Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Д.В. БЕРЕЖНОЙ, Л.Р. СЕКАЕВА

ВОПРОСЫ ТЕРМОДИНАМИКИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Часть I. Основные положения механики сплошных сред

Учебное пособие

Казань

2012

УДК 539.3

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Протокол № 10 от 28 июня 2012 г.

совместного заседания кафедр теоретической механики и аэрогидромеханики Протокол № 9 от 16 июня 2012 г.

Авторы:

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.В. Бережной

канд. физ.-мат. наук, доц. Л.Р. Секаева

Научный редактор

доктор физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Коноплев

Рецензент

доктор физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической механики и сопротивления материалов ФГБОУВПО «КНИТУ-КАИ»

М.Н. Серазутдинов

Вопросы термодинамики в механике деформируемого твердого тела. Часть I. Основные положения механики сплошных сред: Учебное пособие / Д.В. Бережной, Л.Р. Секаева. – Казань: Казанский университет, 2012. – 51 с.

Данное пособие предназначено для студентов 4-го курса по специальности «Механика деформируемого твердого тела».

Содержание

1. Лагранжево и Эйлерово описание движения. Модель сплошной среды

Твердое деформируемое тело рассматривается как совокупность материальных частиц. В актуальный момент времени t материальное тело занимает область Ω_t трехмерного евклидова пространства. Каждая материальная частица в момент времени t занимает определенную точку области Ω_t. Ее положение задается единственным образом тремя числами x_1, x_2, x_3 по отношению к заданной пространственной системе координат. Координаты $x_i, \left(i=1,2,3\right)$ являются компонентами вектора $\mathbf{x} \equiv \left\{x_i\right\}$. Если в заданной системе координат в момент времени t установлено соответствие частиц некоторого объема сплошной среды и точек пространства, то это означает, что указана конфигурация сплошной среды. В произвольные моменты времени тело принимает различные конфигурации. Одну из этих конфигураций, например, Ω_0 при $t=t_0$, можно принять в качестве основной. В ней вводится так называемая материальная система координат $\mathbf{X} \equiv \left\{X_\alpha\right\}$, $\left(\alpha=1,2,3\right)$, по отношению к которой записывается движение материальных частиц тела.

Движение частиц сплошной среды в пространстве можно описать с помощью уравнения вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(\mathbf{X}, t\right), \tag{1.1}$$

показывающего, что материальная частица, в основной конфигурации занимающая положение $\mathbf{X}$, в момент t занимает положение $\mathbf{x}$ в пространственной системе координат. Такой способ описания движения, выраженный формулой (1.1), называется Лагранжевым. Переменные $(\mathbf{X},t)$ называются Лагранжевыми или материальными.

Зависимость (1.1) между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ обратима, т.е. существует обратная зависимость:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x},t), \qquad (1.2)$$

показывающая, что в момент t в точке пространства $\mathbf{x}$ находится материальная частица, которая в основной конфигурации в материальной системе координат занимает положение $\mathbf{X}$. Этот способ описания движения называется Эйлеровым, а переменные $(\mathbf{x},t)$ называются Эйлеровыми или пространственными.

Таким образом, при Лагранжевом способе описания движения сплошной среды изучается поведение материальной точки этой среды, а при Эйлеровом – поведение сплошной среды в точке пространства.

Скорость материальной частицы в момент t определяется выражением:

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)/\partial t = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t). \qquad (1.3)$$

Точка обозначает дифференцирование по времени при $\vec{X} = \mathrm{const}$, которое называется материальным дифференцированием по времени. Если в (1.3) подставить (1.2), то получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \tag{1.4}$$

Выражение (1.3) определяет скорость материальной частицы как функций материальных переменных, а выражение (1.4) дает ту же скорость как функцию пространственных переменных. Связь между обоими видами переменных взаимно однозначна и обратима и дается выражениями (1.1) и (1.2).

Ускорение материальной частицы в момент времени t дается выражением

$$\ddot{\mathbf{x}} \equiv \partial \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) / \partial t = \partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) / \partial t^2 = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t). \tag{1.5}$$

При помощи выражений (1.5) и (1.2) можно получить ускорение в пространственных координатах

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \tag{1.6}$$

Принимается модель сплошной среды, которая определяется следующими положениями:

1^{o}. Материальные частицы заполняют сплошным образом материальное тело, и их движение в пространстве непрерывно зависит от времени. Это означает, что $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ и $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ – непрерывные функции своих аргументов для любого $\mathbf{X} \in \Omega_0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ и, соответственно, $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Функции $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ и $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ обладают непрерывными частными производными произвольного порядка. Это предположение дает возможность изучать механические свойства тел на образцах сравнительно малых размеров и позволяет использовать для исследования деформации аппарат дифференциального исчисления. Отметим, что движение материи изучается на так называемом макроскопическом уровне, то есть не учитывается элементарное строение вещества. Это оправдано тем, что в огромном числе практических задач представляет интерес не поведение каждой молекулы (атома), а общее состояние тела.

2^{o}. В актуальный момент времени t в точке пространства $\vec{x}$ находится только одна материальная частица, что является требованием о взаимном непрониканием материи и означает, что связь между $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ является взаимно однозначной, а сами функции $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ являются взаимно обратными. Необходимым и достаточным условием обратной функции является отличие от нуля якобиана преобразования координат

$$J = \det \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \neq 0. \tag{1.7}$$

3^{o}. Сплошная среда, будучи материальной, обладает свойством инертности, мерой которого является масса – непрерывная, положительная и аддитивная функция объема. Предел

$$\rho = \lim_{V\to 0}(m/V) = dm/dV \tag{1.8}$$

для произвольного объема V конфигурации Ω_t с массой m называется плотностью. Плотность $\rho(\mathbf{x},t)$ есть непрерывная функция своих аргументов $\mathbf{x}\in\Omega_t$, $t\in(-\infty,+\infty)$ и также обладает частными производными любого порядка. Начальной конфигурации Ω_0 отвечает плотность

$$\rho_0(\mathbf{X}) = dm/dV_0, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{X} \in \Omega_0$, причем объем V_0 конфигурации Ω_0 соответствует объему V конфигурации Ω_t.

4°. Принимается, что в течение всего процесса движения материального тела между двумя бесконечно близкими окрестностями двух соседних точек нет обмена массы, т.е.

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV . \tag{1.10}$$

5°. В любой фиксированный момент времени t материальное тело рассматривается как абсолютно твердое, и для него справедливы законы теоретической механики, в том числе законы Ньютона. При этом используются аксиоматические понятия силы и массы.

Справедливость введенных допущений окончательно может быть установлена лишь опытом. Дополнительные аксиомы и определения будут вводиться по мере необходимости.

Материальное тело испытывает определенные воздействия со стороны окружающей среды. Воздействия на тело бывают двух типов: поверхностные (например, поверхностные силы, тепло- и массообмен через граничную поверхность и т.п.), описываемые при помощи координат точек граничной поверхности и времени, и массовые (гравитационные, непрерывно распределенные в объеме тела источники тепла и т.п.), описываемые при помощи координат внутренних точек и времени. Эти воздействия порождают в теле процессы разного типа – деформационные, тепловые, структурные, химические и т.п.; они связаны с энергетическими изменениями, при которых происходят превращения энергии одного типа в энергию другого типа. Изменения энергии подчиняются принципам термодинамики. Вот почему сложные термомеханические и другие процессы можно исследовать путем применения методов термодинамики сплошной среды.

Общее состояние тела является совокупностью разных по характеру состояний: механического, термического, химического, внутриструктурного и т.п. Эти состояния связаны между собой. Принятой модели сплошной среды соответствует ряд специфических макромасштабных мер разных состояний тела, которые являются функциями координат точек тела и времени. Изменение этих мер отражает соответствующие процессы, протекающие в теле. Макромасштабные меры называются параметрами состояния; вообще говоря, считается, что они определяют состояние однозначным образом.

С точки зрения термодинамики материальное тело рассматривается как термодинамическая система, в которой протекают процессы термодинамического состояния. Обычно различают два типа параметров термодинамического состояния: обобщенные термодинамические силы (объемные и поверхностные), характеризующие воздействие окружающей среды на тело, и обобщенные термодинамические перемещения, характеризующие реакцию тела на эти воздействия.

2. Деформации

Пусть в материальном теле в интервале времени (t_0, t) произошел некоторый процесс. Благодаря этому процессу в теле возникли геометрические изменения. Процесс геометрических изменений будем называть деформированием. Будем исследовать геометрические изменения, наступившие в теле в момент времени t по отношению к основной конфигурации Ω_0. Эти геометрические изменения определяют деформированное состояние (деформацию) тела в момент времени t. В дальнейшем будем рассматривать локальные деформации, т.е. деформированное состояние в точке, определяемое деформацией ее бесконечно близкой окрестности.

Для простоты будем считать, что материальные и пространственные системы координат являются декартовыми. Это не ограничивает общности изложения и возможности перехода, если это нужно, к криволинейным координатам. Примем правило суммирования по повторяющимся индексам.

Рассмотрим две бесконечно близкие материальные точки $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$, принадлежащие Ω_0, т.е.

$$d\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2. \tag{2.1}$$

Материальная частица, которая в момент времени t_0 находилась в точке $\mathbf{X}_1$ материальной системы координат, сместилась по закону движения (1.1) и в момент времени t заняла положение

$\mathbf{x}_1$ пространственной системы координат. Аналогично частице $\mathbf{X}_2$ соответствует $\mathbf{x}_2$, тогда

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 . \tag{2.2}$$

Закон движения (1.1) связывает однозначным и обратимым образом оба вектора $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{X}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \tag{2.3}$$

или

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} , \tag{2.4}$$

где $\mathbf{F}$ – тензор второго ранга, который называется материальным градиентом деформации (мера деформации по отношению к основной конфигурации). Компоненты тензора $\mathbf{F}$ будут равны

$$F_{i\alpha} = \partial x_i \big/ \partial X_\alpha = x_{i,\alpha} . \tag{2.5}$$

Тензор $\mathbf{F}^{-1}$ (обратный тензору материальному градиенту деформаций) является мерой деформации по отношению к текущей конфигурации Ω_t и называется пространственным градиентом деформаций. Компонентами $\mathbf{F}^{-1}$ будут

$$F_{\alpha i}^{-1} = \partial X_\alpha \big/ \partial x_i = X_{\alpha,i} , \tag{2.6}$$

причем

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} , \tag{2.7}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Обозначим через dL величину вектора $d\mathbf{X}$. Ее квадрат можно определить через

$$dL^2 = d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X} = \left[\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}\right]^T \cdot \left[\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}\right] =$$
$$= d\mathbf{x}^T \cdot \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x}, \tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{C} = \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \tag{2.9}$$

тензор деформаций Коши, который является пространственной мерой деформации и имеет смысл метрического тензора.

Аналогично величину вектора $d\mathbf{x}$ можно обозначить через dl, тогда

$$dl^2 = d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} = \left[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}\right]^T \cdot \left[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}\right] =$$
$$= d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X}, \tag{2.10}$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \tag{2.11}$$

является тензором Грина и имеет смысл метрического тензора (выражает материальную меру деформации). Тензоры $\mathbf{C}$ и $\mathbf{G}$ являются симметричными тензорами второго ранга.

Материальный градиент деформаций $\mathbf{F}$, как симметричный тензор второго ранга, выражается при помощи ортогонального тензора второго ранга $\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, называемого тензором ротации, и симметричного положительно определенного тензора второго ранга $\mathbf{U}$, где $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$, называемого правым тензором искажений, или симметричного положительно определенного тензора второго ранга $\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$, называемого левым тензором искажений:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}. \tag{2.12}$$

Отсюда

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}. \qquad (2.13)$$

Из последнего выражения следует, что полная деформация произвольно выбранного элементарного вектора $d\mathbf{X}$ бесконечно близкой окрестности рассматриваемой материальной частицы $\mathbf{X}_1$ состоит из трансляции вектора (параллельного переноса), удлинения (сжатия) вектора и вращения. Очередность применения этих трех операций не влияет на окончательный результат. Так как $d\mathbf{X}$ – произвольно взятый вектор из бесконечно близкой окрестности точки $\mathbf{X}_1$, то $\mathbf{R}$ представляет собой вращение этой окрестности, рассматриваемой как идеально жесткое тело, а $\mathbf{U}$ (соответственно $\mathbf{V}$) – ее чистую деформацию.

Из (2.11) и (2.12) следует

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2, \qquad (2.14)$$

т.е. тензор деформаций Грина, является мерой чистой деформации бесконечно близкой окрестности рассматриваемой точки.

Разность $dl^2 = dL^2$ для двух соседних частиц сплошной среды используется как мера деформации некоторой окрестности этих частиц между начальными и конечными состояниями. Если эта разность тождественно равна нулю для всех соседних частиц, то говорят, что имеет место абсолютно жесткое перемещение (перемещение сплошной среды как абсолютно твердого тела). Используя (2.3), (2.8), и (2.10), эту разность можно представить в виде

$$dl^2 - dL^2 = d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \\ = d\mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \cdot 2\mathbf{L} \cdot d\mathbf{X}, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{L}$ – Лагранжев тензор конечных деформаций (или тензор конечных деформаций Грина). Эту же самую разность можно представить в виде:

$$dl^2 - dL^2 = d\mathbf{x}^T \cdot \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x} = \\ = d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{E}$ – Эйлеров тензор конечных деформаций (или тензор конечных деформаций Альманси). Симметричные тензоры второго ранга $\mathbf{L}$ и $\mathbf{E}$ выражают соответственно материальную и пространственную меру деформаций.

Вектор, соединяющий положение материальной частицы в основной и текущей конфигурациях, называется вектором перемещений

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \tag{2.17}$$

Если продифференцировать (2.17) по $\mathbf{X}$, то получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \mathbf{H}, \tag{2.18}$$

где тензор $\mathbf{H}$ называется материальным градиентом перемещений.

Если (2.17) продифференцировать по $\mathbf{x}$, то получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{K}, \tag{2.19}$$

где тензор $\mathbf{K}$ называется пространственным градиентом перемещений.

Тогда можно получить

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}\right),$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{K} - \mathbf{K}^T + \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K}, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T - \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K}\right). \tag{2.20}$$

Кроме того

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{H}, \mathbf{L} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{E} = \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \tag{2.21}$$

Из соотношений (2.20) видно, что связь между тензорами деформаций и градиентами перемещений являются квадратичной. Отсутствие членов со степенью выше второй можно объяснить тем, что вследствие предположения о локальных деформациях рассматривается деформация бесконечно малой окрестности частицы.

Другой важной характеристикой процесса геометрических изменений тела является скорость деформаций. Чтобы получить пространственные меры скорости деформаций, приведем следующие выкладки

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(X, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}, \tag{2.22}$$

где

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.23}$$

несимметричный тензор второго ранга, называемый градиентом скоростей. Учитывая (2.3) и (2.23), получим

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

откуда видно, что градиент скоростей $\mathbf{l}$ является пространственной мерой скорости деформации. Разрешая (2.22) относительно $\mathbf{l}$ и используя (2.14), получим

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}. \quad (2.25)$$

Легко проверить, что

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1} = -\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1}, \quad (2.26)$$

т.е. тензор $\mathbf{l}$ можно разложить на антисимметричный и симметричный тензоры. Антисимметричный тензор обозначается через

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1} \quad (2.27)$$

и называется спином. Он выражается через тензор ротации и является пространственной мерой скорости вращения абсолютно твердого объема, состоящего из бесконечно малой окрестности рассматриваемой точки.

Симметричный тензор обозначается через $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (2.28)$$

и называется пространственным тензором скорости деформации. Он выражается при помощи тензора искажений и является пространственной мерой скорости чистой деформации, т.е.

$$\mathbf{l} = \mathbf{w} + \mathbf{d}. \quad (2.29)$$

Материальные меры скорости деформации получаются путем прямого материального дифференцирования по времени тензоров деформации Грина $\mathbf{G}$ и $\mathbf{L}$

$$\dot{\mathbf{G}} = 2\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{F}}^{T} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{T} \cdot \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.30)$$

Материальные меры скорости деформации $\mathbf{G}$ и $\mathbf{L}$ – симметричные тензоры второго ранга. После подстановки (2.22) в (2.30) и учета (2.28), получим

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}. \tag{2.31}$$

В случае малых градиентов перемещений в (2.20) можно пренебречь квадратичными членами и получить:

$$\mathbf{L} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}), \mathbf{E} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{K}^T + \mathbf{K}). \tag{2.32}$$

Тогда в (2.18) и (2.19) можно пренебречь градиентами перемещений, которые будут малыми высшего порядка по отношению к единичному тензору

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{I}, \mathbf{F}^{-1} \approx \mathbf{I}. \tag{2.33}$$

По той же причине

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{I}, \mathbf{G} \approx \mathbf{I}. \tag{2.34}$$

Если, кроме градиентов, малы и сами перемещения $\mathbf{u}$, для произвольной непрерывной функции f можно записать

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{X}). \tag{2.35}$$

Это дает возможность пользоваться только одной системой координат. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \approx \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{H} = \mathbf{K}, \mathbf{E} \approx \mathbf{L} \approx \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.36}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор малых деформаций, а

$$\dot{\mathbf{E}} \approx \mathbf{d} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{2.37}$$

где $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор скоростей малых деформаций.

3. Напряжения

Механическое воздействие окружающей среды на материальное тело, а также взаимодействие между отдельными частями тела выражаются через объемные и поверхностные силы. Пусть $d\mathbf{F}$ – элементарная сила, действующая на материальный объем dV в момент времени t для конфигурации Ω_t. По определению,

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} \tag{3.1}$$

есть интенсивность объемных сил; $\mathbf{f}$ можно представить в виде

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{b} = \rho\frac{d\mathbf{F}}{dm}, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{b}$ – интенсивность массовых сил.

Рассматривая элементарную поверхность с площадью dS и с единичной нормалью $\mathbf{n}$, можно предположить, что dS – участок граничной поверхности тела или какой-либо другой воображаемой поверхности, разделяющей тело на две части. Пусть в момент времени t на рассматриваемую площадку действует элементарная сила $d\mathbf{P}$. По определению

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \frac{d\mathbf{P}}{dS} \tag{3.3}$$

есть вектор напряжения, действующий на элементарную площадку dS с единичной нормалью $\mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ зависит от ориентации этой площадки, т.е. от $\mathbf{n}$. Считая эту зависимость линейной, имеем

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{t}$ – тензор второго ранга, называемый еще тензором напряжений Коши. Зависимость (3.4) и симметричность $\mathbf{t}$ будут обоснованы далее. Тензор напряжений Коши $\mathbf{t}$ выражает пространственную меру напряженного состояния в рассматриваемой точке.

Рассмотрим ту же элементарную поверхность dS_0, но уже в конфигурации Ω_0. Пусть $\mathbf{N}$ – ее единичная нормаль. По определению

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{N})} = \frac{d\mathbf{P}}{dS_0}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{T}_{(\mathbf{N})}$ – вектор напряжения относительно конфигурации Ω_0. Снова принимаем линейную связь между вектором напряжения и единичной нормалью $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{N})} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{T}$ **–** первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, являющийся материальной мерой напряжения в рассматриваемой точке.

Рассмотрим элементарный объем dV_0 в конфигурации Ω_0:

$$dV_0 = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3. \tag{3.7}$$

Частицы, занимающие в момент времени t_0 элементарный объем dV_0, в актуальный момент времени t займут объем dV конфигураций Ω_t:

$$dV = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 = J(d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 = J dV_0, \tag{3.8}$$

где J – детерминант матрицы Якоби преобразования координат, причем

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим два неколлинеарных вектора $d\mathbf{M}_1$ и $d\mathbf{M}_2$ в точке конфигурации Ω_0. Их векторное произведение имеет вид

$$d\mathbf{S}_0 = d\mathbf{M}_1 \times d\mathbf{M}_2, \tag{3.10}$$

где вектор $d\mathbf{S}_0$ с единичным вектором $\mathbf{N}$ направлен по нормали к плоскости векторов $d\mathbf{M}_1$ и $d\mathbf{M}_2$. Его величина равна элементарной площади dS_0

$$d\mathbf{S}_0 = \mathbf{N} dS_0. \tag{3.11}$$

Векторам $d\mathbf{M}_1$ и $d\mathbf{M}_2$ соответствуют векторы $d\mathbf{m}_1$ и $d\mathbf{m}_2$ конфигурации Ω_t:

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{m}_1 \times d\mathbf{m}_2, \tag{3.12}$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS. \tag{3.13}$$

Можно получить

$$d\mathbf{m}_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M}_1, \quad d\mathbf{m}_2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M}_2. \tag{3.14}$$

Тогда, подставляя (3.14) в (3.12) и домножая обе части равенства на $\mathbf{F}$, получим

$$\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{S} = J d\mathbf{S}_0. \tag{3.15}$$

Таким образом, связь между элементарными векторами, представляющими некоторые площадки конфигураций Ω_0 и Ω_t, дают формулы

$$d\mathbf{S}_0 = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{S}, \tag{3.16}$$

$$d\mathbf{S} = J \left(\mathbf{F}^{-1} \right)^T \cdot d\mathbf{S}_0. \tag{3.17}$$

Из соотношений (3.3) – (3.6) получаем

$$d\mathbf{P} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dS_0. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.11) и (3.13), имеем

$$\mathbf{t}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{T}\cdot d\mathbf{S}_0. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.16) в (3.19), находим

$$\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}^T, \tag{3.20}$$

$$\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{t}\cdot\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T. \tag{3.21}$$

Первый тензор Пиолы-Кирхгофа несимметричен.

Так как пространственная мера напряжений (тензор напряжений Коши) симметричная, удобнее ввести в качестве материальной меры напряжений также симметричный тензор. Им является второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, определяемый следующим образом

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}. \tag{3.22}$$

Отсюда можно получить

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}\cdot\tilde{\mathbf{T}}, \tag{3.23}$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{t}\cdot\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T, \tag{3.24}$$

$$\mathbf{t} = J\mathbf{F}\cdot\tilde{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^T. \tag{3.25}$$

Выражения (3.22–3.25) дают связь между материальной и пространственными мерами напряжений.

Как в случае деформаций, для описания напряженного состояния важную роль играет скорость изменения напряжений. Существует ряд пространственных и материальных мер скорости напряжений, предложенных разными авторами. На основании определения конститутивной производной от тензорной величины можно получить подходящую пространственную меру скорости изменения напряжений. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{r}(\mathbf{X},t)$, определяемое для точек материального тела.

Пусть за бесконечно малый момент времени Δt вектор $\mathbf{r}(\mathbf{X},t)$ претерпел параллельный перенос (определяемый как $\mathbf{I}\cdot\mathbf{r}$), вращение как абсолютно твердого тела (определяемое через $\Delta t\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}$) и чистую деформацию (определяемую через $\Delta t\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}$). В результате этих операций получается вектор $\mathbf{r}(\mathbf{X},t+\Delta t)$. Чтобы получить оценку изменения вектора только от чистой деформации, необходимо сравнить его с вектором

$$\mathbf{r}'(\mathbf{X},t)=\left(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w}\right)\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t), \tag{3.26}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(\mathbf{X},t+\Delta t)-\mathbf{r}'(\mathbf{X},t)}{\Delta t}=\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(\mathbf{X},t+\Delta t)-\left(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w}\right)\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)}{\Delta t}=\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(\mathbf{X},t+\Delta t)-\mathbf{I}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)}{\Delta t}-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)}{\Delta t}=\\&=\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)-\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t),\end{aligned} \tag{3.27}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)$ – конститутивная производная по времени вектора $\mathbf{r}(\mathbf{X},t)$. Конститутивная производная тензора второго ранга определяется при помощи (3.26) следующим образом. Пусть

$$\widehat{\mathbf{r}}\left(\mathbf{X},t\right)=\mathbf{A}\left(\mathbf{X},t\right)\cdot\mathbf{r}\left(\mathbf{X},t\right), \tag{3.28}$$

где $\widehat{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)$ – вектор, $\mathbf{A}(\mathbf{X},t)$ – тензор второго ранга. Тогда $\widehat{\mathbf{r}}'(\mathbf{X},t)$ (по аналогии с (3.26)) примет вид

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbf{r}}'(\mathbf{X},t)=(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)=\\&=\left[(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\cdot(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w})^{-1}\right]\cdot\left[(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w})\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)\right]=\\&=\mathbf{A}'(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{r}'(\mathbf{X},t),\end{aligned}\tag{3.29}$$

где

$$\mathbf{A}'(\mathbf{X},t)=(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\cdot(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{w})^{-1}.\tag{3.30}$$

Тогда конститутивная производная по времени тензора $\mathbf{A}(\mathbf{X},t)$ запишется в виде

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(\mathbf{X},t+\Delta t)-\mathbf{A}'(\mathbf{X},t)}{\Delta t}=\\&=\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t)-\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{X},t)+\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{w}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

При помощи (3.31) вводится пространственная мера скорости изменения напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{t}}(\mathbf{x},t)$ как конститутивная производная по времени тензора напряжений Коши $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{t}}(\mathbf{x},t)=\dot{\mathbf{t}}(\mathbf{x},t)-\mathbf{w}\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x},t)+\mathbf{t}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{w}\,.\tag{3.32}$$

Материальные меры скоростей изменения напряжений $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{X},t)$ и $\dot{\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{X},t)$ получаются путем непосредственного материального дифференцирования по времени первого и второго тензоров Пиолы-Кирхгоффа и будут функциями материальных переменных $(\mathbf{X},t)$.

4. Термическое состояние

Материальное тело в момент времени t может обмениваться теплом с окружающей средой через граничную поверхность. Кроме того, в теле возможны внутренние, распределенные по объему источники или потребители тепла (вследствие радиации, химических реакций и пр.). Из-за этих термических воздействий в теле протекает термический процесс, который меняет его термическое состояние.

Температура в заданной точке $\mathbf{x}$ материального тела в момент времени t является характеристикой термического состояния в бесконечно близкой окрестности этой точки. Будем работать с абсолютной температурой θ, которая является скалярной функцией пространственных переменных $(\mathbf{x}, t)$ и принимает только неотрицательные значения. При помощи закона движения (1.1) температуру θ можно представить как функцию материальных координат $(\mathbf{X}, t)$.

Разность температур в двух бесконечно близких точках обуславливает поток тепла между ними. Эта разность характеризуется градиентами температуры – в пространственной системе координат $\mathbf{g}$, а в материальной системе координат $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}}\, \theta, \mathbf{G} = \nabla_{\mathbf{X}}\, \theta. \tag{4.1}$$

Связь между этими градиентами имеет вид

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}, \mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}. \tag{4.2}$$

Изменение термического состояния характеризуется материальной производной температуры по времени $\dot{\theta}$.

Рассмотрим элементарную поверхность с площадью dS и единичной нормалью $\mathbf{n}$, находящейся на граничной поверхности материального тела в момент времени t или на мысленной поверхности, разделяющей тело на две части. Если на этой поверхности градиент температуры отличен от нуля, через нее протекает тепло. Количество тепла, протекающее через единицу площади нормально к поверхности за единицу времени, называется потоком тепла. Количество тепла, протекающее через элементарную площадь dS (с нормалью $\mathbf{n}$) конфигурации Ω_t, за единицу времени, есть $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS$, где $\mathbf{q}$ – пространственный вектор потока тепла. Точно так же количество тепла, но относительно площади dS_0 конфигурации Ω_0 с единичной нормалью $\mathbf{N}$, будет $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{N}dS_0$, где $\mathbf{Q}$ – материальный вектор потока тепла. Общее количество тепла, протекающее через поверхность за единицу времени, равно

$$Q_S = \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{S_0} \mathbf{Q}\cdot\mathbf{N}dS_0 . \qquad (4.3)$$

Связь между векторами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{q}$ получается при помощи (3.17) и (4.3)

$$\mathbf{q} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}, \mathbf{Q} = J\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{q}. \qquad (4.4)$$

Поток тепла, соответствующий единице температуры, называется скоростью энтропийного перемещения

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{q}}{\theta}, \dot{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{Q}}{\theta}, \qquad (4.5)$$

где $\mathbf{h}$ – пространственное энтропийное перемещение, а $\mathbf{H}$ – материальное энтропийное перемещение; $\mathbf{h}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой, как $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$.

Количество тепла, которое единица массы выделяет или поглощает за единицу времени, обозначим через r и будем называть его удельным внутренним тепловыделением; r – скалярная непрерывная функция материальных и пространственных координат точек тела. Общее количество тепла, выделяемое (или поглощаемое) материальным телом за единицу времени, выражается в виде

$$Q_V = \int_V r\rho dV = \int_{V_0} r\rho_0 dV_0 . \tag{4.6}$$

Еще одной важной характеристикой термического состояния тела в момент времени t является энтропия H. Принимается, что энтропия тела есть счетно-аддитивная функция массы и имеет абсолютно непрерывную плотность $\eta(\mathbf{x},t)$, называемую удельной энтропией (для единицы массы) в точке $\mathbf{x}$ и в момент времени t. Тогда

$$H = \int_V \eta\rho dV = \int_{V_0} \eta\rho_0 dV_0 . \tag{4.7}$$

Скорость изменения энтропии в единице массы тела характеризуется материальной производной удельной энтропии по времени $\dot{\eta}$.

5. Внутреннее структурное состояние

Рассмотрим материальное тело, к которому приложены внешние механические и тепловые воздействия. В зависимости от внутренней структуры материала тела – кристаллической, аморфной, высокомолекулярной и др. – эти воздействия вызывают соответствующие структурные изменения. На макроуровне эти изменения описываются конечным числом тензорных и скалярных величин $\left(\aleph_a^{(\alpha)}\right)$ $\left(\alpha = 1, 2, \ldots, m\right)$, называемых внутренними параметрами состояния системы (элементарного объема тела). Они имеют определенное термодинамическое значение, которое будет выяснено далее. Символом a обозначена совокупность индексов данной величины, которая может быть скалярной или тензорной. Характер этих параметров, как и их изменение вследствие протекающих в материальном теле термомеханических процессов, определяется макроструктурным анализом их микромеханизма.

Изменение внутренних параметров состояния задается при помощи уравнений для $\left(\dot{\aleph}_a^{(\alpha)}\right)$, называемых уравнениями эволюции параметров. Определение $\left(\aleph_a^{(\alpha)}\right)$ и уравнений, описывающих их изменение, нельзя провести чисто феноменологическим путем. Поэтому их определение нужно связать с результатами современной микромеханики, физики твердого тела, теории дислокаций и структурных дефектов, физхимии высокомолекулярных соединений и других смежных областей механики сплошных сред. Основная трудность заключается в согласовании сложных результатов исследований микроуровня с определенной системой феноменологических гипотез, удовлетворяющих общим требованиям принципов механики и термодинамики, с тем, чтобы для этих параметров получить определяющие выражения и уравнения эволюции в приемлемо упрощенном для применений виде.

Когда параметры состояния и уравнения их изменения постулируются феноменологическим путем, они должны иметь свою микроструктурную интерпретацию и экспериментальное подтверждение. Иногда анализ микроструктуры можно выполнить и статистическим путем и вывести, таким образом, соответствующие макромасштабные зависимости.

Строение кристаллических тел (металлов и др.) характеризуется системой кристаллов, обладающих атомной решеткой определенного типа. При условии, что в этой решетке нет дефектов, и они не порождаются во время термомеханического процесса, деформации кристалла будут обратимыми и внутренних структурных изменений не будет. В этом случае тело ведет себя как упругое, и нет необходимости вводить внутренние параметры состояния.

Для кристаллических решеток с разного вида дефектами (точечными, линейными, поверхностными), обладающими свойством передвигаться и порождаться при термомеханических воздействиях, деформирование кристалла сопровождается необратимыми деформациями и структурными изменениями, которые должны описываться внутренними параметрами состояния. Внешние воздействия порождают касательные напряжения в кристаллографических плоскостях. Когда эти касательные напряжения превзойдут некоторое предельное значение, начинается движение линейных дефектов – дислокаций в этих плоскостях. На макроуровне оно принимает форму сдвигов, приводящих к пластическим деформациям тела. В этом случае в качестве внутренних параметров состояния можно принимаются как тензорные, так и скалярные параметры, которые по сути являются статистически усредненными плотностями структурных дефектов. В макромасштабе предельное значение приведенных касательных напряжений связано с пределом текучести материала.

Касательное напряжение сдвига вызывается межатомными силами и силами сопротивления встречных микродефектов, которые дислокационный элемент вынужден преодолевать при своем движении. Дислокации связаны с микронапряжениями, действующими внутри них. В макромасштабе эти микронапряжения могут быть описаны статистически усредненно при помощи тензора микронапряжений, который связан с внутренними параметрами состояния. При определенных термомеханических воздействиях движение дислокаций вызывает на макроуровне комбинированные вязкие и пластические деформации.

Микромеханизм процесса вязкопластической деформации связан как с механизмами сдвига в соответствующих направлениях, так и с термической активацией процесса выше определенного энергетического уровня. Рассмотрение поликристаллических агрегатов приводит к дополнительным трудностям при описании взаимодействий между кристаллическими зернами, которые должны учитываться соответствующими внутренними параметрами состояния. Для материалов с высокомолекулярной структурой при относительно слабых внешних воздействиях наблюдаются раскручивание и ориентация молекулярных цепей, которые на макроуровне приводят к вязким свойствам, резко выраженным для этого типа материалов. Для этих материалов при более интенсивных внешних механических и термических воздействиях тепловое движение атомов может достигнуть такого энергетического уровня, при котором возбуждается химическая реакция распада, вызывающая разрыв связей в молекулярных цепях, образование более низкомолекулярного полимера и множества субмикротрещин в объеме полимерного материала. Для таких материалов микротрещины играют роль микродефектов. Эти необратимые микропроцессы дают на макроуровне начало необратимым неупругим деформациям тела. В качестве внутренних параметров состояния в этом случае выбирают тензор микродефектов, который связан с плотностью и средней длиной микротрещин единицы объема тела, скорость химической реакции распада и т.д.

6. Закон сохранения массы

Всякий материальный континуум обладает свойством, называемым массой. Суммарная масса некоторой части сплошной среды, занимающей в момент времени t объем пространства V, выражается интегралом

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x},t)\, dV, \tag{6.1}$$

где $\rho(\mathbf{x},t)$ – непрерывная функция координат, называемая плотностью. Закон сохранения массы утверждает, что масса выделенной части среды остается постоянной. Следовательно

$$\begin{aligned}
\frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho J dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt}[\rho J]\, dV_0 = \\
&= \int_{V_0} \left[\dot{\rho} J + \rho \dot{J}\right] dV_0 = \int_{V_0} \left[\dot{\rho} J + \rho J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}\right] dV_0 = \\
&= \int_{V_0} \left[\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}\right] |J|\, dV_0 = \int_{V_0} \left[\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}\right] dV = 0.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Поскольку это равенство верно для произвольного объема V, подынтегральное выражение само должно обращаться в ноль, т.е.

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{6.3}$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности в Эйлеровой, или пространственной, форме. Раскрывая оператор материальной производной, уравнение неразрывности можно написать в другой равнозначной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0. \tag{6.4}$$

В несжимаемой среде плотность массы каждой частицы не зависит от времени, т.е. $\partial\rho / \partial t = 0$, и уравнение (6.3) примет вид

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0. \qquad (6.5)$$

Уравнение неразрывности можно записывать в Лагранжевой, или материальной, форме. Для сохранения массы требуется, чтобы выполнялось уравнение

$$\int_{V_0} \rho_0 \, dV_0 = \int_{V} \rho \, dV = \int_{V_0} \rho J dV_0. \qquad (6.6)$$

Здесь интегралы взяты по одним и тем же частицам, т.е. V – это объем, который теперь занимает среда, заполнявшая в момент времени $t = t_0$ объем V_0. Соотношение (6.6) должно иметь силу для произвольно выбранного объема, поэтому

$$\rho_0 = \rho J. \qquad (6.7)$$

Это означает, что произведение ρJ не зависит от времени, т.к. объем V произволен, т.е. что

$$\frac{d}{dt}[\rho J] = 0. \qquad (6.8)$$

Уравнение (6.8) является Лагранжевой дифференциальной формой уравнения неразрывности.

7. Закон сохранения количества движения

Пусть на движущееся материальное тело объема V в момент времени t действуют массовые силы с плотностью распределения $\mathbf{b}$. На каждом бесконечно малом элементе dS поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, действует вектор напряжения $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$. Во всей области, занятой материальным телом, определено поле скоростей $\vec{\upsilon}$. Общее количество движения системы масс, заполняющих объем V, определяется интегралом

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = \int_V \rho \mathbf{v} dV . \qquad (7.1)$$

Теорема об изменении количества движения утверждает, что скорость изменения со временем количества движения, некоторой части континуума равна результирующей сил, действующих на рассматриваемую область. Если внутренние силы, действующие между частицами данного объема, подчиняются третьему закону Ньютона о действии и противодействии, то теорема об изменении количества движения для этой системы масс выражается уравнением

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{v}\, dV = \int_V \rho \mathbf{b}\, dV + \int_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} dS . \qquad (7.2)$$

После подстановки $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ в последний интеграл и преобразования интеграла по поверхности в интеграл по объему (согласно теореме Гаусса-Остроградского) это уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}\,dV = \int_V \left[\rho\mathbf{b} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}\right] dV\,. \tag{7.3}$$

Распишем материальную производную правой части (7.3) и воспользуемся уравнением неразрывности в форме (6.3). Это даст

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\mathbf{v}dV &= \frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho\mathbf{v}J\,dV_0 = \int_{V_0}\left[\dot{\rho}\mathbf{v}J + \rho\dot{\mathbf{v}}J + \rho\mathbf{v}\dot{J}\,\right]dV_0 = \\ &= \int_{V_0}\left[\rho\mathbf{a} + \left(\dot{\rho} + \rho\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right]JdV_0 = \int_{V_0}\rho\mathbf{a}J\,dV_0 = \int_V \rho\mathbf{a}\,dV.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Подстановка этого выражения в правую часть (7.3) и объединение членов приводят к интегральной форме теоремы об изменении количества движения:

$$\int_V \left[\rho\mathbf{b} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t} - \rho\mathbf{a}\right] dV = 0\,. \tag{7.5}$$

Так как объем V произволен, само подынтегральное выражение (7.5) должно обращаться в ноль. Полученное таким образом векторное уравнение

$$\rho\mathbf{b} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t} = \rho\mathbf{a} \tag{7.6}$$

называется уравнением движения.

Для важного случая равновесия, когда отсутствует ускорение, из (7.6) сразу получается уравнение

$$\rho\mathbf{b} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t} = 0\,. \tag{7.7}$$

Оно называется уравнением равновесия и широко используется в механике деформируемого твердого тела.

8. Закон сохранения момента количества движения

Будем предполагать, что момент количества движения для сплошной среды равен моменту вектора количества движения относительно какой-либо точки. Так, для материального тела, полный момент количества движения относительно начала координат по определению равен интегралу

$$\mathbf{M}_{\mathbf{v}} = \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \, dV . \tag{8.1}$$

Теорема об изменении момента количества движения утверждает, что скорость изменения момента количества движения произвольно выбранной части континуума относительно любой точки равна главному моменту (относительно той же точки) массовых и поверхностных сил, действующих на рассматриваемую область среды. Для объема V сплошной среды можно написать уравнение момента количества движения в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \, dV = \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \, dS . \tag{8.2}$$

Уравнение (8.2) справедливо для таких сред, в которых силы взаимодействия частиц равны по величине, коллинеарны и противоположны по направлению, а распределенные моменты отсутствуют. Уравнение момента количества движения не всегда представляет собой новое дифференциальное уравнение. Если в (8.2) подставить $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$, то для левой части уравнения (8.2) получим (с учетом закона сохранения массы)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{v}\,dV=\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{v}J\,dV_0=\int_{V_0}\dot{\mathbf{x}}\times\rho\mathbf{v}J\,dV_0+\\
&+\int_{V_0}\mathbf{x}\times\frac{d}{dt}\left[\rho\mathbf{v}J\right]dV_0=\int_V\dot{\mathbf{x}}\times\rho\mathbf{v}\,dV+\int_V\mathbf{x}\times\rho\mathbf{a}\,dV=\\
&=\int_V\mathbf{v}\times\rho\mathbf{v}\,dV+\int_V\mathbf{x}\times\rho\mathbf{a}\,dV=\int_V\mathbf{x}\times\rho\mathbf{a}\,dV.
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

Последний интеграл в правой части уравнения (8.2) преобразуем к виду

$$
\begin{aligned}
&\int_S \mathbf{x}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,dV=\int_S\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\cdot\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}dS=\int_S\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}dS=\\
&=\int_V\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left\{\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\cdot\mathbf{t}\right\}dV=\int_V\left\{\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\right\}\cdot\mathbf{t}\,dV+\\
&+\int_V\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}\right]dV=\int_V\left\{\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\right\}\cdot\mathbf{t}\,dV+\int_V\mathbf{x}\times\left[\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}\right]dV,
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

где **э** – псевдо-тензор Леви-Чивиты. Тогда уравнение (8.2) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\int_V\left\{\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\right\}\cdot\mathbf{t}\,dV=\int_V\mathbf{x}\times\rho\mathbf{a}\,dV-\int_V\mathbf{x}\times\rho\mathbf{b}\,dV+\\
&+\int_V\mathbf{x}\times\left[\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}\right]dV=\int_V\mathbf{x}\times\left[\rho\mathbf{a}-\rho\mathbf{b}+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}\right]dV=0.
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Тогда интегральная формулировка закона сохранения момента количества движения принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\int_V\left\{\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{э}\right]\right\}\cdot\mathbf{t}\,dV=\int_V\left\{\left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}\right]:\mathbf{э}\right\}\cdot\mathbf{t}\,dV+\\
&+\int_V\left\{\mathbf{x}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{э}\right]\right\}\cdot\mathbf{t}\,dV=\int_V\mathbf{t}:\mathbf{э}\,dV=0.
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

Так как объем V произволен, само подынтегральное выражение (8.6) должно обращаться в ноль

$$
\mathbf{t}\cdot\cdot\,\mathbf{э}=0,
\tag{8.7}
$$

следовательно, тензор напряжений Коши симметричен

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^T. \tag{8.8}$$

9. Статические граничные условия

Применяя уравнение равновесия в форме (7.2) к элементарному тетраэдру, ребра которого расположены вдоль координатных осей $\mathbf{x}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\mathbf{v}dV - \int_V \rho\mathbf{b}\,dV - \int_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}dS = \\ &= \int_V \rho\mathbf{a}\,dV - \int_V \rho\mathbf{b}\,dV - \int_{S_\mathbf{n}} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}dS_\mathbf{n} - \sum_{k=1}^{3}\int_{S_k} \mathbf{t}_{(\mathbf{n}_k)}dS_k = 0, \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $S_\mathbf{n}$ – площадка, определяемая нормалью $\mathbf{n}$, S_k – площадки, определяемые нормалями $\mathbf{n}_k$, которые равны ортам осей пространственной системы координат $\mathbf{e}_k$ с обратным знаком (т.к. $\mathbf{n}_k$ – внешняя нормаль к площадке S_k). Если h – расстояние от начала координат до площадки S_n, то объем тетраэдра будет равен $hS_n/3$. Используя первую теорему о среднем, можно получить

$$\begin{aligned} &\int_V \rho\mathbf{a}\,dV - \int_V \rho\mathbf{b}\,dV - \int_{S_\mathbf{n}} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}dS_\mathbf{n} - \sum_{k=1}^{3}\int_{S_k} \mathbf{t}_{(n_k)}dS_k \approx \\ &\approx \rho\mathbf{a}\,hS_n/3 - \rho\vec{\mathbf{b}}\,hS_n/3 - \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}S_\mathbf{n} + \sum_{k=1}^{3}\mathbf{t}_{(-\mathbf{n}_k)}\mathbf{n}_k S_\mathbf{n} = 0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Если разделить (9.2) на $S_{\mathbf{n}}$ и осуществить предельный переход при $h \to 0$ (будем сжимать тетраэдр в точку), получим соотношение

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{t}_{(-\mathbf{n}_k)} \mathbf{n}_k. \qquad (9.3)$$

Совокупность компонент трех векторов $\mathbf{t}_{(-\mathbf{n}_k)}$ образует матрицу $\left\{t_{ij}\right\}$. Элементы этой матрицы при преобразовании координатной системы преобразуются по формулам преобразования тензора второго ранга. Это дает возможность ввести тензор напряжений Коши $\mathbf{t}$

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}. \qquad (9.4)$$

Это так называемые условия на поверхности, выражающие равновесие сил в произвольной точке поверхности тела.

Тестовые вопросы

Для лучшего закрепления знаний в процессе изучения курса предлагаются тестовые вопросы. Среди приводимых ответов – один или несколько (но не все) правильные.

1. Что такое твердое деформируемое тело с точки зрения механики сплошных сред?

1 – совокупность материальных точек;

2 – совокупность материальных частиц;

3 – совокупность координат материальных точек;

4 – совокупность координат материальных частиц.

2. Что такое конфигурация твердого деформируемого тела?

1 – объем твердого деформируемого тела;

2 – твердое деформируемое тело;

3 – область трехмерного евклидова пространства, занимаемого твердым деформируемым телом;

4 – внешняя поверхность, ограничивающая объем твердого деформируемого тела.

3. Как определяется движение?

1 – заданием объема твердого деформируемого тела;

2 – функцией $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, где $(\mathbf{X}, t)$ – материальные координаты, $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной системе координат;

3 – уравнениями движения твердого деформируемого тела;

4 – уравнениями равновесия твердого деформируемого тела;

5 – функцией $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, где $(\mathbf{x}, t)$ – пространственные координаты, $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат.

4. Что такое материальные координаты?

1 – координаты $(\mathbf{X}, t)$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат, t – время;

2 – координаты $\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат;

3 – координаты $(\mathbf{x},t)$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат, t – время;

4 – координаты $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат.

5. Что такое пространственные координаты?

1 – координаты $(\mathbf{X},t)$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат, t – время;

2 – координаты $\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат;

3 – координаты $(\mathbf{x},t)$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат, t – время;

4 – координаты $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат.

6. Что такое Лагранжевые координаты?

1 – координаты $(\mathbf{X},t)$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат, t – время;

2 – координаты $\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат;

3 – координаты $(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат, t – время;

4 – координаты $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат.

7. Что такое Эйлеровые координаты?

1 – координаты $(\mathbf{X}, t)$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат, t – время;

2 – координаты $\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – положение материальной частицы в основной конфигурации в материальной системе координат;

3 – координаты $(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ – положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат, t – время;

4 – координаты $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ - положение материальной частицы в пространственной евклидовой системе координат.

8. Какими положениями определяется модель сплошной среды?

1 – сплошность и непрерывность;

2 – взаимное непроникновение материи;

3 – взаимное непроникновение энергии;

4 – инертность;

5 – отсутствие обмена массы;

6 – отсутствие обмена энергии.

9. Положение модели сплошной среды: сплошность и непрерывность.

1 – означает, что связь между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ является однозначной;

2 – существует плотность $\rho(\mathbf{x},t)$, которая является непрерывной функцией своих аргументов $\mathbf{x}\in\Omega_t$, $t\in(-\infty,+\infty)$ и также обладает частными производными любого порядка;

3 – означает, что $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ – непрерывные функции своих аргументов для любого $\mathbf{X}\in\Omega_0$, $t\in(-\infty,+\infty)$ и, соответственно, $\mathbf{x}\in\Omega_t$, $t\in(-\infty,+\infty)$. Функции $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ обладают непрерывными частными производными произвольного порядка;

4 – в течение всего процесса движения материального тела между двумя бесконечно близкими окрестностями двух соседних точек нет обмена массы, т.е. $dm=\rho_0 dV_0=\rho dV$.

10. Положение модели сплошной среды: взаимное непроникание материи.

1 – означает, что связь между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ является однозначной;

2 – существует плотность $\rho(\mathbf{x},t)$, которая является непрерывной функцией своих аргументов $\mathbf{x}\in\Omega_t,\quad t\in(-\infty,+\infty)$ и также обладает частными производными любого порядка;

3 – означает, что $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ – непрерывные функции своих аргументов для любого $\mathbf{X}\in\Omega_0,\quad t\in(-\infty,+\infty)$ и, соответственно, $\mathbf{x}\in\Omega_t,\quad t\in(-\infty,+\infty)$. Функции $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ обладают непрерывными частными производными произвольного порядка;

4 – в течение всего процесса движения материального тела между двумя бесконечно близкими окрестностями двух соседних точек нет обмена массы, т.е. $dm=\rho_0 dV_0=\rho dV$.

11. Положение модели сплошной среды: инертность.

1 – означает, что связь между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ является однозначной;

2 – существует плотность $\rho(\mathbf{x},t)$, которая является непрерывной функцией своих аргументов $\mathbf{x}\in\Omega_t,\quad t\in(-\infty,+\infty)$ и также обладает частными производными любого порядка;

3 – означает, что $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ – непрерывные функции своих аргументов для любого $\mathbf{X}\in\Omega_0,\quad t\in(-\infty,+\infty)$ и, соответственно,

$\mathbf{x}\in\Omega_t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$. Функции $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ обладают непрерывными частными производными произвольного порядка;

4 – в течение всего процесса движения материального тела между двумя бесконечно близкими окрестностями двух соседних точек нет обмена массы, т.е. $dm=\rho_0 dV_0=\rho dV$.

12. Положение модели сплошной среды: отсутствие обмена массы.

1 – означает, что связь между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ является однозначной;

2 – существует плотность $\rho(\mathbf{x},t)$, которая является непрерывной функцией своих аргументов $\mathbf{x}\in\Omega_t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$ и также обладает частными производными любого порядка;

3 – означает, что $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ – непрерывные функции своих аргументов для любого $\mathbf{X}\in\Omega_0, \quad t\in(-\infty,+\infty)$ и, соответственно, $\mathbf{x}\in\Omega_t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$. Функции $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ обладают непрерывными частными производными произвольного порядка;

4 – в течение всего процесса движения материального тела между двумя бесконечно близкими окрестностями двух соседних точек нет обмена массы, т.е. $dm=\rho_0 dV_0=\rho dV$.

13. Общее состояние тела является?

1 – определяется внутриструктурным состоянием тела;

2 – определяется энергетическим состоянием тела;

3 – совокупностью разных по характеру состояний: механического, термического, химического, внутриструктурного и т.п.

14. Что характеризуют обобщенные термодинамические силы?

1 – реакцию тела на воздействие окружающей среды;

2 – воздействие окружающей среды на тело.

15. Что характеризуют обобщенные термодинамические перемещения?

1 – реакцию тела на воздействие окружающей среды;

2 – воздействие окружающей среды на тело.

16. Что такое деформирование?

1 – процесс изменения формы материального тела;

2 – процесс геометрических изменений в материальном теле;

3 – процесс изменения объема материального тела.

17. Как определяются компоненты материального градиента деформации?

1 $F_{i\alpha} = \partial x_i / \partial X_\alpha = x_{i,\alpha}$;

2 $F^{-1}_{\alpha i} = \partial X_\alpha / \partial x_i = X_{\alpha,i}$.

18. Как определяются компоненты пространственного градиента деформации?

1 $F_{i\alpha} = \partial x_i / \partial X_\alpha = x_{i,\alpha}$;

2 $F^{-1}_{\alpha i} = \partial X_{\alpha} / \partial x_i = X_{\alpha,i}$.

19. Какой мерой является тензор деформаций Коши?

1 – материальной;

2 – пространственной.

20. Какой мерой является тензор деформаций Грина?

1 – материальной;

2 – пространственной.

21. Какой мерой является тензор конечных деформаций Альманси?

1 – материальной;

2 – пространственной.

22. Какой мерой является тензор конечных деформаций Грина?

1 – материальной;

2 – пространственной.

23. Какие свойства присущи тензору ротации?

1 – симметричность;

2 – положительная определенность;

3 – транспонированный тензор равен обратному.

24. Какие свойства присущи левому тензору искажений?

1 – симметричность;

2 – положительная определенность;

3 – транспонированный тензор равен обратному.

25. Какие свойства присущи правому тензору искажений?

1 – симметричность;

2 – положительная определенность;

3 – транспонированный тензор равен обратному.

26. Какой тензор является мерой чистой деформации тела?

1 – Коши;

2 – Грина.

27. Как определяется пространственная мера скорости деформации – градиент скоростей $\mathbf{l}$?

1 $\mathbf{l} = \dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{X}}$;

2 $\mathbf{l} = \dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$;

3 $\mathbf{l} = \dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{x}}$.

28. Какой мерой является тензор напряжений Коши?

1 – материальной;

2 – пространственной.

29. Какой мерой является первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа?

1 – материальной;

2 – пространственной.

30. Какой мерой является второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа?

1 – материальной;

2 – пространственной.

31. Что такое компоненты тензора напряжений?

1 – компоненты вектора напряжений на произвольной площадке;

2 – компоненты вектора напряжений на трех произвольных площадках;

3 – компоненты вектора напряжений на трех взаимно ортогональных площадках.

32. Как определяется конститутивная производная вектора?

1 $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)$;

2 $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)-\mathbf{w}^T\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)$;

3 $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{X},t)-\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{X},t)$.

33. Как определяется конститутивная производная тензора?

1 $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t)-\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{X},t)+\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{w}$;

2 $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t)-\mathbf{w}^T\cdot\mathbf{A}(\mathbf{X},t)+\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{w}^T$;

3 $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t)$.

34. Чем характеризуется разность температур в двух бесконечно близких точках?

1 – энтропией;

2 – градиентом температуры;

3 – потоком тепла.

35. Какой тензор является симметричным?

1 – тензор напряжений Коши;

2 – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

3 – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа.

36. Что является следствием закона сохранения массы?

1 – уравнение движения;

2 – уравнение неразрывности;

3 – симметрия тензора напряжений Коши.

37. Что является следствием закона сохранения количества движения?

1 – уравнение движения;

2 – уравнение неразрывности;

3 – симметрия тензора напряжений Коши.

38. Что является следствием закона сохранения момента количества движения?

1 – уравнение движения;

2 – уравнение неразрывности;

3 – симметрия тензора напряжений Коши.

Литература

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Бабкин А.В. Основы механики сплошных сред / А.В. Бабкин, В.В. Селиванов. Учебник для втузов. – 2-е изд., испр., ил. (Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. / Науч. ред. В.В. Селиванов; Т. 1). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 376 с.
3. Горшков А.Г. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды / А.Г. Горшков, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. – М.: Наука, 2000. – 214 с.

4. Горшков А.Г. Теория упругости и пластичности: Учебник для вузов / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с.
5. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов / С.П. Демидов. – М.: Высшая школа, 1987. – 432 с.
6. Жермен П. Курс механики сплошных сред / П. Жермен. – М.: Высшая школа, 1983.
7. Зарубин В.С. Математические модели термомеханики / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
8. Илюшин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Илюшин. – М.: Изд-во Московского Университета, 1990. – 310 с.
9. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В.Г. Карнаухов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 260 с.
10. Коларов Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
11. Куликовский А.Г. Лекции по механике сплошной среды / А.Г. Куликовский. – М: – Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1985.
12. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
13. Победря Б.Е. Лекции по теории упругости / Б.Е. Победря, Д.В. Георгиевский. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 208 с.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1994. – Т. 1. – 528 с.

15. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
16. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
17. Эглит М.Э. Лекции по механике сплошных сред / М.Э. Эглит. – М.: Издательство Московского университета, 2008. – 318 с.