблюдается уплотнение, при котором пористость оказывается ниже, а в слоях по краям полосы локализации пористость оказывается выше, чем в окружающем материале. Различие в поведении плотных и высокопористых сред при большом давлении проявляется также в ориентации полос локализации деформации. В плотных, а также в высокопористых материалах при давлении ниже порогового полосы локализации образуют угол менее  $45^\circ$  к оси наибольшего сжатия. В высокопористых средах при больших давлениях этот угол превышает  $45^\circ$ .

При формулировке условий разрушения, построении поверхности предельного состояния обычно рассматривают процессы, характерные лишь для плотных или пористых материалов. Для плотных материалов используют коническую поверхность предельного состояния, а для пористых - замкнутую комбинарованную или эллиптическую формы.

Уплотнение среды обычно развивается с упрочнением среды. Для продолжения этого процесса необходимо увеличение давления, т.к. дробление зерен приводит к увеличению числа контактов, следовательно, к распределению и снижению действующей на них нагрузки. В соответствии с этим предельная

поверхность расширяется, величина порогового давления растет. Сдвиговая деформация с дилатансией до определенного предела также протекает с упрочнением. В ходе сдвига меняется сцепление, с которым в значительной мере связано упрочнение. Кроме того, увеличение эффективного объема, обусловленное дилатансией, приводит в стесненных условиях к увеличению давления, следовательно, согласно диаграмме предельной поверхности, к росту эффективной прочности. Возникает эффект дилатансионного упрочнения. Но существует некоторый порог, после чего дилатансия прекращается. Вероятно, это происходит, когда дилатансия и уплотнение компенсируют друг друга. Таким образом, существует взаимосвязь между пороговым давлением, величиной пористости, соответствующей текущему состоянию среды, и началом разупрочнения, соответственно, и началом интенсивного разрушения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31212, 13-97057, 13-01-97058).

**М. И. Киндер**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
mkinder@rambler.ru*

## **ОБ ИДЕАЛЬНЫХ И СОВЕРШЕННЫХ РАЗБИЕНИЯХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел называется разбиением числа. Разбиения изучаются в задачах, прежде всего, комбинаторного и теоретико-числового характера. К классическим комбинаторным относятся задачи подсчета и перечисления разбиений данного типа,

в теории чисел решают проблемы об аддитивных представлениях чисел с арифметическими ограничениями на слагаемые.

Разбиение неотрицательного целого числа  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_s$  назовем *идеальным*, если каждое целое число  $t$  от 0 до  $M$  можно представить единственным образом в виде  $t = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s$ , где каждое  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , при этом повторяющиеся части  $m_i$  считаются неразличимыми. Если все части разбиения  $m_i$  рассматривать как разновесы для весов, каждое такое представление указывает единственный способ взвешивания массы  $t$  с помощью гирь массой  $m_i$ . При этом  $\alpha_i = 0$  означает, что гиря с массой  $m_i$  не участвует во взвешивании, а в случае  $\alpha_i = -1$  ( $\alpha_i = 1$ ) гиря  $m_i$  находится на той же (на другой) чашке весов, что и масса  $t$ .

Известно [1], [2], что количество идеальных разбиений числа совпадает с количеством упорядоченных разложений числа  $2M + 1$  в произведение натуральных чисел без единичных множителей. Пусть  $N > 1$ . Количество нетривиальных упорядоченных факторизаций числа  $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$  зависит только от показателей  $n_1, n_2, \dots, n_s$ , обозначим это количество через  $T(n_1, n_2, \dots, n_s)$ .

**Теорема 1.** *Для натуральных чисел, разложения которых не содержат квадратов простых чисел, справедливо рекуррентное соотношение*

$$T(1^s) = \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k T(1^k), \quad T(1^0) = 1.$$

В следующих теоремах отмечается связь известных комбинаторных чисел и специальных функций с функцией  $T(n_1, n_2)$ .

**Теорема 2.** *Количество упорядоченных факторизаций числа  $N = p_1 p_2 \dots p_s$  равно экспоненциальному числу Белла порядка  $s$ , то есть*

$$T(1, 1, \dots, 1) = \sum_{k=1}^s k! S(s, k) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} C_k^i i^s,$$

где  $S(s, k)$  – число Стирлинга второго рода.

**Теорема 3.** *Количество упорядоченных факторизаций числа  $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$  равно*

$$\begin{aligned} T(n_1, n_2) &= (-1)^{n_1} 2^{n_2-1} P_{n_1}^{(n_2-n_1, 0)}(-3) = \\ &= \frac{2^{n_1-n_2-1}}{n_1!} \cdot \frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}} \left[ (1+x)^{n_1} (1-x)^{n_2} \right] \Big|_{x=-3}, \end{aligned}$$

где  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  – многочлен Якоби степени  $n$ .

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. MacMahon P. A. *Memoir on the theory of the compositions of numbers* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A). – 1893. – V. 184. – P. 835–901.
2. Knopfmacher A., Mays M. *Ordered and unordered factorizations of integers* // Math. J. – 2006. – V. 10. – P. 72–89.

**П. В. Константинов, А. К. Любимов, Б. А. Воинов**

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
pavel.konstantinov@intel.com, ljubimov@mm.unn.ru,  
boris.voinov@intel.com*

**РАЗРАБОТКА И ВНЕДРЕНИЕ МОДУЛЯ  
“МИКРОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ПЛАСТИЧНОСТИ” В РАМКАХ ПРОГРАММНОЙ  
СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО  
АНАЛИЗА**

Пластическая деформация кристалла (металла) рассматривается как скольжение в выделенных кристаллических плоскостях легкого скольжения. Таких плоскостей обычно несколько десятков для распространенных металлов с кристаллическими решетками типа ГЦК и ОЦК. Суммарный сдвиг по плоскостям ассоциируется с макроскопической деформацией, то есть с тензором деформации. Скольжение вызывается силами приложенными к соответствующей плоскости и приводит к размножению дислокаций, взаимодействие которых ведет к упрочнению, то есть затрудняет скольжение. Само скольжение рассматривается уже на микроскопическом уровне. На данном этапе работы рассматриваются и реализуются в программном коде две существующих и испытанных микромеханических модели пластичности с целью дальнейшего сравнения получаемых результатов расчетов.

Данный подход позволяет не только описать текучесть металлических кристаллов, но и получить характеристики обычных поликристаллических металлов, например, предел текучести и упрочнение, исходя из некоторого набора параметров

микроскопического масштаба.

Первая модель пластичности кристаллов (СР-модель Кокса) реализует расчет деформаций металлических сплавов на микроскопическом уровне. СР-модель по сути усредняет дискретные процессы, приводящие к пластическому деформированию металла (движение дислокаций) и рассматривает процессы в континуальной теории деформации, которые уже можно было бы смоделировать с помощью конечного-элементного анализа. СР-модель лучше всего представляет деформацию в масштабе нескольких зерен, хотя она также она может быть реализована и для крупных монокристаллов. СР-модель отличается от привычных моделей материалов сплошной среды, используемых в конечно-элементном анализе тем, что свойства материала определяют два различных типа параметров. Первый тип включает обычные значения коэффициентов упругости, реологические свойства, коэффициент теплового расширения и т. д. Второй тип включает углы Эйлера и начальные ориентации кристаллической решетки относительно некоторой исходной конфигурации. В большинстве случаев конечно-элементная модель принимает один набор параметров материала и несколько различных ориентаций кристалла. Для сплава с несколькими фазами материалы могут быть определены как комбинации нескольких наборов параметров кристаллической решетки и ориентаций. К сожалению, СР-модель Кокса должна различать упругую и пластическую составляющие.

Вторая рассматриваемая микромеханическая модель пластичности (модель Хардера) предназначена для реализации расчета поведения кристаллов чистых ГЦК металлов при низких температурах. Зависящие от скорости уравнения включают в себя кинематическое и изотропное упрочнения с формули-

ровками, основанными на процессах скольжения соответствующих систем скольжения. Полученные результаты моделирования очень хорошо совпадают с соответствующими экспериментами с монокристаллами, например на растяжение, которые подтверждают качество выбранного математического подхода. Показано, что, как кинематический, так и изотропный процессы определяют упрочнение как результат основного взаимодействия систем скольжения.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kocks U. F., Kok S., Beaudoin A. J., Tortorelli D. A. *A polycrystal plasticity model based on the mechanical threshold* // Int. J. of Plasticity. – 2002. – No 18. – P. 715–741.
2. Harder J. *FEM-simulation of the hardening behavior of FCC single crystals* // Acta Mechanica. – 2001. – No 150. – P. 197–217.

#### И. В. Конюхов

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
IvanKonukhov@yandex.ru*

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ПУСКЕ НЕФТЯНОЙ ДОБЫВАЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ, ОБОРУДОВАННОЙ ЦЕНТРОБЕЖНЫМ ЭЛЕКТРОНАСОСОМ

Рассматриваются переходные процессы, возникающие при выводе на эксплуатационный режим добывающей нефтяной скважины, оборудованной установкой многоступенчатого



электроцентробежного насоса (УЭЦН). Исследования проводятся на основе численного моделирования нестационарных взаимосвязанных процессов тепломассопереноса, возникающих при движении многофазных и однофазных потоков в единой системе, включающей в себя нефтяной пласт сложного строения, трубы скважины, погружную установку ЭЦН, работа которой контролируется наземной станцией управления (СУ).

Расчет термо-гидродинамических процессов в слоисто-неоднородном пласте осуществляется на основе модели двухфазной фильтрации с учетом сжимаемости пористой среды и фаз, гидродинамической связи между пропластками в пренебрежении силой тяжести. Для вычисления характеристик трехфазных потоков в трубах наклонно-направленной скважины и проточных каналах центробежного насоса используются математические модели, которые учитывают неизотермичность, фазовые переходы, массообмен с кольцевым затрубным пространством скважины, трение, влияние силы тяжести, разгазирование нефтяной фазы в скважине, растворение газа в нефти в каналах насоса, сжимаемость фаз, изменение структурных форм течения смеси, возможную инверсию жидких фаз и проскальзывание дисперсных составляющих потока, его теплообмен с окружающей средой. Пересчет характеристик работы ступеней ЭЦН с воды на неоднородные среды базируется на известной полуэмпирической методике П.Д. Ляпкина, модифицированной с целью упрощения алгоритма вычислений напора, мощности, КПД ступени ЭЦН и параметров работы погружного электродвигателя (ПЭД) в зависимости от свойств перекачиваемой трехфазной смеси и частоты электрической сети.

Переходные процессы осложняются возникновением, перемещением и исчезновением подвижных границ между областями

ми движения смеси и воды в трубах скважины и насосном узле. Кроме того, здесь могут формироваться области течения газожидкостных и жидкостных потоков с подвижными границами.

Для решения поставленной задачи используются численные методы, реализованные в программном комплексе Oil-RWP, позволяющем проводить многовариантные расчеты. Особенностью работы пакета является его взаимодействие с внешним специальным программным модулем KSU, имитирующим работу контроллера станции управления. Пусковой режим системы и последующие переходные процессы инициируются включением двигателя УЭЦН с помощью модуля KSU. Обмен данными между обеими программами осуществляется с помощью технологии общей памяти: из приложения Oil-RWP в KSU поступают “телеметрические” данные и текущие параметры работы ПЭД. Имитатор контроллера KSU анализирует полученную информацию и вырабатывает необходимые параметры управления погружной установкой, передаваемые в Oil-RWP.

Анализ результатов расчетов позволяет сделать следующие выводы. 1) Время вывода скважины на рабочий режим зависит от обводненности продукции, фильтрационно-емкостных параметров пласта, физико-химических свойств фаз и характеристик ЭЦН и ПЭД. 2) Эти параметры влияют на количество отключений установки контроллером наземной СУ при освоении скважины. 3) Решение нестационарной задачи освоения скважины при больших временах переходного процесса практически совпадает с решением обратной квазистационарной задачи при соответствующих исходных данных.

Математические модели и программное обеспечение пакета Oil-RWP позволяют выполнить правильный подбор УЭЦН к

скважине и прогнозировать динамику переходных процессов теплопереноса в системе “пласт-скважина-УЭЦН”.

**Д. В. Коротяев**

*Северный (Арктический) федеральный университет,  
korotyayev.denis@gmail.com*

**КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ  
КЛАСТЕРИЗАЦИИ РАВНОМЕРНЫХ  
ИНВАРИАНТНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ БИНАРНЫХ  
ШАБЛОНОВ В ИЗОБРАЖЕНИЯХ  
С УЧАСТКАМИ ПОРАЖЕНИЯ КОЖИ  
(МЕЛАНОМА)**

В современном мире все более актуальной становится проблема кожных заболеваний, в особенности это касается рака кожи (меланомы). Количество летальных исходов, приходящихся на меланому, постоянно растет. Выявление на раннем этапе кожных патологий, характерных для рака кожи, является важным этапом в лечении данного заболевания. Но доступ к дерматологам ограничен во многих странах мира, поэтому многие пациенты проходят обследование у врачей общей практики. Использование биомедицинских информационных систем диагностики позволяет сэкономить время и ресурсы данным специалистам. В статье рассмотрен один из подходов к автоматической классификации кожных поражений для диагностических систем, оснащенных дерматоскопом или камерой.

В качестве исходных данных использовались дермаскопические снимки с поражениями кожи, поделенные на 3 группы: меланома, злокачественные поражения и доброкачественные

опухоли. Изображения трансформировались в greyscale (оттенки серого) разрешением 900x900 пикселей, что позволяло интерпретировать каждую точку изображения одним параметром, определяющим насыщенность оттенка. Всего использовалось 218 изображений с заранее известными диагнозами. Часть из снимков произвольно выбиралась для обучения алгоритма, остальные – в качестве тестового набора для его проверки. Для устойчивости результатов использовалась кросс-валидация.

Локальные бинарные шаблоны (ЛВР) используются в задачах распознавания образов для классификации текстур. Они представляют собой некое описание окрестности пикселя в двоичной форме. Центральный пиксель используется в качестве порога, который используется для расчета статистических особенностей пикселей, входящих в его окрестность, получая некий бинарный код. При этом все полученные окрестности, для достижения инвариантности, мы делили на равномерные и неравномерные. Равномерной является окрестность, имеющая не более двух перестановок в коде (битовая строка считается замкнутой по кругу). Для 8-значных окрестностей 90% всех комбинаций, встречающихся на практике, являются равномерными [1].

Изображения квантовались на регулярные решетки: 10x10, 30x30, 45x45, 60x60 и 90x90 пикселей. В полученном разбиении для каждой ячейки подсчитывалось количество равномерных ЛВР. Затем искались уникальные ячейки для каждого типа разбиения и снимка: тем самым любое изображение представлялось как 5-мерный вектор, в каждом параметре которого аккумулировалось число уникальных ячеек (кластеров). Затем строится пространство для классификации, где каждый объект (изображение) – это вектор его характеристик. Все век-

тора суммарно образуют матрицу, к которой присоединяется столбец с известным диагнозом. Классификация осуществляется в два этапа: сначала выявляется тип поражения, затем выносится решение о хирургическом вмешательстве. Наилучшие результаты показали комбинации классификаторов типа *feature selection* (выбор характеристик) с линейными и квадратичными дискриминантными классификаторами с общим результатом: 84,2% и 73,9%. Схожая картина наблюдалась и в предыдущих исследованиях на данном наборе исходных данных [2].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ojala T., Pietikainen M., Maenpaa T. *Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns* // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2002. – No 24(7). – С. 971–987.
2. Коротяев Д., Проскураков А. *Веб-ориентированная система для классификации и интеллектуальной обработки снимков поражения кожи* // Материалы конф.: Спектральная теория операторов и ее приложения, Архангельск, 2012. – С. 58–62.

**А. В. Кочетков, С. В. Крылов, И. А. Турыгина**

*Нижегородский государственный университет*

*им. Н. И. Лобачевского,*

*hodykinainna@gmail.com*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПРОНИЦАЕМЫМИ  
ПРЕГРАДАМИ**

Методами численного моделирования исследуются процессы прохождения взрывной ударной волны через преграду, представляющую собой слой металлических плетеных сеток. Пакеты металлических плетеных сеток различной структуры, являясь проницаемыми для газа, используются для уменьшения амплитуды проходящих ударных волн [1]. На основе сравнения численных решений задач с проницаемой преградой и без нее оценивается влияние преграды на газодинамическое течение. Расчеты проведены с помощью вычислительного комплекса STAR-CCM+ [2].

Ударная волна образовывалась от взрыва цилиндрического заряда массой 200 г, диаметром 40 мм, высотой 100 мм. Заряд помещался внутри цилиндрического пакета плетеной сетки внутренним диаметром 108 мм и внешним диаметром 118 мм. Поскольку заряд не является ни сферическим, ни бесконечно длинным цилиндрическим, параметры ударной волны определялись из расчета двумерной осесимметричной задачи о взрыве цилиндрического заряда конечной длины в воздухе с помощью программы UPSGOD. Полученные параметры волнового поля использовались в качестве начальных условий при решении трехмерной задачи для фрагмента пакета сетки.

Фрагмент пакета сетки, используемый в расчетах, предполагается симметричным. В качестве краевых условий на плоскостях симметрии и на поверхностях проволок нормальная скорость газа равна нулю. На поверхностях неподвижных проволок по температурному режиму задаются адиабатические условия.

Численное решение сравнивается с экспериментальными данными [3] по параметрам проходящей через проницаемую преграду ударной волны. Пакет сетки состоит из 10 слоев, размер ячейки 25 мм, диаметр проволоки 1.5 мм, что дает коэффициент проницаемости одного слоя равный 0.89. Импульс проходящей сквозь фрагмент пакета сетки волны рассчитывается и сравнивается с импульсом волны, проходящим по свободному пространству. Уменьшение амплитуды проходящей волны в эксперименте составило 7.6%, в расчетах – 15.8%, что в целом можно считать удовлетворительно соответствующим эксперименту ввиду упрощения постановки задачи, численных ошибок моделирования, разброса экспериментальных данных.

Численный эксперимент подтверждает, что при прохождении ударной волны через пакет металлических плетеных сеток происходит ослабление амплитуды и импульса. Таким образом, преграда, представляющая собой пакет металлической плетеной сетки, выполняет свои функции – снижает нагрузку как по амплитуде, так и по величине импульса проходящей ударной волны. При численном моделировании взаимодействия взрывной ударной волны с газопроницаемой средой процессы теплообмена между металлом и газом оказывают незначительное влияние на процесс ввиду того, что пакет сетки данного типа обладает высокой проницаемостью.

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (проекты №№ 13-08-00219, 13-08-97091 р\_поволжье\_a).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мельцас В. Ю., Портнягина Г. Ф., Соловьев В. П. *Численное моделирование прохождения ударных волн через экранирующие решетки* // ВАНТ. – 1993. – Вып. 3. – С. 26–31.

2. *Документация, сопровождающая вычислительный комплекс STAR-ССМ+ 7.02.008.* – 2012.

3. Осавчук А. Н., Глазова Е. Г., Митрофанов С. С., Дикий А. А. *Экспериментально-расчетные исследования процесса распространения ударной волны через цилиндрический пакет из металлической сетки* // X Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – 2011.

**Е. Н. Кригер, И. В. Фроленков**

*Сибирский федеральный университет,  
e\_katherina@mail.ru, igor@frolenkov.ru*

#### О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ПОЛУЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В полосе  $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$  рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + u^p \cdot \lambda(t, x, z) + f(t, x, z), \quad (1)$$

$t \in (0, T), (x, z) \in \mathbb{R}^2, p \geq 1$  — целая постоянная, с начальным условием

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$



**Задача I.** Определить удовлетворяющие уравнению (1) и условию (2) функции  $u(t, x, z)$  и  $\lambda(t, x, z)$  в предположении, что неизвестный коэффициент имеет вид  $\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z)$ , функция  $u(t, x, z)$  задана на двух пересекающихся гиперплоскостях:  $u(t, x, \alpha) = \varphi_1(t, x)$ ,  $u(t, \beta, z) = \psi_1(t, z)$ ,  $\alpha, \beta = \text{const}$ , и имеют место следующие ограничения на входные данные:

$$|\varphi_1(t, x)| \geq \delta_1 > 0, \quad |\psi_1(t, z)| \geq \delta_2 > 0, \quad \forall (t, x, z) \in G_{[0, T]},$$

где  $\delta_1, \delta_2 = \text{const}$ .

**Задача II.** Определить удовлетворяющие уравнению (1) и условию (2) функции  $u(t, x, z)$  и  $\lambda(t, x, z)$  в предположении, что неизвестный коэффициент имеет вид  $\lambda(t, x, z) = \lambda_3(t, x) \cdot \lambda_4(t, z)$ , функция  $u(t, x, z)$  задана на двух гладких кривых  $a(t)$  и  $b(t)$ :  $u(t, x, a(t)) = \varphi_2(t, x)$ ,  $u(t, b(t), z) = \psi_2(t, z)$ , и имеют место следующие ограничения на входные данные:

$$|a(t)| + |b(t)| \leq C, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$|\varphi_2(t, x)| \geq \delta_3 > 0, \quad |\psi_2(t, z)| \geq \delta_4 > 0, \quad \forall (t, x, z) \in G_{[0, T]},$$

$$\begin{aligned} & |\varphi_t(t, b(t)) - \varphi_{xx}(t, b(t)) - \psi_{zz}(t, a(t)) - \varphi_x(t, b(t)) - \\ & - \psi_z(t, a(t)) - f(t, b(t), a(t))| \geq \delta_5 > 0, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

где  $C, \delta_3, \delta_4, \delta_5 = \text{const}$ .

Относительно входных данных предполагаем, что они согласованы, функции  $f, u_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  и их производные нужных порядков являются гладкими и ограниченными.

Доказано, что существует константа  $t_*$ ,  $0 < t_* \leq T$ , зависящая от входных данных, такая, что существует единственное достаточно гладкое и ограниченное решение  $u(t, x, z)$ ,  $\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z)$  задачи I.

Для задачи II в полосе  $G_{[0,t_*]}$  доказано существование решения  $u(t, x, z)$ ,  $\lambda(t, x, z) = \lambda_3(t, x) \cdot \lambda_4(t, z)$  в классе гладких ограниченных функций.

При доказательстве используется метод слабой аппроксимации, развитый в работах Н. Н. Яненко, А. А. Самарского и их последователей (см. [1], [2]). Ранее в [3], [4] были рассмотрены задачи идентификации коэффициента специального вида при функции источника в двумерном параболическом уравнении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31033).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. – Новосибирск, 1967. – 195 с.
2. Belov Yu. Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equation*. – Utrecht, VSP, 2002.
3. Фроленков И. В., Кригер Е. Н. *О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении* // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2010. – Т. 3. – № 4. – С. 556–564.
4. Фроленков И. В., Кригер Е. Н. *О существовании решения задачи идентификации коэффициента специального вида при функции источника* // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13. – № 1. – С. 120–134.

**К. А. Крутова, С. В. Спирин, Е. С. Соколов**

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
sokolov.mmf@gmail.com*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ  
ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
С РАЗЛИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Исследуется влияние взаимного расположения и формы конечных элементов на численное решение в трехмерных задачах теории упругости. Авторам известна лишь одна публикация [1], в которой эмпирически, на основе численных экспериментов, изучается влияние взаимного расположения конечных элементов на точность численных решений. Аналитическое исследование методами конечных элементов представляется затруднительным, поскольку КЭ-анализ ограничивается исследованием одного элемента. Методами, описанными в [2, 3], были построены варианты сеточных аппроксимаций системы уравнений Ламе, которые соответствуют различным способам разбиения гексаэдральной базовой ячейки разностной сетки на конечные элементы (тетраэдры). Рассмотрены различные варианты разбиения параллелепипеда на 6 тетраэдров с симметричным и несимметричным способом разбиения, а также на 5 тетраэдров. Кроме того, рассмотрена ажурная схема [4, 5]. Ее отличие заключается в том, что из базовой ячейки оставляется лишь один центральный тетраэдр, являющийся расчетным элементом. Порядок аппроксимации исследовался традиционными методами теории разностных схем. Для сравнения приведен анализ аппроксимации схемы полилинейного

8-узлового КЭ.

**Анализ аппроксимации.** Рассматривались следующие типы схем и элементов: 8-узловой полилинейный, 8-узловой с неполным интегрированием (схема Уилкинса), 4-узловой линейный (с разбиением гексаэдра на 5 тетраэдров, с симметричным разбиением гексаэдра на 6 тетраэдров, с несимметричным разбиением гексаэдра на 6 тетраэдров, ажурная схема (базовый вариант), “суперажурная” схема). В первом (базовом) варианте ажурной схемы конечные элементы сохранялись в каждом гексаэдре, в “суперажурной” схеме дополнительно удалялись элементы в каждом втором гексаэдре в шахматном порядке, в результате чего получилась схема с сеткой минимальной связности (в каждом внутреннем узле сходилось по 4 элемента). Все схемы записывались в конечно-разностном виде, аналогичном системе уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{pmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \rho D_{tt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где операторы  $D_{ij}$  аппроксимируют производные второго порядка соответственно по  $i$ -й и  $j$ -й координатам,  $D_{tt}$  аппроксимирует вторую производную по времени. Вид аппроксимирующих операторов зависит от варианта исследуемой схемы и может иметь либо первый, либо второй порядок точности. Схема полилинейного элемента имеет несколько дополнительных слагаемых второго и четвертого порядка малости по сравнению с (1). По результатам анализа сделаны следующие выводы. Схемы: полилинейного элемента, ажурная, с симметричным разбиением на 6 тетраэдров имеют 2-й порядок аппроксимации; остальные – 1-й порядок.

**Численные результаты.** Решена тестовая задача о колебании бруса квадратного сечения, закрепленного на торцах, нагруженного в центральной части внезапно приложенной равномерно распределенной поверхностной силой. Расчеты проводились на сетках с различным разбиением гексаэдральной базовой ячейки на тетраэдры, описанных выше. В результате численных экспериментов наилучшую сходимости показала ажурная схема, что можно объяснить наличием скрытых свойств, аналогично рассмотренным в [3].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Горельский В. А., Зелепугин С. А., Смолин А. Ю. *Исследование влияния дискретизации при расчете методом конечных элементов трехмерных задач высокоскоростного удара* // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. – 1997. – Т. 37. – № 6. – С. 742–750.
2. Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. *Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом*. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2000. – 118 с.
3. Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. *Об индексной коммутативности численного дифференцирования* // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. – 1989. – Т. 29. – № 5. – С. 662–674.
4. Чекмарев Д. Т. *Численные схемы метода конечного элемента на “ажурных” сетках* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 2. – С. 49–54.
5. Чекмарев Д. Т., Жидков А. В., Зефиоров С. В., Кастальская К. А., Спиринов С. В. *Решение нестационарных трехмерных задач теории упругости на основе ажурной схемы*

МКЭ // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1480–1482.

**М. И. Кузнецов, А. А. Шмелев**

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
kuznets-1349@yandex.ru, Shmelev-aa@list.ru*

### АЛГЕБРЫ $V7$ И $V8$

Компьютерная классификация простых алгебр Ли над  $\mathbb{F}_2$  размерности меньше 10, проведенная Воэн-Ли [1], содержит 7-мерную алгебру Ли  $V7$  и 8-мерную алгебру Ли  $V8$ , представленные как  $7 \times 7$ - и  $8 \times 8$ -матрицы, соответственно. Позднее Эйк [2], применяя новый компьютерный тест на изоморфизм алгебр Ли, показала, что  $V7$  изоморфна неальтернированной гамильтоновой алгебре Ли  $P(2 : 1, 2)$  [3].

Авторы исследовали деформации полупростой алгебры Ли  $\mathfrak{g} = W(1 : 2)' \otimes \mathcal{O} + \langle 1 \otimes d \rangle$  над алгебраически замкнутым полем характеристики два. Здесь  $W(1 : 2)'$  – алгебра Цассенхауза,  $\mathcal{O} = F[x]/(x^2)$ ,  $d = d/dx$ . Установлено, что  $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 8$  и  $V7$  является единственной простой алгеброй Ли, которую можно получить деформацией алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Кроме того,  $V7$  содержит максимальные подалгебры, такие, что соответствующие фильтрации  $V7$  имеют ассоциированные градуированные алгебры Ли, изоморфные  $\mathfrak{g}$  с невырожденной и вырожденной градуировками в смысле Вейсфейлера.

Первый автор показал, что алгебра Ли  $P(2 : 1, n)$  естественно возникает в классификации простых алгебр Ли с разрешимой максимальной подалгеброй над алгебраически замкнутым полем  $F$  характеристики  $p$ .

**Теорема.** Пусть  $L = L_{-1} + L_0 + \dots + L_r$  простая алгебра Ли с разрешимой подалгеброй  $L_0$  над алгебраически замкнутым полем характеристики  $p$ ,  $L_0^{(s)} \neq 0$ ,  $L_0^{(s+1)} = 0$ . Если  $L_0^{(s)}$  нецентральный идеал  $L_0$ , то  $p = 2$  и  $L \cong P(2 : 1, n)$ ,  $n > 1$ .

Алгебра  $P(2 : 1, n)$  может быть представлена как  $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра Ли  $L = L_{\bar{0}} + L_{\bar{1}}$ , где  $L_{\bar{0}} = W(1 : n)'$ ,  $L_{\bar{1}} = \mathcal{O}(1 : n)$  – алгебра разделенных степеней. Присоединенное действие  $L_{\bar{0}}$  на  $L_{\bar{1}}$  является стандартным действием  $W(1 : n)'$  на  $\mathcal{O}(1 : n)$ , и для  $f, g \in L_{\bar{1}}$   $[f, g] = [f\partial, g\partial]$  в  $W(1 : n)' = L_{\bar{0}}$ .

Авторы показали, что  $V_8$  является нерасщепляемой формой  $A_{2II}$  классической простой алгебры Ли типа  $A_2$ , расщепляемой над  $\mathbb{F}_4$ . Этот факт может быть получен из следующей теоремы:

**Теорема.** Пусть  $L$  – простая  $p$ -алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Если  $L$  содержит двумерную подалгебру Картана с двумерными корневыми пространствами, то  $L$  является классической алгеброй Ли типа  $A_2$ .

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (грант 1.1907.2011).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Vaughan-Lee M. *Simple Lie algebras of low dimension over GF(2)* // London Math. Soc. J. Comput. Math. – 2006. – V. 9. – P. 174–192.
2. Eik B. *Some new simple Lie algebras in characteristic 2* // J. Symb. Comput. – 2010. – V. 45(9). – P. 943–951.

3. Lin L. *Non-alternating Hamiltonian algebra  $P(n, \mathbf{m})$  of characteristic two* // Commun. Algebra. – 1993. – V. 21(2). – P. 399–411.

**А. В. Кулешов**

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта,  
arturkuleshov@yandex.ru*

**ВНУТРЕННЕЕ ОСНАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ  
СЕМЕЙСТВ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров. Ставится задача построения инвариантного оснащения, внутренним образом присоединенного к такому семейству. Проблема решается в частном случае, характеризующемся некоторым условием на размерность слоев семейства. Решение основано на методе подвижного репера и исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

Пусть  $P_N$  —  $N$ -мерное проективное пространство ( $N \leq 4$ ). Гиперплоским элементом в пространстве  $P_N$  называется пара  $L_{N-1}^* = (L_{N-1}, A)$ , где  $L_{N-1}$  — гиперплоскость (называемая плоскостью элемента  $L_{N-1}^*$ ),  $A$  — точка, лежащая в  $L_{N-1}$  (называемая центром  $L_{N-1}^*$ ).

**Определение 1.** Семейством  $B_{p,q}$  будем называть гладкое  $(p+q)$ -мерное семейство гиперплоских элементов, удовлетворяющее следующим условиям:

1) центры всех элементов семейства образуют гладкую  $p$ -мерную поверхность  $S_p$  ( $p < N - 2$ );



2) проекция  $\pi : B_{p,q} \rightarrow S_p$ , действующая следующим образом:  $(L_{N-1}, A) \mapsto A$ , является расслоением с  $q$ -мерными слоями, где  $1 \leq q < N - p - 1$ ;

3) касательная плоскость  $T_A(S_p)$  к  $S_p$  в точке  $A$  лежит в плоскости каждого элемента слоя  $\pi^{-1}(A)$ .

**Замечание.**  $S_p$  является  $p$ -мерной огибающей поверхностью семейства  $B_{p,q}$ .

**Определение 2.** Композиционным оснащением семейства называется присоединение к каждому его элементу тройки плоскостей  $C_{p-1}$ ,  $C_{N-p-2}$ ,  $C_0$  размерностей  $p-1$ ,  $N-p-2$  и  $0$  соответственно, таких, что для каждого  $L_{N-1}^*$  выполнены следующие условия:

- 1)  $A \notin C_{p-1} \subset T_A(S_p)$ ;
- 2)  $C_{N-p-2} \cap T_A(S_p) = \emptyset$ ,  $C_{N-p-2} \subset L_{N-1}$ ;
- 3)  $C_0 \notin L_{N-1}$ .

**Теорема 1.** В общем случае к семейству  $B_{p,N-p-2}$  внутренним образом присоединяется композиционное оснащение.

**Замечание.** Общий случай характеризуется некоторыми условиями регулярности, накладываемыми на семейство  $B_{p,N-p-2}$ .

Э. Б. Лавров, М. И. Кузнецов

*Нижегородский государственный университет*

*им. Н. И. Лобачевского,*

*lavroveduard@pochta.ru*

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ КОГОМОЛОГИЙ АЛГЕБР ЛИ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 ПРИ ПОМОЩИ СИСТЕМЫ MAPLE**

Классификация простых алгебр Ли является одной из центральных проблем теории алгебр Ли. Общая схема классификации простых алгебр Ли над замкнутым алгебраическим полем характеристики  $p > 5$  была разработана в 1966 г. А. И. Кострикиным и И. Р. Шафаревичем. Они сформулировали основную классификационную гипотезу, согласно которой любая простая конечномерная ограниченная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики  $p > 5$  либо является классической алгеброй Ли, либо изоморфна алгебре Ли картановского типа.

В настоящее время получена классификация простых модулярных алгебр Ли над полями характеристики  $p > 3$  (Х. Штраде, А. Премет). Одним из самых сложных случаев классификационной проблемы для простых конечномерных алгебр Ли является случай, когда характеристика поля равна 2 или 3. Здесь известно несколько серий простых исключительных алгебр Ли, отличных от классически алгебр Ли и алгебр Ли картановского типа. Более того, при малых характеристиках основного поля классические алгебры не определяются однозначно своей системой корней.

Основной целью работы является получение результатов по классификации простых алгебр Ли, близких к классическим,

над полями малой характеристики. Одним из направлений работы является изучение пространств когомологий простых модулярных алгебр Ли.

Для достижения цели работы используются системы компьютерной алгебры. В ходе работы была разработана библиотека для математического пакета MAPLE, которая позволяет вычислять пространства когомологий размерностей 1 и 2 над полем характеристики 2. При помощи разработанных программ были найдены пространства когомологий для алгебр типов  $A_3$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $G_2$  и деформаций алгебры Ли типа  $G_2$  – алгебр Ли  $L_1$  и  $L_2$ . Полученные результаты приведены в табл. 1.

Тип алгебры	$A_3$	$B_2$	$B_3$	$G_2$	$L_1$	$L_2$
$\dim H^1(L, L)$	1	5	1	7	6	6
$\dim H^2(L, L)$	0	28	1	20	12	9

Таблица 1. Пространства когомологий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями системы корней.* – М.: Мир, 1972. – 334 с.
2. Гото М., Гроссханс Ф. *Полупростые алгебры Ли.* – М.: Мир, 1981.
3. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1964. – 358 с.
4. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* – М.: Мир, 1975.
5. Фукс Д. Б. *Когомологии конечномерных алгебр Ли.* – М.: Наука, 1984.
6. Хамфрис Дж. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* – М.: МЦНМО, 2003. – 216 с.

**А. А. Леонтьев**

*Стерлитамакский филиал Башкирского  
государственного университета,  
alexeu\_leontiev@inbox.ru*

**ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ  
АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

Пусть  $\Omega$  — неограниченная область  $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $n \geq 2$ . В цилиндрической области  $D = \{t > 0\} \times \Omega$  рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^n (|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2} u_{x_\alpha})_{x_\alpha}; \quad (1)$$

$$u(t, \mathbf{x}) \Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad (2)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Будем считать, что  $k \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ ,  $k > 1$ , в случае  $p_1 < k$  решение за конечное время стабилизируется к нулю.

**Теорема 1.** *Если выполнено условие*

$$\sum_{\alpha=1}^n 1/p_\alpha < 1 + n/p_n, \quad (4)$$

*то обобщенное решение  $u(t, \mathbf{x})$  задачи (1) – (3) с ограниченной начальной функцией  $\varphi(\mathbf{x})$  является ограниченным.*

Далее, будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси  $Ox_s$ ,  $s \in \overline{1, n}$  (область  $\Omega$  лежит в полупространстве  $\mathbb{R}_n^+[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s > 0\}$ , сечение  $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$  не пусто и ограничено при любом  $r > 0$ ). Введем обозначения:  $\Omega^r = \{x \in \Omega \mid 0 < x_s < r\}$ ,  $r > 0$ ,

$\|\cdot\|_{p,Q}$  — норма в  $L_p(Q)$ ,  $p \geq 1$ , значение  $Q = \Omega$  опускается. Пусть начальная функция имеет ограниченный носитель:

$$\text{supp } \varphi \subset \Omega^{z_0}, \quad z_0 > 0. \quad (5)$$

**Теорема 2.** Если выполнены условия (4), (5), то существуют  $C_{p_1}, C_k > 0$  и ограниченное решение  $u(t, \mathbf{x})$  задачи (1) – (3) такие, что для  $t \geq 0$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_k &\geq \|\varphi\|_k (C_{p_1}(\varphi)t + 1)^{-1/(p_1-k)}, \quad p_1 > k, \\ \|u(t)\|_k &\geq \|\varphi\|_k \exp(-C_k(\varphi)t), \quad p_1 = k. \end{aligned}$$

Введем геометрические характеристики  $\nu_1(r)$ ,  $\mu_1(r)$ :

$$\begin{aligned} \nu_1(r) &= \inf \left\{ \|g_{x_1}\|_{p_1, \gamma_r} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{p_1, \gamma_r} = 1 \right\}, \quad r > 0, \\ \mu_1(r) &= \inf \left\{ \|g_{x_1}\|_{p_1, \Omega^r} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{k, \Omega^r} = 1 \right\}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что

$$\int_1^\infty \nu_1^{p_1/p_s}(r) dr = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mu_1(r) = 0. \quad (6)$$

Пусть  $r_{p_1}(t), r_k(t), t > 0$  — произвольные положительные функции, удовлетворяющие, соответственно, неравенствам

$$\begin{aligned} \exp\left(\kappa_1 \int_1^{r_{p_1}(t)} \nu_1^{p_1/p_s}(\rho) d\rho\right) &\geq (\mu_1^{p_1}(r_{p_1}(t))t)^{1/(p_1-k)}, \quad p_1 > k, \\ \mu_1^{p_1}(r_k(t))t &\geq \int_1^{r_k(t)} \nu_1^{p_1/p_s}(\rho) d\rho, \quad p_1 = k. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Если выполнены условия (4) – (6) и  $s \in \overline{2, n}$ , то найдутся  $M_{1,p_1}(\varphi, k, p_s, k), k_1(\varphi, k, p_s)$  и ограниченное решение

$u(t, \mathbf{x})$  задачи (1) – (3) такие, что при всех  $t > 0$  справедливы оценки

$$\|u(t)\|_k \leq M_{1,p_1} (t\mu^{p_1}(r_{p_1}(t)))^{-1/(p_1-k)}, \quad p_1 > k;$$
$$\|u(t)\|_k \leq M_{1,k} \exp\left(-k_1 \int_1^{r_k(t)} \nu_1^{p_1/p_s}(\rho) d\rho\right) \|\varphi\|_k, \quad p_1 = k.$$

**Е. Ю. Линник**

*Нижегородский государственный университет*

*им. Н. И. Лобачевского,*

*ElenkaLinnik@gmail.com*

### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА И ПРОНИКАНИЯ В МЯГКИЕ ГРУНТОВЫЕ СРЕДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ**

Проводится анализ методов поиска оптимальной формы тела вращения минимального сопротивления при его проникании в мягкие грунтовые среды. Применяется модель локального взаимодействия, в соответствие с которой давление в каждой точке боковой поверхности отождествляется с давлением на внутренней поверхности сферической полости и представляется в виде квадратичной зависимости от скорости проникания [1, 2]. Сравнение осуществляется с расчетами в осесимметричной постановке в рамках грунтовой среды Григоряна, которая записывается в цилиндрической системе координат в виде системы дифференциальных уравнений и конечных соотношений, учитывающих свойства среды: ударную сжимаемость и сопротивление сдвигу [3].

Поиск оптимального тела с применением модели локального взаимодействия осуществляется в классе затупленных тел. Получено аналитическое решение, когда напряжения определяются только квадратом нормальной скорости. При учете других свойств среды, а также поверхностном трении решение получено численно.

В осесимметричной постановке решается двухпараметрическая задача безусловной оптимизации, где в качестве целевой функции рассматривается квадратичная функция второго порядка, содержащая значения силы сопротивления на квазистационарной стадии внедрения. Показано, что задачу оптимизации можно решать в одномерной случае при фиксированных значениях параметров, что упрощает расчеты. В результате для заданных длины ударника и длины основания с учетом допустимой погрешности 5% был получен диапазон оптимальных форм тел вращения. На графике сплошной линией обозначена оптимальная форма тела вращения минимального сопротивления, штриховой и штрихпунктирной линиям соответствуют допустимые отклонения формы.

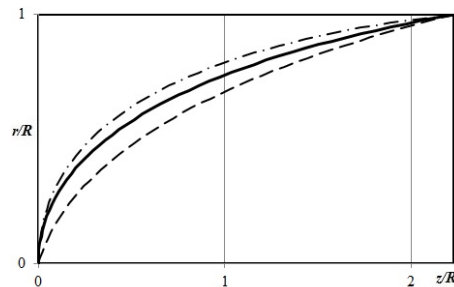


Рис 1. Формы тела вращения минимального сопротивления

Проведенный анализ показал, что учет эффектов обтекания в двумерных численных расчетах в рамках нелинейной модели

грунтовой среды позволяет существенно уточнить как форму, так и силовые и кинематические характеристики проникающих тел, по сравнению с расчетами на основе моделей локального взаимодействия.

Исследование выполнено в рамках программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки коллективов ведущих научных школ России (НШ-2843.2012.8), а также грантов РФФИ (проекты №№ 12-08-33106-мол\_а\_вед, 13-08-00531\_а, 14.В37.21.1137).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Котов В. Л., Баландин В. В., Линник Е. Ю., Баландин В. В. *О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт* // ВМСС. – 2012. – Т. 5. – № 4. – С. 435–442.
2. Линник Е. Ю., Гоник Е. Г., Тарасова А. А., Котов В. Л. *Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны* // ППП: Межвуз. сб. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2012. – Вып. 74. – С. 48–53.
3. Баженов В. Г., Котов В. Л., Линник Е. Ю. *О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах* // ДАН. – 2013. – Т. 449. – № 2. – С. 156–159.



**Е. Ю. Линник, А. А. Тарасова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
annatarasova1989@mail.ru*

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ  
О РАСШИРЕНИИ ПОЛОСТИ  
В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ**

Рассматривается задача о расширении сферической полости из точки в безграничной грунтовой среде [1] с постоянной скоростью  $V_0$ . Движение грунтовой среды в области пластического течения описываются уравнениями неразрывности и изменения количества движения в эйлеровых переменных (сферическая симметрия):

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{v}{r} \right) = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2f_2}{r} = -\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \end{cases} \quad (1)$$

$$c = A + \lambda u, \quad (2)$$

$$f_2(\theta) = \begin{cases} \tau_0 + \mu\sigma, & 0 < \sigma \leq \sigma_m, \\ \tau_m, & \sigma > \sigma_m. \end{cases} \quad (3)$$

Среда характеризуется известной ударной адиабатой (2), учет внутреннего трения грунта — условием пластичности (3). Подобная постановка является достаточной для описания динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу мягких грунтовых сред [2].

Введением подстановки  $\xi = \frac{r}{ct}$ , где  $c$  — скорость пластической ударной волны, (1) принимает вид системы обыкновенных

дифференциальных уравнений [3]. Решение задачи осуществляется в безразмерных переменных – скорость  $U = \frac{v}{c}$  и напряжение  $S = \frac{\sigma}{\rho c^2}$ .

При высоких скоростях расширения полости и высоких давлениях изменение плотности малоб. Рассматривается приближение к системе в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны [4], записанное относительно  $U, S$ :

$$\begin{cases} U' + 2\frac{U}{\xi} = 0, \\ S' + 2\frac{f_2}{\xi} = (\xi - U)U', \end{cases}$$

где  $\tilde{f}_2 = \frac{f_2}{\rho c^2}$  – условие пластичности.

Анализируется также ошибка применения линейного приближения  $c = \lambda^{1/3}V_0 + A/3$ , полученного с помощью разложения в ряд Тейлора [4].

В работе проводится сравнительный анализ полученных решений и рассматривается зависимость решений от параметров внутреннего трения и сжимаемости грунта. Показано существенное влияние коэффициента внутреннего трения грунта на параметры квадратичной МЛВ.

Проверены и подтверждены результаты исследования [4] с использованием возможного спектра параметров решаемой задачи для параметров  $\mu$  в интервале  $[0;0,75]$  и параметра  $\lambda$  в интервале  $[1;3]$ , а также выведены зависимости искомых функций от этих параметров.

Сравнением с результатами численных расчетов в полной постановке показана близость указанных решений при сверхзвуковых скоростях расширения полости с учетом внутреннего трения.

Работа выполнена при финансировании в рамках программы Президента Российской Федерации для государственной

поддержки коллективов ведущих научных школ России (НШ-2843.2012.8), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы, а также РФФИ (проекты №№ 12-08-33106-мол\_а\_вед, 13-08-00531-а).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тарасова А., Линник Е. *Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2010. – Т. 45. – С. 201–203.

2. Баженов В., Котов В. *Математическое моделирование процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред*. – М.: Физматлит, 2011. – 208 с.

3. Котов В. Л. *Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде* // Проблемы прочности и пластичности. – 2011. – № 73. – С. 58–63.

4. Линник Е., Котов В., Тарасова А., Гоник Е. *Решение задачи о расширении сферической полости в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны* // Проблемы прочности и пластичности. – Нижегород. ун-т, 2012. – Вып. 74. – С. 49–58.

**Е. К. Липачёв, Ш. М. Хайдаров**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
elipachev@gmail.com, 15jkeee@gmail.com*

**СИСТЕМА СЕРВИСОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
ЭЛЕКТРОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
ДОКУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ОБЛАЧНЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

Современный этап развития электронного книгоиздания связан с применением семантических методов организации научной информации и ориентацией на машиноориентированную обработку данных в сети (см., напр., [1]). При подготовке математических текстов используются как системы верстки на основе  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , так и WYSIWYG-редакторы формул офисных пакетов. Конвертация математических документов в подходящий формат представляет одну из повседневных задач. Решения на основе технологий облачных вычислений являются, в настоящий момент, наиболее оптимальными (см., напр. [2]).

Работа посвящена методам обработки электронных документов, содержащих математические формулы, и созданию алгоритмов преобразования документов с целью повышения их семантической выразительности (см., напр., [3]). Предложен метод преобразования электронных документов, созданных в офисных пакетах, в нотацию  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , а также в формат MathML (см., напр., [1]).

Алгоритм трансформации данных реализован на языке преобразований XSLT (см., напр., [1]). Использовались таблицы преобразований, находящиеся в открытом доступе. Для преобразования формул, заданных в формате Office OpenXML, в MathML применены преобразования omml2mml.xsl. Правила

преобразования из MathML в TeX-формат, задавались с помощью стилевой таблицы mmltex.xsl. Данные преобразования были оптимизированы и дополнены таблицей стилей d2t.xsl, предназначенной для преобразования каркаса документа. Алгоритм реализован в виде Java-приложения в соответствии с рекомендациями по разработке облачных сервисов на платформе Google App Engine (см., напр., [4, 5]). Приложение Java имеет модульную структуру. Основными классами приложения являются: класс извлечения метаданных, класс преобразования форматов, класс оптимизации выходного файла. Приложение функционирует как сервис App Engine в облаке Google.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-07-00667, 12-07-97018-р\_поволжье).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Елизаров А. М., Липачев Е. К., Малахальцев М. А. *Веб-технологии для математика. Основы MathML*. – М.: Физматлит, 2010. – 194 с.
2. *Cloud computing: principles, systems and applications* / Eds. Antonopoulos N., Gillam L. – Springer-Verlag, 2010. – 386 p.
3. *TeX, XML, and digital typography*. – Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 2004. – 271 p.
4. Chu-Carroll M. C. *Code in the cloud. Programming google app engine*. – Pragmatic Programmers, LLC, 2011. – 306 p.
5. Guermeur D., Unruh A. *Google app engine Java and GWT application development*. – Packt Publishing, 2010. – 480 p.

**А. А. Ляпина**

*Мордовский государственный университет*

*им. Н. П. Огарева,*

*lyapina@e-mordovia.ru*

**УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПРИ ПОСТОЯННО  
ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ В ЧАСТИ  
УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО  
ТИПА**

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ji}(t)x_i + f_j(t, x), j = \overline{1, q} \\ \frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ji}(t)x_i, j = \overline{q+1, n} \end{cases} \quad (1)$$

**Теорема 1.** *Если состояние равновесия  $z = 0$  уравнения*

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{j \in M_0} \bar{\lambda}_j(t, z),$$

*где  $\bar{\lambda}_j(t, z) = \lambda_j(t, z, \dots, z)$ , устойчиво, то тривиальное решение системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях в следующей части уравнений*

$$\begin{cases} \frac{dx_{q+1}}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{q+1,i}(t)x_i, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{n,i}(t)x_i. \end{cases}$$

Общий подход для решения задач устойчивости при постоянно действующих возмущениях в части уравнений систем вольтерровского типа основан на методе сравнения [1, 2].

Возможности этих результатов показаны для системы уравнений Лотки-Вольтерра.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику системы “хищник-жертва” [3]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{\alpha x_1 x_2}{a+x_1} - qEx_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\beta x_2 x_3}{a+x_3} - dx_2 - \gamma x_2^2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{e}(x_1 - x_3), \\ (pqx_1 - c)E - s = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  – плотности популяций хищника и двух жертв, предполагается, что все параметры постоянны и неотрицательны.  $r$ ,  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $q$ ,  $E$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $s$ ,  $p$  – положительные константы.

Для численной реализации (2) выберем следующие параметры:  $\alpha = 0,95$ ,  $\beta = 0,75$ ,  $K = 100$ ,  $q = 0,5$ ,  $a = 30$ ,  $d = 0,002$ ,  $p = 15$ ,  $c = 1$ ,  $e = 2$ ,  $s = 0$ .

Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 \left(1 - \frac{x_1}{100}\right) - \frac{0,95x_1 x_2}{30+x_1} - 0,5Ex_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{0,75x_2 x_3}{30+x_3} - 0,002x_2 - 0,05x_2^2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{2}(x_1 - x_3), \\ (7,5x_1 - 1)E - 4(E - 3,993) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

На основании теоремы 1 можно сделать вывод, что тривиальное решение системы (2) при выбранных параметрах устойчиво при постоянно действующих возмущениях в третьем уравнении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воскресенский Е. В. *Асимптотические методы: Теория и приложения*. – Саранск: Средневолжское математическое общество, 2001. – 300 с.

2. Ляпина А. А., Мамедова Т. Ф. *Об исследовании устойчивости решения системы дифференциальных уравнений вольтерровского типа* // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – № 1. – С. 195–198.

3. Kar T. K., Kunal Chakraborty *Bioeconomic modelling of a prey predator system using differential algebraic equation* // Int. J. of Engineering, Science and Technology. – 2010. – V. 2. – No 1. – P. 13–34.

**Ю. С. Макарова, Л. И. Зеленина**

*Северный (Арктический) федеральный  
университет им. М. В. Ломоносова*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСЛЕДСТВИЙ ИЗМЕНЕНИЯ КЛИМАТА НА ЕВРОПЕЙСКОМ СЕВЕРЕ**

Наличие предпосылок к антропогенному потеплению климата и его возможные негативные последствия привели к росту внимания к этой проблеме в мировом научном сообществе.

Для России детализированные по регионам оценки наблюдаемых и предполагаемых изменений климата особо важны, поскольку из-за значительных природно-обусловленных различий климата на территории России изменения климата в ее регионах проявляются крайне неравномерно [1, с. 4].

На основе анализа данных многолетних инструментальных наблюдений за климатом и обобщения материалов отечественных и зарубежных научных исследований по оценке возможных изменений климата в ближайшей перспективе можно



представить наиболее вероятный прогноз ожидаемого состояния климата Российской Федерации и ее регионов, в частности Европейского Севера.

В последнее время идет активный процесс укрепления защиты геополитических и экономических интересов России в Северо-Арктическом регионе [2]. Таким образом, построенная модель изменения окружающей среды в данном регионе позволит повысить устойчивость экономики и производства к происходящим негативным изменениям климата, а также повысит эффективность производства за счет учета благоприятных изменений.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Оценочный доклад об изменениях климата и их последствиях на территории Российской Федерации. Техническое резюме. Федеральная служба по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среде.* – М.: ГУ НИЦ “Планета”, 2008. – 89 с.

2. Чилимская М. *Мозг для Арктики* // Федеральный еженедельник “Российские вести”: [сайт]. – 2011. – URL: <http://rosvesty.ru/2049/politic/7544-mozg-dlya-arktiki/> (дата обращения: 26.07.2013).

**Р. В. Марков**

*Вятский государственный гуманитарный университет,  
markovrv@yandex.ru*

#### **О ПИРСОВСКИХ ЦЕПЯХ ПОЛУМОДУЛЕЙ**

В работе автора [1] вводится понятие пирсовской цепи полумодулей, аналога пирсовской цепи колец [2, 3], и доказываются

некоторые свойства этой конструкции. Показано, в частности, что некоторые свойства полумодулей могут "подниматься" (наследоваться) от неразложимых факторполумодулей (не имеющих нетривиальных прямых слагаемых) или  $ti$ -факторов (максимальных неразложимых факторполумодулей) к исходному полумодулю. В данном докладе приведена теорема, продолжающая исследования полумодулей в терминах пирсовских цепей.

С необходимыми определениями, связанными с полукольцами, полумодулями и пучковыми представлениями, можно познакомиться в [4]; с определениями хорновской формулы и её интерпретаций — в [5].

Для полумодуля  $M$  над полукольцом  $S$  через  $\rho$  и  $\mu$  обозначим конгруэнции пирсовской цепи, образующие неразложимый факторполумодуль  $M/\rho$  и  $ti$ -фактор  $M/\mu$  соответственно [см. 1, 4].

**Теорема** *Для произвольных полумодуля  $M$  над полукольцом  $S$  и хорновской формулы  $X$  равносильны следующие утверждения:*

1. *Существует такая интерпретация  $\sigma_M$  формулы  $X$  на полумодуле  $M_S$ , что  $X$  — истинна.*
2. *Существует такая интерпретация  $\sigma_{M/\rho}$  формулы  $X$  на неразложимом факторполумодуле  $M/\rho$ , что  $X$  — истинна.*
3. *Существует такая интерпретация  $\sigma_{M/\mu}$  формулы  $X$  на  $ti$ -факторе  $M/\mu$ , что  $X$  — истинна.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Марков Р. В. *Пирсовские цепи полумодулей* // Матем. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2013. — Вып. 15.

2. Pierce R. S. *Modules over commutative regular rings* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 70. – P. 1–112.
3. Burgess W. D., Stephenson W. *An analogue of the Pearce sheaf for noncommutative rings* // Canad. Math. Bull. – 1978. – V. 6. – No 9. – P. 863–886.
4. Чермных В. В. *Функциональные представления полукольца* // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – № 17:3. – С. 111–227.
5. Мальцев А. И. *Алгебраические системы*. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

**Н. В. Мартемьянова**

*Поволжская государственная  
социально-гуманитарная академия,  
ninamartem@yandex.ru*

### **ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - q(x)u = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \pi, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  – заданные постоянные,  $q(x)$  – заданная на  $[0, \pi]$  достаточно гладкая функция, причем  $q(x) \geq 0$ .

**Задача.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$Lu = 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad (5)$$

где  $\psi(x), \varphi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции,  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ .

Начально-граничная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с известным потенциалом  $q(x)$  была рассмотрена в работе [1]. В данном сообщении доказана единственность решения задачи (2) – (5) на основе полноты системы собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При доказательстве существования решения в случае, когда  $\alpha$  является рациональным, получена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя. Эта оценка при некоторых условиях на функции  $q(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\varphi(x)$  позволяет доказать сходимость построенного ряда в классе (2).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с известным потенциалом* // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Тр. межд. науч. конф. В 2 т. (26 – 30 июня 2013 г., г. Стерлитамак). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т. 1. – С. 244–254.

**О. В. Матухина, Н. В. Ибушева**

*Нижекамский химико-технологический институт,  
ovmatukhina@gmail.com, ibushevanv@gmail.com*

## **ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**

В теории управления динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы, решаются задачи аналитического построения систем дифференциальных уравнений с требуемыми свойствами решений, заданными уравнениями связей. При численном решении систем дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей, возникает проблема стабилизации связей. В [1] приводится модификация уравнений динамики систем со связями, позволяющая решить эту задачу. В [2] вводятся в рассмотрение уравнения программных связей.

В задачах моделирования кинематики и динамики механических систем получил широкое распространение предложенный Н. П. Еругиным [3] метод построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую на плоскости. В частности, в [4] рассмотрена задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегральные многообразия, методом, предложенным в [3], и определена конструкция систем дифференциальных уравнений из условия устойчивости этих многообразий. В [5] построена автономная система дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий на плоскости, определены коэффициенты, предусмотренные в конструкции системы, исходя из вида интегральных кривых и особых точек. В [6] предложена структура системы

дифференциальных уравнений, позволяющая описать кинематические свойства системы уравнениями дифференциальных связей. Изложенные в [5, 6] методы построения динамических систем эффективно используется для программирования движения управляемых механических систем [7, 8].

При создании методов автоматизированного моделирования представляет интерес изложенный в [2] аналитический метод построения уравнений движения, основанный на вариационном принципе Даламбера-Лагранжа. В [9] уравнения динамики получены на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона-Остроградского.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00535).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Baumgarte J. *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems* // Computer Math. Appl. Mech. Eng. – 1972. – V. 1. – No 1. – P. 1–16.
2. Мухарлямов Р. Г. *Стабилизация движения механических систем на заданных многообразиях фазового пространства* // Прикл. матем. и мех. – 2006. – Т. 70. – № 2. – С. 236–249.
3. Еругин Н. П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую* // Прикл. матем. и мех. – 1952. – Т. XVI. – С. 659–670.
4. Мухарлямов Р. Г. *Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 2. – С. 180–192.
5. Мухарлямов Р. Г. *К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 10. – С. 1673–1681.

6. Ибушева О. В., Мухарлямов Р. Г. *Построение неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном пространстве* // Учен. зап. Казан. ун-та. – 2008. – Т. 150. – Кн. 3. – С. 133–139.

7. Матухина О. В. *Управление движением колесной системы по заданной траектории с обходом препятствий* // Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та. – 2012. – Т. 15. – № 11. – С. 272–274.

8. Мухарлямов Р. Г., Матухина О. В. *Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация* // Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та. – 2012. – Т. 15. – № 12. – С. 220–224.

9. Ибушева О. В., Мухарлямов Р. Г. *О построении уравнений динамики механических систем с программными связями* // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. – 2010. – № 1. – С. 75–80.

**А. Н. Миронов**

*Елабужский институт Казанского (Приволжского)*

*федерального университета*

*miro73@mail.ru*

## **ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

Речь идет об уравнениях вида

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$D_1 \equiv \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}},$$

а  $D_2$  – линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные от искомой функции  $u(x_1, \dots, x_n)$ , получаемые из  $D_1 u$  отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Данное уравнение можно записать в виде

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0 \leq q_i \leq m_i, \\ i=1, \dots, n}} a_{q_1 q_2 \dots q_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}} = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $a_{q_1 q_2 \dots q_n}$ ,  $f$  – заданные функции,  $a_{m_1 m_2 \dots m_n} \equiv 1$ . Очевидно, что старшая производная  $D_1 u$  определяет здесь и порядок уравнения, и всю его структуру, вследствие чего её естественно называть доминирующей. К рассматриваемому классу принадлежит, например, уравнение Бианки [1], [2], [3] для которого

$$D_1 \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Хорошо известна роль инвариантов Лапласа в теории уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0. \quad (1)$$

В частности, они играют определяющую роль в классификации уравнений вида (1) с точки зрения группового анализа. Напомним основной классификационный результат [4], [5, с. 116–125] [6, с. 123–124], [7, с. 164] для этих уравнений. Два таких уравнения эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа  $h = a_x + ab - c$ ,  $k = b_y + ab - c$  имеют для обоих уравнений одинаковые значения. Алгебра Ли уравнения (1) есть  $L = L^r \oplus L^\infty$ , где  $L^r$  образована операторами

$$X = \xi^1(x, y)\partial_x + \xi^2(x, y)\partial_y + \sigma(x, y)u\partial_u, \quad (2)$$



а  $L^\infty$  — подалгебра с оператором  $\mu(x, y)\partial_u$ ,  $\mu$  — решение (1). Оператор  $u\partial_u$  допускается любым уравнением (1), поэтому указанный оператор можно включить в  $L^\infty$  и считать, что  $\sigma(x, y)$  определяется в (1) с точностью до постоянного слагаемого.

Если  $h = k \equiv 0$ , то уравнение (1) эквивалентно уравнению  $u_{xy} = 0$  и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов  $X = \xi^1(x)\partial_x + \xi^2(y)\partial_y$  с произвольными функциями  $\xi^1(x)$ ,  $\xi^2(y)$ . Если  $h \neq 0$ , то справедлива следующая теорема.

**Теорема 1** [4], [5, с. 123]. *Уравнение (1) допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов (2) тогда и только тогда, когда функции*

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{(\ln h)_{xy}}{h}$$

*тождественно постоянны. Если  $p$  и  $q$  постоянны, то уравнение (1) равносильно либо уравнению Эйлера-Пуассона ( $q \neq 0$ )*

$$u_{xy} - \frac{2/q}{x+y}u_x - \frac{2p/q}{x+y}u_y + \frac{4p/q^2}{(x+y)^2}u = 0,$$

*либо уравнению ( $q = 0$ )*

$$u_{xy} + xu_x + yu_y + xyu = 0,$$

*причем его алгебра Ли операторов (2) трехмерна.*

**1. Уравнение Бианки третьего порядка.** Рассмотрим однородное уравнение Бианки третьего порядка

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \quad (3)$$

Совокупность преобразований эквивалентности для (3)

$$\bar{x} = \alpha(x), \quad \bar{y} = \beta(y), \quad \bar{z} = \gamma(z), \quad u = \omega(x, y, z)\bar{u}. \quad (4)$$

Два уравнения вида (3) называются эквивалентными по функции [5, с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (4), в которых

$$\alpha(x) = x, \quad \beta(y) = y, \quad \gamma(z) = z.$$

В [8] было показано, что два уравнения вида (3) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда их инварианты Лапласа

$$\begin{aligned} H_1 &= a_y + ac - d, & H_2 &= a_x + ab - e, \\ H_3 &= c_x + bc - f, & H_4 &= b_z + ab - e, \\ H_5 &= b_y + bc - f, & H_6 &= c_z + ac - d, \\ H_7 &= a_{xy} + bd + ce + af - 2abc - g, \\ H_8 &= b_{yz} + bd + ce + af - 2abc - g, \\ H_9 &= c_{xz} + bd + ce + af - 2abc - g \end{aligned}$$

совпадают.

Из результатов работы [8] непосредственно следует

**Теорема 2.** *Два уравнения вида (3) с наборами инвариантов Лапласа  $H_1, H_2, \dots, H_9$  и  $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_9$  соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{aligned} H_1 &= \beta'(y)\gamma'(z)\bar{H}_1, & H_2 &= \alpha'(x)\gamma'(z)\bar{H}_2, \\ H_3 &= \alpha'(x)\beta'(y)\bar{H}_3, & H_4 &= \alpha'(x)\gamma'(z)\bar{H}_4, \\ H_5 &= \alpha'(x)\beta'(y)\bar{H}_5, & H_6 &= \beta'(y)\gamma'(z)\bar{H}_6, \\ H_i &= \alpha'(x)\beta'(y)\gamma'(z)\bar{H}_i, & i &= 7, 8, 9. \end{aligned}$$

Если искать допускаемый уравнением (3) оператор

$$\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z + \tau\partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений составят

$$\partial_u\alpha = \partial_u\beta = \partial_u\gamma = 0, \quad \partial_u^2\tau = 0.$$

Известно [5, с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (3) есть  $L = L^r \oplus L^\infty$ , где алгебра  $L^r$  размерности  $r$  образована операторами вида

$$X = \xi^1(x, y, z)\partial_x + \xi^2(x, y, z)\partial_y + \xi^3(x, y, z)\partial_z + \sigma(x, y, z)u\partial_u, \quad (5)$$

а  $L^\infty$  — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором  $\mu(x, y, z)\partial_u$ , где  $\mu$  — решение уравнения (3). Ясно, что оператор  $u\partial_u$  допускается любым уравнением (3), поэтому указанный оператор можно включить в  $L^\infty$  и считать, что  $\sigma(x, y, z)$  определяется в (4) с точностью до постоянного слагаемого.

Введем в рассмотрение отношения

$$p_{12} = \frac{H_3}{H_5}, \quad p_{13} = \frac{H_2}{H_4}, \quad p_{23} = \frac{H_1}{H_6},$$

а также конструкции

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(\ln H_1)_{yz}}{H_1}, & q_2 &= \frac{(\ln H_2)_{xz}}{H_2}, & q_3 &= \frac{(\ln H_3)_{xy}}{H_3}, \\ q_4 &= \frac{(\ln H_4)_{xz}}{H_4}, & q_5 &= \frac{(\ln H_5)_{xy}}{H_5}, & q_6 &= \frac{(\ln H_6)_{yz}}{H_6}, \\ q_i &= \frac{(\ln H_i)_{xyz}}{H_i}, & i &= 7, 8, 9. \end{aligned}$$

Применение трижды продолженного оператора  $X$  к уравнению (3) и расщепление относительно свободных параметров приводит к определяющим уравнениям, которые могут быть записаны с использованием инвариантов Лапласа в виде

$$\begin{aligned} \xi_y^1 &= \xi_z^1 = \xi_x^2 = \xi_z^2 = \xi_x^3 = \xi_y^3 = 0, \\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_x &= (H_3 - H_5)\xi^2 + (H_2 - H_4)\xi^3, \\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_y &= (H_5 - H_3)\xi^1 + (H_1 - H_6)\xi^3, \\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_z &= (H_4 - H_2)\xi^1 + (H_6 - H_1)\xi^2, \\ H_{1x}\xi^1 + (H_1\xi^2)_y + (H_1\xi^3)_z &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{6x}\xi^1 + (H_6\xi^2)_y + (H_6\xi^3)_z &= 0, \\
(H_2\xi^1)_x + H_{2y}\xi^2 + (H_2\xi^3)_z &= 0, \\
(H_4\xi^1)_x + H_{4y}\xi^2 + (H_4\xi^3)_z &= 0, \\
(H_3\xi^1)_x + (H_3\xi^2)_y + H_{3z}\xi^3 &= 0, \\
(H_5\xi^1)_x + (H_5\xi^2)_y + H_{5z}\xi^3 &= 0, \\
(H_7\xi^1)_x + (H_7\xi^2)_y + (H_7\xi^3)_z &= 0, \\
(H_8\xi^1)_x + (H_8\xi^2)_y + (H_8\xi^3)_z &= 0, \\
(H_9\xi^1)_x + (H_9\xi^2)_y + (H_9\xi^3)_z &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Первая строка в (6) показывает, что  $\xi^1 = \xi^1(x)$ ,  $\xi^2 = \xi^2(y)$ ,  $\xi^3 = \xi^3(z)$ . Вторая, третья и четвертая строки из (6) представляют собой дифференциальные уравнения для определения функции  $\sigma$ , после того как найдены  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$ . Ответственными за результаты групповой классификации оказываются уравнения, записанные начиная с пятой строки.

В работе [9] построено восемь классов уравнений вида (3) с указанными выше постоянными инвариантами преобразования (4), которые допускают алгебры Ли  $L^r$ , где  $r$  принимает значения 1, 3, 4 и  $\infty$ .

Отметим, что в случае постоянных  $q_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , инвариант  $H_i$  является решением уравнения Лиувилля

$$(\ln w)_{xy} = q_i w,$$

формула общего решения которого известна [5, с. 123]. Аналогично, если какая-либо из конструкций  $q_i$ ,  $i = \overline{7,9}$ , постоянна, то соответствующий инвариант  $H_i$  является решением уравнения

$$(\ln H_i)_{xyz} = q_i H_i.$$

Очевидно, что это уравнение имеет точное решение

$$H_i = -\frac{6\lambda'(x)\mu'(y)\nu'(z)}{q_i(\lambda(x) + \mu(y) + \nu(z))^3}.$$

Возникает вопрос: какое уравнение вида (3) может рассматриваться в качестве трехмерного аналога уравнения Эйлера-Пуассона (то есть имеет близкие групповые свойства)?

Уравнение Эйлера-Пуассона согласно теореме 1 характеризуется условиями:  $p$  и  $q$  постоянны,  $q \neq 0$ . В качестве критерия отбора следует принять, что трехмерный аналог

- 1) должен допускать алгебру  $L^r$  наибольшей конечной размерности,
- 2) имеет конструкции  $q_i$ ,  $i = 7, 8, 9$ , отличные от нуля,
- 3) коэффициенты уравнения должны иметь достаточно простую структуру, сходную со структурой коэффициентов уравнения Эйлера-Пуассона.

Уравнение, являющееся, в соответствии с требованиями 1)–3), трехмерным аналогом уравнения Эйлера-Пуассона, имеет вид

$$u_{xyz} - \frac{2p_{23}}{q_6(y+z)}u_{xy} - \frac{2}{q_6(y+z)}u_{xz} + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2}u_x + \frac{6}{q_7(x+y+z)^3}u = 0$$

и допускает алгебру  $L^2$ , образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z.$$

**2. Уравнение Бианки четвертого порядка.** Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & u_{x_1x_2x_3x_4} + a_1u_{x_2x_3x_4} + a_2u_{x_1x_3x_4} + a_3u_{x_1x_2x_4} + a_4u_{x_1x_2x_3} + \\ & + a_{12}u_{x_3x_4} + a_{13}u_{x_2x_4} + a_{14}u_{x_2x_3} + a_{23}u_{x_1x_4} + a_{24}u_{x_1x_3} + a_{34}u_{x_1x_2} + \\ & + a_{123}u_{x_4} + a_{124}u_{x_3} + a_{134}u_{x_2} + a_{234}u_{x_1} + a_{1234}u = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

с переменными коэффициентами.

Для уравнения (7) в [10] построены 28 инвариантов Лапласа:

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= a_{ix_j} + a_i a_j - a_{ij}, \\ h_{i,jk} &= a_{ix_j x_k} + a_i a_{jk} + a_j a_{ik} + a_k a_{ij} - 2a_i a_j a_k - a_{ijk}, \\ h_{i,jkl} &= a_{ix_j x_k x_l} + a_i a_{jkl} + a_j a_{ikl} + a_k a_{ijl} + a_l a_{ijk} + \\ &+ a_{ija_{kl}} + a_{ikajl} + a_{ilajk} - 2a_i a_j a_{kl} - 2a_i a_k a_{jl} - \\ &- 2a_i a_l a_{jk} - 2a_j a_k a_{il} - 2a_j a_l a_{ik} - 2a_k a_l a_{ij} + \\ &+ 6a_i a_j a_k a_l - a_{ijkl}, \quad \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad j < k < l. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты, различающиеся порядком следования индексов, считаем равными (например,  $a_{123} = a_{231}$ ). Два уравнения вида (7) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда у них равны все соответствующие инварианты Лапласа. В той же работе записаны определяющие уравнения для (7) в инвариантной форме.

Нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

**Теорема 3.** *Два уравнения вида (7) с наборами инвариантов Лапласа  $h_{1,2}, h_{2,1}, \dots, h_{1,23}, \dots, h_{1,234}, \dots, h_{4,123}$  и  $\bar{h}_{1,2}, \bar{h}_{2,1}, \dots, \bar{h}_{1,23}, \dots, \bar{h}_{1,234}, \dots, \bar{h}_{4,123}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \alpha'_i(x_i) \alpha'_j(x_j) \bar{h}_{i,j}, \quad h_{i,jk} = \alpha'_i(x_i) \alpha'_j(x_j) \alpha'_k(x_k) \bar{h}_{i,jk}, \\ h_{i,jkl} &= \alpha'_i(x_i) \alpha'_j(x_j) \alpha'_k(x_k) \alpha'_l(x_l) \bar{h}_{i,jkl}, \\ i, j, k, l &\in \{1, 2, 3, 4\}, \quad i \neq j \neq k \neq l. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение отношения инвариантов Лапласа

$$p_{ij} = \frac{h_{j,i}}{h_{i,j}}, \quad i, j = \overline{1,4},$$

а также конструкции

$$q_{ij} = \frac{(\ln h_{i,j})_{x_i x_j}}{h_{i,j}}, \quad i, j = \overline{1,4}.$$

С помощью указанных функций построены классы уравнений вида (7), аналогичные указанным в пункте 1. Относительно полученных классов можно сделать следующие выводы. Алгебра Ли уравнения (7) есть  $L = L^r \oplus L^\infty$ , где  $L^r$  образована операторами вида

$$X = \sum_{i=1}^4 \xi^i(x_1, x_2, x_3, x_4) \partial_{x_i} + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) u \partial_u,$$

а  $L^\infty$  — подалгебра, образованная оператором  $u \partial_u$  и операторами вида  $\mu \partial_u$ , где  $\mu$  — решение уравнения (7). Если все функции  $p_{ij}$  ( $h_{i,j} \neq 0$ ) постоянны, либо  $h_{i,j} = h_{j,i} \equiv 0$ , причем хотя бы один из инвариантов  $h_{k,l} \neq 0$ , то алгебра  $L^r$  может быть бесконечномерной. Если размерность алгебры  $L^r$  конечна, то для рассмотренных классов уравнения (7) ее максимальное значение  $r = 6$ .

### 3. Уравнения с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} + a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = 0. \quad (8)$$

Инварианты Лапласа для уравнения (8) имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= 2a_{20x} + a_{20}a_{11} - a_{10}, & h_2 &= a_{11y} + a_{20}a_{11} - a_{10}, \\ h_3 &= a_{11x} + \frac{a_{11}^2}{2} - 2a_{01}, \\ h_4 &= 2a_{20xx} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}, \\ h_5 &= a_{11xy} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}. \end{aligned}$$

Определяющие уравнения для (8) могут быть представлены в инвариантной форме

$$\begin{aligned}\xi_y &= 0, & \eta_x &= 0, \\ (2\sigma + 2a_{20}\eta + a_{11}\xi)_y &= (h_2 - h_1)\xi, \\ (2\sigma + 2a_{20}\eta + a_{11}\xi)_x &= (h_1 - h_2)\eta + \xi_{xx}, \\ (h_1\xi)_x + (h_1\eta)_y &= 0, & (h_2\xi)_x + (h_2\eta)_y &= 0, \\ \xi_{xxx} - (h_3\xi)_x - h_3\xi_x - h_{3y}\eta &= 0, \\ \xi_{xx}h_1 + (h_4\xi)_x + h_4\xi_x + (h_4\eta)_y &= 0, \\ \xi_{xx}h_2 + (h_5\xi)_x + h_5\xi_x + (h_5\eta)_y &= 0.\end{aligned}$$

Далее ограничимся рассмотрением уравнений (8), для которых выполняется хотя бы одно из условий  $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 \neq 0$ .

Введем обозначения

$$p_{12} = \frac{h_1}{h_2}, \quad p_{21} = \frac{h_2}{h_1}, \quad q_i = \frac{(\ln h_i)_{xy}}{h_i}, \quad i = 1, 2.$$

Справедливо утверждение: если хотя бы одна из функций  $p_{12}$ ,  $p_{21}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  не равна тождественно постоянной, то алгебра Ли  $L^r$  операторов вида (2) не более чем одномерна.

Отметим, что если  $q_i$  постоянны, то инварианты  $h_i$  удовлетворяют уравнению Лиувилля.

Сконструированы уравнения, которые являются представителями классов уравнений вида (8), допускающими алгебру Ли  $L^r$  наибольшей размерности. Поскольку  $q_i$  в этом случае постоянны, структура коэффициентов этих уравнений определяется из уравнения Лиувилля однозначно.

**Теорема 4.** Пусть выполняется условие  $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ . Тогда уравнение (8) допускают более чем одномерную алгебру Ли операторов (2) тогда и только тогда, когда функции  $p_{ij}$ ,  $q_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) тождественно постоянны. Если  $p_{ij}$  и  $q_i$  постоянны, то наибольшая размерность допускаемой алгебры



Ли  $L^r$  операторов (2) равна трем как в случае  $q_1^2 + q_2^2 \equiv 0$ , так и в случае  $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ .

Рассмотрим уравнения четвертого порядка. Для уравнения

$$\begin{aligned} u_{xxyy} + a_{21}(x, y)u_{xxy} + a_{12}(x, y)u_{xyy} + \\ + a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{02}(x, y)u_{yy} + \\ + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = 0 \end{aligned}$$

инварианты Лапласа имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= 2a_{21x} + a_{21}a_{12} - a_{11}, \quad h_2 = 2a_{12y} + a_{21}a_{12} - a_{11}, \\ h_3 &= 2a_{12x} + a_{12}^2 - 4a_{02}, \quad h_4 = 2a_{21y} + a_{21}^2 - 4a_{20}, \\ h_5 &= 2a_{21xy} + a_{21}a_{11} + 2a_{12}a_{20} - a_{21}^2a_{12} - 2a_{10}, \\ h_6 &= 2a_{12yy} + a_{21}a_{11} + 2a_{12}a_{20} - a_{21}^2a_{12} - 2a_{10}, \\ h_7 &= 2a_{21xx} + a_{12}a_{11} + 2a_{21}a_{02} - a_{12}^2a_{21} - 2a_{01}, \\ h_8 &= 2a_{12xy} + a_{12}a_{11} + 2a_{21}a_{02} - a_{12}^2a_{21} - 2a_{01}, \\ h_9 &= a_{21xxy} + a_{21}a_{01} + a_{12}a_{10} + 2a_{20}a_{02} - a_{21}a_{12}a_{11} - \\ &\quad - a_{21}^2a_{02} - a_{12}^2a_{20} + \frac{3}{4}a_{21}^2a_{12}^2 + \frac{1}{4}a_{11}^2 - 2a_{00}, \\ h_{10} &= a_{12xyy} + a_{21}a_{01} + a_{12}a_{10} + 2a_{20}a_{02} - a_{21}a_{12}a_{11} - \\ &\quad - a_{21}^2a_{02} - a_{12}^2a_{20} + \frac{3}{4}a_{21}^2a_{12}^2 + \frac{1}{4}a_{11}^2 - 2a_{00}, \end{aligned}$$

а для уравнения

$$\begin{aligned} u_{xxx} + a_{30}(x, y)u_{xxx} + a_{21}(x, y)u_{xxy} + a_{20}(x, y)u_{xx} + \\ + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = 0 \end{aligned}$$

указанные инварианты могут быть записаны в следующей фор-

ме

$$\begin{aligned}
 h_1 &= a_{21y} + a_{30}a_{21} - a_{20}, \quad h_2 = 3a_{30x} + a_{30}a_{21} - a_{20}, \\
 h_3 &= a_{21x} + \frac{1}{3}a_{21}^2 - a_{11}, \\
 h_4 &= 3a_{30xx} + a_{30}a_{11} + \frac{2}{3}a_{21}a_{20} - \frac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 - a_{10}, \\
 h_5 &= a_{21xy} + a_{30}a_{11} + \frac{2}{3}a_{21}a_{20} - \frac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 - a_{10}, \\
 h_6 &= a_{21xx} + a_{21}a_{11} - \frac{2}{9}a_{21}^3 - 3a_{01}, \\
 h_7 &= 3a_{30xxx} + 3a_{30}a_{01} + a_{21}a_{10} + a_{20}a_{11} - \\
 &\quad - 2a_{30}a_{21}a_{11} - \frac{2}{3}a_{21}^2a_{20} + \frac{2}{3}a_{21}^3a_{30} - 3a_{00}, \\
 h_8 &= a_{21xxy} + 3a_{30}a_{01} + a_{21}a_{10} + a_{20}a_{11} - \\
 &\quad - 2a_{30}a_{21}a_{11} - \frac{2}{3}a_{21}^2a_{20} + \frac{2}{3}a_{21}^3a_{30} - 3a_{00}.
 \end{aligned}$$

Для этих уравнений доказаны теоремы, аналогичные теореме 4.

Результаты, относящиеся к уравнениям с кратным дифференцированием, получены совместно с Л.Б. Мироновой.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фаге М. К. *Задача Коши для уравнения Бианки* // Матем. сб. – 1958. – Т. 45. – № 3. – С. 281–322.
2. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов*. – Новосибирск: Наука, 1987. – 290 с.
3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.
4. Овсянников Л. В. *Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина* // Журн. прикл. мех. и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 126–145.
5. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

6. Ибрагимов Н. Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике* // Успехи матем. наук. – 1992. – Т. 47. – Вып. 4. – С. 83–144.

7. Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. *Симметричный анализ уравнений эволюционного типа*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 392 с.

8. Джохадзе О. М. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 58–68.

9. Миронов А. Н. *Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 389–400.

10. Миронов А. Н. *Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 8. – С. 1144–1149.

**Е. В. Мокшин, Е. В. Биряльцев, Д. В. Бережной**  
*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*  
*zhen-moks@yandex.ru, igenbir@yandex.ru,*  
*berezhnoi.dmitri@mail.ru*

## **ВОССТАНОВЛЕНИЕ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ**

Одной из наиболее актуальных задач в сейсмологии является определение пространственного положения и момента возникновения событий в геологической среде. Необходимо уметь определять местоположение источника, находящегося в Земле

на некоторой глубине, по данным получаемым на ее поверхности. В настоящей работе мы рассматриваем вопросы восстановления местоположения события в сплошной среде, используя метод максимального правдоподобия, хорошо известный в математической статистике [1]. Основой метода является поиск в полевых записях образов микросейсмических импульсов, исходящих из некоторой точки пространства.

Для расчета образов микросейсмических импульсов применялось численное моделирование распространения сейсмических волн в сложной геологической среде. На разработанном программном комплексе [2] было произведено трехмерное численное моделирование сплошной среды. Расчет проводился на основе метода конечных элементов по явной схеме. Использовалась слоистая скоростная модель. В качестве источника возбуждения внутри модели прикладывалась сила в течение одного шага моделирования. Записывались значения скорости вертикальных и горизонтальных перемещений на верхней грани расчетной области.

Показано, что метод максимального правдоподобия работоспособен в задачи восстановления множественных микросейсмических событий и устойчив к аддитивному шуму.

Приведены примеры практического применения метода.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фишер Р. Э. *Математический энциклопедический словарь*. – М.: Советская энциклопедия, 1988.
2. Галимов М. Р., Биряльцев Е. В. *Некоторые технологические аспекты применения высокопроизводительных вычислений на графических процессорах в прикладных программных системах* // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11. – С. 77–93.

**А. М. Нигмедзянова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
aigmani@rambler.ru*

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО  
ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА  
С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

В  $E_p^+$  рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T(U) = x_p^m \left( \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} + \lambda^2 x_p^m U = 0, \quad (1)$$

где  $m > 0$ ,  $p \geq 3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

С помощью замены переменных по формулам

$$\xi_j = x_j, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad \xi_p = \frac{2}{m+2} x_p^{\frac{m+2}{2}} \quad (2)$$

уравнение (1) приводится к эллиптическому уравнению с положительным параметром

$$\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{\xi_p} \frac{\partial U}{\partial \xi_p} + \lambda^2 U = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$U(\xi) = V(r), \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^p \xi_i^2}. \quad (4)$$

Подставляя функцию (4) в уравнение (3), получаем

$$V'' + \frac{p-1+\beta}{r} V' + \lambda^2 V = 0, \quad (5)$$

где  $\beta = \frac{m}{(m+2)}$ . Ясно, что  $0 < \beta < 1$  при  $m > 0$ .

Умножая уравнение на  $r^2$ , находим

$$r^2 V'' + (p - 1 + \beta) r V' + \lambda^2 r^2 V = 0. \quad (6)$$

С помощью замены переменных по формулам

$$V(r) = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\frac{p-2+\beta}{2}} W(t), \quad r = \frac{t}{\lambda} \quad (7)$$

уравнение (6) сводится к уравнению Бесселя

$$t^2 W'' + t W' + (t^2 - \nu^2) W = 0, \quad (8)$$

где  $\nu = \frac{p-2+\beta}{2}$ . Известно [1], что общее решение уравнения (8) имеет вид

$$W(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \quad (9)$$

где  $J_\nu(t)$  и  $Y_\nu(t)$  – функции Бесселя первого и второго родов соответственно,  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Возвращаясь в (9) к переменной  $r$ , с учетом формул (7), получим решение уравнения (5)

$$V(r) = ar^{-\nu} (C_1 J_\nu(\lambda r) + C_2 Y_\nu(\lambda r)) \quad (10)$$

где  $a$  – нормирующая постоянная.

Из разложения функций  $J_\nu(t)$  и  $Y_\nu(t)$  в степенной ряд следует, что решение (10) может быть представлено в виде

$$V(r) = \frac{\tilde{a}}{2^\nu \pi} r^{-2\nu} + \psi(r), \quad (11)$$

где  $\psi(r)$  – функция, имеющая в начале координат особенность вида  $r^{-2\gamma}$  ( $\gamma < \nu$ ).

Для получения решения уравнения (3) с особенностью в точке  $\xi_0$  применим к функции (11) оператор обобщенного сдвига  $T_\xi^{\xi_0}$  и вернемся к переменной  $x$ . С учетом формул (2) найдем

$$\mathcal{E}(x; x_0) = \frac{\tilde{a} C_\beta (m+2)^{\frac{m}{4}} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{1+\nu+\frac{m}{4}} \pi \Gamma(1-\nu) \Gamma(\nu)} (x_p x_{p_0})^{-\frac{m}{4}} \rho_{xx_0}^{2-p} + \mathcal{E}^*(x; x_0), \quad (12)$$

где  $\rho_{xx_0} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p-1} (x_j - x_{j_0})^2 + \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2}$ ,  
 $\mathcal{E}^*(x, x_0)$  – регулярная в  $E_p^+$  функция.

Отсюда следует, что решение (12) имеет степенную особенность вида  $\rho^{2-p}$  и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке  $x_0$ .

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ватсон Г. Н. *Теория бесселевых функций. Ч.1.* – М.: ИЛ, 1949.

**К. Г. Овсепян**

*Казанский государственный энергетический университет,  
 karen.hovsep@gmail.com*

#### ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА И ТИП АЛГЕБРЫ

Устанавливается связь между двумя  $C^*$ -подалгебрами  $\mathcal{T}_n$  и  $\mathcal{T}(n)$  алгебры Теплица, порожденными мономами индекса Фредгольма, кратного числу  $n$ . Также, используя тип алгебры, определенный в работе С. А. Григоряна [1], мы показываем конечность типа алгебры  $\mathcal{T}_n$  относительно алгебры  $\mathcal{T}(n)$ .

Пусть  $T$  – оператор сдвига на  $l^2(\mathbb{Z}_+)$ , который относительно естественного базиса  $\{e_n\}_{n=0}^\infty$  определяется  $Te_n = e_{n+1}$ , и  $T^*$  – оператор сопряженный к оператору  $T$ . Алгеброй Теплица называется замкнутая подалгебра линейных, ограниченных операторов на гильбертовом пространстве  $l^2(\mathbb{Z}_+)$ , порожденная операторами  $T$  и  $T^*$ .

Конечное произведение таких операторов называется мономом [2]. Каждый моном имеет конечный индекс Фредгольма.

Определим эндоморфизм  $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ , полагая  $\tau(A) = TAT^*$ . Отметим, что из условия  $T^*T = I$  следует, что  $\tau$  есть вложение  $\mathcal{T}$  в себя.

Пусть  $\mathcal{T}_n$  –  $C^*$ -подалгебра алгебры Теплица  $\mathcal{T}$ , порожденная мономами, индекс которых кратен  $n$ , и пусть  $\mathcal{T}(n)$  –  $C^*$ -подалгебра  $\mathcal{T}_n$ , порожденная операторами  $T^n$  и  $T^{*n}$ .

**Лемма 1.** *Для алгебры  $\mathcal{T}_n$  справедливо разложение в прямую сумму:*

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(n) \oplus \tau(\mathcal{T}(n)) \oplus \dots \oplus \tau^{n-1}(\mathcal{T}(n)). \quad (1)$$

Пусть заданы алгебры  $A$  и  $B$ , такие что  $A \subset B$ . Рассмотрим цепочку алгебр

$$A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n \subsetneq B.$$

Цепочка называется неуплотняемой, если нельзя вложить никакую другую алгебру в эту цепочку. Типом алгебры  $B$  относительно алгебры  $A$  называется число  $t_B(A) = \sup\{n\}$ , где супремум берется по всем возможным неуплотняемым цепочкам.

Иными словами, какова бы ни была цепочка

$$A \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_{n+k} \subset B, k \geq 1,$$

подалгебр алгебры  $A$ , по крайней мере две алгебры в этой цепочке совпадают. Скажем, что алгебра  $B$  является алгеброй конечного типа относительно алгебры  $A$ , если  $t_B(A) < \infty$ .

**Теорема 1.** *Тип алгебры  $\mathcal{T}_n$  относительно алгебры  $\mathcal{T}(n)$  равен  $t_{\mathcal{T}_n}(\mathcal{T}(n)) = n - 1$ .*



Обозначим через  $\mathcal{K}_n$  и  $\mathcal{K}(n)$  алгебры компактных операторов [3] в  $\mathcal{T}_n$  и  $\mathcal{T}(n)$  соответственно.

**Теорема 2.** *Тип алгебры  $\mathcal{K}_n$  относительно алгебры  $\mathcal{K}(n)$  равен  $t_{\mathcal{K}_n}(\mathcal{K}(n)) = n - 1$ .*

**Теорема 3.** *Тип алгебры  $\mathcal{T}$  относительно алгебры  $\mathcal{T}_n$  конечен и  $t_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}_n) < n$ .*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. А. *Об алгебрах конечного типа* // УМН. – 1975. – Т. 30. – № 6(186). – С. 167–168.
2. Тероуан V. H. *On isometric representations of the semigroup  $\mathcal{Z}_+ \setminus 1$*  // Journal of Contemporary Mathematical Analysis. – 2013. – Т. 48. – No 2. – P. 78–84.
3. Davidson K. R.  *$C^*$ -algebras by example*. – Fields Institute Monograph 6, AMS, 1996. – 309 p.

**О. А. Перепелкина**

*ООО “Лолгаман плюс”,*

*lolga77@mail.ru*

#### ПОСТРОЕНИЕ ЕДИНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ ПЕНЗЕНСКОЙ ОБЛАСТИ С ПОМОЩЬЮ ЭСО

В данной статье говорится о создании единого информационного пространства общеобразовательных учреждений Пензенской области с помощью автоматизированной информационной системы “БАРС.Web-Электронная Школа” – электронная система образования Пензенской области

(<http://www.edu-penza.ru>), которая разработана на основе информационно-телекоммуникационной сети “Интернет”. В общеобразовательных учреждениях Пензенской области на основе информационно-телекоммуникационной сети “Интернет” разработана и активно развивается автоматизированная информационная система “БАРС.Web-Электронная Школа” – электронная система образования Пензенской области (далее ЭСО). ЭСО внедрено в общеобразовательные учреждения Пензенской области с целью выполнения распоряжения Правительства РФ от 17.12.2009 № 1993-р (в ред. Распоряжения Правительства РФ от 07.09.2010 N 1506-р) о предоставлении электронного доступа граждан в сфере образования к государственным и муниципальным услугам. Цель внедрения ЭСО – построение единого информационного пространства общеобразовательных учреждений Пензенской области. Задачи:

- повышение эффективности образовательного процесса в общеобразовательных учреждениях Пензенской области;
- расширение коммуникативных возможностей общеобразовательных учреждений Пензенской области;
- совершенствование механизмов управления общеобразовательными учреждениями Пензенской области;
- создание единой коммуникативной среды на основе информационно-телекоммуникационной сети “Интернет”.

На данный момент ЭСО состоит из четырех модулей.

1. Система виртуального присутствия.
2. Система оценки качества образования.
3. Образовательный процесс.
4. Мониторинг системы образования.

Описывается структура каждого модуля.

В результате использования ЭСО общеобразовательные учреждения Пензенской области переходят на новую ступень использования информационно-коммуникационных технологий в учебно-воспитательном процессе, и предоставляют возможность жителям Пензенской области получать государственные и муниципальные услуги в сфере образования в электронном виде.

**Л. В. Плотникова**

*Волгоградский государственный университет,*

*Ljudmila.89@mail.ru*

### **О КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

Пусть задана многоугольная ограниченная область  $\Omega \in R^2$ . Рассмотрим разбиение этого многоугольника на треугольники  $T_1, T_2, \dots, T_N$ . Пусть  $M_1, M_2, \dots, M_k$  – все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек  $M_i$  не является внутренней точкой для данных треугольников.

Для построения кусочно квадратичной функции нужно к имеющимся вершинам треугольников  $M_1, \dots, M_k$  добавить середины всех ребер треугольников и задать в них дополнительные значения функции  $u$ . Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – получившийся набор точек.

Для произвольного набора значений  $u_1, u_2, \dots, u_m$  определим кусочно-квадратичную функцию  $u : \Omega \rightarrow R$  так, что  $u(A_i) = u_i, i = 1, \dots, m$  и функция  $u$  в каждом треугольнике  $T_k, k = 1, \dots, N$  имеет вид:  $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ . Данная функция будет непрерывной в  $\Omega$ .

Площадь графика функции  $u$  является некоторой функцией переменных  $u_1, u_2, \dots, u_m$  и имеет вид

$$S(u) = \sum_{k=0}^N \iint_{T_k} \sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2} dx dy.$$

Пусть в точках  $A_1, A_2, \dots, A_m$  заданы некоторым образом значения  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ . Построенную по этим значениям соответствующую кусочно-квадратичную функцию обозначим через  $\varphi$ . Поставим задачу нахождения кусочно-квадратичной функции  $u$ , на которой достигается минимум площади  $S(u_1, u_2, \dots, u_m)$ , удовлетворяющей граничному условию, т. е. задачу

$$S(u_1, u_2, \dots, u_m) \rightarrow \min, \quad u(A_i) = \varphi_i, \quad \forall A_i \in \partial\Omega. \quad (1)$$

Далее ограничимся рассмотрением прямоугольной области с выбранной триангуляцией. Пусть  $\Omega$  – прямоугольник  $[a, b] \times [c, d]$ . Зафиксируем натуральное число  $m$  и рассмотрим разбиение прямоугольника, заданное точками  $x_i = a + \frac{i}{m}(b - a)$ ,  $y_j = c + \frac{j}{m}(d - c)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, m$ . Каждый из получившихся прямоугольников  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, m - 1$  разобьем любой диагональю на два треугольника.

Если  $S(u_1, u_2, \dots, u_m)$  – выражение для площади кусочно-квадратичной функции, то соответствующее условие минимальности при фиксированных значениях на границе получается из равенств

$$\frac{\partial S}{\partial u_{kl}} = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad l = \overline{1, m-1}. \quad (2)$$

Обозначим через  $f^K$  кусочно-квадратичную функцию такую, что  $f^K(A_i) = \varphi(A_i)$ .  $\lambda(\Omega)$  – основная частота области  $\Omega$ .

**Теорема.** Пусть  $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  – решение уравнения минимальной поверхности и  $u^*$  кусочно-квадратичная функция, являющаяся решением задачи (1) с  $\varphi_i = f(A_i)$ , для всех  $A_i \in \partial\Omega$ . Предположим, что  $P_0 = \sup_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$  и  $P_1 = \sup |\nabla u^*|$ . Тогда

$$\max_{\Omega} |f^K - u^*| \leq 4P^{4/3} \left( \frac{S(f^K) - S(u^*)}{\lambda(\Omega)\pi} \right)^{\frac{1}{4}},$$

где  $P = \max\{1, P_0, P_1\}$ .

**Следствие** Последовательность  $u_m^*$  равномерно в  $\Omega$  сходится к решению  $f$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97034 р\_поволжье\_а)

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Попов В. Е. *Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций с помощью метода натянутых сетей*. – GraphiCon, 2001. – С. 140–144.
2. Клячин А. А. *О кусочно-линейных минимальных поверхностях* // Мат. шк.-конф. по геометрическому анализу. – Горно-Алтайск : Издательство РИО ГАГУ, 2012. – С. 4.
3. Клячин А. А. *Приближение минимальных поверхностей кусочно-полиномиальными функциями* // Записки семинара “Сверхмедленные процессы”. – 2009. – Вып. 4. – С. 198–205.

**Г. В. Романенко, И. В. Фроленков**

*Сибирский федеральный университет,  
galina.romanenko@yandex.ru, igor@frolenkov.ru*

## О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СОСТАВНОГО ТИПА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ДАННЫМИ КОШИ

С использованием некоторой дополнительной информации о решении обратная задача для систем уравнений составного типа сводится к прямой. Как правило, получается система интегродифференциальных или неклассических “нагруженных” уравнений [1, 2]. Необходимо определить, при каких условиях эти вспомогательные задачи разрешимы, а также изучить свойства их решений. Другой метод исследования представлен в [3].

В данной работе получено обобщение алгоритма исследования из [4] для специального класса вспомогательных прямых задач, к которым сводятся коэффициентные обратные задачи в случае одномерной системы составного типа в неограниченной области с данными Коши.

Для доказательства существования решения задачи используется метод слабой аппроксимации, являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне [5].

В пространстве  $E_1$  переменных  $x$ , выберем  $r$  различных точек  $\alpha_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ . Рассмотрим в полосе  $G_{[0, T]} = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$  задачу Коши для системы нагруженных неклассических уравнений

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a_1(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t))u_x + \\ \quad + f_1(t, x, u, v, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)), \\ v_t(t, x) = b_2(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t))v_x + f_2(t, x, u, v, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)), \end{cases}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in E_1,$$

через  $\bar{\varphi}_u(t) = \left( u(t, \alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, \alpha_k) \right)$ ,  $\bar{\varphi}_v(t) = \left( v(t, \alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j} v(t, \alpha_k) \right)$ ,  $k = \overline{1, r}, j = 0, 1, \dots, p$ , обозначены вектор-функции, компоненты которых являются следами (зависящими только от переменной  $t$ ) функций  $u(t, x)$  и  $v(t, x)$ , а также соответственно всех их производных по пространственной переменной  $x$  до порядка  $p$  включительно.

Доказаны достаточные условия существования решения данной задачи в классах гладких ограниченных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31033).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вячеславова П. Ю., Сорокин Р. В. *Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа* // Журн. СФУ: математика и физика. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 288–297.

2. Сапаркина С. А., Сорокин Р. В. *Задача идентификации двух коэффициентов при младших производных в системе составного типа* // Материалы XIV Межд. науч. конф., посв. памяти акад. М. Ф. Решетнева (10-12 нояб. 2010, г. Красноярск). – Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2010. – С. 454.

3. Романенко Г. В., Фроленков И. В. *О представлении решения обратной задачи для системы многомерных параболических уравнений* // Межд. конф., посв. 80-летию со дня рождения акад. М. М. Лаврентьева “Обратные и некорректные задачи математической физики”. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. – С. 103–104.

4. Фроленков И. В., Белов Ю. Я. *О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений*

*с данными Коши* // Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. статей. – Новосибирск: Изд. Института мат., 2012. – С. 262–279.

5. Belov Yu. Ya. *Inverse problems for partial differential equations*. – Utrecht, VSP, 2002.

**М. К. Сагдатуллин**

*Казанский национальный исследовательский  
технологический университет,  
ssmarat@mail.ru*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НОВОГО КЭ ДЛЯ РАСЧЕТА КОМБИНИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Целью настоящей работы является разработка методики построения изопараметрического трехмерного конечного элемента (КЭ) сплошной среды, приспособленного для расчета оболочек средней толщины при однослойной аппроксимации по толщине. Обычно в подобных элементах узлы располагаются на срединной поверхности и в качестве степеней свободы кроме проекций вектора перемещений используют и углы поворота нормального волокна. Некоторый обзор таких КЭ приведен в [1] – [3]. Обычно эти элементы демонстрируют хорошую точность и достаточно эффективны в расчетах оболочек малой и средней толщины, однако их использование весьма затруднительно при моделировании сопряжений оболочек с массивными телами, так как необходимо выражать узловые перемещения трехмерных элементов через углы поворота оболочечных КЭ. В этом случае приходится использовать специальные процедуры (введение специальных множителей Лагранжа, использование метода штрафа и построение семейства специальных



переходных конечных элементов) для стыковки трехмерных конечных элементов и элементов оболочек в единую расчетную модель или строить специальные трехмерные конечные элементы сплошной среды, включающие в качестве степеней свободы еще и углы поворота. Поэтому получили распространение специальные элементы оболочек, которые имеют в качестве узловых степеней свободы перемещения узлов, расположенных на лицевых поверхностях. Примеры подобных КЭ и их использования описаны в работах [3 – 5].

В предлагаемом конечном элементе вводятся изопараметрические аппроксимации геометрии и неизвестные компоненты перемещений. Узловые точки располагаются в вершинах элемента, в локальных координатах представляющего собой куб. По толщине используется линейная аппроксимация, что эквивалентно введению кинематической гипотезы о линейном распределении перемещений по толщине с учетом обжатия оболочки.

Вариация потенциальной энергии деформации (работа внутренних напряжений на возможных деформациях) вычисляется численно по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра (два узла по каждому координатному направлению). В каждом квадратурном узле вводится статическая гипотеза, обычно используемая для оболочек средней толщины, об отсутствии влияния поперечного напряжения на мембранные, изгибные и деформации поперечного сдвига.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Адясова Н. М., Капустин С. А., Яблонко Л. С. *Некоторые вопросы расчета нелинейных составных конструкций. Прикладные проблемы прочности и пластичности.* – Горький, 1975. – Вып. 1. – С. 124–135.

2. Голованов А. И., Сагдатуллин М. К. *Трёхмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций* // Ученые записки Казанск. гос. ун-та. Серия физ.-мат. наук. – Казань, 2009. – Т. 151. – Кн. 3. – С. 121–129.

3. Савула Я. Г., Дыяк И. И. *Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций* // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 62–67.

4. Karan S., Surana. *Transition finite elements for three-dimensional stress analysis* // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1980. – V. 15. – No 7. – С. 991–1020.

5. Karan S., Surana. *Three dimensional solid-shell transition finite elements for heat conduction* // Comput. and Struct. – 1987. – V. 26. – No 6. – С. 941–950.

**А. А. Саламатин**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Arthouse131@rambler.ru*

**ОПТИМАЛЬНАЯ УПАКОВКА ЧАСТИЦ  
В ПРОЦЕССЕ СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ  
ФЛЮИДНОЙ ЭКСТРАКЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ  
ЕЕ СВОЙСТВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ  
СУЖАЮЩЕГОСЯ ЯДРА**

В последнее время сверхкритическая флюидная экстракция (СФЭ) привлекает все больший интерес как более дешевый и экологически менее вредный способ добычи ценных фракций масла из молотого растительного сырья. Все более актуальными становятся вопросы оптимизации процесса СФЭ.

Применение модели сужающегося ядра [1, 2] к исследованию СФЭ показало, что она в целом верно описывает динамику извлечения масла. В безразмерных переменных эта модель сводится к системе двух ДУЧП относительно неизвестных функций  $s(t, z, a)$  и  $c(t, z)$  – доли экстрагированного масла из частицы размера  $a$  и концентрации масла, растворенного в потоке экстрагента, омывающего частицы засыпки

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty s \chi(a, z) da \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{d(s)}{a^2} (1 - c),$$

где  $t, z$  – время и пространственная координата, отсчитываемая от входного сечения аппарата, а  $d(s)$  – интегральный диффузионный коэффициент, определяемый формой молотых гранул.

Функция  $\chi(a, z)$ , описывающая способ упаковки частиц в аппарат, рассматривалась как параметр оптимизации. В результате решения оптимизационной задачи по определению оптимальной упаковки с ограничением, выражающим сохранение числа частиц заданного размера, было показано, что локально монодисперсная стратифицированная (ЛМС) упаковка является оптимальной – она среди всех возможных способов упаковки максимизирует долю экстрагированного масла в каждый момент времени и вырабатывается за минимальное время. Формально эта упаковка определяется условием

$$\chi(z, a) = \delta(a - F^{-1}(1 - z)),$$

где через  $\delta$  обозначена дельта функция Дирака, а  $F^{-1}$  – функция, обратная к функции объемного распределения частиц по размерам. ЛМС упаковка предполагает, что частицы должны быть отсортированы по размерам. У входного сечения необходимо располагать наиболее крупные частицы, монотонно уменьшая их размер с ростом  $z$ .

Для этой упаковки была решена другая оптимизационная задача, а именно определены условия (функция  $F^*(a)$ ), при которых достигается минимум времени полной экстракции ЛМС упаковки  $t_+^o = 1$ , являющийся глобальным минимумом времени полной экстракции. В этом случае концентрация масла в экстрагенте на выходе из аппарата равна предельному значению в течение всего времени экстракции, экстрагент используется наиболее эффективно.

ЛМС упаковка сравнивалась с используемой на практике равномерной упаковкой, формально определяемой условием

$$\chi(z, a) = f(a), \quad dF = f(a)da.$$

Оказалось, что время  $t_+^f$  полной экстракции при равномерной упаковке является наибольшим среди всех упаковок. Для этих двух упаковок было показано, что отношение  $t_+^f/t_+^o \leq 2$ , а разность  $t_+^f - t_+^o \leq 1$  при любом помоле.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Goto M., Roy B. C., Hirose T. *Shrinking-core leaching model for supercritical fluid extraction* // J. of Supercritical Fluids. – 1996. – V. 9. – No 2. – P. 128–133.
2. Егоров А. Г., Мазо А. Б., Максудов Р. Н. *Экстракция полидисперсного зернистого слоя молотых семян масличных культур сверхкритическим диоксидом углерода* // Теор. основы хим. технологии. – 2010. – Т. 44. – № 5. – С. 498–506.

Т. Р. Самерханов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
*Timerbulat1987@mail.ru*

**НАХОЖДЕНИЕ КОНФОРМНОГО  
 ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ  
 НА ПОЛУПОЛОСУ С РАЗРЕЗОМ МЕТОДОМ  
 ДВИЖУЩЕГОСЯ РАЗРЕЗА**

Рассматривается задача нахождения конформного отображения  $f$  верхней полуплоскости на полуполосу с горизонтальным разрезом, изображенную на рис. 1. Это конформное отображение используется при исследовании подъёмной силы профиля, движущегося вблизи горизонтального экрана.

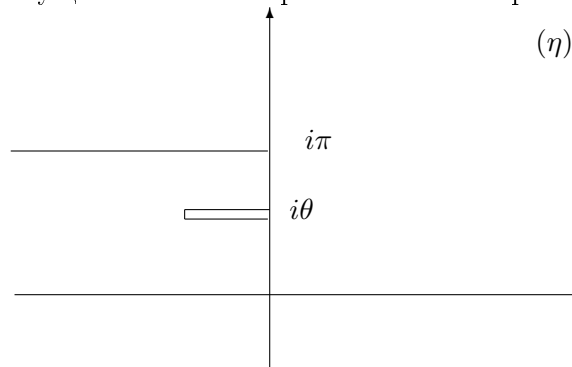


Рис. 1. Полуполоса с горизонтальным разрезом.

Зададим соответствие трех точек на границах отображаемых областей:

$$f : \infty \mapsto \infty, \quad -1 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto i\pi.$$

Пусть концу разреза соответствует точка  $\beta$ , а точкам, лежащим на нижнем и верхнем берегах основания разреза с аффик-

сом  $\theta i$  — точки  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Тогда конформное отображение согласно формуле Кристоффеля-Шварца имеет вид:

$$f(\zeta) = - \int_{-1}^{\zeta} \frac{(\tau - \beta)d\tau}{(\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(\tau - \alpha)^{\frac{1}{2}}(\tau - \gamma)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Для нахождения акцессорных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  мы модифицируем метод движущегося разреза, предложенный Л. Ю. Низамиевой [1] (см. также [2]). Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство конформных отображений

$$f(\tau, t) = - \int_{-1}^{\tau} \frac{(\tau - \beta(t))d\tau}{(\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(\tau - \alpha(t))^{\frac{1}{2}}(\tau - \gamma(t))^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$t \geq 0, \quad -1 < \alpha(t) < \beta(t) < \gamma(t) < 1,$$

отображающих конформно верхнюю полуплоскость на полуполосу  $\{\Re \eta < 0, 0 < \Im \eta < \pi\}$  с горизонтальным разрезом, исходящим из точки  $\pi i$ , длина которого равна параметру  $t$ .

**Теорема.** *Функции  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $\gamma = \gamma(t)$  определяются из решения задачи Коши для системы уравнений.*

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= - \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}}(\gamma - \beta)^{\frac{1}{2}}}{2} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{2\beta}{\beta^2 - 1} - \frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{\beta - \gamma} \right], \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1 - \gamma^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = \cos \theta.$$

Нами проведены численные расчеты, показывающие, что предложенный метод позволяет находить акцессорные параметры с любой разумной точностью.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Низамиева Л. Ю. *Внутренние и внешние смешанные обратные краевые задачи по параметру  $x$*  // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань: КФУ, 2011. – 102 с.
2. Гутлянский В. Я., Зайдан А. О. *О конформных отображениях полигональных областей* // Укр. матем. журнал. – 1993. – Т. 45. – № 11. – С. 1484–1494.

**А. Р. Самигуллина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
alsu\_sam@mail.ru*

#### **ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ НА ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СКМ MAPLE С ПОМОЩЬЮ АВТОРСКОГО КОМПАКТ-ДИСКА**

Авторский компакт-диск (см. [1]), используемый в преподавании курса высшей математики на естественнонаучных отделениях, содержит электронное учебное пособие по разделам

высшей математики (линейная алгебра и аналитическая геометрия), снабженное системой внутренних и внешних гиперссылок, позволяющих проводить решение задач высшей математики и давать их графическую интерпретацию в математическом пакете Maple. Идеология внедрения информационных технологий в систему физико-математического образования на основе математического пакета Maple описана в [2]. Пакет программ, локализованный на диске, является приложением к математическому пакету Maple (версии 5-15) и предназначен для автоматизированного решения стандартных задач линейной алгебры и аналитической геометрии. Кроме того, диск содержит демонстрационный графический материал по всем изучаемым разделам линейной алгебры и аналитической геометрии, позволяющий быстро и качественно готовить презентации по соответствующим разделам высшей математики. Идеи указанных авторских программ описаны в [3, 4, 5], а сами программы имеют государственную регистрацию [7, 8]. Кроме того, компакт диск содержит электронный учебник по изучаемым разделам с внутренними гиперссылками, а также со ссылками на файлы математического пакета Maple [6].

Компакт-диск создан с помощью программы «AutoPlau Menu», графических редакторов типа «CorelDraw», «Corel Photopaint», языка HTML, пакетов программ Maple 5.5, «Хара». При запуске компакт-диска появляется основная страница Меню, на которой с левой стороны имеются переходы на другие страницы, а именно на Maple-страницу, текстовую страницу, на страницу для преподавателей и список литературы. Из основной страницы, можно перейти на Maple, где появляется вставленная в Меню Web-страница, а также в верхнем правом углу – кнопка в форме листа клена, осуществляющая запуск обучаю-



щего пакета Maple-программ по всем разделам курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Web-страница предназначена, во-первых, для предварительного ознакомления пользователя с работой пакета Maple 5.5, а, во-вторых, для организации удобной системы поиска нужной информации. Здесь имеются переходы к следующим пунктам: «Интерфейс системы Maple», «Среды отображения в Maple», «Кнопки панели в Maple», «Назначение кнопок панели в Maple», «Планшетки в Maple», «Ввод команд и запуск их исполнения», «Видео: Ввод команд и запуск их исполнения», «Основная литература».

Текстовая страница служит для осуществления переходов на учебное пособие. Учебное пособие создано в формате doc и содержит как перекрестные гиперссылки, так и гиперссылки на командные файлы в формате bat, которые запускают необходимые рабочие листы mws с помощью демонстрационной версии Maple 5, локализованной на компакт-диске. Эта операция осуществляется командным файлом, содержащемся на компакт-диске.

Исследование кривой осуществляется с помощью трехпараметрической процедуры  $\text{AnalGeo}[\text{CanonF}](E_q, X, X1, s)$ , где  $E_q$  – общее уравнение кривой второго порядка,  $X$  – список координат в первоначальной системе координат в формате  $[x, y]$ ,  $X1$  – список координат в новой системе координат в формате  $[x1, y1]$ ,  $s$  – имя переменной угла поворота системы координат. При выполнении команды выводится название типа кривой; матрица ее параметров (список собственных значений квадратичной формы, каноническое уравнение кривой, преобразование движения, приводящее к каноническому уравнению, список параметров  $[c, \epsilon, d]$  – [расстояние от центра до фокусов, эксцентриситет, расстояние от центра до директрис],  $[a, b, p]$  – [значения

полуосей и параметра в каноническом уравнении параболы] см. [4], [5], [8].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Программный комплекс программных процедур по высшей математике в прикладном математическом пакете Maple*: Св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Росс. Фед. № 2013617288 от 08.08.13.

2. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Информационные технологии изучения физико-математических курсов на основе математического моделирования в системе компьютерной математики* // Известия Смоленского государственного университета. – 2012. – Вып. 4(20). – С. 471–481.

3. Самигуллина А. Р. *Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple* // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2010. – Вып. 3(21). – С. 69–74.

4. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики “Maple”* // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011. – Вып. 1(23). – С. 20–24.

5. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики* // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011. – Вып. 4(26). – С. 24–29.

6. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Электронный учебник по линейной алгебре и аналитической геометрии с использо-*

ванием СКМ Maple 5.5. – Изд-во СмолГУ, 2013. – Вып. 14. – С. 30–32.

7. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Программа точного вычисления фундаментальных решений системы линейных алгебраических уравнений произвольного порядка и представления их в стандартном, списочном виде в математическом пакете Maple*: Св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Росс. Фед. № 2011614976 от 24.06.11; заявл. 01.04.11; опубл. 20.09.2011. В бюлл.: RU ОБПБТ, № 3(76). – С. 547.

8. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. *Программа автоматизированного полного исследования общего уравнения второго порядка на плоскости с выводом результатов исследования в табличном и графическом форматах всех элементов кривых, описываемых общим уравнением, включая формулы их преобразования к каноническому виду, изображения директрис, асимптот, фокусов, исходной и преобразованной систем координат, в математическом пакете Maple*: Св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Росс. Фед. № 2012611664 от 14.02.12.

**О. А. Сачкова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
sachkova.olga@mail.ru*

**ПРОГРАММНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ  
АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ  
ОБЫКНОВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
И ОСНАЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ  
ВИЗУАЛИЗАЦИИ ИХ РЕШЕНИЙ**

СКМ Maple позволяет находить аналитическое решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1]. Однако для нелинейных ОДУ аналитическое решение чаще всего найти невозможно. В таких случаях необходимо использовать численный метод решения. По умолчанию в СКМ Maple используется метод решения дифференциальных уравнений Рунге-Кутта-Фелберга 4-5 порядков, представленный в виде специальной процедуры `rkf45`. При этом решение нелинейных ОДУ достигается применением стандартной команды `dsolve` с параметром `numeric (type=numeric)`.

Заданный формат вывода решений не позволяет непосредственно использовать полученные решения для их анализа и построения графиков. Для вывода решения в удобной для использования форме необходимо создать компьютерную модель, которая позволяет представить полученное решение в списочном формате векторной функции заданного аргумента.

Для компьютерных моделей, описываемых нелинейными ОДУ, необходимо создать программные процедуры оснащенной динамической визуализации [2]. Для повышения наглядности таких компьютерных моделей нелинейных ОДУ можно ис-

пользовать динамическую визуализацию в формате динамической гистограммы и динамической цветовой визуализации [3].

В случае цветовой визуализации решение оценивается цветом и каждому цвету (или освещенности) сопоставляется значение функции. При этом цвет задается периодическими функциями:

$$\mathbf{rd} = \cos(hh(i) * Pi/2)^2; \quad (1)$$

$$\mathbf{gd} = \sin(hh(i) * Pi)^2; \quad (2)$$

$$\mathbf{bd} = \sin(hh(i) * Pi)^2. \quad (3)$$

В данных формулах  $\mathbf{rd}$  задает все оттенки красного,  $\mathbf{gd}$  - все оттенки зеленого, а  $\mathbf{bd}$  - все оттенки синего цвета. В этом случае цвет задается законом RGB и подбирается по тональности.

Программная процедура  $\text{DsolveCoushNum}(\text{Eq}, \text{InCon}, y, x, a, N)$  достаточно наглядно иллюстрирует решение нелинейного ОДУ. Для большей наглядности решения нелинейного ОДУ в форме гистограммы реализовано в сочетании с анимацией цветом. Вывод решения нелинейного ОДУ в виде динамической визуализации в формате динамической гистограммы и динамической цветовой визуализации представлен на рис. 1.

При такой визуализации оттенкам серых цветов соответствуют меньшие значения функции, а оттенкам темных цветов большие значения.

Таким образом, различные способы динамической визуализации с помощью системы компьютерной математики Maple позволяют наглядно представить решения нелинейных ОДУ.

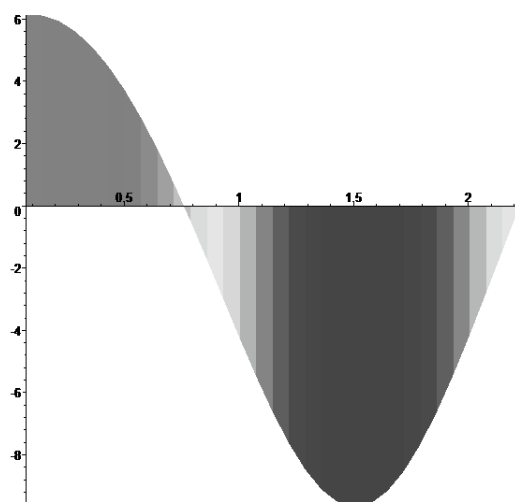


Рис. 1. Вывод решения нелинейного ОДУ в виде динамической визуализации в формате динамической гистограммы и динамической цветовой визуализации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сачкова О. А. *Программные процедуры оснащенной динамической визуализации автоматизированного решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2011. – Т. 44. – С. 263.
2. Сачкова О. А. *Динамические модели дифференциальных уравнений в учебном процессе* // Системы компьютерной математики и их приложения: Мат. XIII межд. науч. конф. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – Вып. 12. – С. 47–49.
3. Сачкова О. А. *Методическое обеспечение темы “Дифференциальные уравнения” на основе технологии оснащенной динамической визуализации решений обыкновенных дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики*

*Maple* // Информационные технологии в образовании и науке.  
 Мат. междунар. науч.-практ. конф. ИТОН-2012 8-12 октября. –  
 Казань: Изд-во КФУ, 2012. – С. 159–161.

**С. Н. Сидоров**

*Стерлитамакский филиал Башкирского  
 государственного университета,  
 stsid@mail.ru*

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2u = f(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = f(x), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) | 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ , где  $m > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  – заданные действительные числа.

**Задача.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, t)$  и  $f(x)$ , удовлетворяющие условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad (3)$$

$$Lu(x, t) \equiv f(x), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+, \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad u(x, \beta) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – достаточно гладкие функции,  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ,  $D_- = D \cap \{t < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{t > 0\}$ .

Отметим, что задача (2) – (6) при  $m = 0$ ,  $b = 0$  изучалась в [1]. В данной работе на основе рассуждений из [2], установлен критерий единственности решения задачи (2) – (6), которое построено при всех  $m > 0$  и  $b > 0$  в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Более подробно указанные результаты формулируются в следующих предложениях.

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи (2) – (6), то оно единственно только тогда, когда при всех  $k \in \mathbb{N}$  выполнены условия*

$$\Delta(k) = \gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\lambda_k^2} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) \sqrt{\alpha} - e^{-\lambda_k^2 \beta} \left[ \frac{1}{\lambda_k^2} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) \sqrt{\alpha} + w_k(-\alpha) \right] \neq 0, \quad (7)$$

где

$$\gamma_{\pm 1/(2q)}(k) = \pm \frac{1}{2q} \Gamma\left(\pm \frac{1}{2q}\right) \left(\frac{2}{p_k}\right)^{\pm 1/(2q)};$$

$$w_k(-\alpha) = \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k (-s)^q) \sqrt{-s} ds - \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) \int_{-\alpha}^0 J_{1/(2q)}(p_k (-s)^q) \sqrt{-s} ds,$$

$J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ;  $\lambda_k^2 = (q p_k)^2 = b^2 + (\pi k)^2$ ;  $2q = m + 2$ ;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера.

**Лемма.** *Если выполнено одно из условий: 1)  $\alpha_q = \alpha^q/q$  – любое натуральное число; 2)  $\alpha_q = p/t$  – любое дробное число,*



где  $p$  и  $t$  – взаимно-простые натуральные числа и  $1/q \neq (4r + t - 4td)/t$ , где  $d \in \mathbb{N}$ ,  $r$  – остаток от деления  $kp$  на  $t$ , то существуют положительные постоянные  $k_0 \in \mathbb{N}$  и  $C_0$  такие, что при любых  $k > k_0$  и фиксированных  $b > 0$ ,  $\beta > 0$  справедлива оценка

$$|k^{1-\lambda}\Delta(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q). \quad (8)$$

При выполнении оценки (8) при всех  $k > k_0$  и неравенства (7) при  $k = 1, 2, \dots, k_0$  решение задачи (2) – (6) определяется в виде сумм рядов

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \pi kx, \quad f(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin \pi kx, \quad (9)$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_k L_k(t) + \psi_k N_k(t)}{\lambda_k^2 \Delta(k)}, & t > 0, \\ \frac{\varphi_k P_k(t) + \psi_k Q_k(t)}{\Delta(k)}, & t < 0, \end{cases}$$

$$f_k = \frac{\psi_k}{\Delta(k)} [\lambda_k^2 \sqrt{\alpha} \gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) + \sqrt{\alpha} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q)] - \frac{\varphi_k}{\Delta(k)} e^{-\lambda_k^2 \beta},$$

$L_k(t)$ ,  $N_k(t)$ ,  $P_k(t)$  и  $Q_k(t)$  – функции зависящие от  $t$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b$  и  $m$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $\varphi(x) \in C^{3+\alpha}[0, 1]$ ,  $1 - \lambda < \alpha < 1$ ,  $\psi(x) \in C^5[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$  и выполнена оценка (8) при  $k > k_0$ . Тогда если  $\Delta(k) \neq 0$  при всех  $k = \overline{1, k_0}$ , то существует единственное решение задачи (2) – (6) и это решение

определяется рядами (9); если  $\Delta(k) = 0$  при некоторых  $k = k_1, \dots, k_m \leq k_0$ , то задача (2) – (6) разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x dx = \int_0^1 \psi(x) \sin \pi l x dx = 0, \quad l = k_1, \dots, k_m.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 4(546). – С. 55–62.
2. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для парабола-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 1. – С. 1–8.

**Л. У. Султанов, Р. Л. Давыдов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ruslan.davydov@mail.ru*

#### ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МКЭ

Настоящая работа посвящена разработке и численной реализации методики исследования напряженно-деформированного состояния упругопластических тел с учетом больших деформаций. Используется процедура пошагового нагружения с итерационным уточнением деформированного состояния. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов (МКЭ).

**1. Постановка задачи.** В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются левый тензор Коши-Грина ( $B$ ), тензор пространственного градиента скорости ( $h$ ), тензор деформации скорости ( $d$ ). Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений ( $\Sigma$ ), определенного в актуальном состоянии. Вводится удельная потенциальная энергия деформации, которая зависит от левого тензора Коши-Грина  $W = W(B)$ , тогда тензор напряжений Коши-Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma) = \frac{2}{J}(B) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial B} \right). \quad (1)$$

Здесь  $J$  – относительное изменение объема.

**2. Алгоритм расчета.** Для соотношения (1), получено физическое соотношение в упругой области в виде зависимости производной Трусделла тензора напряжений от деформации скорости:

$$(\Sigma^{Tr}) = (\Lambda_{\Sigma}) \cdot \cdot (d^e).$$

Для решения нелинейной задачи используется инкрементальный метод. В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей

$$\int_{\Omega} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_{S^{\sigma}} \vec{p} \cdot \delta \vec{v} dS.$$

В рамках теории течения используются аддитивное представление для полной деформации скорости, т. е.  $(d) = (d^e) + (d^p)$ . Предполагается справедливость ассоциированного закона течения:  $(d^p) = \lambda' \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \right)$ , где  $\lambda'$  – скорость пластических деформаций. Используется метод проецирования напряжений на поверхность текучести. Перейдя в определяющих соотношениях

и линеаризованном уравнении к приращениям, составляем разрешающую систему линейных уравнений. Численная реализация основана на методе конечных элементов.

**3. Численный пример.** В качестве примера рассмотрено следующее выражение потенциала упругих деформаций:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8}(I_{1B} - 3)^2 + \mu(I_{1B} - 3) - \frac{\mu}{2}(I_{2B} - 3).$$

В качестве критерия упругого деформирования использовано условие Губера-Мизеса с упрочнением. Указанным методом численно решены задача растяжения круглого стержня с образованием шейки и задача о деформировании конической оболочки.

Таким образом, в работе построена методика численного исследования упруго-пластических тел, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голованов А. И., Султанов Л. У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред.* – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 465 с.
2. Bonet J., Wood R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.* – 1997. – 283 p.
3. Schroder J., Gruttman F. *A simple orthotropic finite elasticity model based on generalized stress-strain measures.* – 2002. – P. 38–64.

Д. Т. Тапкин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
*danil.tarpin@yandex.ru*

## О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Пусть  $R_1, \dots, R_n$  – кольца,  $K_{ij}$  –  $R_i$ - $R_j$ -бимодули, причем  $K_{ii} = R_i$ ,  $i, j = \overline{1..n}$ . Предположим, что для любых  $i, j, k = \overline{1..n}$ , таких что  $i \neq k$ ,  $k \neq j$  задан  $R_i$ - $R_j$ -бимодульный гомоморфизм

$$\phi_{ikj} : K_{ik} \otimes_{R_k} K_{kj} \rightarrow K_{ij}.$$

Для индексов  $i = k$  и  $k = j$  считаем, что  $\phi_{iij}$  и  $\phi_{ijj}$  – это канонические гомоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} K_{ij} \rightarrow K_{ij}, \quad K_{ij} \otimes_{R_j} R_j \rightarrow K_{ij}.$$

Допустим также, что выполняется свойство ассоциативности

$$\phi_{ijl}(\phi_{ikj}(a \otimes b) \otimes c) = \phi_{ikl}(a \otimes \phi_{kjl}(b \otimes c))$$

для всех элементов  $a \in K_{ik}$ ,  $b \in K_{kj}$ ,  $c \in K_{jl}$  и индексов  $i, j, k, l$ .

Обозначим через  $K$  множество всех  $(n \times n)$ -матриц  $(a_{ij})$  порядка  $n$  со значениями в бимодулях  $M_{ij}$ . Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения  $K$  является кольцом. Говорят, что кольцо  $K$  – *кольцо формальных матриц порядка  $n$* . Если же все  $K_{ij}$  равны некоторому  $R$ , то получаем кольцо  $K_n(R : \{\phi_{ikj}\})$  *формальных матриц над  $R$* . Если в этом случае положить  $\eta_{ikj} = \phi_{ikj}(1 \otimes 1)$ , то нетрудно проверить что  $\eta_{ikj} \in C(R)$ .

Ограничимся матрицами размера 3 над  $R$ . Возьмем  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(R)$  и положим  $\eta_{213} = \eta_{312} = \beta_1$ ,  $\eta_{123} = \eta_{321} = \beta_2$ ,

$\eta_{132} = \eta_{231} = \beta_3$ . Оставшиеся коэффициенты  $\eta_{ikj}$  однозначно определяются из свойств ассоциативности для  $\phi_{ikj}$ . Полученная структура является кольцом, которое мы будем обозначать  $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$ .

В статье [3] были представлены кольца  $M_n(R; s)$  формальных матриц над  $R$ , где  $\eta_{ijk} = s^{1+\delta_{ik}-\delta_{ij}-\delta_{jk}}$ . Также в [3] рассмотрена проблема изоморфизма. Заметим, что  $M_3(R; s) = M_{s,s,s}(R)$ . В качестве обобщения результатов были получены следующие утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $R$  – кольцо,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(R)$  и  $\pi \in S_3$ . Тогда  $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) = M_{\beta_{\pi(1)}\beta_{\pi(2)}\beta_{\pi(3)}}(R)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $R$  – коммутативное кольцо,  $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$ ,  $\text{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$ . Тогда  $M_{\beta 0 0}(R) \cong M_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(R)$  тогда и только тогда, когда найдутся  $v_1, v_2, v_3 \in U(R)$ ,  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  и разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов  $1 = a_1 + a_2 + a_3$  такие, что  $\gamma_i = v_i\alpha(\beta)a_i$ .

**Теорема 3.** Пусть  $R$  – коммутативное кольцо,  $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$ ,  $\text{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$ . Тогда  $M_{\beta\beta\beta}(R) \cong M_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(R)$  тогда и только тогда, когда найдутся  $v_1, v_2, v_3 \in U(R)$  и  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  такие, что  $\gamma_i = v_i\alpha(\beta)a_i$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П. А., Туганбаев А. А. *Модули над кольцами формальных матриц* // *Фундамент. и прикл. матем.* – 2009. – Т. 15. – Вып. 8. – С. 145–211.
2. Каш Ф. *Модули и кольца*. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
3. Tang G., Zhou Y. *A class of formal matrix rings* // *Linear Algebra Appl.* – 2013. – V. 438. – P. 4672–4688

**А. В. Тарасенко**

*Самарский государственный технический университет,  
Tarasenko.A.V@mail.ru*

## О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0+,y}^\alpha u = 0 & (y > 0), \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0 & (y < 0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $D_{0+,y}^\alpha$  – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) от функции  $u(x, y)$ :

$$(D_{0+,y}^\alpha u)(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, t) dt}{(y-t)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, y > 0),$$

$a$  – вещественная постоянная,  $m > 2$ , в конечной области  $\Omega$ , ограниченной отрезками  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $A_0B_0$  прямых  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$  соответственно, лежащих в полуплоскости  $y > 0$ , и характеристиками уравнения (1)  $AC : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$  и  $BC : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$  в полуплоскости  $y < 0$ .

**Задача.** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) в области  $\Omega$  при  $y \neq 0$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\begin{aligned} & A(x) \left( I_{0+}^{\alpha_1, \beta_1, \eta_1} w(t) u[\Theta_0(t)] \right) (x) + B(x) \left( I_{1-}^{\alpha_2, \beta_2, \eta_2} \delta(t) u[\Theta_1(t)] \right) (x) + \\ & + C_1(x) \left( I_{0+}^{1-\beta^*-\beta} u_y(t, 0) \right) (x) + C_2(x) \left( I_{1-}^{1-\beta^*-\beta} u_y(t, 0) \right) (x) + \\ & + M_1(x) u_y(x, 0) + M_2(x) u(x, 0) = \gamma(x), \quad \forall x \in I, \end{aligned} \quad (2)$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-\alpha} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} u(x, y), \quad \forall x \in \bar{I},$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow 0^-} u_y(x, y), \quad \forall x \in I,$$

где  $\varphi_i(y)$  ( $i = 1, 2$ ),  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$ ,  $\gamma(x)$  – заданные функции, такие, что

$$A^2(x) + B^2(x) + C_1^2(x) + C_2^2(x) + M_1^2(x) + M_2^2(x) \neq 0, \\ A(x), B(x), C_1(x), C_2(x), M_1(x), M_2(x), \gamma(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I),$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad y^{1-\alpha} \varphi_1(y), y^{1-\alpha} \varphi_2(y) \in C([0, 1]),$$

$\Theta_0(x)$  и  $\Theta_1(x)$  – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки  $(x, 0) \in I$  с характеристиками  $AC$  и  $BC$  соответственно;

$$\beta^* = \frac{m - 2a}{2(m + 2)}, \quad \beta = \frac{m + 2a}{2(m + 2)}, \quad -1 < a < 1, \quad 0 < \beta^* < \frac{1}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2},$$

где  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\eta_2$  – действительные числа, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, которые будут указаны далее.

Решение  $u(x, y)$  поставленной задачи ищется в классе дважды дифференцируемых функций в области  $\Omega$  таких, что

$$y^{1-\alpha} u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1), \quad u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_2), \\ y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u)_y \in C(\Omega_1 \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}), \\ u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad u_{yy} \in C(\bar{\Omega}_2).$$

Отметим, что истоком настоящей работы послужили публикации А. А. Килбаса и О. А. Репина [1, 2]. Новизна рассматриваемой задачи состоит в условии (2), которое является обобщением краевых условий подобного типа.



Вопрос существования решения задачи сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Килбас А. А., Репин О. А. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 5. – С. 638–644.

2. Килбас А. А., Репин О. А. *Аналог Трикоми для дифференциального уравнения с частными производными, содержащего уравнение диффузии дробного порядка* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2010. – Т. 12. – № 1. – С. 31–39.

**И. В. Трухляева**

*Волгоградский государственный университет,  
irishka2027@mail.ru*

#### **О СХОДИМОСТИ “СГЛАЖЕННЫХ” ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ**

Рассматриваются вопросы обоснования применения методов приближенного решения нелинейных уравнений эллиптического типа (на примере уравнения минимальных поверхностей) и устанавливается оценка погрешности приближения методом “сглаживания” отрезками ряда Фурье.

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbf{R}^n$ . Предположим, что задана полная ортонормированная система непрерывных

функций  $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  из  $L^2(\Omega)$ . Для произвольной функции  $g \in L^2(\Omega)$  введем обозначения:

$$g^N(x) = \sum_{m=1}^N g_m \varphi_m(x), \quad g_m = \int_{\Omega} g(x) \varphi_m(x) dx,$$

$$\Phi(N) = \sup_{x \in \Omega} \left( \sum_{k=1}^N \varphi_k^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что если базисные функции  $\varphi_k(x)$  ограничены по модулю некоторой постоянной  $M$ , то  $\Phi(N) \leq M\sqrt{N}$ .

Ниже мы приводим обобщение результата из работы [1] для уравнения заданной средней кривизны.

Пусть в области  $\Omega$  задано решение  $f$  уравнения

$$Q[f] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f x_i}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = H(x), \quad (1)$$

$|\nabla f| \leq K$  в области  $\Omega$ . Рассмотрим функцию  $g \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  такую, что  $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f$  – решение уравнения (1) для  $n = 2$  и  $g_m \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  – такая последовательность функций, что

$$g_m|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}, \quad \int_{\Omega} |Q[g_m(x)] - H(x)|^2 dx \leq \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0. \quad (2)$$

Тогда последовательность  $g_m^N(x)$  сходится равномерно к соответствующему отрезку  $f^N$  ряда Фурье решения в  $\Omega$ , при этом

$$|g_m^N(x) - f^N(x)| \leq \left( \frac{3C(n)(1 + K^2)\Phi(N)|\Omega|^2\varepsilon_m}{(1 - 3C(n)(1 + K^2)\varepsilon_m)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

$C(n)$  – константа из неравенства Соболева.

**Теорема 2.** Пусть  $f$  – решение уравнения (1) для  $n = 2$  и  $g_m \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  – такая последовательность функций, что

$$g_m|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}, \quad \int_{\Omega} |Q[g_m(x)] - H(x)|^2 dx \leq \varepsilon_m, \varepsilon_m \rightarrow 0.$$

Предположим, что ряд Фурье функции  $f$  сходится равномерно в  $\Omega$ . Рассмотрим такую последовательность  $N_m$ , что  $N_m \rightarrow \infty$  и  $\Phi^2(N_m)Q \rightarrow 0$ . Тогда последовательность  $g_m^{N_m}(x)$  сходится равномерно к решению  $f$  в  $\Omega$ , при этом

$$|g_m^{N_m}(x) - f(x)| \leq \left( \frac{3C(n)(1 + K^2)\Phi(N_m)|\Omega|^2\varepsilon_m}{(1 - 3C(n)(1 + K^2)\varepsilon_m)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{\Omega} |f(x) - f^{N_m}(x)|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97034 р\_поволжье\_а)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клячин А. А. *Применение рядов Фурье к оценке сходимости приближенных решений нелинейных уравнений эллиптического типа* // Записки семинара “Сверхмедленные процессы”. – Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010. – Вып. 5. – С. 148–153.
2. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*. – М.: Наука, 1989.

**Г. Ю. Удалова**

*Самарский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
yeueg@yandex.ru*

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА  
С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ  
В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} (Lu) = \frac{\partial}{\partial y} (u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - b^2u) = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $b > 0$  – заданные постоянные, и следующую задачу.

**Задача 1.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}), u_y(x, y) \in C^1(D); u_{xxy}, u_{yyy} \in C(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (Lu) = 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (3)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где  $\psi(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$  – заданные достаточно гладкие функции,  $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ .

Уравнение (1) в области  $D$  равносильно уравнению смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0. \end{cases}$$

При этом задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

**Задача 2.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$ , удовлетворяющие условиям (2), (3) – (5) и, кроме того,

$$Lu = f(x, y), (x, y) \in D_- \cup D_+, f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], i = 1, 2.$$

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка изучались многими авторами (см. работы [1 – 3] и приведенную там библиографию). В данной заметке, как и в работах [4, 5], предлагается метод решения задачи для дифференциального уравнения третьего порядка путем сведения к обратной задаче для уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями. Аналогично рассуждениям из [4 – 6] методом спектрального анализа доказана единственность решения задач 1 и 2, построенных в виде ортогональных рядов. Доказана устойчивость решения по граничным функциям. Оказалось, что разрешимость задач 1 и 2 существенным образом зависит от числа  $\alpha$ . А именно, справедливы утверждения.

**Теорема 1.** *Если существует решение задач 1 и 2, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta - 2 \cos \lambda_k \alpha + 1 \neq 0 \quad (6)$$

при любом  $k \in N_0$ . Здесь  $\lambda_k = \sqrt{(\pi k)^2 + b^2}$ .

**Лемма.** Если  $\alpha$  является любым иррациональным алгебраическим числом степени  $n = 2$ , то существуют положительные постоянные  $C_0$ ,  $\beta_0$  и  $b_0$ , вообще говоря, зависящие от  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $b$ , такие, что при  $b < b_0$ ,  $\beta > \beta_0$  и любых  $k \in \mathbb{N}$  выполнено условие

$$|\Delta(k)| \geq C_0 \frac{e^{\lambda_k \beta}}{k^2}.$$

Учитывая последнюю лемму, можно сформулировать теорему о существовании и устойчивости задач 1 и 2:

**Теорема 2.** Если  $\alpha$  является любым иррациональным алгебраическим числом степени  $n = 2$ ,  $\psi(x), \varphi(x) \in C^4[0, 1]$ ,  $g(x) \in C^3[0, 1]$ ,  $\psi''(0) = \psi''(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi'''(0) = \psi'''(1)$ ,  $\varphi'''(0) = \varphi'''(1) = g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = g''(0) = g''(1) = 0$ , то при  $\beta > \beta_0$  и  $b < b_0$  существует единственное и устойчивое решение задачи 2. Если при этом  $\psi(x), \varphi(x) \in C^5[0, 1]$ ,  $g(x) \in C^4[0, 1]$ ,  $\psi^{IV}(0) = \psi^{IV}(1) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(1) = g'''(0) = g'''(1) = 0$ , то существует единственное и устойчивое решение задачи 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. *К теории уравнений смешанно-составного типа* // Сиб. мат. журн. – 1961. – Т. 11. – № 1. – С. 7–19.
2. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*. – Ташкент: Изд-во “ФАН”, 1979. – 238 с.
3. Кожанов А. И. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка*. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. – 150 с.

4. Сабитов К. Б. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка* // ДАН. – 2009. – Т. 427. – № 5. – С. 593–596.

5. Сабитов К. Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 5. – С. 705–713.

6. Удалова Г. Ю. *Обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе* // Докл. АМАН. – 2012. – Т. 14. – № 1. – С. 98–111.

**Э. И. Фазлеева, Г. И. Хазиева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
elmira.fazleeva@mail.ru, www.guzel007@mail.ru*

### **ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

Числовая окружность – это вторая геометрическая модель для множества действительных чисел. Первую модель – числовую прямую – учащиеся уже знают. Есть аналогия: для числовой прямой правило соответствия (от числа к точке) почти дословно такое же. Но есть и принципиальное отличие – источник основных трудностей в работе с числовой окружностью: на прямой каждая точка соответствует *единственному* числу, на окружности это не так. Если точка  $M$  окружности соответствует числу  $t$ , то она соответствует и всем числам вида  $t + 2\pi k$ , где  $2\pi$  – длина единичной окружности, а  $k$  – целое число, показывающее количество полных обходов окружности в ту или иную сторону [1].

Вся школьная тригонометрия строится на модели числовой окружности. Опыт показывает: недоработки с этой моделью, слишком поспешное введение тригонометрических функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного усвоения материала. В связи с этим, нами разработаны так называемые “игры” с числовой окружностью.

**“Игра” первая.** Отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным в долях числа  $\pi$  (например,  $\frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{3}$ ;  $-\frac{5\pi}{4}$ ;  $\frac{7\pi}{6}$ ;  $\frac{5\pi}{3}$ ).

После этого примера уместно привести два главных макета числовой окружности: на первом из них все четверти разделены пополам, на втором – на три равные части. Эти макеты полезно иметь в кабинете математики.

**“Игра” вторая.** Отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, не выраженным в долях числа  $\pi$  (например, 1; 2; 3; -5).

**“Игра” третья.** Составление аналитических записей (двойных неравенств) для дуг числовой окружности.

Неравенства, характеризующие дугу, т. е. представляющие собой аналитическую модель дуги, мы предлагаем составлять в два этапа. На первом этапе составляем ядро *аналитической* записи (указываем промежуток от одной точки к другой внутри интервала  $(0; 2\pi)$ ). На втором этапе составляем общую запись (указываем все промежутки с учетом периода  $2\pi k, k \in Z$ ).

**“Игра” четвертая.** Отыскание декартовых координат точек числовой окружности, центр которой совмещен с началом системы координат.

Ученикам приходится работать одновременно в двух системах координат – в “криволинейной” когда информация о положении точки снимается по окружности (числу  $t$  соответствует



на окружности точка  $M(t)$ ;  $t$  – “криволинейная” координата точки  $M$ ), и в декартовой прямоугольной системе координат (у точки  $M$ , как у всякой точки координатной плоскости, есть абсцисса и ордината). Наша задача – помочь школьникам в преодолении этих естественных трудностей. К сожалению, обычно в школьных учебниках на это не обращают внимания и с самых первых уроков используют записи  $\sin x$ ,  $\cos x$ , не учитывая, что буква  $x$  в сознании школьника четко ассоциируется с абсциссой в декартовой прямоугольной системе координат, а не с длиной пройденного по числовой окружности пути. Наш совет: при работе с числовой окружностью не следует использовать символы  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ , лучше  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\operatorname{tg} t$ .

В четвертой “игре” речь идет о переходе от записи  $M(t)$  к записи  $M(x; y)$ , т. е. от криволинейных координат к декартовым (например, найти координаты точки  $\frac{4\pi}{3}$ ).

Важность данной “игры” заключается в том, что фактически мы готовим учащихся к вычислению значений тригонометрических функций. Если все здесь будет отработано достаточно надежно, то переход на первую ступень абстракции (ордината – синус, абсцисса – косинус) окажется менее болезненным, чем обычно.

**“Игра” пятая.** Отыскание на числовой окружности точек по заданным координатам (найти на числовой окружности точки с ординатой  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  и записать, каким числом они соответствуют).

В процессе данной игры мы приучаем школьников к решению простейших тригонометрических уравнений: в первом случае речь идет об уравнении  $\sin t = \frac{1}{2}$ , а во втором – об уравнении  $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Пятая “игра” включает в себя и работу с условиями типа  $x > \frac{1}{2}$ ,  $y < -\frac{1}{2}$ . Это означает, что к решению простейших тригонометрических неравенств мы “подбираемся” постепенно.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мордкович А. Г. *Беседы с учителями математики: Учеб.-метод.пособие. – 2-е изд., доп. и перераб.* – М.:ООО “Издательский дом ОНИКС 21 век”: ООО “Издательство Мир и Образование”, 2005. – 336 с.

**М. В. Фалилеева**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
mfwff@yandex.ru*

#### **О МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ В 7 – 9 КЛАССАХ**

У школьников понятие уравнения (неравенства) с параметром должно включать в себя понимание того, что:

- Уравнение (неравенство) с параметром – это семейство уравнений (неравенств) одного вида при одних значениях параметра, других видов – при других значениях параметра, при каких-то значениях параметра в это семейство входят верные или неверные тождества (числовые неравенства).
- Решение уравнения (неравенства) может включать в себя несколько методов решения, соответствующих каждому виду уравнения при определенных значениях параметра.

Общий вид уравнений и неравенств с одной переменной и одним параметром можно записать так:  $F(x, a) = 0$ ,  $F(x, a) < 0$ ,  $F(x, a) > 0$ ,  $F(x, a) \leq 0$ ,  $F(x, a) \geq 0$ , где  $x$  – переменная,  $a$  – параметр.

Используя квалификацию В.П. Беспалько [1] о необходимости формирования у учащихся двух уровней усвоения учебного материала: репродуктивного и продуктивного, выделим в обучении решению уравнений и неравенств пять уровней подготовки учащихся:

- 1) умение решать простейшие уравнения (неравенства);
- 2) умение решать уравнения (неравенства), приведенные к простейшим, путем “несложных” тождественных преобразований (прибавление числа к обеим частям уравнения (неравенства), деление обеих частей уравнения (неравенства) на число, приведение к общему числовому знаменателю, приведение подобных и т. п.);
- 3) умение решать простейшие уравнения (неравенства) **с параметрами** и уравнения (неравенства) с параметрами, приводимые к простейшим путем “несложных” тождественных преобразований;
- 4) умение решать уравнения (неравенства), приведенные к простейшим, путем “сложных” преобразований (использование формул сокращенного умножения, замены переменной, разложения на множители, свойств функций и ее графика и др.);
- 5) умение решать уравнения (неравенства) **с параметрами**, приведенные к простейшим, путем “сложных” преобразований.

Например, выпускники 8-х классов в соответствии с этими уровнями должны уметь решать уравнения: 1)  $x^2 - 2x + 3 = 0$ ; 2)  $x^2 + 1 = (2x + 1)/3$ ; 3)  $x^2 + 2x + ax - 3 = 0$ ; 4)  $(x + 2)^4 - 3 =$

$= 2x^2 + 4x; 5) (x+a)^4 - 4(x+a)^2 + 4 = 0$ . Уровни 1-й и 2-й обеспечивают репродуктивную деятельность школьника, 3-й и 4-й — как репродуктивную, так и продуктивную, 5-й уровень обеспечивает продуктивную деятельность школьника при решении уравнений и неравенств. При обучении должна соблюдаться преемственность развития вышеперечисленных уровней.

Значит, существует потребность методического обеспечения решения уравнений (неравенств) с параметрами на двух уровнях (3 и 5). Уровень 3 — это методика решения простейших уравнений (неравенств) с параметризацией различных числовых коэффициентов, и уровень 5 — более сложных уравнений (неравенств), решаемых аналитическим, функционально-графическим или геометрическим методами.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Беспалько В. П. *Слагаемые педагогической технологии*. — М.: Педагогика, 1989. — 192 с.

**Л. Н. Февральских**

*Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
grigorieva\_ln@mail.ru*

#### **ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ГЛОБАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ СВОБОДНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ШАРУ**

Изучаются свободные угловые движения изотропного деформируемого твердого тела, поверхность которого близка к

сферической. Считается, что тело в недеформированном состоянии имеет квазишаровой тензор инерции. Результаты рассмотрения позволяют предложить механизм глобального перемещения полюсов тела.

Свяжем с телом систему координат  $Ox_1x_2x_3$  и приведем его в быстрое вращение вокруг оси  $Ox_3$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Пусть тело обладает симметрией куба [1], а ось  $Ox_3$  проходит через главную его диагональ. Предположим, что тело содержит точечные включения (неоднородности), которые приводят к малым отклонениям тензора инерции в недеформированном состоянии от его значения для шара. Пусть оси системы  $Ox_1x_2x_3$  являются главными осями инерции недеформированного тела, а ось  $Ox_3$  - осью среднего момента инерции.

Примечательными являются некоторые частные случаи.

1) Однородный упругий шар не прецессирует. Любое положение в нем оси вращения остается неизменным со временем.

2) Для упругого шара, содержащего неоднородности, начальное положение в нем оси вращения неустойчиво. Даже малое возмущение может вывести ее из этого положения.

3) Для однородного квазишара с кубической симметрией асимптотически устойчивым будет вращение вокруг осей, проходящих через вершины куба. При  $\Omega$ , ориентированном на середины граней, вращение неустойчиво.

Интересный качественный эффект обнаруживается в случае, когда несферичность и малое отличие тензора инерции недеформированного тела от шарового наблюдаются одновременно. Эти факторы оказывают различное влияние на динамику тела в зависимости от угловой скорости вращения  $\Omega$ .

Представим, что тело совершает малые угловые движения вблизи оси  $Ox_3$ , а угловая скорость такова, что малая несфе-

ричность определяет качество динамики тела. Стационарное вращение относительно оси  $Ox_3$  консервативно устойчиво при достаточно больших значениях  $\Omega$ .

Внутренняя диссипация энергии приводит к затуханию прецессии и переходу оси в устойчивое положение. Уменьшается область притяжения положения оси устойчивого вращения. В результате при некотором критическом значении угловой скорости  $\Omega_*$  даже малое внешнее воздействие может привести к смещению в теле оси устойчивого стационарного вращения.

При  $\Omega < \Omega_*$  динамику тела определяет главным образом его тензор инерции в недеформированном состоянии: стационарное вращение вокруг  $Ox_3$  неустойчиво, а вращение относительно двух других осей консервативно устойчиво. В рассмотренной задаче минимум кинетической энергии “перемещается” от  $Ox_3$  к направлению  $Ox_1$ , т. е. ось вращения за короткое время повернется в теле на угол  $\pi/2$ .

В инерциальном пространстве явление глобального перемещения полюсов представляет собой поворот тела.

Отметим, что наряду с малой несферичностью анизотропия упругих свойств оказывает аналогичное влияние на эффект глобального перемещения полюсов тела [2].

Предложенный механизм можно рассматривать как попытку объяснения наблюдавшегося в истории Земли глобального перемещения ее полюсов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00314).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Денисов Г. Г., Новиков В. В. *О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару* // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – № 3. – С. 43–50.

2. Новиков В. В. *Анизотропно-упругий шар в свободном движении* // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 17. – № 5. – С. 767–774.

**Т. Г. Федорова, Е. Г. Гоник, А. И. Кибец, М. В. Петров**

*Нижегородский государственный университет,*

*kibec@tech.unn.ru*

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ  
ПОДЪЕМНОЙ ЦИСТЕРНЫ  
ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВКИ СЫПУЧИХ  
МАТЕРИАЛОВ ПРИ АВАРИЙНОМ ПАДЕНИИ**

При проектировании тонкостенных конструкций наряду с оценкой прочности необходим анализ их устойчивости при всех возможных нагружениях. Большегрузная емкость для автомобильной транспортировки сыпучих грузов при разгрузке наклоняется. Для этого ее один торец шарнирно закрепляется на раме, а другой поднимается телескопическим устройством. Под действием весовой нагрузки корпус емкости (тонкостенная цилиндрическая оболочка  $L/R = 9,28$ ,  $R/h = 255$ ) при подъеме изгибается. Этот процесс может сопровождаться образованием пластических деформаций в центральной области и потерей устойчивости. Для обоснования соответствия проектируемой конструкции требованиям нормативных документов необходимо решение трехмерной геометрически и физически нелинейной задачи устойчивости замкнутой оболочки вращения с учетом моментности напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки.

Рассматривается динамическая постановка задачи. Система уравнений, описывающая движение оболочечной конструкции, формулируется в переменных Лагранжа [1 – 3]. Уравнения состояния устанавливаются отдельно для шаровых и девиаторных составляющих скоростей деформаций и напряжений. Зависимость шаровых компонент скоростей деформаций и напряжений предполагается линейной. Девиаторные составляющие тензора напряжений вычисляются с помощью соотношений теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением [3], [4]. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы. Система уравнений дополняется начальными и кинематическими граничными условиями. В зоне контакта рассматривается непроникание по нормали и свободное скольжение вдоль касательной к поверхности контакта.

Оценка предельной нагрузки осуществляется методом продолжения по параметру [5]. В соответствии с этим методом вес груза увеличивается пропорционально одному параметру (в данном случае времени) и из анализа формы конструкции, распределения поля перемещений определяется критическое значение весовой нагрузки.

Решение определяющей системы уравнений основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа “крест” [3], реализованных в рамках вычислительной системы “Динамика-3” [6]. Численное определение контактного давления в зонах взаимодействия деформируемых тел и статически эквивалентных ему сил в узлах кэ-сетки осуществляется из условий непроникания и законов сохранения массы и количества движения [4].

В расчетах емкость моделировалась замкнутой цилиндри-



чекой оболочкой ( $h = 0,5$  см,  $R/h = 255$ ,  $L/R = 9,28$ ), которая на торцах опиралась на неподвижные, недеформируемые плиты. Оболочка выполнена из сплава АМг5.

Рассматривалось два варианта нагружения оболочки: весовая нагрузка и внутреннее давление плюс весовая нагрузка. Предполагалось, что венсовая нагрузка приложена на нижней половине оболочки и равномерно распределена вдоль оси вращения. Во втором варианте задачи при комбинированном нагружении на начальном этапе на поверхности оболочки задавалось внутреннее давление, которое постепенно увеличивалось до 0,1 МПа, после чего сохранялось постоянное значение. Затем прикладывалась весовая нагрузка, нарастающая по линейному закону.

Анализ результатов расчета показывает следующее. При отсутствии внутреннего давления при начальном этапе ( $P/P_0 \geq 0,8$ ) поперечное сечение в средней части цилиндрической оболочки принимает каплевидную форму: по вертикали размер сечения увеличивается, а по горизонтали верхняя часть оболочки сужается. При  $P/P_0 \approx 3$  в средней части цилиндрической оболочки образуются вертикальные складки. Последующее нагружение приводит к увеличению числа складок и их размеров. При  $P/P_0 \approx 5$  в верхней части оболочки образуется горизонтальная вмятина. Со временем она увеличивается и приводит к общей потере устойчивости оболочки. В нижней части оболочки растягивающие продольные напряжения в центральном поперечном сечении превышают предел текучести, что приводит к появлению пластических деформаций. Продольные напряжения в зоне гофров после потери устойчивости меняют знак. При этом их величина также достигает предела текучести. Таким образом, в первом варианте задачи

коэффициент запаса (отношение критической нагрузки к допустимому весу перевозимого груза) рассматриваемой тонкостенной конструкции равен 5.

Внутреннее давление при комбинированном нагружении существенно влияет на устойчивость оболочки. Значение критической нагрузки увеличивается в 1,76 раза и коэффициент запаса становится равным 8,8. Зона складкообразования сужается и размеры складок уменьшаются. Избыточное внутреннее давление приводит к изменению НДС цилиндрической оболочки. В частности, нижняя растягиваемая часть оболочки деформируется упруго. Амплитуда колебаний продольных напряжений в зоне складкообразования до потери устойчивости существенно уменьшается.

Для сравнения были проведены численные исследования деформирования и потери устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки  $L/R = 12,5$ ,  $R/h = 255$  (длина оболочки увеличена в 1,35 раза). Допустимый вес транспортируемого груза в этом случае равен 40 т. Получаем, что увеличение длины оболочки в 1,35 раза снижает значение критической нагрузки более чем в 2 раза. С учетом данных расчетно-экспериментальных исследований [7] для рассматриваемой цистерны можно рекомендовать усиление конструкции для обеспечения ее устойчивости при разрузке.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.0227, гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НИШ-2843.2012.8, РФФИ (проекты №№ 11-08-00557-а, 12-08-33106-мол\_а\_вед, 13-08-90733 мол\_рф\_нр, 13-08-90732 мол\_рф\_нр).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Belytschko T., Liu W. K., Moran B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. – New York: John Wiley Sons, 2000. – 600 p.
2. Bathe K-Y. *Finite element procedures*. – New Jersey: Upper Saddle River “Prentice Hall”, 1996. – 1037 p.
3. Артемьева А. А., Баженов В. Г., Кибец А. И., Лаптев П. В., Шошин Д. В. *Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3. – № 2. – С. 5–14.
4. Баженов В. Г., Кибец А. И., Цветкова И. Н. *Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1995. – № 2. – С. 20–26.
5. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*. – М: Эдиториал УРСС, 1999.
6. Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.ME20.H00338.
7. Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Шошин Д. В., Федорова Т. Г. *Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе* // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. – Вып. 71. – С. 77–83.

**З. М. Филатова**

*Набережночелнинский государственный  
торгово-технологический институт,  
czmfzm@mail.ru*

## **ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНОГО КОМПЛЕКСА**

В настоящее время большинство высших учебных заведений (ВУЗ) при организации и проведении учебного процесса на базе автоматизированных систем обучения (АСО) активно используют электронные учебные комплексы (ЭУК). В этой связи возникает вопрос об *оценке качества ЭУК*.

При выявлении оценки качества ЭУК в современной образовательной практике ряд авторов (И. В. Роберт, Т.Н. Шалкина и др.) предлагают использовать следующие методы [1], [3]:

- А. *Экспериментальная оценка качества ЭУК*. В данном случае используется сравнительный эксперимент, который предполагает одновременную работу контрольной и экспериментальной групп. Критерии, на основании которых оценивается разработанный электронный ресурс, подразделяются на количественные и качественные критерии. Под *количественными критериями* понимаются: объем усвоенных знаний; коэффициент усвоения учебного материала; коэффициент прочности усвоения материала; соотношение скорости усвоения учебного материала и времени, затраченного на его усвоение. *Качественные критерии* отождествляются с уровнями знания: учебного материала; понимания учебного материала; овладения учебным материалом; овладения интеллектуальными навыками.

В. *Экспертная оценка качества ЭУК* основана на компетентном мнении экспертов, знающих данную область. Качество экспертных оценок зависит в значительной мере от компетентности экспертов, достоверности их суждений, и предполагает осуществление комплексной психолого-педагогической, содержательно-методической, дизайнэргономической и технико-технологической экспертизы. При осуществлении экспертной оценки ЭУК экспертами формируется набор показателей для характеристики учебного комплекса, а затем заполняются специальные оценочные листы качества электронного ресурса. Оценочный лист качества ЭУК служит для формирования резюме о пригодности или непригодности применения электронного ресурса в процессе обучения на основе ответов эксперта.

С. *Комплексная оценка качества ЭУК*, интегрирует два перечисленных подхода.

Для оценки качества ЭУК каждый ВУЗ разрабатывает собственную траекторию создания эффективного средства обучения в АСО и механизм его оценивания. Представим вашему вниманию процедуру оценки учебно-методических материалов электронных комплексов в Государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Набережночелнинский государственный торгово-технологический институт» (далее – НГТТИ).

Для проведения экспертной оценки электронных учебных материалов в НГТТИ создана специальная группа – экспертная комиссия. Состав, порядок проведения экспертизы и деятельность экспертной комиссии закреплено положением об экс-

пертной комиссии по оценке учебно-методических материалов НГТТИ от 22.12. 2011 г. № 6.

При проведении экспертизы учебно-методических материалов, разработанных преподавателями электронного обучения, устанавливается полнота учебно-методических материалов, степень их соответствия нормам и требованиям, установленным в стандартах, законодательных и нормативных актах ОУ. Предметом экспертной оценки являются окончательная редакция учебно-методических материалов в электронном виде.

При проведении экспертизы по оценке электронных учебных материалов от автора учебно-методических материалов принимается проект материалов на электронном носителе. Специалисты в области технологии проектирования и использования учебно-методических материалов в системе электронного обучения: рассматривают проект материалов на электронном носителе с комплектом сопроводительных документов; производят проверку соответствия учебно-методических материалов требованиям к содержательному, методическому и технологическому составу электронного комплекса; заполняют оценочные листы качества ЭУК и дают рекомендации по устранению выявленных замечаний.

На основании представленных документов экспертной комиссией НГТТИ составляется акт экспертизы по оценке научно-методического уровня учебных материалов электронного курса и заключение по результатам экспертизы учебных материалов электронного курса.

После проведения экспертизы электронные материалы предоставляются в отдел дистанционного обучения и информатизации (ОДОиИ) для технической обработки материалов в

электронный учебный комплекс. Техническая реализация электронного комплекса в НГТТИ основана на лицензированных инструментальных средствах, имеющихся в образовательном учреждении, и осуществляется специалистами ОДОиИ в программной среде BookEditor, входящей в состав пакета SunRay BookOffice. Электронный учебник, созданный при помощи программы SunRay BookEditor, размещается на страницах образовательного портала [2]. После размещения учебного комплекса в технологической среде обучения производится его апробация потенциальными потребителями – обучающимися. Предварительно, перед размещением ЭУК в АСО специалист, осуществляющий техническую обработку электронного комплекса, в готовом виде передает его для ознакомления автору курса для возможной корректировки содержательной части учебного материала. При апробации электронного курса в учебном процессе выявляются не замеченные ранее неточности в изложении учебного материала и программной реализации, которые в дальнейшем дорабатываются.

На наш взгляд, разработанная и используемая комплексная оценка учебного комплекса в НГТТИ позволяет повысить качество электронного образовательного ресурса и эффективность учебного процесса на базе автоматизированной системы обучения.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Роберт И. В., Панюкова С. В. и др. *Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебно-методическое пособие*. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.
2. *Система дистанционного обучения ГБОУ ВПО "НГТТИ"*. – <http://sdo.ngtti.ru>.

3. Шалкина Т. Н. *Электронные учебно-методические комплексы: проектирование, дизайн, инструментальные средства*. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008.

**Д. В. Фирстов, Д. В. Бережной**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
firstquad@mail.ru, berezhnoi.dmitri@mail.ru*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ  
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ПОГЛОЩАЮЩИМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИМИ**

При численном моделировании динамических задач механики сплошной среды существует проблема возникновения волн, отраженных от границ изучаемой области. При отсутствии принятых мер борьбы с воздействиями указанных типов волн, результаты моделирования приобретают различного рода артефакты, которые существенно ухудшают их адекватность. Для решения этой проблемы сформулирован принцип и условия эффективного применения “поглощающих граничных условий” на основе тела Фойгта для различных конфигураций исследуемых сред. Известны способы решения данной проблемы, основанные на формировании “прозрачных границ” [1, 2], разработанных для ряда частных случаев “поглощающего слоя” [3], которые требуют ввода дополнительных алгоритмов в численную схему. Так же возможно применение увеличения размера расчетной области до величины, исключающей воздействие отраженных от границ волн (области расширения



модели) [1], что ведет к резкому увеличению объема моделирования, особенно в случае моделей 3D. В предлагаемом подходе к построению “поглощающих граничных условий”, область моделирования и область расширения модели представлены телом Фойгта. В области расширения параметры, определяющие затухание, плавно увеличиваются от границы области моделирования к границе области расширения. Плавное изменение данного параметра позволяет минимизировать отражения от слоев с различным коэффициентом затухания. На основе данного подхода разработан алгоритм определения распределения коэффициента затухания в области расширения. Проведен ряд численных экспериментов, показавших хорошее совпадение модельных упругих волн при использовании предложенного подхода и моделирования с областью расширения, исключая приход отраженных волн от границ расчетной области в область моделирования. Выявлено отличие получаемых модельных волн в низкочастотной части спектра, что обусловлено недостаточным поглощением данной части спектра вязко-упругой средой области расширения. Предложенный подход не требует введения специальных процедур и функций в используемую численную схему. Требуемая область расширения существенно меньше, чем в классическом случае области расширения без затухания.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фирстов Д. В., Бережной Д. В. *Оценка адекватности 2D и 3D сейсмогеологических моделей*. – Казань, 2011. – С. 81–84.
2. Бате К., Вилсон Р. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. – Москва, 1982. – 448 с.
3. Пашков С. В. *Прозрачные границы. Уменьшение погрешности, вносимой границей расчетной области при числен-*

ном моделировании конечного участка бесконечного пространства. – Томск, 2007. – 230 с.

**Г. М. Хушнизаров**

*РГП “Институт математики и математического  
моделирования” МОН РК,  
h.galymzhan@gmail.com*

**ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ  $P_3$ -ПРИБЛИЖЕНИЯ  
В МЕТОДЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА**

Рассматривается  $P_3$ -приближение систем бесконечных дифференциальных уравнений, которые получаются при использовании метода сферических гармоник в стационарных кинетических уравнениях односкоростного переноса.

Как известно, стационарная система  $P_3$ -приближения состоит из 16 уравнений (см. вывод в [1])

$$\begin{aligned}
 &2(u^0 - u^2)_x + s_x^2 + p_y^2 + 2v_z^2 + 6\sigma v^1 = 0, \\
 &6(u^1 - u^3)_x + s_x^3 + p_y^3 + 6v_z^1 + 4v_z^3 + 10\sigma v^2 = 0, \\
 &12u_x^2 - s_x^2 - p_y^2 + 8v_z^2 + 14\sigma v^3 = 0, \\
 (i) \quad &\left\{ \begin{aligned} &v_x^1 + w_y^1 + u_z^1 + \sigma u^0 = 0, \\ &-v_x^1 + v_x^3 - w_y^1 + w_y^3 + 2u_z^1 + 3u_z^3 + 5\sigma u^2 = 0, \\ &12v_x^1 - 2v_x^3 + q_x^1 - 12w_y^1 + 2w_y^3 + q_y^2 + 2s_z^3 + 10\sigma s^2 = 0, \end{aligned} \right. \\
 (ii) \quad &\left\{ \begin{aligned} &v_x^2 + w_y^2 + u_z^0 + 2u_z^2 + 3\sigma u^1 = 0, \\ &-v_x^2 - w_y^2 + 3u_z^2 + 7\sigma u^3 = 0, \\ &2v_x^2 - 2w_y^2 + s_z^2 + \frac{7}{5}\sigma s^3 = 0, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12w_x^1 - 2w_x^3 + q_x^2 + 12v_y^1 - 2v_y^3 - q_y^1 + 2p_z^3 + 10\sigma p^2 &= 0, \\
2w_x^2 + 2v_y^2 + p_z^2 + \frac{7}{5}\sigma p^3 &= 0, \\
s_x^2 - p_y^2 + \frac{7}{15}\sigma q^1 &= 0, \\
(iii) \left\{ \begin{array}{l} p_x^2 + 2(u^0 - u^2)_y - s_y^2 + 2w_z^2 + 6\sigma w^1 = 0, \\ -p_x^2 + 12u_y^2 + s_y^2 + 8w_z^2 + 14\sigma w^3 = 0, \\ p_x^2 + s_y^2 + \frac{7}{15}\sigma q^2 = 0, \end{array} \right. \\
p_x^3 + 6(u^1 - u^3)_y - s_y^3 + 6w_z^1 + 4w_z^3 + 10\sigma w^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Рассматривая блоки (i), (ii), (iii) и введя такие обозначения  $u^{02} \equiv u^0 - u^2$ ,  $u^{13} \equiv u^1 - u^3$ , разобьем систему на две части: 12 уравнений с производными по  $x$  и 4 уравнения без таковых.

Для анализа предлагаем следующий подход. Исключаем компоненты  $u^3, w^3, s^3$  и  $q^2$  из первой части согласно формулам второй части. Тогда получаем смешанную систему из 12 уравнений, где 6 уравнений первого порядка разрешимы относительно своих младших членов.

С помощью, элементарных расчетов придем к системе, состоящей из 6 уравнений второго порядка с компонентами  $(u^{02}, u^2, v^2, w^2, s^2, p^2)$ .

Форма этой системы положительно определена и не имеет вещественных корней.

**Утверждение.** *Полученная система – эллиптическая с невырожденными (блочными) матрицами.*

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0720/ГФ 2012г.-2014г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Султангазин У. М., Смелов В. В., Акишев А. Ш., Сакабеков А., Марек И., Мика С., Житны К. *Математические проблемы кинетической теории переноса*. – Алма-Ата: Наука, 1986. – 255 с.

**Д. В. Шуркаева**

*Волгоградский государственный университет,  
diana-547@yandex.ru*

**ОЦЕНКА ИСКАЖЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  
ИЗОПЕРИМЕТРИЧНОСТИ СИМПЛЕКСА  
ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКОМ  
ОТОБРАЖЕНИИ**

Коэффициентом изопериметричности (согласно [2])  $n$ -мерного симплекса  $T$  будем называть величину

$$\sigma(T) = \frac{|\partial T|^{\frac{n}{n-1}}}{|T|}.$$

**Утверждение.** Пусть  $A_n$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка, содержащая  $n$  нулевых элементов так, что никакие два из них не принадлежат ни одной строке, ни одному столбцу,  $B_n$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка, содержащая  $n-1$  нулевых элементов, никакие два из которых не принадлежат ни одной строке, ни одному столбцу, функция  $g : M_n \rightarrow \mathbb{N}$  сопоставляет квадратной матрице  $M_n$  количество нулевых слагаемых в многочлене определителя этой матрицы.

Тогда значения функции  $g(A_n)$  при  $n \geq 4$  можно вычислить по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} g(A_n) &= (n-1)! + (n-1)g(B_{n-1}), \\ \text{где } g(B_{n-1}) &= g(A_{n-2}) + (n-2)g(B_{n-2}) \\ \text{и } g(A_2) &= g(B_2) = 1, \quad g(A_3) = 4. \end{aligned}$$

Так как матрица определителя Кэли-Менгера (см. [1]) имеет размерность  $(n+2) \times (n+2)$ , то для многочлена объема симплекса справедливо

**Следствие.** Количество нулевых слагаемых в многочлене объема  $g(CM_n) = g(A_{n+2})$ , количество положительных слагаемых  $p_n = \frac{(n+2)! - g(CM_n) + (n+1)}{2}$ , а отрицательных  $q_n = \frac{(n+2)! - g(CM_n) - (n+1)}{2}$ .

**Теорема.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы симплекс  $T$ , максимальное расстояние между вершинами которого равно  $d$ , минимальное —  $a$ , а площадь наименьшей  $(n-1)$ -мерной грани равна  $S$ , и билипшицево отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  с константами  $\frac{L}{l} < \sqrt[2n]{1 + \frac{2na^{2n-2}d^2 - (n-1)a^{2n}}{q_n d^{2n}}}$ .

Тогда для коэффициента изопериметричности образа сим-

плекса справедлива оценка

$$\frac{l^n}{L^n} \sigma \frac{\left(1 - \frac{L^{2n-2} - l^{2n-2}}{l^{2n-2}} \frac{q_{n-1} d^{2n-2}}{2^{n-1} ((n-1)!)^2 S^2}\right)^{\frac{n}{2(n-1)}}}{\sqrt{1 + \frac{L^{2n} - l^{2n}}{L^{2n}} \frac{q_n d^{2n}}{2^n (n!)^2 V^2}}} \leq \sigma' \leq \frac{L^n}{l^n} \sigma \frac{\left(1 + \frac{L^{2n-2} - l^{2n-2}}{L^{2n-2}} \frac{q_{n-1} d^{2n-2}}{2^{n-1} ((n-1)!)^2 S^2}\right)^{\frac{n}{2(n-1)}}}{\sqrt{1 - \frac{L^{2n} - l^{2n}}{l^{2n}} \frac{q_n d^{2n}}{2^n (n!)^2 V^2}}}.$$

Оценка для двух- и трехмерного случаев дана в [3] – [4].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берже М. *Геометрия. Т. 1.* – М.: Мир, 1984. – 560 с.
2. Клячин В. А. *Задачи анализа на  $\varepsilon$ -сетях* // Доклад на Научной сессии ВолГУ. – 2012.
3. Шуркаева Д. В. *Оценка искажения коэффициента изопериметричности тетраэдра при билипшицевом отображении* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. – 2013. – № 2(19). – С. 65–68.
4. Шуркаева Д. В. *Оценка искажения коэффициента изопериметричности треугольника при билипшицевом отображении* // Матер. междуна. Казан. летней шк.-конф. Т. 46. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. – С. 467–468.

**D. Dautibek**

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,  
Al-Farabi Kazakh National University  
Almaty, Kazakhstan  
dos-mm@mail.ru*

**NON-COMMUTATIVE CLARKSON INEQUALITIES  
FOR SYMMETRIC SPACE**

**Lemma 1.** *Let  $x$  be a positive  $\tau$ -measurable operator.*

(i) *If  $f$  is a convex function on  $[0, \infty)$ , then*

$$f(\langle x\xi, \xi \rangle) \leq \langle f(x)\xi, \xi \rangle$$

*for every unit vector  $\xi$  in  $D(x)$ .*

(ii) *If  $g$  is a concave function on  $[0, \infty)$ , then*

$$\langle g(x)\xi, \xi \rangle \leq g(\langle x\xi, \xi \rangle)$$

*for every unit vector  $\xi$  in  $D(x)$ .*

**Lemma 2.** *Let  $x$  and  $y$  be positive  $\tau$ -measurable operators and let  $E$  be an exact interpolation space for the couple  $(L_1(0, \infty), L_\infty(0, \infty))$ .*

(i) *If  $f$  is a non-negative operator convex function on  $[0, \infty)$  with  $f(0) = 0$ , then*

$$\|f(x) + f(y)\|_{E(\mathcal{M})} \leq 2\|f(x + y)\|_{E(\mathcal{M})}.$$

(ii) *If  $g$  is a non-negative increasing continuous concave function on  $[0, \infty)$ , then*

$$\|g(x + y)\|_{E(\mathcal{M})} \leq 4\|g(x) + g(y)\|_{E(\mathcal{M})}.$$

**Theorem 1.** *Let  $x$  and  $y$  be  $\tau$ -measurable operators and let  $f$  be an increasing continuous function on  $[0, \infty)$  such that  $f(0) = 0$  and  $g(t) = f(\sqrt{t})$  is operator convex. Then*

$$\begin{aligned} \|f(|x|) + f(|y|)\|_{E(\mathcal{M})} &\leq \|f(|x+y|) + f(|x-y|)\|_{E(\mathcal{M})} \\ &\leq \|f(2|x|) + f(2|y|)\|_{E(\mathcal{M})}. \end{aligned}$$

**Theorem 2.** *Let  $x$  and  $y$  be  $\tau$ -measurable operators and let  $f$  be a nonnegative increasing continuous function on  $[0, \infty)$  such that  $h(t) = f(\sqrt{t})$  is concave. Then*

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \|f(2|x|) + f(2|y|)\|_{E(\mathcal{M})} &\leq \|f(|x+y|) + f(|x-y|)\|_{E(\mathcal{M})} \\ &\leq 8 \|f(|x|) + f(|y|)\|_{E(\mathcal{M})}. \end{aligned}$$

**Corollary 1.** *Let  $x$  and  $y$  be  $\tau$  measurable operators. Then*

$$\| |x|^p + |y|^p \|_{E(\mathcal{M})} \leq \| |x+y|^p + |x-y|^p \|_{E(\mathcal{M})} \leq 2^p \| |x|^p + |y|^p \|_{E(\mathcal{M})}.$$

for  $2 \leq p \leq 4$ , and

$$\begin{aligned} 2^{p-3} \| |x|^p + |y|^p \|_{E(\mathcal{M})} &\leq \| |x+y|^p + |x-y|^p \|_{E(\mathcal{M})} \leq \\ &\leq 8 \| |x|^p + |y|^p \|_{E(\mathcal{M})}. \end{aligned}$$

for  $0 \leq p \leq 2$ .

#### R E F E R E N C E S

1. Bhatia R., Kittaneh F. *Clarkson inequalities with several operators and an application* // Bull. London Math. Soc. – 2000. – V. 36. – P. 820–832.
2. Dodds P. G., Dodds T. K., B. de Pagter *Non-commutative Banach function spaces* // Math. Z. – 1989. – V. 201. – P. 583–587.



3. Fack T., Kosaki H. *Generalized  $s$ -numbers of  $\tau$ -measure operators* // Pac. J. Math. – 1986. – V. 123. – P. 269–300.

4. Hirzallah O., Kittaneh F. *Non-commutative Clarkson inequalities for unitarily invariant norms* // Pac. J. Math. – 2002. – V. 202. – P. 363–369.

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абызов А. Н.	3	Журо С. В.	50
Авербух Е. Л.	5	Зайнетдинов Д. Х.	52
Ахметов Д. Ю.	6	Зайцева Н. В.	55
Балафендиева И. С.	20	Зеленина Л. И.	113
Бадриев И. Б.	10, 13	Зыкова Т. В.	57, 60
Бандеров В. В.	10, 17	Ибушева Н. В.	118
Бережной Д. В.	20, 23, 64, 74, 132, 193	Калимуллин И. Ш.	52
Бикмухаметов Р. И.	22	Калишева Д. О.	62
Биряльцев Е. В.	64, 132	Камилов М. Р.	64
Воинов Б. А.	79	Каминский Л. П.	66
Габимова А. К.	23	Капитанов Д. В.	69
Герасимов А. Н.	25	Карабашева Э. Н.	72
Глазырина О. В.,	27	Карамов А. В.	74
Гогин А. П.	29	Карчевский М. М.	29
Гоник Е. Г.	184	Кибец А. И.	184
Горшков А. А.	32	Киндер М. И.	76
Гулакова С. В.	34	Константинов П. В.	79
Гундырев И. А.	36	Конюхов И. В.	81
Давыдов Р. Л.	163	Коротяев Д. В.	84
Даутова Д. Н.	39	Кочетков А. В.	87
Докучаев Р. П.	41	Кригер Е. Н.	89
Долгоносова А. Ю.	43	Крутова К. А.	92
Евсеева А. А.	46	Крылов С. В.	87
Елизаров А. М.	6, 25	Кузнецов М. И.	95, 99
Жегалов В. И.	48	Кулешов А. В.	97
Желтухин В. С.	17	Лавров Э. Б.	99
Жукова Н. И.	43	Леонтьев А. А.	101
		Линник Е. Ю.	103, 106

---

Липачёв Е. К.	6, 109	Спирин С. В.	92
Любимов А. К.	79	Степанов В. А.	66
Ляпина А. А.	111	Султанов Л. У.	163
Макарова Ю. С.	113	Тапкин Д. Т.	166
Марков Р. В.	114	Тарасенко А. В.	168
Мартемьянова Н. В.	116	Тарасова А. А.	106
Матухина О. В.	118	Тестова И. В.	34, 50
Миронов А. Н.	120	Трухляева И. В.	170
Мокшин Е. В.	132	Турьгина И. А.	87
Нигмедзянова А. М.	134	Удалова Г. Ю.	173
Овсепян К. Г.	136	Фазлеева Э. И.	176
Павлова М. Ф.	27	Фалилеева М. В.	179
Перепелкина О. А.	138	Февральских Л. Н.	181
Петров М. В.	184	Федорова Т. Г.	184
Плотникова Л. В.	140	Филатова З. М.	189
Попов В. Н.	34, 50	Фирстов Д. В.	193
Романенко Г. В.	143	Фроленков И. В.	89, 143
Рыжов В. А.	64	Хазиева Г. И.	176
Сагдатуллин М. К.	145	Хайдаров Ш. М.	109
Саламатин А. А.	147	Хушнизаров Г. М.	195
Самерханов Т. Р.	150	Чан Хоай Нгок Нян	3
Самигуллина А. Р.	152	Чебакова В. Ю.	17
Сачкова О. А.	157	Шмелев А. А.	95
Сидоров С. Н.	160	Шуркаева Д. В.	197
Сингатуллин М. Т.	13	Dauitbek D.	200
Созонтова Е. А.	48		
Соколов Е. С.	92		