В.Т. Д у б р о в и н

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

часть II

Казань-2009

казанский государственный университет

В.Т. Дубровин

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

часть II

Казань-2009

УДК 517(075) ББК 22.161

Дубровин В.Т.
Лекции по математическому анализу, ч.II: Учеб. пособие: - 2-е изд., перераб. и дополн. - КГУ, 2009, - 123 с.: ил.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данной книги положены лекции, читавшиеся автором в течение ряда лет для студентов специальности "Прикладная математика" Казанского Государственного Университета. Весь материал излагается в виде, непосредственно преподносимом на лекциях, и поэтому может быть использован в качестве конспекта будущих лекций. Наличие практически готового текста лекций позволит студентам предварительно ознакомиться с излагаемым материалом, освободит их от тщательного конспектирования и даст тем самым возможность уделить больше внимания пониманию содержания лекций.

Предполагается, что книга может быть использована в качестве учебного пособия при изучении математического анализа не только студентами специальности "Прикладная математика", а также студентами экономических, географических, геологических и других специальностей университета.

Вторая часть содержит числовые ряды, функциональные последовательности и ряды, дифференциальное исчисление функций многих переменных.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Глава I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

§1.1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ДЕЙСТВИЯ С РЯДАМИ.

Пусть задана числовая последовательность (x_n).
1^0. Выражение $x_1 + x_2 + ...$(или короче $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k} x_k$, $\sum x_k$) называется рядом(числовым).
2^0. Числа x_k называются членами ряда.
3^0. Числа $S_n = x_1 + ... + x_n, n = 1, 2, ...$, называются частичными суммами ряда $\sum x_k$.
4^0. Ряд $x_1 + x_2 + ...$ называется сходящимся, если сходится последовательность (S_n) его частичных сумм (в противном случае ряд называется расходящимся); число $S = \lim S_n$ называется суммой ряда, при этом используется запись $S = x_1 + x_2 + ... = \sum x_k$.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ называется гармоническим. Он расходится, так как для последовательности $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... \frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$, не существует $\lim S_n$. Действительно, для (S_n) нарушается условие критерия Коши сходимости числовых последовательностей: пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, N-произвольно, $n = N + 1, m = 2N + 2$, тогда

$$|S_{N+1} - S_{2N+2}| = \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2}.$$

2. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ - расходится, так как его частичные суммы S_n будут принимать только два значения попеременно 1 и 0.

Теорема. Если ряды $\sum x_k$ и $\sum y_k$ сходятся, то сходятся ряды $\sum (x_k \pm y_k)$, $\sum \lambda x_k$ (здесь $\lambda \in \mathbf{R}$), причем $\sum \lambda x_k = \lambda \sum x_k$, $\sum (x_k \pm y_k) = \sum x_k \pm \sum y_k$.

Доказательство 1. $\sum \lambda x_k = \lim_n (\sum_1^n \lambda x_k) = \lambda \lim_n \sum_1^n x_k = \lambda \sum x_k$.

2. $\sum (x_k \pm y_k) = \lim_n (\sum_1^n (x_k \pm y_k)) = \lim_n \sum_1^n x_k \pm \lim_n \sum_1^n y_k = \sum x_k \pm \sum y_k$.

Замечание. 1. Из сходимости ряда $\sum (x_k \pm y_k)$, вообще говоря, не следует сходимость рядов $\sum x_k$, $\sum y_k$. Например, ряд $(1-1)+(1-1)+...$ сходится(все члены равны 0), но выражение $\sum_1^\infty 1 - \sum_1^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

2. Из сходимости ряда $\sum \lambda x_k$, $\lambda \neq 0$, следует сходимость ряда $\sum x_k$. Действительно, если сходится ряд $\sum \lambda x_k$, то существует $\lim_n \sum_1^n \lambda x_k = S$. $\Rightarrow$ $\lim_n \sum_1^n \lambda x_k = \lambda \lim_n \sum_1^n x_k = S$. $\Rightarrow$ Должен существовать $\lim_n \sum_1^n x_k$, т.е. ряд $\sum x_k$ - сходится. Таким образом, ряды $\sum x_k$, $\sum \lambda x_k$ ведут себя одинаково.

§1.2 НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Теорема 1 (Критерий Коши). Ряд $\sum x_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbf{N}\ \forall\ n > N\ \forall p \in \mathbf{N}\ (|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon)$.

Доказательство. Для сходимости ряда нужно, чтобы сходилась последовательность его частичных сумм (S_n). По критерию Коши для числовых последовательностей для этого необходимо и достаточно $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbf{N}\ \forall\ n > N\ \forall p \in \mathbf{N}\ (|S_n - S_{n+p}|) < \varepsilon \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbf{N}\ \forall\ n > N$ $\forall p \in \mathbf{N}\ (|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon)$.
Теорема доказана.

Замечание к критерию Коши. 1. Из критерия Коши (если ряд $\sum x_k$ сходится) следует при $p = 1$, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall\ k > N\ (|x_k| < \varepsilon)$. $\Rightarrow \lim_k x_k = 0$. Заметим также, что условие $\lim_k x_k = 0$ является необходимым, но не достаточным (пример - гармонический ряд).

2. Изменение конечного числа членов ряда $\sum x_k$ не влияет на его сходимость, хотя сумма его может и изменяться. Справедливость данного

замечания следует из того, что для рядов $\sum\limits_{1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{n}^{\infty} x_k$ условие критерия Коши формулируется одинаково.

Теорема 2. Ряд $\sum x_k$ с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство. Пусть ряд $\sum x_k$ сходится $\Rightarrow$ существует $\lim\limits_{n} \sum\limits_{1}^{n} x_k$. $\Rightarrow$ последовательность $(S_n) = (\sum\limits_{1}^{n} x_k)$ - ограничена . Обратно, пусть последовательность (S_n) - ограничена. Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей числовой последовательностью. Таким образом, последовательность (S_n)-ограничена и монотонна. $\Rightarrow$ Существует $\lim\limits_{n} S_n$, т.е. ряд $\sum x_k$ сходится. Теорема доказана.

§1.3 ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И СРАВНЕНИЯ РЯДОВ

Теорема 1. Для сходимости ряда $\sum x_k$ достаточно сходимости ряда $\sum |x_k|$.

Доказательство. Если ряд $\sum |x_k|$ сходится, то для него выполняется условие критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N \forall p \in \mathbf{N} (|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon). \tag{1}$$

Так как $|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}|$, то из (1) следует справедливость условия критерия Коши для ряда $\sum x_k$, а следовательно ряд $\sum x_k$ сходится.

Теорема 2. Пусть $\sum x_k$, $\sum y_k$ - ряды с неотрицательными членами.
1. Если $x_k \leq y_k$, $k \in \mathbf{N}$, то из сходимости $\sum y_k$ следует сходимость $\sum x_k$, а из расходимости $\sum x_k$ следует расходимость $\sum y_k$.
2. Если $\lim\limits_{k} (x_k / y_k) = A > 0$, то оба ряда $\sum x_k$, $\sum y_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Очевидно, $S'_n = \sum\limits_1^n y_k \geq \sum\limits_1^n x_k = S_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. По условию (S'_n) сходится, следовательно, последовательность (S_n) ограничена сверху и, кроме этого, является неубывающей. $\Rightarrow$ По теореме 2 предыдущего раздела мы получаем сходимость $\sum x_k$. Если же ряд $\sum x_k$ расходится, то, значит, последовательность его частичных сумм расходится (т.к. члены x_k неотрицательны) и, следовательно, последовательность (S_n) не ограничена сверху. $\Rightarrow$ Последовательность (S_n) расходится, т.е. ряд $\sum y_k$ расходится.

2. Пусть $\lim\limits_k \frac{x_k}{y_k} = A > 0 \Rightarrow$ существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что $A - \varepsilon < \frac{x_k}{y_k} < A + \varepsilon$ для любых $k > N$. Отсюда,так как $y_k > 0$, следует

$$(A - \varepsilon) y_k < x_k < (A + \varepsilon) y_k, \tag{2}$$

для любых $k > N$. Если ряд $\sum\limits_0^\infty y_k$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{N+1}^\infty y_k$. $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{N+1}^\infty (A + \varepsilon) y_k$, $\Rightarrow$ (в силу неравенства (2)) $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{N+1}^\infty x_k$, $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_1^\infty x_k$ сходится.

Если же ряд $\sum\limits_1^\infty y_k$ расходится, то расходится ряд $\sum\limits_{N+1}^\infty y_k$, $\Rightarrow$ расходится ряд $\sum\limits_{N+1}^\infty (A - \varepsilon) y_k$, $\Rightarrow$ расходится ряд $\sum\limits_{N+1}^\infty x_k$, $\Rightarrow$ расходится ряд $\sum\limits_1^\infty x_k$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (интегральный признак). Пусть функция $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$ и не возрастает. Ряд $\sum\limits_1^\infty f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда функция $F(x) = \int\limits_0^x f(t) dt$ ограничена.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $F(x) = \int\limits_0^x f(t) dt$ определена для любого $x > 0$ (см.[8], §7.4теорема 2). Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится. Тогда существует $K > 0$ такое, что $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \le K$ при всех n, и для любого $x > 0$: $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \le \int\limits_0^{[x]+1} f(t)dt = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^2 + ... + \int\limits_{[x]}^{[x]+1} \le f(0) + \sum\limits_{k=1}^{[x]} f(k) \le f(0) + K$. Обратно, если $F(x) \le K$, $x > 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \int\limits_{k-1}^{k} dt \le \int\limits_0^n f(t)dt = F(n) \le K$. Теорема доказана.

<u>Пример</u>. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, если} \quad t \in [0,1] \\ \frac{1}{t^p} & \text{, если} \quad t > 1 \end{cases}$ Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Используем теорему 3. $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^1 1dt + \int\limits_1^x \frac{dt}{x^p} = 1 + \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$. Очевидно, $F(x) = 1 - \frac{1}{1-p} + \frac{x^{1-p}}{1-p}$ будет ограниченной, если $p > 1$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \le 1$.

<u>Замечание</u>. Условие "функция $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ ограничена"равносильно условию: "несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ сходится". Поэтому интегральный признак можно сформулировать так: Пусть $f(x) \ge 0$ при $x > 0$ и не возрастает. Ряд $\sum\limits_1^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ сходится.

<u>Теорема 4 (Признак Даламбера)</u>. Пусть $\sum x_k$ -ряд с положительными членами.
1. Если $x_{k+1}/x_k \le q < 1$, начиная с некоторого $k_0 \in \mathbf{N}$, то ряд $\sum x_k$

сходится;
если $x_{k+1}/x_k \geq 1$ для $k \geq k_0$, то ряд $\sum x_k$-расходится.
2. Если $\overline{\lim\limits_k} \frac{x_{k+1}}{x_k} < 1$, то ряд $\sum x_k$ сходится;
если $\underline{\lim\limits_k} \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, то ряд $\sum x_k$ расходится.

Доказательство. Будем считать, что $k_0 = 1$ (такое допущение не ограничивает общности доказательства, так как изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость). Имеем

$$x_{k+1} = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} .... \cdot \frac{x_{k+1}}{x_k}, k = 0, 1, 2, ...$$

Поэтому из условия $x_{k+1}/x_k \leq q < 1$ следует, что

$$x_{k+1} \leq x_1 q^k, k = 0, 1, 2, ...,$$

а так как ряд $\sum x_1 q^k$ сходится (он является бесконечно убывающей геометрической прогрессией), то вместе с ним сходится и ряд $\sum x_k$. Из условия $x_{k+1}/x_k \geq 1$ следует $x_{k+1} \geq x_1$, $k = 0, 1, 2, ...$, а так как ряд $x_1 + x_1 ...$ расходится, то ряд $\sum x_k$-расходится. Пункт 1. доказан. Перейдем к доказательству пункта 2. Пусть выполняется условие $\overline{\lim\limits_k} \frac{x_{k+1}}{x_k} = q < 1$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $q + \varepsilon < 1$. По определению верхнего предела существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq q + \varepsilon$ для $k \geq N$. Так как $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq q + \varepsilon < 1$ для $k \geq N$, то утверждение пункта 1 следует из пункта 2. Если $\underline{\lim\limits_k} \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, то из определения нижнего предела следует, что $\frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$ для всех $k \geq N$, и тогда в силу пункта 1 ряд $\sum x_k$ расходится. Теорема доказана.

Теорема 5 (Признак Коши). Пусть $x_k > 0$, $k \in N$.
1. Если $\sqrt[k]{x_k} \leq q < 1$, для $k \geq k_0$, то ряд $\sum x_k$ сходится;
если $\sqrt[k]{x_k} \geq 1$, для $k \geq k_0$, то ряд $\sum x_k$ расходится.
2. Если $\overline{\lim} \sqrt[k]{x_k} < 1$, то $\sum x_k$ сходится;
если $\underline{\lim} \sqrt[k]{x_k} > 1$, то $\sum x_k$ расходится.

Доказательство. 1. Из условия $\sqrt[k]{x_k} \leq q < 1$, $k = 1, 2, ...$ (здесь мы считаем, без ограничения общности, что $k_0 = 1$) следует, что $x_k \leq q^k (q < 1)$, $k = 1, 2...$. Ряд $\sum q^k$ - сходится, поэтому сходится и ряд $\sum x_k$. Из условия $\sqrt[k]{x_k} \geq 1$ следует, что $x_k \geq 1$, $k = 1, 2, ...$. Ряд $1 + 1 + ...$ расходится,

поэтому расходится и ряд $\sum x_k$.
2. Из условия $\overline{\lim}\sqrt[k]{x_k} = q < 1$ следует $\sqrt[k]{x_k} < q + \varepsilon < 1$, для всех $k \geq N$. $\Rightarrow x_k \leq (q+\varepsilon)^k$, $k \geq N$. Ряд $\sum\limits_{N}^{+\infty}(q+\varepsilon)^k$-сходится, поэтому сходится и ряд $\sum\limits_{N}^{+\infty} x_k$, а вместе с ним и ряд $\sum x_k$.
Если $\underline{\lim}\sqrt[k]{x_k} = q > 1$, то $\sqrt[k]{x_k} > 1$, для всех $k \geq N$.$\Rightarrow$ Ряд $\sum x_k$ расходится.

Замечание. 1. Иногда пункты 2 в признаках Даламбера и Коши формулируются в менее общей форме:
Если $\lim\limits_{k} \frac{x_{k+1}}{x_k} < 1$, то $\sum x_k$ сходится; если $\lim\limits_{k} \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, то $\sum x_k$ расходится.
Если $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{x_k} < 1$ то $\sum x_k$ сходится; если $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{x_k} > 1$ то $\sum x_k$ расходится. Что делает их более удобными для использования на практике.
2. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками:

$$\lim_{k} \frac{x_{k+1}}{x_k} = 1, \tag{$*$}$$

$$\lim_{k} \sqrt[k]{x_k} = 1. \tag{$**$}$$

Например, ряд с общим членом $x_k = k^{-p}$, $p > 0$, сходится при $p > 1$ и расходится для $p \leq 1$ (см. интегральный признак сходимости числовых рядов), при этом

$$\lim_{k} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lim_{k} \frac{k^p}{(k+1)^p} = 1,$$
$$\lim_{k} \sqrt[k]{x_k} = \lim_{k} \sqrt[k]{k^p} = 1.$$

Пример. 1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$, $a > 0$. Этот ряд сходится при любом $a > 0$, так как $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{a}{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, $a > 0$. Этот ряд сходится при $0 < a < 1$ и расходится для $a > 1$, так как для него $\frac{x_{k+1}}{x_k} = a(\frac{k}{k+1})^\alpha \to a$ при $k \to \infty$.

§1.4 АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ. РЯД ЛЕЙБНИЦА
1. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение. Говорят, что $\sum x_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum |x_k|$. Заметим, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Теорема. Если ряд $\sum x_k$ сходится абсолютно и ряд $\sum x_k^{'}$ получен из ряда $\sum x_k$ какой-либо перестановкой его членов, то $\sum x_k^{'}$ сходится и $\sum x_k = \sum x_k^{'}$.

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда $x_k \geq 0 (k \in \mathbf{N})$. Пусть $S = \sum x_k$ и пусть $S_n' = \sum\limits_1^n x_k'$- частичная сумма ряда $\sum x_k'$. Ее члены находятся в ряде $\sum x_k$ под некоторыми номерами $k_0, ..., k_n$. Пусть $N = \max\{k_0, ..., k_n\}$, а $S_N = \sum\limits_1^N x_k$. Очевидно $S_n^{'} \leq S_N \leq S$, т.е. последовательность $(S_n^{'})$ - ограничена, а следовательно ряд $\sum x_k^{'}$ сходится и имеет сумму $S^{'} \leq S$. Приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв местами ряды $\sum x_k$ и $\sum x_k^{'}$ и получить, что $S^{'} \leq S$. Таким образом, $S = S^{'}$.

Перейдем к доказательству общего случая. Пусть ряд сходится абсолютно. Положим $x_k^+ = \begin{cases} x_k & \text{, если} \quad x_k \geq 0 \\ 0 & \text{, если} \quad x_k < 0 \end{cases}$, $x_k^- = \begin{cases} -x_k & \text{, если} \quad x_k < 0 \\ 0 & \text{, если} \quad x_k \geq 0 \end{cases}$.
$(*)$

Очевидно числа x_k^+, x_k^--неотрицательны и $x_k = x_k^+ - x_k^-$. Рассмотрим ряды с неотрицательными членами $\sum x_k^+, \sum x_k^-$. Оба ряда сходятся, так как $x_k^+ \leq |x_k|, x_k^- \leq |x_k|, k \in \mathbf{N}$. Тогда $\sum x_k = \sum (x_k^+ - x_k^-) = \sum x_k^+ - \sum x_k^- =^1 \sum x_k^{+\prime} - \sum x_k^{-\prime} =^2 \sum (x_k^{+\prime} - x_k^{-\prime}) = \sum x_k^{'}$.

Равенство 1 вытекает из случая, рассмотренного выше (когда $x_k \geq 0$). Равенство 2 справедливо в силу сходимости рядов $\sum x_k^{+\prime}$ и $\sum x_k^{-\prime}$. Заметим также, что ряды получены по принципу $(*)$ из ряда $\sum x_k^{'}$, полученного после перестановки членов исходного ряда $\sum x_k$. Теорема доказана.

2. РЯД ЛЕЙБНИЦА

Определение. Пусть $x_1 \geq x_2 \geq ..., x_k > 0$, причем $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда ряд $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ...$ называется рядом Лейбница.

Теорема. Ряд Лейбница сходится и его сумма$\leq x_1$.

Доказательство. $S_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - ... - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n} \leq x_1$, $S_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + ... + (x_{2n-1} - x_{2n})$.
Из первого равенства следует, что последовательность (S_{2n}) ограничена сверху; из второго равенства следует, что последовательность (S_{2n}) не убывает. Таким образом, существует $\lim\limits_n S_{2n} \leq x_1$. Так как $\lim\limits_n S_{2n+1} = \lim\limits_n (S_{2n} + x_{2n+1}) = \lim\limits_n S_{2n} + \lim\limits_n x_{2n+1} = \lim\limits_n S_{2n}$, то теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ является, очевидно, рядом Лейбница. Следовательно, он сходится и его сумма S не превышает 1.

§1.5 УСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Из теоремы для абсолютно сходящихся рядов следует, что слагаемые абсолютно сходящихся рядов можно переставлять произвольным образом, не нарушая суммы ряда. Обладают ли подобным свойством ряды другого вида? Ответ на данный вопрос отрицательный. Более того, имеет место результат, который носит название "теорема Римана". Но прежде, чем сформулировать теорему, приведем определение.

Определение. Ряд, сходящийся не абсолютно (т.е. ряд $\sum x_k$ сходится, а ряд $\sum |x_k|$ расходится), называется условно сходящимся.

Теорема (Римана). Пусть $\sum x_k$ сходится условно и a - произвольное число. Тогда можно так переставить члены ряды $\sum x_k$, что вновь полученный ряд будет сходиться к a.

Доказательство. Прежде всего докажем вспомогательное утверждение:

Лемма. Если ряд $\sum x_k$ сходится условно, то ряды $\sum x_k^+, \sum_k^-$ являются расходящимися(определение рядов $\sum x_k^+, \sum_k^-$ см. в §1.4 тема:"Абсолютно сходящиеся ряды").

Доказательство. Если ряды $\sum x_k^+, \sum x_k^-$ сходятся, то частичные суммы этих рядов $S_n^+ = \sum\limits_1^n x_k^+$ и $S_n^- = \sum\limits_1^n x_k^-$ имеют пределы при $n \to \infty$, а следовательно, и $S_n^+ + S_n^- = \sum\limits_1^n |x_k|$ также имеет предел при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum x_k$ сходится абсолютно. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием леммы.

Допустим, что один из рядов $\sum x_k^+, \sum_k^-$(например $\sum x_k^+$) расходится, а другой - сходится. Тогда мы имеем $S_n^+ \to \infty$, $S_n^- \to c$, где c-некоторое число. Отсюда вытекает, что $S_n = S_n^+ - S_n^- \to \infty$, т.е. ряд $\sum x_k$ расходится, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть для определенности $a > 0$. Будем располагать члены ряда $\sum x_k$ в следующем порядке: сначала будем брать члены суммы $\sum x_k^+$ в их естественном порядке; при этом сумма взятых членов будет возрастать; как только эта сумма превзойдет a, мы назовем ее поворотной суммой и начнем присоединять к ней последовательно члены ряда $\sum x_k^-$, взятые со знаком минус; при этом сумма взятых членов будет уменьшаться; как только она сделается меньше a, мы снова назовем полученную сумму поворотной и опять начнем ее увеличивать, прибавляя следующие по порядку члены ряда $\sum x_k^+$ и т.д. Продолжая этот процесс неограниченно, мы тем самым расположим члены ряда $\sum x_k$ в некотором определенном порядке, т.е. получим новый ряд, имеющий вид:

$$x_1^+ + ... + x_{n_1}^+ - x_1^- - ...x_{n_2}^- + x_{n_1+1}^+ + ... + x_{n_3}^+ - x_{n_2+1}^- - ... - x_{n_4}^- + ..., (\star)$$

n_1 определено условием $\sum\limits_1^{n_1-1} x_k^+ \le a$, $\sum\limits_1^{n_1} x_k^+ > a$;

n_2 определено условием $\sum\limits_1^{n_1} x_k^+ - \sum\limits_1^{n_2-1} x_k^- \ge a$, $\sum\limits_1^{n_1} x_k^+ - \sum\limits_1^{n_2} x_k^- < a$;

n_3 определено условием $\sum\limits_1^{n_1} x_k^+ - \sum\limits_1^{n_2} x_k^- + \sum\limits_{n_1+1}^{n_3-1} x_k^+ \le a$, $\sum\limits_1^{n_1} x_k^+ - \sum\limits_1^{n_2} x_k^- +$

$\sum\limits_{n_1+1}^{n_3} x_k^+ > a$, и т.д.
Заметим, что числа n_k существуют в нашем случае всегда, так как по лемме ряды $\sum x_k^+$, $\sum x_k^-$ - расходятся и, следовательно, увеличением числа членов можно всегда добиться нужной величины поворотной суммы.
Докажем, что образованный ряд $(*)$ имеет сумму, равную a. Обозначим поворотные суммы через S_{n_k}. Ясно, что каждая поворотная сумма отстоит от a не более, чем на абсолютную величину своего последнего члена, т.е. величину, заведомо стремящуюся к нулю, как член нашего первоначального (сходящегося ряда) $\sum x_k$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbf{N} \forall k > N_1(|S_{n_k} - a|) < \varepsilon)$. Далее, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому, если мы возьмем две последовательные поворотные суммы S_{n_k}, S_{n_k+1}, то все частичные суммы t_n ряда $(*)$, начиная с некоторого номера N_2, будут заключены между ними:

$$\forall n > N_2 \in \mathbf{N}(S_{n_k} \leq t_n \leq S_{n_k+1}).$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Выберем $k > N$. Тогда $\forall n > N : |t_n - a| \leq |t_n - S_{n_k}| + |S_{n_k} - a| < 2\varepsilon$. Так как ε произвольное число > 0, то $t_n \to a (n \to \infty)$.
Теорема доказана.

§1.6 ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ РЯДЫ
1. ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

Изучение двойных рядов начнем с понятия двойной числовой последовательности.

Определение 1. Двойной последовательностью чисел называется отображение $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, где $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ - множество возможных пар натуральных чисел. Элемент $f(k,l)$, $k \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$, обозначается - x_{kl}, а сама последовательность через (x_{kl}).

Определение 2. Число $a \in \mathbf{R}$ называется пределом двойной последовательности x_{kl} (пишется: $a = \lim\limits_{k,l \mapsto \infty} x_{kl}$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n$,

$m > N(|x_{mn} - a| < \varepsilon)$. Если двойная последовательность имеет предел, то она называется сходящейся.
Критерий Коши для двойных последовательностей чисел формулируется следующим образом:"Последовательность x_{nk} сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall k, l > N, \forall p, q \in \mathbf{N}(|x_{kl} - x_{k+p,l+q}| < \varepsilon)$". Доказательство данного критерия проводится по аналогии со случаем однократных числовых последовательностей, поэтому мы его опускаем.

Определение 3. Выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ (или $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} x_{kl}$), где x_{kl} - элемент двойной последовательности чисел (x_{kl}), называется двойным числовым рядом. Числа x_{kl} называются членами двойного ряда, а числа $S_{nm} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} x_{kl}$ - частичными суммами двойного ряда.

Определение 4. Число S называется суммой двойного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ (пишут $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$), если существует предел двойной последовательности чисел $(S_{nm}) : \lim\limits_{n,m\to\infty} S_{nm} = S$.

Определение 5. Двойной ряд $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} x_{kl}$ называется абсолютно сходящимся, если сходится двойной ряд $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} |x_{kl}|$.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующие утверждения:

Теорема 1. Если ряды $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} x_{kl}$, $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} y_{kl}$ сходятся, то сходятся ряды $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} \lambda x_{kl}$, $\lambda - const$; $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}(x_{kl} \pm y_{kl})$, причем $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} \lambda x_{kl} = \lambda \sum\limits_{k}\sum\limits_{l} x_{kl}$, $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}(x_{kl} \pm y_{kl}) = \sum\limits_{k}\sum\limits_{l} y_{kl} \pm \sum\limits_{k}\sum\limits_{l} y_{kl}$.

Теорема 2. (Критерий Коши). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall n, m > N$, $\forall p, q \in \mathbf{N}$ $(|\sum\limits_{k=n}^{n+p}\sum\limits_{l=1}^{m} x_{kl} +$

$\sum\limits_{k=n}^{n+p}\sum\limits_{l=m}^{m+q} x_{kl} + \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=m}^{m+q} x_{kl}| < \varepsilon)$.

Теорема 3. Если ряд $\sum\limits_{1}^{\infty}\sum\limits_{1}^{\infty} x_{kl}$ сходится абсолютно, то он сходится.

Указания:

Теорема 1 доказывается аналогично случаю однократных рядов.

Доказательство теоремы 2 основано на применении критерия Коши для двойных числовых последовательностей к последовательности частичных сумм S_{nm} ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}\sum\limits_{1}^{\infty} x_{kl}$.

Доказательство теоремы 3, как и в случае однократных рядов, проводится с помощью критерия Коши, т.е. теоремы 2.

Докажем две теоремы о двойных рядах.

Теорема 1. Если ряд $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} x_{kl}$ сходится абсолютно и его члены перенумерованы любым способом одним индексом $(V_1, V_2, V_3, ...)$, то ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i$ сходится абсолютно и $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$.

Доказательство. Пусть $t_n = \sum\limits_{1}^{n} |V_i|$, $S_{mn} = \sum\limits_{1}^{m}\sum\limits_{1}^{n} |x_{kl}|$. Очевидно, что при любом n существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что $t_n \leq S_{NN} \leq \sum\sum |x_{kl}|$. $\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} |V_i|$ - сходится. $\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i$ - сходится абсолютно. Покажем, что $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i = \sum\limits_{1}^{\infty}\sum\limits_{1}^{\infty} x_{kl}$. Переставим члены ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i$ так, чтобы получился ряд

$$\sum_{1}^{\infty} V_i' = \underbrace{x_{11}} + \underbrace{x_{12} + x_{22} + x_{21}} + \underbrace{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{32} + x_{31}} + ...$$

Пусть t_n' частичная сумма ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i'$. Тогда имеем: $\sum\limits_{1}^{\infty} V_i = \sum\limits_{1}^{\infty} V_i' = \lim\limits_{n} t_n' \stackrel{1}{=} \lim\limits_{n} t_{n^2}' = \lim\limits_{n} \sum\limits_{1}^{n}\sum\limits_{1}^{n} x_{kl} \stackrel{2}{=} \sum\limits_{1}^{\infty}\sum\limits_{1}^{\infty} x_{kl}$, при этом равенство 1 справедливо, так как (t_{n^2}') - подпоследовательность сходящейся последовательность-

ности (t'_n), а равенство 2 - в силу сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty \sum\limits_1^\infty x_{kl}$.
Теорема 1 доказана.

Теорема 2. (О перемножении абсолютно сходящихся рядов). Пусть ряды $\sum\limits_1^\infty x_k$, $\sum\limits_1^\infty y_l$ сходятся абсолютно. Тогда $(\sum\limits_1^\infty x_k) \cdot (\sum\limits_1^\infty y_l) = \sum\limits_{k=1}^\infty \sum\limits_{l=1}^\infty x_k y_l$, причем двойной ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Доказательство. Прежде всего покажем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_k \sum\limits_l x_k y_l$.

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |x_k y_l| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|) \cdot (\sum_{l=1}^{m} |y_l|) \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|) \cdot (\sum_{l=1}^{\infty} |y_l|).$$

Отсюда следует, что последовательность $S_{nm} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} |x_k y_l|$ является ограниченной, и, следовательно, существует точная верхняя грань этой последовательности: $\sup\limits_{n,m} S_{nm} = A$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда по определению

sup существует частичная сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{l=1}^{M} |x_k y_l|$ такая что

$$A - \varepsilon < \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} |x_k y_l| < A.$$

Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} |x_k y_l|$ с ростом n и m не убывают, поэтому для любых $n, m > \max\{N, M\}$

$$|\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |x_k y_l| - A| < \varepsilon.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{\infty} |x_k y_l|$ - сходится, а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{\infty} x_k y_l$ сходится абсолютно.

Утверждение теоремы о том, что $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k) \cdot (\sum\limits_{l=1}^{\infty} y_l) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_k y_l$ является следствием цепочки равенств:

$$(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) \cdot (\sum_{l=1}^{\infty} y_l) = (\lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k) \cdot (\lim_n \sum_{l=1}^{n} y_l) = \lim_n (\sum_{k=1}^{n} x_k) \cdot (\sum_{l=1}^{n} y_l) =$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k y_l = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} x_k y_l$$

Теорема 2 доказана.

2. ПОВТОРНЫЕ РЯДЫ

Выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}\right)$ называется повторным рядом.

Определение. Повторный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}\right)$ сходится, если для любого $k \geq 1$ ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ сходится и имеет сумму A_k и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ также сходится (если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$, то пишут: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}\right) = A$).

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ сходится абсолютно, то повторный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl})$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl})$.

Доказательство. Пусть сначала $x_{kl} \geq 0$ и пусть $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} x_{kl} = S$. Зафиксируем некоторое произвольное $k \geq 1$. Очевидно, если $k \leq n$, то $\sum\limits_{l=1}^{m} x_{kl} \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} x_{kl} \leq S$, при любом m. Следовательно, ряды $\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ сходятся при любом $k \geq 1$. Так как $x_{kl} \geq 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} x_{kl} \leq S$ при любых n и m. При фиксированном n перейдем к пределу при $m \to \infty$ в левой части данного неравенства:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}x_{kl}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^{m}x_{kl}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}x_{kl}\right)\leq S.$$

Так как n произвольно, то из полученного неравенства следует существование числа A такого, что

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}x_{kl}\right)\leq S. \tag{1}$$

С другой стороны, $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m}x_{kl}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty}x_{kl}\right)\leq A$. Поэтому $S\leq A$. Отсюда и из (1) следует $S=A$. Пусть теперь x_{kl} произвольные действительные числа. Положим

$$x_{kl}^{+}=\begin{cases} x_{kl} & \text{, если}\quad x_{kl}\geq 0\\ 0 & \text{, если}\quad x_{kl}<0\end{cases},\; x_{kl}^{-}=\begin{cases} -x_{kl} & \text{, если}\quad x_{kl}<0\\ 0 & \text{, если}\quad x_{kl}\geq 0\end{cases}.$$

Тогда $x_{kl}=x_{kl}^{+}-x_{kl}^{-}$, $|x_{kl}|=x_{kl}^{+}+x_{kl}^{-}$. Так как ряд $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}|x_{kl}|$ сходится, то ряды $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}^{+}$, $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}^{-}$ также сходятся (данное утверждение доказать самостоятельно по аналогии с однократными рядами). Из сходимости рядов $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}^{+}$, $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}^{-}$ и из доказанного выше следует $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}=$ $\sum\limits_{k}\sum\limits_{k}(x_{kl}^{+}-x_{kl}^{-})=\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}^{+}-\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl}^{-}=\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{l}x_{kl}^{+}\right)-\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{l}x_{kl}^{-}\right)=$ $\sum\limits_{k}\left(\left(\sum\limits_{l}x_{kl}^{+}\right)-\left(\sum\limits_{l}x_{kl}^{-}\right)\right)=\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{l}(x_{kl}^{+}-x_{kl}^{-})\right)=\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{l}x_{kl}\right)$.
Что нам и требовалось доказать.

<u>Замечание.</u> Утверждение, обратное доказанному, неверно. Рассмотрим

бесконечную матрицу:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ (здесь k — номер строки, а l — номер столбца). $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{kl}\right) = 0$; $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{kl}\right) = 1$. Однако двойной ряд $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l} x_{kl}$ не сходится.

Глава II.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§2.1 ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ. КРИТЕРИЙ КОШИ

До сих пор мы рассматривали ряды числовые, членами которых были числа. Но математическому анализу, в первую очередь, нужны функциональные ряды, т.е. ряды, членами которых являются функции (это вполне закономерно, так как основным предметом исследования в математическом анализе являются функции).

Пусть

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ..., \tag{1}$$

есть ряд, члены которого - функции переменной x, определенные на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$. Давая переменной x какое-нибудь числовое значение $x = \alpha$, мы превратим ряд (1) в обыкновенный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha)$, поэтому можно сказать, что формула (1) выражает собой множество различных рядов, соответствующих разным значениям x.

По отношению к ряду (1) не имеет смысла ставить вопрос о том, сходится он или расходится, так как, вообще говоря, он будет сходиться при одних значениях x и расходиться при других значениях. Вопрос следует ставить так: при каких значениях $x \in X$ ряд сходится и при каких расходится.

Определение 1. Множество значений $x \in X$, при которых ряд (1) сходится, называется областью сходимости ряда (1), а множество значений $x \in X$, при которых ряд (1) расходится, называется областью расходимости. Таким образом, проблема сходимости функционального ряда состоит в первую очередь в отыскании его области сходимости.

Пусть ряд (1) сходится при любом $x \in M \subset X$, т.е. при любом $x \in M$ ряд (1) сходится к некоторому числу. Так как это число определяется значением x, то тем самым на множестве M определена функция $S(x)$, которую мы будем называть суммой функционального ряда (1).

Пример: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $x > 0$. Областью сходимости данного ряда будет интервал $(0, 1)$. Доказательство см. в §1.3 (гл.I).

Равномерная сходимость функционального ряда

Для всех применений функциональных рядов основное значение имеет понятие равномерной сходимости ряда. Вот как лучше всего подойти к определению этого понятия. Пусть ряд (1) сходится в каждой точке некоторого множества $M \subset X$. Тогда остаток

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

($S(x)$-сумма ряда (1), $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$-n-я частичная сумма) этого ряда для любых $x \in M$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\forall x \in M$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, x)$, $\forall n > N(|r_n(x)| < \varepsilon)$. Отметим, что число N зависит теперь не только от ε, но и от x.

Пусть теперь ε зафиксировано, а число x пробегает все множество значений M, при этом для любого $x \in M$ существует свое N, начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$. Естественно возникает вопрос: "Существует ли N, начиная с которого неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in M$?" Очевидно, что существование такого N зависит от того, будет ли множество всех N, которое мы нашли для любых $x \in M$, ограниченным или нет. Если среди чисел N есть наибольшее, то оно, очевидно, и сможет служить тем числом, начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in M$. Если же среди найденных нами чисел N встречаются сколь угодно большие, то это показывает, что как бы большим число N мы не брали, всегда найдутся $x \in M$, для которых это N не годится. В этом случае выбор N, которое годилось бы, в указанном смысле, для всех $x \in M$, очевидно, невозможен.

Определение 2. Ряд $f_1(x) + f_2(x) + ...$ называется равномерно сходящимся на множестве M к функции $S(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in M(|r_n(x)| < \varepsilon).$$

Пример ряда, сходящегося неравномерно.

$$f_k(x) = x^k(1 - x^k) - x^{k-1}(1 - x^{k-1}), k \geq 1, x \in [0, 1].$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = x^n(1 - x^n).$$

Очевидно, что $S_n(x) \to 0$, при $n \to \infty$, для любых $x \in [0, 1]$, т.е.

$$S(x) \equiv 0 \Rightarrow r_n(x) = S(x) - S_n(x) = -S_n(x) = -x^n(1 - x^n).$$

Рассмотрим числовую последовательность $(2^{-1/n}) \subset [0, 1]$.

Так как $r_n(2^{-1/n}) = -\frac{1}{4}$ и $2^{-1/n} \in [0, 1]$, при любом $n \in \mathbf{N}$, то неравенство $|r_n(x)| < \frac{1}{4}$ не может быть выполнено для любого $x \in [0, 1]$, сколь бы велико n ни было. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится неравномерно.

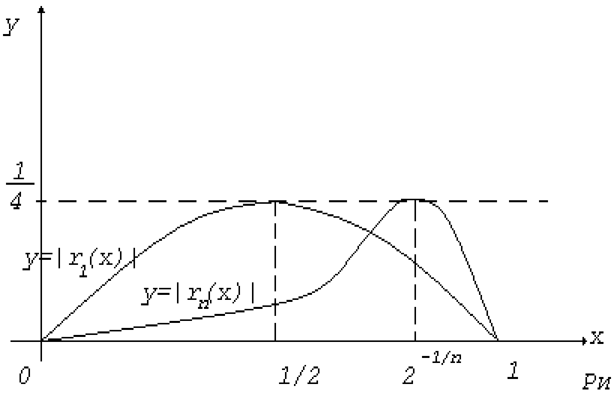


Рис.

На рисунке кривая $y = |r_n(x)|$ при $x = 2^{-1/n}$ имеет максимум, равный $1/4$. Влево от точки $x = 2^{-1/n}$, $|r_n(x)|$ чрезвычайно мало.При возрастании n точка $x = 2^{-1/n}$ приближается к 1.

Пример ряда, сходящегося равномерно.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}$- сходится при любом $x \in \mathbf{R}$ как ряд Лейбница.$|r_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}\right| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$, при $x \in \mathbf{R}$. (здесь мы использовали утверждение, что сумма ряда Лейбница не превосходит первого члена ряда).

Допустим, $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Очевидно, при любом $n > N$ и любом $x \in \mathbf{R}$ $(|r_n(x)| < \varepsilon)$. $\Rightarrow$ Рассматриваемый ряд сходится равномерно.

Рассмотрим последовательность функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ...$, сходящуюся при любом $x \in X$ к некоторому числу. Таким образом на множестве X определена функция $f(x)$, которая называется пределом (при $n \to +\infty$) последовательности функций $(f_n(x))$ и записывается это следующим образом: $\lim f_n(x) = f(x)$, для $\forall x \in X$, если $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = n(\varepsilon, x)$, $\forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$. Множество X называется областью сходимости $(f_n(x))$.

Определение. Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ называется сходящейся равномерно к функции $f(x)$ на множестве X, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in X(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Замечание. Равномерная сходимость функционального ряда равносильна равномерной сходимости последовательности его частичных сумм.

Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций). Последовательность функций $(f_k(x))$ сходится равномерно на множестве X к некоторой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in X(|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon) \quad (*)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n(x)$ сходится равномерно к некоторой функции $f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in X$

$$(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2). \tag{1}$$

Очевидно также, что при $\forall p \in \mathbf{N}, \forall n > N, \forall x \in X$

$$(|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для $\forall n > N, \forall x \in X$. Необходимость условия $(*)$ доказана.

Достаточность. Пусть выполнено $(*)$. Сначала покажем, что $f_k(x)$ сходится к некоторой функции $f(x)$, при $\forall x \in X$. При любом фиксированном $x \in X$ последовательность $(f_k(x))$ является последовательностью чисел, для которой выполнено условие критерия Коши. $\Rightarrow$ Последовательность $(f_k(x))$ имеет предел при любом фиксированном $x \in X$ и, следовательно, существует функция, которую обозначим $f(x)$, являющаяся предельной для $(f_k(x))$.

Выберем $n > N$ и произвольное $x \in X$. Переходя к пределу при $p \to +\infty$ в $(*)$ (при постоянных n и x), получим $\forall n > N = N(\varepsilon)$, $\forall x \in X$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

т.е. $f_n(x)$ сходится равномерно на X к $f(x)$. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема является перефразировкой теоремы 1 для функциональных рядов.

Теорема 2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in X (|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon).$$

Утверждение теоремы 2 следует из применения теоремы 1 к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

§2.2 ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

Теорема 1 (Признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ удовлетворяют на множестве X неравенствам

$$|f_k(x)| \leq C_k, k = 1, 2, 3, ...,$$

где C_k - есть члены некоторого сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Так как $|f_k(x)| \leq C_k, k = 1, 2, 3, ...,$ то

$$|f_{n+1}(x) + ...f_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + ... + C_{n+p}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ сходится, поэтому по критерию Коши для числовых рядов: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} C_k < \varepsilon \right)$. $\Rightarrow \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in X (|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon)$.

Таким образом, для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ выполняется условие теоремы 2 §2.1 и поэтому он сходится равномерно на множестве X.

Пример. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ сходятся равномерно на $\mathbf{R}$, если сходится абсолютно ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Действительно, $|a_k \sin kx| \leq |a_k|$, $|a_k \cos kx| \leq |a_k|$ при $\forall k = 1, 2, 3, ...$ и $\forall x \in \mathbf{R}$. Поэтому равномерная сходимость рассматриваемых функциональных рядов следует из признака Вейерштрасса.

Замечания: 1. Если к ряду $\sum\limits_{1}^{\infty} f_k(x)$ приме́ни́м признак Вейерштрасса, то он сходится абсолютно, более того, будет сходиться равномерно и ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} |f_k(x)|$.

2. Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} f_k(x)$ может сходиться равномерно, будучи не абсолютно сходящимся.

3. Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} f_k(x)$ может сходиться абсолютно и сходиться равномерно, но ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} |f_k(x)|$ может сходиться неравномерно.

Доказательство замечаний. Первое замечание следует непосредственно из формулировки признака Вейерштрасса. Второе замечание доказывает пример равномерно сходящегося ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}$ из §2.1. Третье замечание мы докажем, приведя соответствующий пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^2)^k} x^2 \qquad (1).$$

Ряд (1) сходится при любом $x \in \mathbf{R}$, как ряд Лейбница:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^2}{(1+x^2)^k}.$$

Очевидно, что $|r_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\ldots} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow |r_n(x)| < \varepsilon$ для $\forall n > [\frac{1}{\varepsilon}]$ и $\forall x \in \mathbf{R}$. $\Rightarrow$ ряд (1) сходится равномерно. Рассмотрим ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}. \qquad (2)$$

Этот ряд сходится при любом $x \in \mathbf{R}$, так как по признаку Даламбера:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^{k+1}} \cdot \frac{(1+x^2)^k}{x^2} = \frac{1}{x^2+1} < 1,$$

при любом $x \in \mathbf{R}$. $\Rightarrow$ Ряд (1) сходится абсолютно при любых $x \in \mathbf{R}$.

Покажем, что ряд (2) сходится неравномерно. Его остаток

$$\tilde{r}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \to 1,$$

при любом фиксированном n, когда $x \to 0$.$\Rightarrow$ Неравномерная сходимость ряда (2).

Теорема 2 (признак Дини). Пусть последовательность $(f_n(x))$ не убывает (или не возрастает) на $[a,b]$ и сходится на $[a,b]$ к функции $f(x)$. Тогда, если все $f_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть для определенности последовательность $(f_n(x))$ не убывает на $[a,b]$. Положим $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Последовательность $(r_n(x))$ обладает следующими свойствами: 1. $r_n(x) \geq 0$ и непрерывна на $[a,b]$ для $\forall n \geq 1$;

2. $(r_n(x))$ - не возрастает на $[a,b]$;

3. $\lim r_n(x) = 0$ в любой точке $x \in [a,b]$.

Теорема будет доказана, если мы докажем, что $r_n(x) \to 0$ равномерно на [a,b]. Так как $(r_n(x))$ невозрастающая, то достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}, \forall x \in [a,b](r_n(x) < \varepsilon)$. Предположим, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что не существует $n \in \mathbf{N}$ такого, что $\forall x \in [a,b](r_n(x) < \varepsilon)$. Тогда для $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ такая, что

$$r_n(x_n) \geq \varepsilon. \tag{3}$$

В силу следствия к теореме Вейерштрасса, последовательность (x_n) имеет подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$, где $x_0 \in [a,b]$. Функция $r_m(x)$ непрерывна в x_0 (при $\forall m \geq 1$), поэтому

$$\lim_{k \to +\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{4}$$

Пусть m - любой фиксированный номер. Так как последовательность $r_n(x)$ не возрастает, то

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}),$$

где $n_k > m$. Из полученного неравенства и неравенства (3) следует

$$r_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon \tag{5}$$

(для фиксированного m и $n_k > m$). Далее, из (4) и (5) получаем

$$r_m(x_0) \geq \varepsilon, \forall m \in N.$$

Данное неравенство противоречит тому, что $r_n(x) \to 0$ в точке x_0 и полученное противоречие доказывает теорему 2 в случае неубывающей последовательности $(f_n(x))$.

Если последовательность $(f_n(x))$ является невозрастающей, то, умножив все члены на 1", мы получим неубывающую последовательность, для которой все доказано.

<u>Замечание</u>. Теорему Дини можно сформулировать как признак равномерной сходимости функциональных рядов: "Пусть члены ряда $\sum\limits_1^\infty f_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и $f_k(x) \geq 0$, $k = 1,2,3,\dots$. Тогда, если ряд $\sum\limits_1^\infty f_k(x)$ имеет сумму также непрерывную на $[a,b]$, то он сходится равномерно на $[a,b]$."

<u>Доказательство</u>. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_1^n f_k(x)$, $n \geq 1$. Так как $f_k(x) \geq 0$, $\forall k \geq 1$, то $(S_n(x))$ не убывает; $f_k(x)$ непрерывна на $[a,b]$, следовательно $S_n(x)$ также непрерывна на $[a,b]$; $\lim S_n(x) = S(x)$, причем $S(x)$-непрерывна на $[a,b]$. Таким образом, все условия Теоремы 2 выполняются для последовательности $S_n(x)$, поэтому $S_n(x) \to S(x)$ равномерно на $[a,b]$, что равносильно равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k(x)$ на $[a,b]$.

Приведем еще два признака равномерной сходимости функциональных рядов вида: $\sum\limits_1^\infty \alpha_k(x)\beta_k(x)$, где $\alpha_k(x), \beta_k(x)$ - функции от x, определенные на множестве X.

<u>Теорема 3 (Признак Дирихле)</u>. Если частичные суммы ряда $\sum\limits_1^\infty \beta_k(x)$ ограничены в совокупности ($|\sum\limits_1^n \beta_k(x)| \leq M - const, \forall n \geq 1, \forall x \in X$), а последовательность функций $\alpha_k(x)$ при $k \to \infty$, стремится, убывая, к нулю равномерно относительно $x \in X$, то ряд $\sum\limits_1^\infty \alpha_k(x)\beta_k(x)$ сходится равномерно на X.

<u>Доказательство</u>. Положим $B_k = \beta_{n+1} + \dots + \beta_{n+k}$, $\sigma_n = \sum\limits_1^n \beta_k$.

Далее, запишем:

$$\alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}\beta_{n+p} = \alpha_{n+1}B_1 + \alpha_{n+2}(B_2 - B_1) + \dots + \alpha_{n+p}(B_p - B_{p-1}) =$$

$$(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})B_1+(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3})B_2+...+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})B_{p-1}+\alpha_{n+p}B_p =$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_{k-n}+\alpha_{n+p}B_p. \qquad (1)$$

σ_n-ограничены в совокупности, по условию. Поэтому

$$|B_k| = |\sigma_{n+k}-\sigma_n| \le |\sigma_{n+k}|+|\sigma_n| \le 2M.$$

Используя (1), запишем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k\beta_k\right| \le 2M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})+\alpha_{n+p}2M = 2M\alpha_{n+1}, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in X.$$

Так как $\alpha_k \to 0$ (при $k\to\infty$) равномерно на X, то

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\alpha_k\beta_k| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in X. \Rightarrow$$

ряд $\sum\limits_1^\infty \alpha_k\beta_k$ сходится равномерно на X (Здесь мы использовали необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональных рядов (см. теорему 2, §2.1).

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующий признак равномерной сходимости рядов вида $\sum\limits_1^\infty \alpha_k(x)\beta_k(x)$.

Теорема 4 (Признак Абеля). Если функции $\alpha_k(x)$ монотонно убывают при $k\to\infty$ и ограничены в совокупности ($|\alpha_k(x)| \le M - const, \forall k \ge 1, \forall x\in X$), а ряд $\sum\limits_1^\infty \beta_k(x)$ равномерно сходится на X, то и ряд $\sum\limits_1^\infty \alpha_k(x)\beta_k(x)$ сходится равномерно на X.

Литература:[2], гл.II, §11.7, стр.406.

Замечания: 1. В теореме 3 функции $\alpha_k(x) \ge 0$, так как $\alpha_k(x)\to 0$ убывая. В теореме 4 функции $\alpha_k(x)$ могут принимать и отрицательные значения, так как $\alpha_k(x)$ убывает монотонно, но не обязательно к нулю.

2. Признаки Дирихле и Абеля могут быть использованы в качестве признаков сходимости числовых рядов вида $\sum\limits_{1}^{\infty} \alpha_k \beta_k,\ \alpha_k, \beta_k \in \mathbf{R}$. При этом из формулировок теорем следует убрать требование равномерной сходимости и ограниченности в совокупности.

Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} \beta_k$ ограничены $(|\sum\limits_{1}^{n} \beta_k| \leq M - const, \forall n \geq 1)$, а $\alpha_k \to 0$ убывая, то $\sum\limits_{1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ сходится.

Признак Абеля. Если (α_k) монотонно убывает при $k \to \infty$ и ограничена $(|\alpha_k| \leq M - const, \forall k \geq 1)$, а ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} \beta_k$ сходится, то $\sum\limits_{1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ сходится.

§2.3 СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

Теорема 1. Если последовательность функций $(f_n(x))$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$ и $f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то $f(x)$ также непрерывна в x_0.

Доказательство. $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на X.$\Rightarrow \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \forall n > N, \forall x \in X (|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/4)$. $\Rightarrow \forall n > N, \forall x \in X$:

$$|f(x) - f(x_0) \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| <$$

$$2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{1}$$

Но функции $f_n(x)$ - непрерывны в точке $x_0 \in X$, следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что, если $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, то

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/2.$$

Подставляя эту оценку в (1), получим: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. $\Rightarrow$ Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$.

Теорема 2. Пусть на $[a, b]$ последовательность непрерывных функций $(f_n(x))$ сходится к функции $f(x)$. Если сходимость равномерна на $[a, b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^x f_n(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt$$

равномерно на $[a,b]$. В частности, при $x=b$:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(t)dt=\int\limits_a^b f(t)dt.$$

Доказательство. $f_n(t)\to f(t)$ равномерно $[a,b]$.$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)\in \mathbf{N}, \forall n>N, \forall t\in [a,b](|f_n(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a})$. $\Rightarrow \forall n>N, \forall x\in [a,b]$: $|\int\limits_a^x f_n(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt|=|\int\limits_a^x (f_n(t)-f(t))dt|\le \int\limits_a^x |f_n(t)-f(t)|dt<\frac{\varepsilon}{b-a}\int\limits_a^b dt=\varepsilon$. $\Rightarrow \int\limits_a^x f_n(t)dt\to \int\limits_a^x f(t)dt$ равномерно на $[a,b]$.

(Заметим, что функция $f(t)$ интегрируема, так как она непрерывна как равномерный предел на $[a,b]$ последовательности непрерывных функций (см. теорему 1)). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если ряд непрерывных функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно на $[a,b]$ сходится к $S(x)$, то его можно почленно интегрировать $(a\le x_0<x\le b)$:

$$\int\limits_{x_0}^x S(t)dt=\int\limits_{x_0}^x f_1(t)dt+\int\limits_{x_0}^x f_2(t)dt+...$$

Ряд, полученный при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^x f_k(t)dt$, равномерно сходится на $[a,b]$. В частности,

$$\int\limits_a^b S(t)dt=\int\limits_a^b f_1(t_1)dt+\int\limits_a^b f_2(t)dt+\dots.$$

Доказательство. Так как $f_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$-сходится равномерно на $[a,b]$ к $S(x)$, то по теореме 1, функция S(x) будет непрерывна на $[a,b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a,b]$. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $S(x)$, что равносильно тому, что $S_n(x) \to S(x)$ равномерно на $[a,b]$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \forall n > N, \forall x \in [a,b]$ $(|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$. $\Rightarrow$ $\forall n > N, \forall x \in [a,b] : |\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t)dt| = |\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)dt| =$ $|\int\limits_{x_0}^{x} (S(t) - S_n(t))dt| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |S(t) - S_n(t)|dt < \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{b-a} dt \leq \varepsilon$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t)dt$ сходится равномерно на $[a,b]$ к $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть на $[a,b]$ задана последовательность функций $(f_n(x))$, имеющих непрерывную производную. Если последовательность $(f_n(x))$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, и, кроме того, последовательность $(f_n'(x))$ сходится равномерно на $[a,b]$, то последовательность $(f_n(x))$ сходится равномерно на $[a,b]$ к $f(x)$ и $(f_n'(x))$ сходится к $f'(x)$.

Доказательство. $(f_n'(x))$ - сходится равномерно на $[a,b]$, $f_n'(x)$ - непрерывна на $[a,b]$. $\Rightarrow$ Функция $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ - непрерывна на $[a,b]$. По теореме 2: $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0))$ - равномерно на $[a,b]$. По условию теоремы $\lim f_n(x_0)$ существует. $\Rightarrow$ $(f_n(x))$-сходится равномерно на $[a,b]$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$. $\Rightarrow f'(x) = \varphi(x)$, т.е. $\lim f_n'(x) = f'(x)$.

Теорема 4 доказана.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать аналог теоремы 4 для функциональных рядов.

Теорема $4'$.Пусть на $[a,b]$ задан ряд $f_1(x)+f_2(x)+\ldots$ функций, имеющих непрерывную производную. Если ряд $\sum\limits_1^\infty f_k(x)$ сходится в некоторой точке $x_0\in[a,b]$, и, кроме того, ряд $\sum\limits_1^\infty f_k'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то ряд $\sum\limits_1^\infty f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к $S(x)$ и $S'(x)=\sum\limits_1^\infty f_k'(x)$.

Литература: [2], гл.II, §11.8, стр.409, теорема 3.

---

§2.4 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд следующего вида:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+...,$$

где коэффициенты $c_k\in\mathbf{R}$, $k=0,1,2,...$, x-независимая действительная переменная.

Теорема Абеля. Если ряд $\sum\limits_0^\infty c_kx^k$ сходится в точке $x_0\neq0$, то он сходится абсолютно и равномерно на отрезке $|x|\leq q$, где q - любое число, удовлетворяющее неравенству $0<q<|x_0|$.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_0^\infty c_kx^k$ сходится в точке $x=x_0$. $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}c_kx_0^k=0$. $\Rightarrow$ Существует число a такое, что при любом $k\geq0$ имеем: $|c_kx_0^k|<a$. Перепишем ряд в виде:

$c_0+c_1x_0(\frac{x}{x_0})+c_2x_0^2(\frac{x}{x_0})^2+\ldots .\Rightarrow |c_kx^k|=|c_kx_0^k||\frac{x}{x_0}|^k<a|\frac{x}{x_0}|^k=ad^k$, где $d=|\frac{x}{x_0}|=\frac{|x|}{|x_0|}$.

По условию $|x|\leq q<|x_0|$. $\Rightarrow d<1$ для всех $x\in[-q,q]$. Ряд $a+ad+...+ad^k+...$ является геометрической прогрессией и при $d<1$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке $|x|\leq q$.

Теорема доказана.

Замечание. Так как $q<|x_0|$ в теореме Абеля произвольно, то ряд $\sum\limits_0^\infty c_kx^k$ сходится абсолютно для любого $-|x_0|<x<|x_0|$. Однако сходимость не будет всегда равномерной.

Доказательство. Рассмотрим ряд $1+x+x^2+\ldots$ сходящийся при $|x|<1$ (его сумма равна $(1-x)^{-1}$, а остаток $r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}\to 0$ при $n\to\infty$). Однако сходимость этого ряда будет неравномерной, так как при любом заданном n неравенство $\frac{x^{n+1}}{1-x}<\varepsilon$ не будет иметь место для любых $x\in(0,1)$.

Отрезок сходимости степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_0^\infty c_k x^k$. Естественно возникает вопрос о виде области сходимости степенного ряда, ответом на который мы сейчас и займемся. Прежде всего, сделаем ряд довольно простых замечаний:

1. Любой степенной ряд $\sum\limits_0^\infty c_k x^k$ сходится при $x=0$. Таким образом, нулевая точка $(x=0)$ всегда принадлежит области сходимости степенного ряда.

2. Существуют степенные ряды, область сходимости которых состоит из одной нулевой точки (I тип).

Пример. $1+x+2^2x^2+\ldots+n^nx^n+\ldots$.

Пусть $x\neq 0$. Тогда, при достаточно большом n, будет справедливо неравенство $n|x|>2$. $\Rightarrow n^n|x|^n=|n^nx^n|=(n|x|)^n>2^n$.

Следовательно, общий член взятого ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$. $\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_0^\infty k^kx^k$ - расходится при любом $x\neq 0$.

3. Существуют степенные ряды, сходящиеся в любой точке $x\in\mathbf{R}$ (II тип).

Пример. $1+x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^n}+\ldots$.

При любом фиксированном x: $|\frac{x^n}{n^n}|=\frac{|x|^n}{n^n}=(\frac{|x|}{n})^n<(\frac{1}{2})^n$, начиная с некоторого номера n, для которого $|x|/n<1/2$.

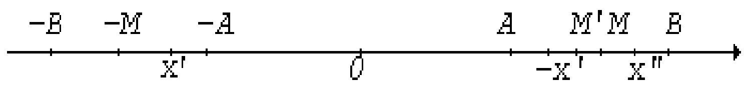
Так как ряд $\sum\limits_0^\infty(\frac{1}{2})^k$ сходится, как убывающая геометрическая прогрессия, то ряд $\sum\limits_0^\infty\frac{x^k}{k^k}$ также будет сходиться при любом $x\in\mathbf{R}$.

4. Существуют степенные ряды, имеющие как точки сходимости, так и точки расходимости (III тип).

Пример. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$. Данный ряд сходится лишь при $x \in (-1, 1]$.

Теорема (об отрезке сходимости). Для любого степенного ряда существует отрезок сходимости $|x| \leq R$ такой, что ряд сходится и притом абсолютно для любого x, у которого $|x| < R$, и расходится для любого x, у которого $|x| > R$. (Отрезок $|x| \leq R$ называется отрезком сходимости, а R-радиусом сходимости степенного ряда.)

Доказательство. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_0^\infty c_k x^k$ третьего типа, т.е. у данного ряда существует точка $x \neq 0$, в которой ряд $\sum\limits_0^\infty c_k x^k$ сходится и существует точка, в которой ряд расходится. Пусть в точке A ряд сходится, а в точке B расходится. Построим последовательность вложенных друг в друга отрезков.



$I_1 = [A, B]$. Делим I_1 пополам и выбираем в качестве I_2 ту половину отрезка I_1, на концах которой ряд ведет себя по-разному (на левом конце-сходится, на правом-расходится). Продолжая этот процесс деления до бесконечности, мы получим $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$. Пусть $|I_n|$-длина отрезка I_n. Очевидно, что $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. По лемме о вложенных отрезках существует точка $M \in \bigcap\limits_{n=1}^\infty I_n$. Покажем, что $OM = R$. Пусть$|x\prime| < R$. Существует точка M', являющаяся левым концом одного из отрезков I_k, причем $|x\prime| < OM'$. Тогда по теореме Абеля ряд сходится в точке $x\prime$. Аналогично с помощью теоремы Абеля доказывается, что ряд расходится в любой точке x'', у которой $|x''| > R$. Теорема доказана.

Определение радиуса сходимости

Теорема (Формула Коши-Адамара). Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ определяется по формуле $R = 1/l$, где $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. В случае, когда $l = 0$, полагаем $R = +\infty$, а в случае, когда $l = +\infty$, полагаем $R = 0$.

Доказательство. 1сл. $(l = +\infty)$. Докажем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в любой точке $x \neq 0$. Доказательство будем вести от противного. Пусть ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$. $\Rightarrow$ Существует число $A > 0$ такое, что $|c_n x_0^n| < A$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (Можно допустить, что $A > 1$). $\Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x_0| < \sqrt[n]{A}$. $\Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} < A/|x_0|$, так как $\sqrt[n]{A} < A$. $\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \neq +\infty$, что неверно. Таким образом, в случае $l = +\infty$ ряд расходится в любой точке $x \neq 0$.

2сл. $(l = 0)$. Докажем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ сходится и притом абсолютно в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$. $l = 0$, поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. $\Rightarrow$ $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N : \sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2|x_0|}$. Тогда $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x_0| < \frac{1}{2}$. $\Rightarrow |c_n| \cdot |x_0|^n = |c_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$. А так как ряд с общим членом $\frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится абсолютно и ряд с общим членом $c_n x_0^n$.

3сл. $(0 < l < +\infty)$. Нам нужно доказать, что при любом $x = x_1$, для которого $|x_1| < \frac{1}{l}$, ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно, а при $x = x_2$, для которого $|x_2| > \frac{1}{l}$, ряд расходится. Так как $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, то для $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, $\forall n > N$:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon. \qquad (1)$$

Положим $\varepsilon = \frac{1 - l\cdot|x_1|}{2|x_1|}$ (здесь $\varepsilon > 0$, так как $|x_1| < \frac{1}{l}$ и, следовательно, $l \cdot |x_1| < 1$).

Неравенство (1) примет вид

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \frac{1 - l|x_1|}{2|x_1|} = \frac{1 + l|x_1|}{2|x_1|},$$

или

$$\sqrt[n]{|c_n|}|x_1| < \frac{1 + l|x_1|}{2} = q < 1.$$

Возводя обе части полученного неравенства в степень n, найдем:

$$|c_n||x_1|^n < q^n,$$

или

$$|c_n x_1^n| < q^n.$$

Так как ряд с общим членом q^n сходится, если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_0^\infty c_n x^n$ сходится абсолютно при $x = x_1$.

Из определения l следует, что для бесконечно многих значений n, имеем:

$$\sqrt[n]{|c_n|} > l - \varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon = (l|x_2| - 1)/|x_2|)$ (здесь $\varepsilon > 0$, так как $|x_2| > \frac{1}{l}$ и, следовательно $l|x_2| > 1$). После подстановки выбранного ε в (2), получим

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|x_2|},$$

или

$$\sqrt[n]{|c_n|}|x_2| > 1.$$

Возведение в n - ю степень обеих частей данного неравенства приведет нас к неравенству

$$|c_n x_2^n| > 1,$$

которое справедливо при бесконечно многих значениях n. Следовательно, $c_n x_2^n \nrightarrow 0$, при $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_0^\infty c_n x^n$ расходится при $x = x_2$.

Теорема доказана.

Свойства степенных рядов

Теорема 1. Если степенной ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в интервале $|x| < R$, то его сумма есть непрерывная функция на любом отрезке $|x| \le q$, где $q < R$.

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы Абеля, по которой степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $|x| \le q$, $(q < R)$,и теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда (см. §2.3).

Теорема 2. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в интервале $|x| < R$ к функции $S(x)$. Тогда степенной ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, полученный из $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ почленным дифференцированием, сходится в этом же интеграле $|x| < R$ и $S'(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ в любой точке интеграла $|x| < R$.

Доказательство. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(n+1)c_{n+1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [(n+1)^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|})^{\frac{n+1}{n}}] = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|c_{n+1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = l$. $\Rightarrow$ Ряды $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$, $\sum\limits_{1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ имеют одинаковый радиус сходимости R. Пусть, по теореме Абеля: ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ сходится равномерно на отрезке $|x| \le q$, который можно выбрать так, что $|x_0| \le q$. $\Rightarrow$ По теореме для функциональных рядов (см. §2,3): $S'(x_0) = \sum\limits_{1}^{\infty} n c_n x_0^{n-1}$. Так как x_0-произвольная точка из $(-R, R)$, то теорема доказана.

Теорема 3. Если степенной ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в интервале $|x| < R$ к функции $S(x)$, то его можно почленно интегрировать $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{0}^{\infty} c_n \int\limits_{x_0}^{x} t^n dt$, где $-R < x_0 < x < R$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава III. n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

§3.1 ВЕКТОРНОЕ n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение 1. Совокупность n действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ (n - любое натуральное число), расположенных в определенном порядке, называется n-мерным вектором (обозначение: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$). Числа x_i называются координатами вектора.

Для векторов определяются понятия равенства, операции сложения и умножения на число.

Определение 1. Векторы $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ называются равными (пишут $\mathbf{x} = \mathbf{y}$), если $x_i = y_i$ при любом $i = 1, \ldots, n$.

2. Суммой векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называется вектор $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$.

3. Произведением числа λ на вектор $\mathbf{x}$ называется вектор

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

. Замечания: 1. Вектор $\theta = (0, \ldots, 0)$ называется нулевым вектором. Очевидно, вектор θ обладает свойством: $\mathbf{x} + \theta = \mathbf{x}$.

2. Вычитание векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется посредством умножения на -1 и операции сложения: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Проверить справедливость следующих свойств операций сложения и умножения на число:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность сложения).
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность сложения).
3. Если $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

4. $\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}); \alpha \in \mathbf{R}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

5. $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x}; \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

6. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}; \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ (ассоциативность умножения).

7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

8. $0 \cdot \mathbf{x} = \theta$.

Определение 3. Множество всех векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbf{R}$, называется n-мерным пространством $\mathbf{R}_n$.

Евклидово n-мерное пространство

Определение 1. Число $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ называется скалярным произведением векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$).

Свойства скалярного произведения:

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть линейная форма от $\mathbf{x}$, т.е. для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

3. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ для любых $x \in \mathbf{R}_n$; $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0. \Rightarrow \mathbf{x} = \theta$.

Доказательство. 1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha x_i z_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta y_i z_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} y_i z_i = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Замечание: Из свойств 1 и 2 следует: $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

3. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$; $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0. \Rightarrow x_i^2 = 0. \Rightarrow \mathbf{x} = \theta$.

Неравенства, связанные со скалярным произведением:

1. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$ справедливо неравенство (Буняковского)

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}.$$

2. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})^{1/2} \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2} \qquad (*)$$

Доказательство. 1. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$, $\lambda \in \mathbf{R}$. В силу свойств 1 - 3 скалярного произведения, имеем

$$0 \leq (\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}, \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \qquad (1)$$

Если $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \neq 0$, то, положив в (1) $\lambda = -\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{(\mathbf{y},\mathbf{y})}$, будем иметь

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

т.е.

$$0 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}. \Rightarrow$$

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}.$$

При $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, т.е. при $\mathbf{y} = \theta$, неравенство Буняковского тоже имеет место, так как $(\mathbf{x}, \theta) = 0$.

2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = ((\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2})^2$.

Неравенство $(*)$ доказано.

Определение 2. Число $||\mathbf{x}|| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ называется нормой вектора $\mathbf{x}$.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующие свойства нормы вектора:

1.$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \theta$.

2. $||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}_n$.

3. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$.

Определение 3. n-мерное пространство $\mathbf{R}_n$, в котором введено скалярное произведение, а вместе с ним и норма $||\mathbf{x}|| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ для вектора $\mathbf{x}$, называется n-мерным евклидовым пространством.

§3.2 ТОПОЛОГИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. РАСШИРЕННОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Топология евклидова пространства

Определение 1. ε-окрестностью точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$ называется открытый шар с центром в точке $\mathbf{x}_0$ радиуса ε:

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{x \in \mathbf{R}_n | \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Определение 2. Множество $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ называется открытым, если каждая точка из Ω содержится в Ω вместе с некоторой своей ε-окрестностью, т.е.

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \exists \varepsilon > 0 (S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset \Omega).$$

Определение 3. Множество $X \subset \mathbf{R}_n$ называется замкнутым, если $\mathbf{R}_n \setminus X$ - открытое множество.

Открытые множества обладают следующими свойствами:

1. Если $(\Omega_i)_{i \in I}$ - произвольное семейство открытых частей $\mathbf{R}_n$, то $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ является открытым множеством в $\mathbf{R}_n$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$. $\Rightarrow$ $\mathbf{x} \in \Omega_{i_0}$, $i_0 \in I$. $\Rightarrow$ существует $S_\varepsilon(\mathbf{x})$ такое, что $S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset \Omega_{i_0}$.$\Rightarrow$ $S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$. $\Rightarrow$ Множество $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ - открыто.

2. Если Ω_i, $i = 1, \ldots, n$, открыты в $\mathbf{R}_n$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$ - открыто.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$. $\Rightarrow$ $\mathbf{x} \in \Omega_i$ при любом $i = 1, \ldots, n$. $\Rightarrow$ Для любых $i = 1, \ldots, n$ существуют $\varepsilon_i > 0$ такие, что $S_{\varepsilon_i}(\mathbf{x}) \subset (\Omega_i)$. $\Rightarrow$ Если $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$, то $S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$. $\Rightarrow$ Множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$ - открыто.

Замечание. Пересечение счетного числа открытых множеств может и не быть открытым. Например, пересечение открытых шаров $\left\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{k}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$, есть точка $\mathbf{x} = \theta$, а одна точка-это замкнутое множество.

Определение 4. Точка $\mathbf{x}_0$ называется предельной точкой множества $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \mathbf{x} \in \check{S}_\varepsilon(x_0) \bigcap \Omega$ или $\check{S}_\varepsilon(x_0) \bigcap \Omega \neq \varnothing$ (здесь, как и ранее, мы полагаем $\check{S}_\varepsilon(x_0) = S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$-проколотой ε-окрестностью точки $\mathbf{x}_0$).

Отметим полезное условие замкнутости множества.

Теорема. Множество $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Пусть Ω - замкнуто и $x_0 \notin \Omega$. $\mathbf{R}_n \setminus \Omega$-открыто, поэтому существует $S_\varepsilon(x_0) \subset \mathbf{R}_n \setminus \Omega$. $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ не является предельной точкой для Ω.

Обратно, пусть Ω содержит все свои предельные точки и $\mathbf{x}_0 \notin \Omega$. Тогда, так как $\mathbf{x}_0$ не предельная точка Ω, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $S(\mathbf{x}_0) \bigcap \Omega \neq \varnothing$, т.е. $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{R}_n \setminus \Omega$. $\Rightarrow \mathbf{R}_n \setminus \Omega$-открыто $\Rightarrow \Omega$ - замкнуто.

Теорема доказана.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующие свойства замкнутых множеств:

1. Если $(X_i)_{i \in I}$-произвольное семейство замкнутых частей $\mathbf{R}_n$, то $\bigcap\limits_{i \in I} \mathbf{X}_i$ - замкнутое множество в $\mathbf{R}_n$.

2. Если $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ - замкнуты в $\mathbf{R}_n$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ - замкнутое множество.

Указание: применить принцип двойственности (см.[8], §1.1) к приведенным выше свойствам открытых множеств.

Определение 5. Объединение множества $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ и всех его предельных точек называется замыканием множества и обозначается $\overline{\Omega}$.

Определение 6. Точка $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ $(\Omega \subset \mathbf{R}_n)$ называется изолированной точкой множества Ω, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \bigcap \Omega = \{\mathbf{x}_0\}$.

Определение 7. Точка $\mathbf{x}_0$ называется граничной точкой множества $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ содержит в себе как точки Ω, так и точки, не принадлежащие множеству Ω.

Определение 8. Множество $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ называется ограниченным, если существует $N > 0$ такое, что $\Omega \subset S_N(\theta)$.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующее утверждение: "Замыкание множества $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ есть замкнутое множество".

Литература:[2], гл.7, § 7,9, стр.231, теорема 3.

Расширенное евклидово пространство

Из технических соображений удобно к евклидову пространству добавлять несобственную точку ∞:

$\vee$-окрестностью (проколотой окрестностью) точки ∞ в $\mathbf{R}_n$ называются множества вида $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n | \ \|\mathbf{x}\| > N\}$, $N \in \mathbf{R}$, $N > 0$.

За отсутствием порядковых свойств, в обычном их понимании, в пространствах $\mathbf{R}_n$ несобственные элементы типа $\pm\infty$ не вводятся.

§3.3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА.

Компактные множества

Определение 1. Семейство $(U_i)_{i \in I}$ частей $\mathbf{R}_n$ называется покрытием множества $X \subset \mathbf{R}_n$, если $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Если, в частности, все U_i - открыты, то покрытие называется открытым.

Определение 2. Множество $K \subset \mathbf{R}_n$ называется компактным, если из любого открытого покрытия этого множества можно выбрать конечное покрытие (покрытие называется конечным, если I-конечное множество индексов i).

Теорема. Множество $K \subset \mathbf{R}_n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Доказательство. Необходимость. Пусть K компактно и $(S_1(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in K}$ покрытие этого множества открытыми шарами радиуса 1 с центром в точках множества K. По определению компактности существует конечное число шаров $S_1(\mathbf{x}_1), \dots, S_1(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{x}_i \in K$, такое, что $K \subset \bigcup\limits_{i+1}^{n} S_1(\mathbf{x}_i)$. $\Rightarrow$ $K \subset S_{N+1}(\theta)$, где $N = \max\limits_{1\le i\le n} \|\mathbf{x}_i\|$, $\theta = (0, \dots, 0)$, т.е. K - ограничено. Доказательство замкнутости K поведем от противного. Допустим, что K не замкнуто. $\Rightarrow$ Существует точка $\mathbf{x} \notin K$ и являющаяся предельной для K. Рассмотрим семейство шаров $\overline{S}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x})$, $n \in \mathbf{N}$. Шары $\overline{S}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x})$, $n \in \mathbf{N}$ являются замкнутыми множествами. Очевидно, $\{\mathbf{x}\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{S}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x})$. Пусть $U_n = \mathbf{R}_n \setminus \bar{S}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x})$. $\Rightarrow$ U_n - открытые множества. Очевидно также, что $K \subset C\{\mathbf{x}\} = C\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{S}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x}) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R}_n \setminus \bar{S}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x})) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. $\Rightarrow$ Система $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ образует покрытие множества K, причем $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$ K - компактно, поэтому существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $U_{n_0} \supset K$. $\Rightarrow$ $S_{\frac{1}{n_0}}(\mathbf{x}) \bigcap K = \varnothing$. $\Rightarrow$ Точка $\mathbf{x}$ не является предельной для множества K, что противоречит исходному предположению. Следовательно, K - замкнуто.

Достаточность. Пусть K - ограничено и замкнуто и $\Delta = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_n | -N \le x_i \le N, 1 \le i \le n\}$ - замкнутый гиперкуб такой, что $\Delta \supset K$. Допустим, что K не компактно. $\Rightarrow$ Существует открытое покрытие $(U_i)_{i\in I}$ множества K, не содержащее никакого конечного покрытия. Разобьем куб Δ на 2^n конгруэнтных кубов Δ_j^1, $j = 1, \dots, 2^n$. Среди них обнаружится по крайней мере один, скажем Δ_j^1, такой, что $\Delta_{j_1}^1 \bigcap K$ не покрывается никакой конечной подсистемой из системы $(U_i)_{i\in I}$. Разобьем теперь Δ_j^1 на 2^n конгруэнтных кубов Δ_j^2, $j = 1, \dots, 2^n$. И снова среди них обнаружится хотя бы один, скажем $\Delta_{j_2}^2$ такой, что $\Delta_{j_2}^2 \bigcap K$ не покрывается никакой конечной подсистемой из системы $(U_i)_{i\in I}$. Продолжив этот процесс, мы получим последовательность $\Delta^1_{j_1} \supset \Delta^2_{j_2} \supset \ldots$ вложенных кубов, длины ребер которых стремятся к нулю, причем $\Delta^s_{j_s} \bigcap K$ не покрывается никакой конечной подсистемой из системы $(U_i)_{i\in I}$. Проекции этих кубов на координатные оси определяют на них системы вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю. $\Rightarrow$ Существует $\mathbf{x}_0 \in \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} \Delta^s_{j_s}$. Точка $\mathbf{x}_0$ является предельной для K. Действительно, пусть $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ - любой шар радиуса ε, с центром в точке $\mathbf{x}_0$. Очевидно, существует куб $\Delta^k_{j_k} \subset S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. $\Rightarrow$ Существует точка $\mathbf{x} \in K \bigcap \breve{S}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_0$ - предельная точка множества K. Далее, так как K-замкнуто, то $\mathbf{x}_0 \in K$. $\Rightarrow$ Существует $i_0 \in I$ такое, что $\mathbf{x}_0 \in U_{i_0}$. Но множество U_{i_0} открыто, следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что $S_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U_{i_0}$. $\Rightarrow$ Для бесконечно больших s : $\Delta^s_{j_s} \subset S_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U_{i_0}$. Мы получили, что $\Delta^s_{j_s}$ покрывается одним множеством $(U_i)_{i\in I}$. С другой стороны, $K \bigcap \Delta^s_{j_s}$ не покрывается конечной системой из $(U_i)_{i\in I}$. Получено противоречие. Таким образом, всегда можно из открытого покрытия выбрать конечное подпокрытие и, следовательно, K - компактно.

Теорема доказана.

Теорема Вейерштрасса

Теорема. Ограниченное бесконечное множество X в евклидовом пространстве обладает хотя бы одной предельной точкой.

Доказательство. Допустим противное: X не имеет ни одной предельной точки. $\Rightarrow$ X-замкнуто и состоит лишь из изолированных точек. Так как X ограничено и замкнуто, то X - компактно. Множество X состоит из изолированных точек, поэтому его можно покрыть открытыми шарами так, чтобы в каждом шаре лежала только одна точка из X. В силу компактности X из этого покрытия можно выделить конечное покрытие множества X. $\Rightarrow$ X - конечное множество, что противоречит условию теоремы. Таким образом, X имеет хотя бы одну предельную точку.

§3.4 ОТОБРАЖЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА

Функции (отображения) в евклидовом пространстве

Пусть $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_m$ два евклидовых пространства.

Определение.Функцией, определенной на множества $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ со значением в евклидовом пространстве $\mathbf{R}_m$ (или отображением Ω в $\mathbf{R}_m$) называется правило f, которое каждому элементу из Ω относит некоторый (единственный) элемент из $\mathbf{R}_m$ (Обозначение: $f : \Omega \to \mathbf{R}_m$).

Отметим два важных случая отображений:

1. $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$. Такое отображение называется действительной функцией n переменных (ее значение на векторе $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$) записывается в виде $f(x_1, \ldots, x_n)$.

2. $f : \Omega \to \mathbf{R}_n$, $\Omega \subset \mathbf{R}$. Отображение такого типа называется вектор-функцией. В частности, вектор-функция $\mathbf{x} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_n$, называется векторной последовательностью (в пространстве $\mathbf{R}_n$). Обозначение: $(\mathbf{x}_k)$, $k \in \mathbf{N}$.

Замечание. Функции $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}$ мы будем называть скалярными.

Предел векторной последовательности

Пусть $(\mathbf{x}_k)$ - последовательность в евклидовом пространстве.

Определение 1. Вектор $\mathbf{x}_0$ называется пределом последовательности $\mathbf{x}_k$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall k > N$ $(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon)$.

Определение 2. Последовательность $(\mathbf{x}_k)$ сходится к ∞ (пишут: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \infty$), если $\forall M > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall k > N(\|\mathbf{x}_k\| > M)$.

Определение 3. Последовательность $(\mathbf{x}_k)$ называется ограниченной, если существует $M > 0$ такое, что $\|\mathbf{x}_k\| \le M$ при любых $k \in \mathbf{N}$.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующие утверждения:

Теорема 1 (Следствие теоремы Вейерштрасса). Любая ограниченная некоторая последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью.

Теорема 2. Если существует $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$, то он единственный.

Теорема 3 (Критерий Коши). Последовательность $(\mathbf{x}_k)$ в евклидовом пространстве сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall p, q > N(\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \varepsilon)$.

Указание: Теоремы 1-3 доказываются аналогично соответствующим теоремам из раздела "Предел числовой последовательности" (см. [8], §2.1-2.4).

Предел функции в точке

Пусть $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_m$ два евклидовых пространства.

Определение. Вектор $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_m$ называется пределом функции $f : \Omega \to \mathbf{R}_m(\Omega \subset \mathbf{R}_n)$ в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$, если

1. f определена на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$, за исключением, может быть, самой точки $\mathbf{x}_0$.

2. Для любой последовательности $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_k \in \Omega(f(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{y})$.

Замечание. Условие 2 в приведенном определении эквивалентно условию:

$2'$. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall\mathbf{x} \in \Omega(0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| < \varepsilon$, или в других обозначениях, условию:

$2''$. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall\mathbf{x} \in \check{S}_\delta(\mathbf{x}_0) \bigcap \Omega(f(\mathbf{x}) \in S_\varepsilon(\mathbf{y}))$.

Доказательство этого замечания полностью аналогично доказательству такого же утверждения в случае скалярных функций.

Обозначение для предела функции в точке:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Модификация определения предела функции

1°. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ означает, что f определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$, за исключением, может быть, самой точки $\mathbf{x}_0$ и $\forall N > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall\mathbf{x} \in \Omega(0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x})\| > N)$.

2°. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ означает, что Ω неограничено и $f(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{y}$, если $\mathbf{x}_k \to \infty$, $\mathbf{x}_k \in \Omega$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Отметим отдельно случай, когда f есть вектор-функция. Пусть f : $\Omega \to \mathbf{R}_n$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$. В этом случае каждому числу $t \in \Omega$ ставится в соответствие вектор

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \in \mathbf{R}_n.$$

Вектор $f(t)$ имеет в точке $t_0 \in \mathbf{R}$ предел равный вектору $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, если

1. f определена в некоторой окрестности точки t_0, за исключением, может быть, самой точки t_0.
2. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$,

$$\forall t \in \Omega(0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - \mathbf{y}\| \le \varepsilon) \qquad (*)$$

(Условие (*) можно записать также в обозначениях условий 2 или 2″.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующую теорему:

Теорема (*). Вектор $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}_n$ является пределом вектор-функции $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ в точке $t_0 \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to t_0} f_k(t) = y_k$ при любом $k = 1, \ldots, n$.

Замечание. Для вектор-функции $f : \Omega \to \mathbf{R}_n$, $\Omega \subset \mathbf{R}$, имеют смысл понятия односторонних пределов: $\lim\limits_{t\to t_0+0} f(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0-0} f(t)$.

Определение. Вектор-функция $f(t)$ имеет правый (левый) предел в точке $t_0 \in \mathbf{R}$ равный $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$, если

1. $f(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, за исключением, может быть, самой точки t_0.

2. Для любой последовательности $t_k \to t_0$, $t_k > t_0 (t_k < t_0)$ $t_k \in \Omega$ $(f(t_k) \to \mathbf{y})$.

Обозначение: $\lim\limits_{t \to t_0+0} f(t) = f(t_0+0)$, $\lim\limits_{t \to t_0-0} f(t) = f(t_0-0)$.

Действуя как при доказательстве теоремы (*), можно доказать, что $f(t_0+0) = (f_1(t_0+0), \ldots, f_n(t_0+0))$, $f(t_0-0) = (f_1(t_0-0), \ldots, f_n(t_0-0))$.

Свойства пределов

Пусть $f : \Omega \to \mathbf{R}_m$, $g : \Omega \to \mathbf{R}_m$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$; функции f и g определены в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ за исключением может быть самой $\mathbf{x}_0$. Тогда

1°. $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(x) \pm \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$ в том смысле, что если определена правая часть, то определена и левая, и они равны.

2°. Если $\lim\limits_{\mathbf{X} \to \mathbf{X}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \neq \theta$, то существует $\delta > 0$ такое, что $\|f(\mathbf{x})\| > \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|$ для любого $\mathbf{x} \in \check{S}_\delta(\mathbf{x}_0) \bigcap \Omega$.

3°. (Критерий Коши). f обладает пределом в $\mathbf{x}_0$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \check{S}_\delta(x_0) \bigcap \Omega$

$$(\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\| < \varepsilon).$$

Утверждения $1° - 3°$ доказываются аналогично соответствующим утверждениям для скалярных функций, поэтому предлагается провести их самостоятельно.

Замечание. Для функций многих переменных свойство 1° можно дополнить: "Если $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $g : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, то $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(x)}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$, $\lim g(\mathbf{x}) \neq 0$, в том смысле, что если определены правые части, то определены и левые и они равны".

§3.5 ПРЕДЕЛ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, вектор $\mathbf{x}_0$ фиксирован. Пусть также фиксирован вектор $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_n$, причем $\|\mathbf{y}\| = 1$. Множество $l(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y} | t \in \mathbf{R}, t \geq 0\}$ называется лучом, выходящим из $\mathbf{x}_0$ в направлении $\mathbf{y}$ (см. рис.)

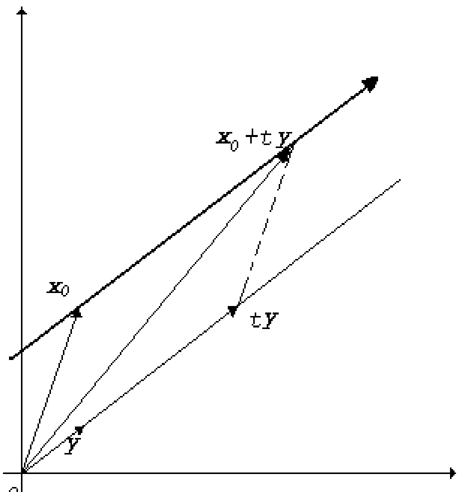


Рис.

Пусть теперь $f : \Omega \to \mathbf{R}_m$ и определена в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0) \bigcap l(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ за исключением, может быть, самой точки $\mathbf{x}_0$. Пусть $l_\Omega = \{t \geq 0 | \mathbf{x}_0 + t\mathbf{y} \in \Omega\}$.

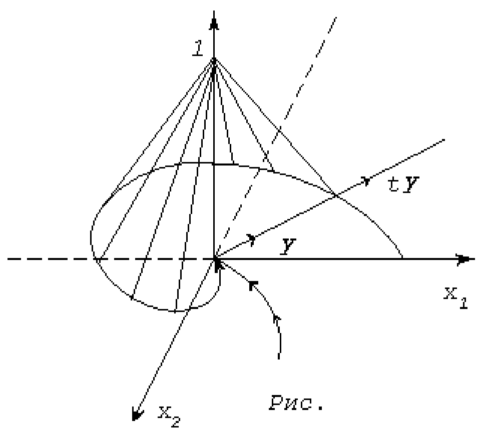
Определим вектор-функцию, заданную на l_Ω, следующим образом: $f_l(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y})$, $t \in l_\Omega$.

Определение. Вектор $\mathbf{z} \in \mathbf{R}_m$ называется пределом функции f в точке $\mathbf{x}_0$ по направлению $\mathbf{y}$ (обозначение: $\mathbf{z} = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(\mathbf{y})} f(\mathbf{x})$), если $\lim\limits_{t \to 0+0} f_l(t) = \mathbf{z}$.

Замечание. Если $\mathbf{z} = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, то $\mathbf{z} = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(\mathbf{y})} f(\mathbf{x})$ по любому направлению $\mathbf{y}$ такому, что f определена в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0) \bigcap l(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ за исключением, может быть, самой точки $\mathbf{x}_0$. Обратное утверждение неверно: может существовать один и тот же предел по любому направлению $\mathbf{y}$, но предела $\lim\limits_{x \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ может не быть.

Пример. В плоскости $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ рассмотрим спираль $r = \varphi (0 < \varphi \leq 2\pi)$ и определим $f : \mathbf{R}_2 \setminus \{\theta_2\} \to \mathbf{R}$ в соответствии с рисунком:

$$\begin{cases} 0 \ , & \text{если } \|\mathbf{x}\| \geq \varphi \\ \text{линейна} \ , & \text{если } \|\mathbf{x}\| < \varphi \end{cases} .$$



В точке $\theta = (0,0)$ функцию f, по определению, полагаем равной 1, т.е. $f(\theta) = 1$. Очевидно, что $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\theta(\mathbf{y})} f(\mathbf{x}) = 1$ для любого $\mathbf{y}(\|\mathbf{y}\| = 1)$. Действительно, $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t\mathbf{y}) = 1$ при любом $\mathbf{y}$, у которого $\|\mathbf{y}\| = 1$. В то же время $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\theta} f(\mathbf{x})$ не существует, так как, если приближаться к точке $\theta = (0,0)$ по кривой, находящейся между спиралью $r = \varphi$ и осью $\mathbf{x}_1$, то вдоль этой кривой $f(\mathbf{x}) = 0$.

§3.6 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 1. Функция $f : \Omega \to \mathbf{R}_m, \Omega \subset \mathbf{R}_n$ называется непрерывной в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$, если

1. f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $\mathbf{x}_0$.
2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Замечание. Условие 2 в данном определении можно записать в эквивалентной форме:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \forall\mathbf{x} \in \Omega(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon).$$

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Доказать следующие свойства функций, непрерывных в точке:

Теорема 1. Пусть $f : \Omega \to \mathbf{R}_m$, $g : \Omega \to \mathbf{R}_m$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, тогда в этой точке непрерывна функция $f \pm g$.

Замечание. Для функций многих переменных $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $g : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ определены произведение $f \cdot g$ и частное f/g, поэтому из непрерывности в точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ функций f и g следует непрерывность $f \cdot g$ и f/g $(g(x_0) \neq 0)$.

Теорема 2. Для функции многих переменных $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, справедливо свойство сохранения знака: если f непрерывна в $\mathbf{x}_0$ и $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $f(\mathbf{x})$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$.

Доказательства теорем 1,2 и замечания к теореме 1 следуют из соответствующих свойств пределов функций (см. свойства 1° 2°, замечание к 1°).

Теорема 3 (Непрерывность суперпозиции функций). Пусть $\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_m, \mathbf{R}_k$-евклидовы пространства и $f : \Omega_1 \to \mathbf{R}_m$, $\Omega_1 \subset \mathbf{R}_n$, $g : \Omega_2 \to \mathbf{R}_k$, $\Omega_2 \subset \mathbf{R}_m$, причем $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, f-непрерывна в точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega_1$, g-непрерывна в точке $f(\mathbf{x}_0)$. Тогда $g \circ f : \Omega_1 \to \mathbf{R}_k$ будет непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x}))=$(замена: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$)$\overset{1}{=}$ $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}) \overset{2}{=} g(\mathbf{y}_0) = g(f(\mathbf{x}_0)) = (g \circ f)(\mathbf{x}_0)$, здесь $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.

Равенство 1 следует из непрерывности f в точке $\mathbf{x}_0$($f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}_0)$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$), а равенство 2 - из непрерывности g в точке $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.

Определение 2. Функция $f : \Omega \to \mathbf{R}_m, \Omega \subset \mathbf{R}_n$ называется непрерывной, если она непрерывна в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$.

Определение 3. Функция $f : \Omega \to \mathbf{R}_m, \Omega \subset \mathbf{R}_n$ называется равномерно непрерывной, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon)$$

Замечание. Если функция равномерно непрерывна, то она, очевидно, непрерывна.

Примеры.

1. Пусть точка $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}_m$ зафиксирована. "Постоянная"функция $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 (\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbf{R}_n)$ - непрерывна.

2. Функция $f : \mathbf{R}_n \to \mathbf{R}$, определяемая равенством $f(\mathbf{x}) = x_1$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, непрерывна и даже равномерно непрерывна. Действительно, мы имеем оценку $|x_1 - y_1| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$. Отсюда следует, если $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, то и $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = |x_1 - y_1| < \delta$. Таким образом, для выполнения условия определения 3 (равномерной непрерывности) следует взять $\delta = \varepsilon$.

3. Норма вектора $\|\mathbf{x}\|$, как функция из евклидова пространства $\mathbf{R}_n$ в $\mathbf{R}$, является непрерывной и даже равномерной непрерывной.

Действительно, так как $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, то для выполнения условия определения 3 следует взять $\delta = \varepsilon$.

Свойства функции непрерывных на компактных множествах

Теорема 1. Пусть $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_m$-евклидовы пространства, K - компактное множество из R_n, $f : K \to \mathbf{R}_m$ - непрерывная функция. Тогда f ограничена и равномерно непрерывна.

Доказательство. Пусть, напротив, f не является равномерно непрерывной. Тогда, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall m \in \mathbf{N}$, $\exists \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m \in K(\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m\| < \frac{1}{m})$, $\|f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{y}_m)\| > \varepsilon$. Множество K компактно. $\Rightarrow K$ - ограничено. $\Rightarrow$ Последовательность $(\mathbf{x}_m)$ ограничена, поэтому, по следствию к теореме Вейерштрасса, существует подпоследовательность $\mathbf{x}_{m_k} \to \mathbf{x}_0 \in K$. $\Rightarrow \mathbf{y}_{m_k} \to \mathbf{x}_0$, так как $\|\mathbf{y}_{m_k} - x_0 - \mathbf{x}_{m_k} + \mathbf{x}_{m_k}\| \le \|\mathbf{y}_{m_k} - \mathbf{x}_{m_k}\| + \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{x}_0\| < \frac{2}{m_k}$. f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0 \in K$ и норма $\|\mathbf{x}\|$ является функцией непрерывной (см. выше пример 3), поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \|f(\mathbf{x}_{m_k}) - f(\mathbf{y}_{m_k}))\| = \| \lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_{m_k} - \lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{y}_{m_k})\| = 0$, что противоречит неравенству $\|f(\mathbf{x}_{m_k}) - f(\mathbf{y}_{m_k})\| > \varepsilon$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Таким образом, f - равномерно непрерывна на K.

Докажем ограниченность функции f. В силу равномерной непрерывности f : $\exists \delta > 0$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ $(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < 1)$. Система шаров $\{S_\delta(\mathbf{x})\}, \mathbf{x} \in K$, образует открытое покрытие множества

K. Так как K компактно, то существует конечное покрытие K шарами $S_\delta(\mathbf{x}^1),\ldots,S_\delta(\mathbf{x}^m)$. Рассмотрим шар $S_\delta(\mathbf{x}^k)$. Пусть $\mathbf{x}\in S_\delta(\mathbf{x}^k)$, тогда $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\|<\delta\Rightarrow\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}^k)\|<1.\Rightarrow\|f(\mathbf{x})\|<1+\|f(\mathbf{x}^k)\|$, $\mathbf{x}\in S_\delta(\mathbf{x}^k)$. $\|f(\mathbf{x})\|\le M=1+\max\limits_k\|f(\mathbf{x}^k)\|$, $\forall\mathbf{x}\in K$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $K(\subset\mathbf{R}_n)$ - компактно множество и $f:K\to\mathbf{R}$ непрерывна. Тогда f достигает своих точных граней, т.е. существуют точки $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0\in K$ такие, что $f(\mathbf{x}_0)=\sup\limits_{\mathbf{x}\in K}f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{y}_0)=\inf\limits_{\mathbf{x}\in K}f(\mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть $\alpha=\sup\limits_{\mathbf{x}\in K}f(\mathbf{x})$. Тогда существует $\mathbf{x}_m\in K$ такое, что

$$\alpha-\frac{1}{m}<f(\mathbf{x}_m)\le\alpha, m\in\mathbf{N}. \qquad (*)$$

Так как $\mathbf{x}_m\in K$, а множество K - компактно, то последовательность $(\mathbf{x}_m)$ - ограничена. Следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность $(\mathbf{x}_{m_s})_{s\in\mathbf{N}}$; $\mathbf{x}_{m_s}\to\mathbf{x}_0\in K$ при $s\to\infty$. f - непрерывна на K, поэтому $\lim\limits_{s\to\infty}f(\mathbf{x}_{m_s})=f(\mathbf{x}_0)$. В то же время из $(*)$ имеем

$$\alpha-\frac{1}{m_s}<f(\mathbf{x}_{m_s})\le\alpha.$$

Отсюда, так как $m_s\to\infty$ при $s\to\infty$, следует: $f(\mathbf{x}_{m_s})\to\alpha$ при $s\to\infty$. В силу единственности предела $f(\mathbf{x}_0)=\alpha$. Аналогично доказывается существование $\mathbf{y}_0\in K$ такого, что $f(\mathbf{y}_0)=\inf\limits_{x\in K}f(\mathbf{x}))$.

Теорема 2 доказана.

Определение. Множество $\Omega\subset\mathbf{R}_n$ называется линейно связным, если для любых точек $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega$ существует непрерывная вектор-функция $\varphi:[0,1]\to\Omega$ такая, что $\varphi(0)=\mathbf{x}$, $\varphi(1)=\mathbf{y}$.

Теорема 3. Пусть $K(\subset\mathbf{R}_n)$ - компактное множество (линейное связное) и $f:K\to\mathbf{R}$ непрерывна, $\beta=\sup\limits_{\mathbf{X}\in K}f(\mathbf{x})$, $\alpha=\inf\limits_{\mathbf{X}\in K}f(\mathbf{x})$ и $\alpha<\gamma<\beta$, тогда существует точка $\mathbf{y}\in K$ такая, что $f(\mathbf{y})=\gamma$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}\in K$ такие, что $f(\mathbf{x}^{(1)})=\beta$, $f(\mathbf{x}^{(2)})=\alpha$ и $\varphi:[0,1]\to K$ - непрерывная вектор-функция такая, что $\varphi(0)=\mathbf{x}^{(1)}$,

$\varphi(1) = \mathbf{x}^{(2)}$ и $\varphi([0,1]) \subset K$. Тогда $g = f_0\varphi$ - непрерывная вещественная (скалярная) функция, заданная на отрезке $[0,1]$, причем $g(0) = \beta$, $g(1) = \alpha$. По свойству скалярных функций, заданных и непрерывных на отрезке, существует $t \in [0,1]$ такая, что $g(t) = \gamma$. Тогда точка $\mathbf{y} = \varphi(t)$ является искомой.

Теорема 3 доказана.

Глава IV.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Мы будем рассматривать два специальных случая отображения в евклидовом пространстве: вектор-функции и функции многих переменных.

§4.1 ПРОИЗВОДНАЯ ОТ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть задана вектор-функция $f : \Omega \to \mathbf{R}_n$, $\Omega \subset \mathbf{R}$. В другом обозначении: $f(t)$, $t \in \Omega \subset \mathbf{R}$.

Определение 1. Производной от вектор-функции $f(t)$ в точке t называется предел

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h},$$

если он существует.

Замечание. Если вектор-функция $f(t)$ имеет в точке t производную, то она непрерывна в этой точке.

Определение 2. Если вектор-функция f имеет производную в любой точке множества Ω, то определена функция $f(t)$, $t \in \Omega$, которая называется производной вектор-функцией и обозначается $\dot{f}$.

Как и в скалярном случае, производная порядка m от вектор-функции $f(t)$ определяется по индукции:

$$\frac{d^m f}{dt^m} = \frac{d}{dt}\frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}}, m = 2, 3, \ldots .$$

Заметим, что производная $\frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}}$ должна быть определена в некоторой достаточно малой окрестности точки t. Производная 2-го порядка обычно обозначается $\ddot{f} = \ddot{f}(t)$.

Геометрический смысл производной вектор-функции

При непрерывном возрастании t на $[a,b]$ $((a,b))$ точка, определяемая непрерывной вектор-функцией

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \in \mathbf{R}_n, \tag{1}$$

описывает некоторую траекторию (годограф) вектор-функции $f(t)$, при этом говорят, что уравнение (1) определяет непрерывную кривую Г. Кривая Г называется гладкой на $[a,b]$ $((a,b))$, если ее можно задать при помощи гладкой вектор-функции $f(t)$, т.е. непрерывной и имеющей непрерывную не равную нулю производную на $[a,b]$ $((a,b))$.

Пусть в $\mathbf{R}_3$ задана гладкая вектор-функция

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), t \in (a,b).$$

На рис.1 изображен годограф вектора $f = f(t)$ и отмечены 2 точки A и B годографа - концы векторов.

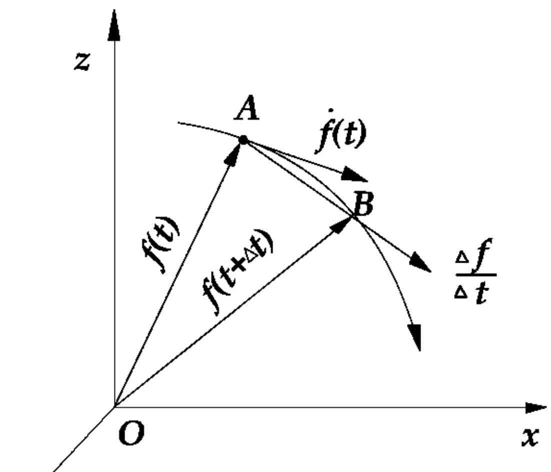


Рис 1

Вектор $\overline{AB} = \Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$. При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а секущая, проходящая через A и B, стремится занять положение определенной прямой, которую называют касательной к годографу в точке A. Поэтому предельный вектор

$$\dot{f} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

лежит на касательной к годографу в точке A. Длина $\|\dot{f}\|$ вектора $\dot{f}$ есть

предел длины $\|\frac{\Delta f}{\Delta t}\|$ вектора $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, так как $| \parallel \dot{f} \parallel -$
$- \parallel \frac{\Delta f}{\Delta t} \parallel | \leq \parallel \dot{f} - \frac{\Delta f}{\Delta t} \parallel \to 0$, $(\Delta t \to 0)$.

Если t есть время и конец вектора $f(t)$ описывает движение некоторой точки, то $\dot{f}(t)$ есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени t. Длина его $\parallel \dot{f} \parallel$ есть величина скорости. Кроме этого, вектор $\dot{f}$ определяет направление движения точки в момент t.

Вторую производную вектор-функции $\ddot{f}(t)$ можно интерпретировать как скорость изменения скорости точки в момент t, т.е. $\ddot{f}$ есть ускорение точки в момент t.

Некоторые свойства производной вектор-функции

Теорема 1. Вектор-функция $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ имеет m-ю производную в точке t тогда и только тогда, когда функции $f_k(t)$ имеют m-е производные в точке t, $k = 1, ..., n$, причем

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = (f_1^{(m)}, ..., f_n^m(t)),$$

где $f_k^{(m)}(t)$-m-я производная от скалярной функции $f_k(t)$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $m = 1$, так как доказательство для произвольного m легко проводится по индукции.

Пусть существует $\dot{f}(t) = (\dot{f}_1(t), ..., \dot{f}_n(t))$, т.е. существует $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\triangle f}{h} = =$
$\lim\limits_{h\to 0}(\frac{\triangle f_1}{h}, ..., \frac{\triangle f_n}{h})$.

По теореме о компонентном переходе к пределу для вектор-функции имеем: существует $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\triangle f_k}{h} = \dot{f}_k(t)$, т.е. $\dot{f}_k(t) = f_k'(t)$.

Обратно, пусть существуют $f_k'(k = 1,\ ...,\ n)$, т.е. существуют $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\triangle f_k}{h} =$
$= f_k'(t)$, при любом $k = 1, ..., n$. Но тогда существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{\triangle f}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{\triangle f_1}{h}, ..., \frac{\triangle f_k}{h}) = (\lim_{h\to 0} \frac{\triangle f_1}{h}, ..., \lim_{h\to 0} \frac{\triangle f_k}{h}) =$$
$$= (f_1'(t), ..., f_k'(t)).$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (арифметические свойства производной от вектор - функции). Если вектор-функции $f, g : \Omega \to \mathbf{R}_n, \Omega \subset \mathbf{R}$, имеют в точке $t \in \Omega$ производные и $\alpha(t), t \in \Omega$, - дифференцируемая скалярная функция, то $\frac{d}{dt}(f(t) \pm g(t)) = \frac{df(t)}{dt} \pm \frac{dg(t)}{dt}$, $d(\alpha(t)f(t) = \alpha(t)\frac{df}{dt} + \alpha'(t)f(t))$. Доказать данную теорему самостоятельно, используя теорему 1 и арифметические свойства производной от скалярной функции.

§4.2 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

1.Частные производные

Пусть $f : \Omega \to \mathbf{R}, \Omega \subset \mathbf{R}_n$, - функция многих (пусть n) переменных. Будем полагать: Ω - некоторое открытое множество.

Определение 1. Приращением функции f в точке $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ по переменной x_k с шагом h называется величина

$$\triangle x_{kh} f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n),$$

где h- действительное число, достаточно мало, чтобы данное приращение имело смысл.

Определение 2. Частной производной функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ по x_k в точке x называется предел

$$f'_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{\triangle x_{kh} f(\mathbf{x})}{h}, k = 1, ..., n,$$

если он существует.

2. Геометрический смысл частных производных в случае функций двух переменных

Пусть задана функция $f(x, y)$ от двух переменных x и y. Зафиксируем точку (x_0, y_0). $\frac{\partial f}{\partial x}$ в точке (x_0, y_0) получается дифференцированием по x функции $f(x, y_0)$, графиком которой будет кривая, получающаяся в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$. Поэтому $\frac{\partial f}{\partial x}$ есть тангенс угла, образованного касательной к упомянутой кривой в точке (x_0, y_0) и осью $0X$. (см.Рис.2).

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x_0, y_0) есть тангенс угла, образованного касательной в точке (x_0, y_0) к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$ и осью $0Y$. На рис. 2 $tg\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}, tg\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$.

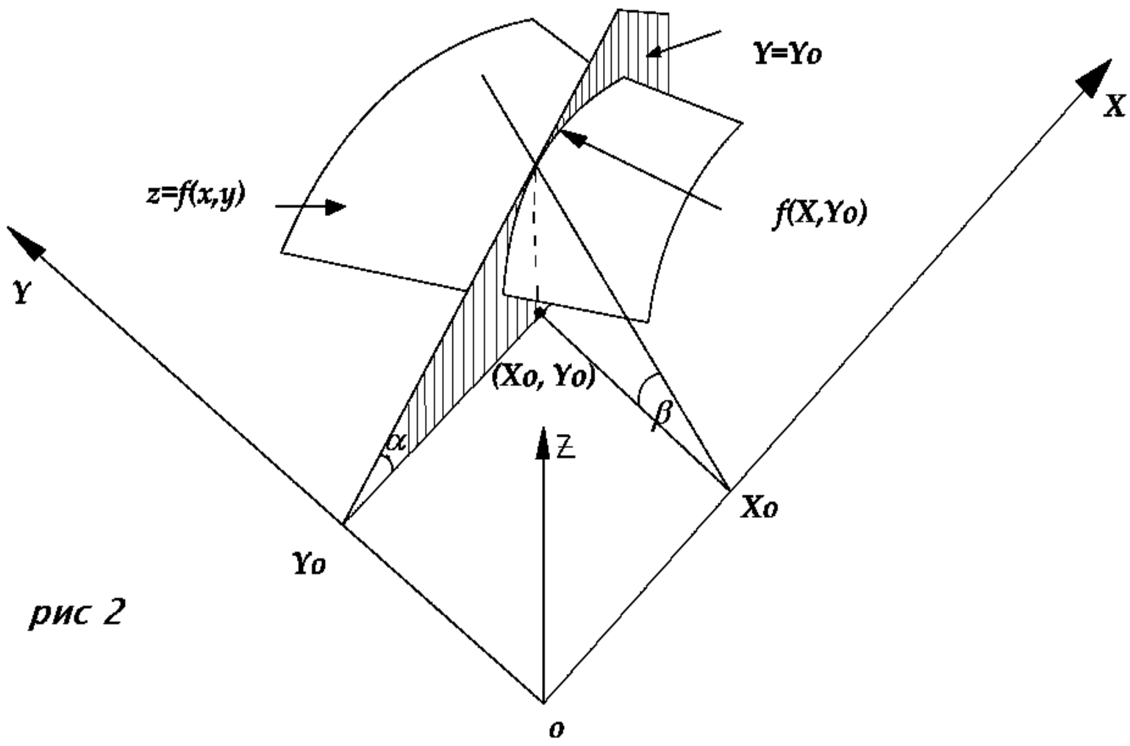


рис 2

<u>Пример.</u> $z = x^y, x > 0$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ - вычисляется как производная степенной функции от x (y - фиксируется).

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ - вычисляется как производная показательной функции от y (x - фиксируется).

<u>3.Дифференцируемая функция</u>

Для упрощения изложения материала будем рассматривать трехмерный случай (в n - мерном случае все рассуждения аналогичны).

Пусть $u = f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega$, где Ω - открытое множество из $\mathbf{R}_3$.

Определение 1. Полным приращением функции $u = f(x, y, z)$ в точке (x, y, z) называется величина

$$\triangle u = \triangle f(x, y, z) = f(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) - f(x, y, z),$$

где $(\triangle x, \triangle y, \triangle z)$ - приращение соответствующих переменных x, y, z такое, что $|\triangle x|, |\triangle y|, |\triangle z| < \delta$ и δ достаточно мало, чтобы точка $(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) \in \Omega$.

Теорема 1. Если функция $u = f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные (первого порядка) в точке (x, y, z), то ее приращение (полное) в этой точке, соответствующее достаточно малому приращению $(\triangle x, \triangle y, \triangle z)$, можно записать по формуле

$$\triangle u = \frac{\partial f}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\triangle y + \frac{\partial f}{\partial z}\triangle z + o(\rho), \rho \to 0, \rho = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2},$$

где частные производные взяты в точке (x, y, z).

Доказательство. Запишем

$$\triangle u = [f(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) - f(x, y + \triangle y, z + \triangle z)] +$$

$$+ [f(x, y + \triangle y, z + \triangle z) - f(x, y, z + \triangle z)] + [f(x, y, z + \triangle z) - f(x, y, z)].$$

Каждая из разностей в квадратных скобках представляет собой приращение функции лишь по одной переменной. По условию частные производные функции $f(x, y, z)$ существуют в некоторой окрестности G точки (x, y, z). Будем считать $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ достаточно малыми для того, чтобы $(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) \in G$. Применим к разностям в квадратных скобках формулу о конечных приращениях Лагранжа:

$$\triangle u = f'_x(x + \theta_1\triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z)\triangle x + f'_y(x, y + \theta_2\triangle y, z + \triangle z)\triangle y +$$

$$+ f'_z(x, y, z + \theta_3\triangle z)\triangle z, \text{где } |\theta_1|, |\theta_2|, |\theta_3| < 1. \tag{1}$$

Положим, используя непрерывность f'_x, f'_y, f'_z в точке (x, y, z)

$$f'_x(x + \theta_1\triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1,$$

$$f'_y(x, y + \theta_y\triangle 2, z + \triangle z) = f'_y(x, y, z) + \varepsilon_2,$$

$$f'_z(x,y,z+\theta_3\triangle z)=f'_z(x,y,z)+\varepsilon_3,$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0$ при $\rho\to 0$. После чего перепишем (1) в следующем виде

$$\triangle u=f'_x(x,y,z)\triangle x+f'_y(x,y,z)\triangle y+f'_z(x,y,z)\triangle z+\varepsilon_1\triangle x+\varepsilon_2\triangle y+$$

$$+\varepsilon_3\triangle z=f'_x(x,y,z)\triangle x+f'_y(x,y,z)\triangle y+f'_z(x,y,z)\triangle z+o(\rho),\rho\to 0.$$

Здесь мы считали, что $\varepsilon_1\triangle x+\varepsilon_2\triangle y+\varepsilon_3\triangle z=o(\rho)$, $\rho\to 0$. Действительно, применяя неравенство Буняковского, получим

$$\left|\frac{\varepsilon_1\triangle x+\varepsilon_2\triangle y+\varepsilon_3\triangle z}{\rho}\right|\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\cdot\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2}}{\rho}=$$

$$=\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\to 0,\text{при } \rho\to 0.$$

Теорема 1 доказана.

Оределение 2. Функция $u=f(x,y,z)$ называется дифференцируемой в точке (x,y,z), если $\triangle u=A\cdot\triangle x+B\cdot\triangle y+C\cdot\triangle z+o(\rho)$, при $\rho\to 0$, где A,B,C- числа, не зависящие от $\triangle x,\triangle y,\triangle z$. Выражение $A\cdot\triangle x+B\cdot\triangle y+C\cdot\triangle z$ называется главной линейной частью полного приращения $\triangle u$.

Замечание. Значения частных производных f'_x,f'_y,f'_z не зависят от $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$, поэтому из теоремы 1 данного раздела следует, что, если функция $u=f(x,y,z)$ имеет в точке (x,y,z) непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке и
$A=f'_x,B=f'_y,C=f'_z$.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $u=f(x,y,z)$ была дифференцируема в точке (x,y,z), необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные.

Доказательство. Пусть $u=f(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x,y,z):

$$\triangle u=A\cdot\triangle x+B\cdot\triangle y+C\cdot\triangle z+o(\rho),\rho\to 0 \tag{1}$$

Положим в (1) $\triangle x=h,\triangle y=\triangle z=0$. Получим

$$\triangle_{xh}u=A\cdot h+o(h),h\to 0.\Rightarrow\lim_{h\to 0}(\triangle_{xh}u/h)=A,$$

т.е. в точке (x, y, z) существует $f'_x = A$.

Аналогично показывается существование частных производных f'_y, f'_z.

$$\triangle x = \triangle z = 0, \triangle y = h : \triangle_{yh} u = B \cdot h + o(h), h \to 0. \Rightarrow \lim_{h\to 0}(\triangle_{yh} u/h) =$$

$$= B = f'_y.$$

$$\triangle x = \triangle y = 0, \triangle z = h : \triangle_{zh} u = C \cdot h + o(h), h \to 0. \Rightarrow \lim_{h\to 0}(\triangle_{zh} u/h) =$$

$$= C = f'_z.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Определение 3. Главная линейная часть полного приращения функции $u = f(x, y, z)$, дифференцируемой в точке (x, y, z), называется дифференциалом (полным) функции f в точке (x, y, z), соответствующим приращению $(\triangle x, \triangle y, \triangle z)$ независимых переменных.
Обозначение полного дифференциала: $du = f'_x \cdot \triangle x + f'_y \cdot \triangle y + f'_z \cdot \triangle z$.
Если x формально рассматривать как функцию от x, y, z, то

$$dx = x'_x \cdot \triangle x + x'_y \cdot \triangle y + x'_z \cdot \triangle z = 1 \cdot \triangle x + 0 \cdot \triangle y + 0 \cdot \triangle z = \triangle x$$

Аналогично для переменных $y, z : dy = \triangle y, dz = \triangle z$.

В результате, запись полного дифференциала примет вид:

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Замечания.

1. Часто произведения $f'_x dx, f'_y dy, f'_z dz$ называют частными дифференциалами функции $u = f(x, y, z)$ соответственно по переменным x, y, z и обозначают: $d_x u = f'_x dx, d_y u = f'_y dy, d_z u = f'_z dz$. Таким образом, полный дифференциал функции есть сумма ее частных дифференциалов.

2. Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ называют еще дифференциалом первого порядка (или первым дифференциалом), так как приходится рассматривать дифференциалы высших порядков (определение дифференциалов высших порядков будет дано позднее).

Для любых двух функций $f = f(x, y, z), g = g(x, y, z)$, дифференцируемых в точке (x, y, z), справедливы свойства

$$d(f \pm g) = df \pm dg,$$

$$d(f \cdot g) = fdg + gdf,$$

$$d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2, g \neq 0.$$

Докажем, например, третье из этих равенств:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)dz = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}dx +$$

$$+\frac{g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}dy + \frac{g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}dz = \frac{1}{g^2}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) -\right.$$

$$\left. -f\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right)\right) = \frac{1}{g^2}(gdf - fdg).$$

§4.3 КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим поверхность S, которая описывается функцией $z = f(x, y)$.

Определение. Плоскость $\mathcal{P}$, проходящая через точку $L_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$ называется касательной к поверхности S в этой точке, если угол φ между секущей LL_0 и этой плоскостью стремится к нулю, при любом стремлении точки L, принадлежащей поверхности S, к точке L_0 (см. рис 3.).

$\angle\varphi \to 0$ при $L \to L_0$, что равносильно утверждению $\sin\varphi \to 0$ при $L \to L_0$. Последнее записывается так

$$\frac{|LM|}{|LL_0|} = o(1), \text{при } L \to L_0$$

(здесь $|LM|, |LL_0|$ - расстояния между точкой L и точками M, L_0 соответственно).

Исходя из сказанного, касательной плоскости можно дать иное, равносильное определению 1, определение.

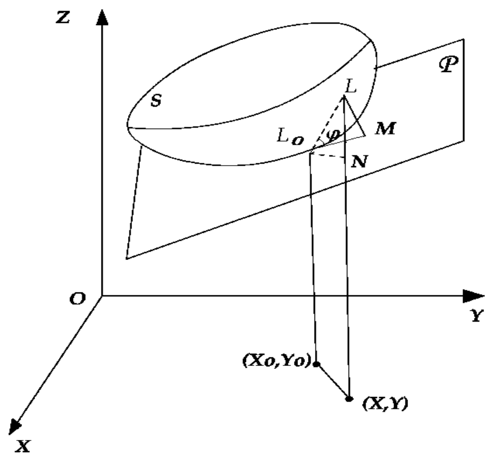


Рис 3

Определение 1$'$. Плоскость $\mathcal{P}$ называется касательной к поверхности S в точке L_0, если при любом стремлении точки L к точке L_0 расстояние $|LM|$ стремится к нулю быстрее, чем расстояние $|LL_0|$, т.е.

$$|LM| = o(|LL_0|), \text{при } L \to L_0.$$

Посмотрим, при каких условиях плоскость, проходящая через точку L_0 является касательной.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то поверхность S имеет в точке L_0 касательную плоскость, задаваемую уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Доказательство. Пусть через точку L_0 проходит плоскость, уравнение которой $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$. Данная плоскость будет касательной, если $|LM| = o(|LL_0|)$, при $L \to L_0$. Длина отрезка LM отличается от длины отрезка LN на постоянный множитель (отличный от нуля), поэтому вместо отношения $\frac{|LM|}{|LL_0|}$ можно рассматривать отношение $\frac{|LN|}{|LL_0|}$. $|LN| = |z_{\text{пов.}} - z_{\text{пл.}}| = |z - z_0 - A(x - x_0) - B(y - -y_0)| =$

$|\triangle z - A\triangle x - B\triangle y|$, где $\triangle z = z - z_0$, $\triangle x = x - x_0$, $\triangle y = y - y_0$. Очевидно, справедливо неравенство

$$0 \le \frac{|LN|}{|LL_0|} \le \frac{|LN|}{\rho}, \text{где } \rho = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} - \text{проекция } LL_0 \qquad (1)$$

на плоскость XOY.

Если $\triangle z = A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle y + o(\rho), \rho \to 0$, то $\frac{|LN|}{\rho} \to 0$, при $\rho \to 0$, так как

$$\frac{\triangle z - (A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle y)}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} = o(1), \rho \to 0. \qquad (2)$$

По условию теоремы f дифференцируема в точке (x_0, y_0), поэтому для выполнения (2) следует выбрать $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$. По "свойству двух милиционеров" из неравенства (1) следует: $\frac{|LN|}{|LL_0|} \to 0$, при $\rho \to 0$. Тем более, это будет выполняться при $L \to L_0$. Таким образом, плоскость, проходящая через точку $(x_0, y_0, z_0) \in S$, является касательной (при условии дифференцируемости в (x_0, y_0) функции, задающей поверхность S) и имеет уравнение

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Теорема доказана.

§4.4 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Дифференцирование сложной функции

Пусть $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}_3$, Ω - открытое множество. (Распространение на n-мерный случай излагаемых в данном разделе фактов производится по аналогии).

Теорема 1. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x, y, z), а функции $x = \varphi(t, v)$, $y = \psi(t, v)$, $z = \chi(t, v)$, зависящие от действительных параметров t и v, имеют частные производные по t и v. Тогда частные производные по t и v от сложной функции $F(t, v) =$

$f(\varphi(t,v),\psi(t,v),\chi(t,v))$ вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Доказательство. Пусть паре (t,v) соответствует точка (x,y,z). Зафиксируем v, а t придадим приращение $\triangle t$. Оно вызовет приращения $\triangle_t x, \triangle_t y, \triangle_t z$ функций $x=\varphi(t,v),\ y=\psi(t,v),\ z=\chi(t,v)$.

f - дифференцируема в точке (x,y,z), поэтому

$$\triangle u=f(x+\triangle x,y+\triangle y,z+\triangle z)-f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\triangle x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\triangle y+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\triangle z+o(\rho),\ \rho\to 0\ (\rho=\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2}).$$

Подставим в это выражение приращения $\triangle_t x, \triangle_t y, \triangle_t z$. Получим частное (по переменной t) приращение функции $F(t,v)$:

$$\triangle_t F=F(t+\triangle t,v)-F(t,v)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\triangle_t x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\triangle_t y+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\triangle_t z+$$

$$+o(\rho),\ \rho\to 0\ (\rho=\sqrt{\triangle_t^2 x+\triangle_t^2 y+\triangle_t^2 z}).$$

Разделим $\triangle_t F$ на $\triangle t$ и перейдем к пределу при $\triangle t\to 0$.

$$\frac{\partial F(t,v)}{\partial t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle_t F}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{F(t+\triangle t,v)-F(t,v)}{t}=$$

$$=\lim_{\triangle t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\triangle_t x}{\triangle t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\triangle_t y}{\triangle t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\triangle_t z}{\triangle t}\right)+\lim_{\triangle t\to 0}\left(\frac{o(\rho)}{\triangle t}\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},\ \text{так как}\ \frac{o(\rho)}{\triangle t}=$$

$$=o(\sqrt{(\triangle_t x/\triangle t)^2+(\triangle_t y/\triangle t)^2+(\triangle_t z/\triangle t)^2})\to 0,\ \text{при}\ \triangle t\to 0.$$

Аналогично доказывается формула для вычисления частной производной $\frac{\partial F}{\partial v}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть функции $x = \varphi(t,v),\ y = \psi(t,v),\ z = \chi(t,v)$ дифференцируемы в точке (t,v), а функция $u = f(x,y,z)$ дифференцируема в соответствующей точке $(x = \varphi(t,v),\ y = \psi(t,v),\ z = \chi(t,v))$. Тогда сложная функция $F(t,v) = f(\varphi(t,v), \psi(t,v), \chi(t,v))$ будет дифференцируема в точке (t,v).

Доказательство. Придадим параметрам t,v произвольные приращения $\triangle t, \triangle v$, не равные нулю. Этим приращениям соотвтетствуют приращения $\triangle x = \varphi(t+\triangle t, v+\triangle v) - \varphi(t,v), \triangle y = \psi(t+\triangle t, v+\triangle v) - \psi(t,v), \triangle z = \chi(t+\triangle t, v+\triangle v) - \chi(t,v)$. Приращениям $\triangle x, \triangle y, \triangle z$, в свою очередь, соответствует приращение функции $f : \triangle u = f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z) - f(x,y,z)$. Поскольку f предполагается дифференцируемой в точке (x,y,z), указанное приращение $\triangle u$ этой функции может быть записано в виде

$$\triangle u = \frac{\partial f}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\triangle y + \frac{\partial f}{\partial z}\triangle z + o(\rho),\ \rho \to 0, \tag{1}$$

где $\rho = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}$, а частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ берутся в точке (x,y,z).

$\rho \to 0$ при $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0, \triangle z \to 0$, поэтому $o(\rho) = \varepsilon_1 \cdot \triangle x + \varepsilon_2 \cdot \triangle y + \varepsilon_3 \cdot \triangle z$, где $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, \varepsilon_3 \to 0$ при $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0, \triangle z \to 0$ (здесь мы использовали неравенство Буняковского:$|\varepsilon_1 \cdot \triangle x + \varepsilon_2 \cdot \triangle y + \varepsilon_3 \cdot \triangle z| \leq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \cdot \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2} = \rho \cdot \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}$). Таким образом, равенство (1) принимает вид

$$\triangle u = \frac{\partial f}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\triangle y + \frac{\partial f}{\partial z}\triangle z + \varepsilon_1 \cdot \triangle x + \varepsilon_2 \cdot \triangle y + \varepsilon_3 \cdot \triangle z. \tag{2}$$

Подчеркнем, что в данном соотношении $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ представляют собой приращения функций $x = \varphi(t,v),\ y = \psi(t,v),\ z = \chi(t,v)$, отвечающие выбранным приращениям $\triangle t, \triangle v$ аргументов этих функций. По условию, функции φ, ψ, χ дифференцируемы в точке (t, v), поэтому

$$\begin{aligned}\triangle x &= \frac{\partial x}{\partial t}\triangle t + \frac{\partial x}{\partial v}\triangle v + o(\rho_1),\\ \triangle y &= \frac{\partial y}{\partial t}\triangle t + \frac{\partial y}{\partial v}\triangle v + o(\rho_1),\\ \triangle z &= \frac{\partial z}{\partial t}\triangle t + \frac{\partial z}{\partial v}\triangle v + o(\rho_1),\end{aligned} \tag{3}$$

при $\rho_1 \to 0$, где $\rho_1 = \sqrt{\triangle t^2 + \triangle v^2}$, а частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial v}$$

берутся в точке (t, v). Подставим (3) в (2). Получим

$$\triangle u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right)\triangle t +$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\triangle v + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot o(\rho_1) +$$

$$+\varepsilon_1\cdot\triangle x + \varepsilon_2\cdot\triangle y + \varepsilon_3\cdot\triangle z = \frac{\partial F}{\partial t}\triangle t + \frac{\partial F}{\partial v}\triangle v + o(\rho_1),\ \text{при } \rho_1 \to 0. \tag{4}$$

Последнее равенство вытекает из следующих соображений:

1. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ берутся в точке (x, y, z), т.е. представляют собой постоянные числа, дающие при умножении на $o(\rho_1)$ снова величину $o(\rho_1)$.

2. $|\triangle x| \le const\cdot\rho_1, |\triangle y| \le const\cdot\rho_1, |\triangle z| \le const\cdot\rho_1$. Это непосредственно вытекает из формул (3).

3. Все $\varepsilon_i \to 0$ при $\rho_1 \to 0$. Действительно, $\varepsilon_i \to 0$ при $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0, \triangle z \to 0$. Но все функции $x = \varphi(t, v),\ y = \psi(t, v),\ z = \chi(t, v)$ дифференцируемы, а следовательно, и непрерывны в точке (t, v), поэтому $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ стремятся к нулю при $\rho_1 \to 0$.

4. Каждое произведение $\varepsilon_1\triangle x, \varepsilon_2\triangle y, \varepsilon_3\triangle z$ является величиной $o(\rho_1)$, что непосредственно следует из пп. 2 и 3.

Теорема 2 доказана.

Формула конечных приращений для функции многих переменных

Ограничимся рассмотрением функции трех переменных (распространение излагаемых в данном разделе фактов на n -мерный случай производится по аналогии).

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в замкнутой области D и дифференцируема в любой внутренней точке этой области. Рассмотрим две точки, которые можно соединить прямолинейным отрезком M_0M_1, целиком лежащим в области $D(M_0 = (x_0, y_0, z_0), M_1 = (x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y, z_0 + \triangle z))$.

Теорема 1. В перечисленных условиях имеет место формула (конечных приращений):

$$\triangle u = \triangle f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y, z_0 + \triangle z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= f'_x(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y, z_0 + \theta\triangle z) \cdot \triangle x + f'_y(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y,$$

$$z_0 + \theta\triangle z) \cdot \triangle y + f'_z(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y, z_0 + \theta\triangle z) \cdot \triangle z,\ 0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Пусть $x = x_0 + t \cdot \triangle x, y = y_0 + t \cdot \triangle y, z = z_0 + t \cdot \triangle z, t \in [0, 1]$. Очевидно, что точка $(x, y, z) \in M_0M_1$. Сложная функция от $tF(t) = f(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y, z_0 + t \cdot \triangle z)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и на интервале $(0, 1)$ имеет производную, которая равна:

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y, z_0 + t \cdot \triangle z) \cdot \triangle x+$$

$$+f'_y(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y, z_0 + t \cdot \triangle z) \cdot \triangle y + f'_z(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y,$$

$$z_0 + t \cdot \triangle z) \cdot \triangle z, \text{так как } \frac{dx}{dt} = \triangle x, \frac{dy}{dt} = \triangle y, \frac{dz}{dt} = \triangle z. \tag{5}$$

Применяя к функции $F(t)$ формулу конечных приращений для скалярных функций, определенных на $[0, 1]$, запишем

$$F(1) - F(0) = F'(\theta),\ \text{где } 0 < \theta < 1 \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$F(1)-F(0)=f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y,z_0+\triangle z)-f(x_0,y_0,z_0)=$$
$$=f'_x(x_0+\theta\triangle x,y_0+\theta\triangle y,z_0+\theta\triangle z)\cdot\triangle x+f'_y(x_0+\theta\triangle x,y_0+\theta\triangle y,$$
$$z_0+\theta\triangle z)\cdot\triangle y+f'_z(x_0+\theta\triangle x,y_0+\theta\triangle y,z_0+\theta\triangle z)\cdot\triangle z,\ 0<\theta<1.$$

Теорема 1 доказана.

§4.5 ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим функцию $u=f(x_1,...,x_n)$ заданную на открытом множестве $G\subset\mathbf{R}_n$.

Определение 1. Если переменные $x_1,...,x_n$ не являются функциями от некоторых других переменных, то говорят, что функция $u=f(x_1,...,x_n)$ есть функция независимых переменных $x_1,...,x_n$.

2. Если переменные $x_i=\varphi_i(t_1,...,t_m),\ i=1,...,n$, то говорят, что функция $u=f(x_1,...,x_n)$ есть функция зависимых переменных $x_1,\ ...,x_n$.

Теорема (Свойство инвариантности формы дифференциала первого порядка. Дифференциал первого порядка функции $u=f(x_1,\ ...,x_n)$ в случае зависимых переменных $x_i=\varphi_i(t_1,...,t_m),i=1,...,n$, соответствующий приращениям $dt_1,...,dt_m$, сохраняет форму записи (в терминах переменных $x_1,...,x_n$) дифференциала первого порядка в случае независимых переменных $x_1,...,x_n$, т.е.

$$du=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i,\ \text{где}\ dx_i=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial t_k}dt_k.$$

Здесь мы предполагали, что функция $u=f(x_1,...,x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1,...,x_n), x_i=\varphi_i(t_1,...,\ t_m)$, а функции $x_i=\varphi_i(t_1,...,t_m)$ - дифференцируемы в точке $(t_1,...,t_m)$.

Доказательство. По теореме 1 из раздела "Дифференцирование сложной функции"имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_k},k=1,...,m. \tag{1}$$

По теореме 2 раздела "Дифференцирование сложной функции" сложная функция $u = f(\varphi_1(t_1, ..., t_m), ..., \varphi_n(t_1, ..., t_m))$ будет дифференцируема в точке $(t_1, ..., t_m)$. Поэтому существует ее дифференциал 1-го порядка:

$$du = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k.$$

Подставим сюда выражение для $\frac{\partial u}{\partial t_k}$ (см (1)):

$$du = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k} \right) dt_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial t_k} dt_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i.$$

Теорема доказана.

§4.6 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ определена в открытом множестве $G \subset \mathbf{R}_n$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существует в каждой точке G. Если функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ имеет в некоторой точке $M \in G$ частную производную по аргументу x_k, то эту частную производную называют <u>второй частной производной (или частной производной второго порядка) функции f в точке M сначала по аргументу x_i, а затем по x_k</u> и обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, u''_{x_i x_k}, u^{(2)}_{x_i x_k}, f''_{x_i x_k}, f^{(2)}_{x_i x_k}.$$

Если $i \neq k$, то частная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ называется <u>смешанной частной производной второго порядка</u>. Если $i = k$, принято использовать обозначения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, u''_{x_i^2}, u^{(2)}_{x_i^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, f''_{x_i^2}, f^{(2)}_{x_i^2}.$$

После определения понятия второй частной производной можно ввести понятие третьей частной производной, затем четвертой и т.д. например, соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i}$$

определяет частную производную третьего порядка по аргументам x_i, x_k, x_j, а соотношение $\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_{m-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right) = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}$ определяет частную производную m-го порядка по аргументам $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$. Здесь мы предполагаем, что $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_{m-1}} \ldots \partial x_{i_1}}$ определена как функция во всех точках множества G и имеет частную производную по аргументу x_{i_m} в точке $M \in G$.

Обычно пользуются обозначениями:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i \ldots \partial x_i} = \frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial z \partial y^2 \partial z^2 \partial x}.$$

Пример. $u = x^4 y^3 z^2$

$$u'_x = 4x^3y^3z^2, u'_y = 3x^4y^2z^2, u'_z = 2x^4y^3z, u''_{xy} = 12x^3y^2z^2,$$

$$u''_{yx} = 12x^3y^2z^2, u''_{zx} = 8x^3y^3z \text{ и т.д.}.$$

Во многих важных случаях операции частного дифференцирования можно законно менять местами без изменения результата.

Теорема 1.Пусть на открытом множестве задана функция $f(x,y)$. Если она имеет в точке (x,y) непрерывные смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx}, то они равны между собой в этой точке: $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Доказательство.

$$\triangle_{xh}(\triangle_{yh} f) = \triangle_{xh}[f(x,y+h) - f(x,y)] = f(x+h,y+h) -$$
$$- f(x+h,y) - f(x,y+h) + f(x,y).$$
$$\triangle_{yh}(\triangle_{xh} f) = \triangle_{yh}[f(x+h,y) - f(x,y)] = f(x+h,y+h) -$$
$$- f(x,y+h) - f(x+h,y) + f(x,y).$$

Таким образом,

$$\triangle_{xh}(\triangle_{yh} f) = \triangle_{yh}(\triangle_{xh} f). \quad (1)$$

По условию теоремы в точке (x, y) существуют непрерывные смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx}. Следовательно, f''_{xy}, f''_{yx} существуют в некоторой окрестности точки $(x, y) : U((x, y))$. Пусть приращение h такое, что мы не можем выйти из $U((x, y))$, придавая его переменным x, y. Запишем цепочку равенств (пояснения ниже):

$$\triangle_{yh}(\triangle_{xh}f) = \triangle_{yh}[f(x+h, y) - f(x, y)] = [f(x+h, y+h) - f(x, y+h)]-$$

$$-[f(x+h, y) - f(x, y)] = h[f'_y(x+h, y+\theta h) - f'_y(x, y+\theta h)] =$$

$$= h^2 f''_{yx}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2[f''_{yx}(x, y) + \varepsilon], \tag{2}$$

где $0 < \theta < 1, 0 < \theta_1 < 1, \varepsilon \to 0$ при $h \to 0$.

Производная f''_{yx} непрерывна в точке (x, y), поэтому она существует в $U((x, y))$ и автоматически в этой окрестности существует f'_y. При достаточно малом h мы не выходим из $U((x, y))$, поэтому мы можем применить формулу конечных приращений Лагранжа к функции $f(x+h, y) - f(x, y)$, что доказывает третье равенство в (2). Предпоследнее равенство есть результат применения формулы конечных приращений Лагранжа к функции $f'_y(x, y+\theta h)$, что законно, потому что в $U((x, y))$ существует f''_{yx}. Последнее равенство в (2) выражает, что f''_{yx} непрерывна в точке (x, y).

Из (2) следует

$$\lim_{h\to 0} \frac{\triangle_{yh}(\triangle_{xh}f)}{h^2} = f''_{yx}(x, y). \tag{3}$$

Аналогично доказывается, с использованием непрерывности f''_{xy} в точке (x, y), равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{\triangle_{xh}(\triangle_{yh}f)}{h^2} = f''_{xy}(x, y). \tag{4}$$

Из (1), (3), (4) следует, что $f''_{yx} = f''_{xy}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 имеет слишком частный вид. Сформулируем более общую теорему. Пусть дан целочисленный вектор $k = (k_1, ..., k_n), k_i \geq 0, i = 1, ..., n$.

Определение. Говорят, что частная производная подчиняется вектору $\underline{k}$, если при любом $i = 1, ..., n$, при ее вычислении оперция $\frac{\partial}{\partial x_i}$ применяется не более чем k_i раз. Если, в частности, $k_i = 0$, то операция $\frac{\partial}{\partial x_i}$ не применяется.

Теорема 2. Если все подчиненные вектору k частные производные функции $f(x_1, ..., x_n)$ непрерывны в точке $(x_1, ..., x_n)$, то в любой из них можно переставить порядок дифференцирования как угодно, не изменяя результата.

Доказательство этой теоремы во всей общности является довольно громоздким, поэтому мы ограничимся только примером. Производная $\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$ подчинена вектору $(1, 1, 2)$. По условию теоремы эта производная и все частные производные подчиненные вектору $(1, 1, 2)$, непрерывны по (x, y, z), поэтому, пользуясь теоремой 1 и определением частной производной, мы получим равенства:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}. \qquad (*)$$

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Провести подробное пояснение цепочки равенств (*). Литература: [2], гл. 7, §7.7, стр. 224.

---

§ 4.7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ФУНКЦИИ n ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 1. Функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ называется n раз дифференцируемой в точке $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, если все ее частные производные порядка $n-1$ являются функциями дифференцируемыми в этой точке.

Замечание. Если функция дифференцируема n раз в точке $\mathbf{x}$, то она дифференцируема в этой точке и $n-1$ раз.

Из теоремы о достаточном условии дифференцируемости функции $u = f(x_1, ..., x_n)$ и определения 1 вытекает следующее утверждение

Теорема. Для того, чтобы функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ была n раз дифференцируема в точке $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, достаточно, чтобы все ее частные производные n-го порядка были непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Определение 2. Если функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ дважды дифференцируема в точке $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, то дифференциал второго порядка (или второй дифференциал) от функции u, соответствующий независимым приращениям $dx_1, ..., dx_n$, определяется равенством:

$$d^2u = d(du).$$

Мы рассматриваем $dx_1, ..., dx_n$ как постоянные, не зависящие от $x_1, ..., x_n$. Поэтому

$$d^2u = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} dx_j\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i.$$

Заметим, что существование $d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ следует из дифференцируемости $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ при любом $i = 1, ..., n$.

Определение 3. Если функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ l раз дифференцируема в точке $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, то дифференциал l-го порядка (или l-й дифференциал) от функции u, соответствующий независимым приращениям $dx_1, ..., dx_n$, определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения $d^l u = d(d^{l-1}u), l = 2, 3, ...$

Рассуждая как в (1), легко получить

$$d^3u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx_k dx_j dx_i.$$

Замечание. В выражении первого дифференциала условно "вынесем букву u за скобки". Тогда его символически можно записать:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot u.$$

Теперь, если в выражении для второго дифференциала также "вынести u за скобки", то остающиеся в скобках выражение формально представляет в раскрытом виде квадрат выражения $\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$; поэтому второй дифференциал можно записать так:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 \cdot u.$$

Аналогично можно записать третий дифференциал и т.д. Это правило общее: при любом k имеет место символическое равенство:

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k \cdot u,$$

которое можно понимать так: сначала многочлен, стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены "умножаются"на u (которое дописывается в числителях при ∂^k), и только после того всем символам возвращается их значение как производных и дифференциалов.

§ 4.8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, ..., x_n)$, заданную на открытом множестве $G \in \mathbf{R}$. Пусть $x_i = \varphi_i(t_1, ..., t_m)$, $i = 1, ..., n$, т.е. являются зависимыми переменными. Мы знаем, что форма дифференциала первого порядка обладает свойством инвариантности, т.е. дифференциал первого порядка от u выражается через зависимые переменные так же, как через независимые. Исследуем этот вопрос в случае дифференциала второго порядка. Допустим, что функция u дважды дифференцируема в точке $(x_1, ..., x_n), x_i = \varphi_i(t_1, ..., t_m), i = 1, ..., n$, а функции $x_i = \varphi_i(t_1, ..., t_m)$ - дважды дифференцируемы в точке $(t_1, ..., t_m)$.

Придадим переменным $t_1, ..., t_m$ приращения $dt_1, ..., dt_m$. Тогда зависимые переменные $x_1, ..., x_n$ получат соответствующие приращения $dx_1, ..., dx_n$. По свойству инвариантности дифференциала первого порядка:

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i, \text{ где } dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial t_k} dt_k.$$

Мы видим, что теперь dx_i являются не постоянными величинами, как в случае независимых переменных, а уже зависят от $t_1, ..., t_m$, так как в dx_i входят $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$. Найдем дифференциал второго порядка от функции u, соответствующий приращениям $dt_1, ..., dt_m$, записывая его через дифференциалы зависимых переменных

$$d^2u = d(du) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} dx_j\right) dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_i} d^2 x_i\right) = \qquad (*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} d^2 x_i.$$

Таким образом, мы видим, что свойство инвариантности формы дифференциала второго порядка теряется. То же самое можно сказать и для дифференциала третьего порядка и т.д. Выражение (*) дает нам формулу записи дифференциала второго порядка функции u как сложной функции. Действуя аналогично, можно записать d^3u, d^4u и т.д. в случае сложной функции.

Замечание. Нельзя сказать, что свойство инвариантности формы не сохраняется для дифференциалов высших порядков всегда. Имеется важный частный случай, когда свойство инвариантности формы дифференциалов любого порядка имеет место. Пусть $x_i = a_{i0} + a_{i1}t_1 + ... + a_{im}t_m, i = 1, ..., n, a_{ij} \in \mathbf{R}$, т.е. x_i - линейная функция от $t_1, ..., t_m$. Тогда $dx_i =$

$a_{i1}dt_1 + ... + a_{im}dt_m$. Теперь видно, что при постоянных $dt_1, ..., dt_m$ оказываются постоянными дифференциалы $dx_1, ..., dx_n$ и, следовательно, с ними можно поступать как с дифференциалами независимых переменных. В результате формулы для дифференциалов всех порядков окажутся такого же вида, как если бы $x_1, ..., x_n$ были независимыми переменными.

§4.9 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.

Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$, заданную на открытом множестве $G \subset \mathbf{R}_n$.

Теорема. Если функция $f(x_1, ..., x_n)$ имеет непрерывные частные производные порядка l на множестве G, то в окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in G$ справедлива формула

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_k=1}^{n} (x_{j_1} - x_{j_1}^0)...(x_{j_k} - x_{j_k}^0) \frac{\partial^k f(\mathbf{x^0})}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} + R_l(\mathbf{x}), \qquad (*)$$

$$\text{где } R_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{l!} \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_l=1}^{n} (x_{j_1} - x_{j_1}^0)...(x_{j_k} - x_{j_l}^0) \frac{\partial^l f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_l}},$$

которая называется формулой Тейлора функции n переменных в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Пусть $U_\delta(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \delta\}$ и $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(\mathbf{x}^0) \subset G$.

Введем вспомогательную функцию $F(t) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), ..., x_n^0 + t(x_n - x_n^0))$ от переменной $t \in [0, 1]$ (здесь $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{x}^0)$). Очевидно, что $F(0) = f(\mathbf{x}^0), F(1) = f(\mathbf{x})$. Согласно теореме о производной сложной функции:

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0) \frac{\partial f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_j} \qquad (1)$$

Далее,

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0) \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0) \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_k \partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_k \partial x_j} \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$F'(0) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}, \tag{3}$$

$$F''(0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j}. \tag{4}$$

Рассуждая по индукции, мы придем к производной

$$F^{(l)}(t) = \sum_{j_1=1}^{n}...\sum_{j_l=1}^{n}(x_{j_1} - x_{j_1}^0)...(x_{j_l} - x_{j_l}^0)\frac{\partial^l f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_l}}.$$

Отсюда следует

$$F^l(0) = \sum_{j_1=1}^{n}...\sum_{j_l=1}^{n}(x_{j_1} - x_{j_1}^0)...(x_{j_l} - x_{j_l}^0)\frac{\partial^l f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_l}}. \tag{5}$$

$F^{(l)}(t)$ будет непрерывна, так как, по условию, непрерывны частные производные $\frac{\partial^l f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_l}}$. Поэтому функцию $F(t)$ можно разложить по формуле Тейлора для одной переменной

$$F(t) = \sum_{k=0}^{l-1}\frac{t^k}{k!}F^{(k)}(0) + r_l(t),$$

где $r_l(t) = \frac{t^l}{l!}F^{(l)}(\theta t), 0 < \theta < 1, \theta$ - зависит от $\mathbf{x}$ и t. Взяв данную формулу при $t = 1$, получим

$$F(1) = \sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}F^{(k)}(0) + R_l(\mathbf{x}),\ \text{где } R_l(\mathbf{x}) = r_l(1) = \frac{1}{l!}F^{(l)}(\theta).$$

Отсюда с учетом (3)-(5) вытекает нужное нам разложение (*). Теорема доказана.

Замечания. 1. Рассмотрим сумму

$$\sum_{j_1=1}^{n}...\sum_{j_k=1}^{n}(x_{j_1}-x_{j_1}^0)...(x_{j_k}-x_{j_k}^0)\frac{\partial^k f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_k}}$$

"Вынесем формально $f(\mathbf{x}^0)$ за знак суммы":

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}...\sum_{j_k=1}^{n}(x_{j_1}-x_{j_1}^0)...(x_{j_k}-x_{j_k}^0)\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_k}}\right)f(\mathbf{x}^0)=$$

$$=\left(\sum_{j_1=1}^{n}...\sum_{j_k=1}^{n}(x_{j_1}-x_{j_1}^0)...(x_{j_k}-x_{j_k}^0)\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}...\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)f(\mathbf{x}^0).$$

Выражение в скобках формально представляет собой в раскрытом виде k-ю степень выражения

$$(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_n-x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Поэтому формуле Тейлора можно придать следующий вид:

$$f(\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_n-x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k\cdot f(\mathbf{x}^0)+$$

$$+\frac{1}{l!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_n-x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^l\cdot f(\mathbf{x}^0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)),0<\theta<1.$$

Запись эта чисто формальная и ее следует понимать так: сначала многочлен, стоящий в квадратных скобках формально возводится в степень k, затем все полученные члены "умножаются"на $f(\mathbf{x}^0)$ ($f(\mathbf{x}^0)$ дописывается в числителях при ∂^k), и только после этого всем символам возвращается их значение как производных.

2. Формула Тейлора часто употребляется в случае $l=1,2$. При $l=1$ она имеет вид

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}^0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x}^0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0))}{\partial x_j}(x_j-x_j^0)$$

и представляет собой обобщение одномерной формулы конечных приращений Лагранжа на n-мерный случай.

При $l = 2$ она записывается в следующем виде:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}(x_j - x_j^0) + R_2;$$

$$R_2 = \frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_k \partial x_j}(x_k - x_k^0)(x_j - x_j^0) = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j}(x_k - x_k^0)(x_j - x_j^0) + \varepsilon\rho^2,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2} \to 0$. Действительно, так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ непрерывна, то

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j} + \varepsilon_{kj},$$

где $\varepsilon_{kj} \to 0$ при $\rho \to 0$. Пусть $\eta = \max |\varepsilon_{kj}|$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_k - x_k^0)(x_j - x_j^0)\varepsilon_{kj}\right| \leq \frac{1}{2!}\eta\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_k - x_k^0||x_j - x_j^0| =$$

$$\frac{\eta}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_k^0|\right)^2 \leq \frac{n\eta}{2}\rho^2.$$

Здесь мы использовали неравенство $\sum\limits_{1}^{n}|a_j| \leq \sqrt{n}\left(\sum\limits_{1}^{n}|a_j|^2\right)^{1/2}$, которое получается из неравенства Буняковского

$$\left|\sum_{1}^{n} x_j y_j\right|^2 \leq \left(\sum_{1}^{n} x_j^2\right) \cdot \left(\sum_{1}^{n} y_j^2\right) \text{ при } x_j = |a_j| \text{ и } y_j = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_k-x_k^0)(x_j-x_j^0)\varepsilon_{kj}=\varepsilon\rho^2,$$

где $|\varepsilon|<\frac{n}{2}\eta\to 0$ при $\rho\to 0$. Формула (1) доказана.

Заметим также, что сумма из (1)

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k\partial x_j}(x_k-x_k^0)(x_j-x_j^0)$$

есть дифференциал второго порядка функции f, взятый в точке $\mathbf{x}^0$ относительно приращений $(x_1-x_1^0),...,(x_n-x_n^0)$.

§4.10 ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ n ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть на открытом множестве $G\subset\mathbf{R}_n$ задана функция $f(\mathbf{x})=f(x_1,...,x_n)$.

Определения. 1°. Говорят, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0\in G$ локальный максиум (минимум), если существует $\delta>0$ такое, что для любых $\mathbf{x}$,для которых $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|<\delta$, функция f определена и подчиняется неравенству $f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{x}^0)$ $(f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{x}^0))$.

2°. Говорят, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум, если она имеет в этой точке локальный максимум, либо локальный минимум.

Установим необходимые условия локального экстремума функции f, обладающей в данной точке $\mathbf{x}^0$ частными производными первого порядка по всем переменным.

Теорема. Если функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум и имеет в ней частные производные первого порядка, то последние равняются в этой точке нулю:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}=0, j=1,...,n.$$

Доказательство. Положим у функции $f(x_1,...,x_n)$ $x_1=x_1^0,...,x_{j-1}=x_{j-1}^0, x_{j+1}=x_{j+1}^0,...,x_n=x_n^0$. При этом мы получим функцию

$f(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, ..., x_n^0)$ одной переменной x_j. Производная этой функции одной переменной в точке $x_j = x_j^0$ совпадает с частной производной $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}$. Так как по условию f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум, то указанная функция одной переменной имеет локальный экстремум в точке $x_j = x_j^0$, и поэтому производная этой функции одной переменной в точке $x_j = x_j^0$, совпадающая с частной производной $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}$, равна нулю.

Замечание. Если функция дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то дифференциал df этой функции в точке $\mathbf{x}^0$ равен нулю тождественно относительно дифференциалов независимых переменных $dx_1, ..., dx_n$.

Действительно, так как

$$df = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} dx_n,$$

то из равенств $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j} = 0$ вытекает, что при любых $dx_1, ..., dx_n$ справедливо (в точке $\mathbf{x}^0$) равенство $df = 0$.

Перейдем к выяснению достаточных условий локального экстремума. Пусть функция f имеет в окрестности $U_\delta(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \delta\}$ непрерывные частные производные второго порядка и равные нулю в точке $\mathbf{x}^0$ первые частные производные. Тогда, согласно замечанию 2 к формуле Тейлора, разложение f по формуле Тейлора имеет вид:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j} (x_k - x_k^0)(x_j - x_j^0) + \varepsilon \rho^2,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho = \sqrt{\sum\limits_1^n (x_j - x_j^0)^2} \to 0$. Обозначим:

$$a_{kj} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j}, \xi_k = x_k - x_k^0.$$

Тогда

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_k\xi_j + \varepsilon\rho^2, \text{ где } \varepsilon \to 0 \text{ при } \rho = (\sum_1^n \xi_k^2)^{1/2} \to 0.$$

Квадратичная форма $A(\xi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_k\xi_j$ может обладать одним из четырех свойств:

1) $A(\xi)$ <u>положительно определенна</u>, т.е. $A(\xi) > 0$ для любых $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ с $\rho > 0$.

2) $A(\xi)$ <u>отрицательно определенна</u>, т.е. $A(\xi) < 0$ для любых ξ с $\rho > 0$.

3) $A(\xi)$ <u>неотрицательно определенна</u>, т.е. $A(\xi) \geq 0$ для любых ξ или $A(\xi)$ <u>неположительно определенна</u>, т.е. $A(\xi) \leq 0$ для любых ξ и при этом существует точка $\xi' = (\xi_1', ..., \xi_n')$ с $\rho' = \sum_1^n \xi_k'^2 > 0$ такая, что $A(\xi') = 0$.

4) $A(\xi)$ <u>не определенна</u>, т.е. существуют такие ξ' и ξ'', что $A(\xi') > 0, A(\xi'') < 0$.

<u>Теорема.</u> 1) Если форма $A(\xi)$ положительно определенна, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный минимум.
2) Если форма $A(\xi)$ отрицательно определенна, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный максимум.
3) Если форма $A(\xi)$ не определенна, то f не имеет экстремума в точке $\mathbf{x}^0$.
4) Если форма $A(\xi)$ неотрицательно или неположительно определенна, то вопрос остается открытым - при данной информации f может иметь в точке $\mathbf{x}^0$ экстремум, но может и не иметь его.

<u>Доказательство.</u> Положим для ξ с $\rho > 0 : \frac{\xi}{\rho} = \eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, т.е. $\eta_j = \frac{\xi_j}{\rho}, j = 1, ..., n$. Тогда можно записать

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_k\xi_j + \varepsilon\rho^2 = \rho^2\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\xi_k}{\rho}\frac{\xi_j}{\rho} + \varepsilon\right) =$$

$$= \rho^2 \left(\frac{1}{2} \Phi(\eta) + \varepsilon \right), \quad \Phi(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \eta_k \eta_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2 = \frac{1}{\rho^2} \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1.$$

Таким образом, функция $\Phi(\eta)$ задана на шаровой поверхности $\sum\limits_{1}^{n} \eta_j^2 = 1$, представляющей собой ограниченное замкнутое множество (обозначим его σ). Нетрудно показать, что $\Phi(\eta)$ непрерывна на σ. Пусть $\eta^0 = (\eta_1^0, ..., \eta_n^0)$ - произвольная точка множества σ. $\Phi(\eta)$ будет непрерывна в точке η^0, если $\forall \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0, \forall \eta \in \sigma$

$$(\|\eta - \eta^0\| < \delta \Rightarrow |\Phi(\eta) - \Phi(\eta^0)| < \varepsilon_0).$$

Убедимся в этом. Пусть $\|\eta - \eta^0\| < \delta$. Тогда, для любых $k = 1, ..., n$: $|\eta_k - \eta_k^0| < \delta$.

$$|\Phi(\eta) - \Phi(\eta^0)| = |\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (\eta_k \eta_j - \eta_k^0 \eta_j^0)| \leq$$

$$\leq a \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (|\eta_k - \eta_k^0||\eta_j - \eta_j^0| + |\eta_j^0||\eta_k - \eta_k^0| + |\eta_k^0||\eta_j - \eta_j^0|) \leq$$

$$\leq an^2(\delta^2 + 2\delta).$$

Здесь $a = \max\limits_{k,j} |a_{kj}|$. Очевидно, существует такое $\delta > 0$, что $an^2(\delta^2 + 2\delta) < \varepsilon_0$. Непрерывность $\Phi(\eta)$ доказана.

В случае 1) $\Phi(\eta) > 0$ на σ. Так как σ замкнутое ограниченное множество и $\Phi(\eta)$ непрерывна на σ, то существует $\min\limits_{\eta \in \sigma} \Phi(\eta) = \Phi(\tilde{\eta}) = m > 0, \tilde{\eta} \in \sigma$. Далее, так как $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta : |\varepsilon| < \frac{m}{4}$. Тогда для $0 < \rho < \delta$:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) > \rho^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right) = \frac{m}{4} \rho^2 > 0,$$

т.е. в точке $\mathbf{x}^0$ f имеет локальный минимум.

Случай 2) доказывается аналогично. $\Phi(\eta) < 0$ на σ, поэтому, так как σ замкнутое ограниченное множество и $\Phi(\eta)$ непрерывна на σ, существует $\max\limits_{\eta\in\sigma}\Phi(\eta) = \Phi(\tilde{\eta}) = -M, (M > 0, \tilde{\eta} \in \sigma)$. Для достаточно малого $\delta > 0$, для всех $0 < \rho < \delta : |\varepsilon| < \frac{M}{4}$. Поэтому для $0 < \rho < \delta$:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) < \rho^2 \left(-\frac{M}{2} + \frac{M}{4}\right) = -\frac{M}{4}\rho^2 < 0,$$

т.е. f имеет в точке $\mathbf{x}$ локальный максимум.
В случае 3), по условию, существует точка ξ', для которой $A(\xi') > 0$ и точка ξ'', для которой $A(\xi'') < 0$. Следовательно, для соответствующих точек η', η'' будут выполняться неравенства $\Phi(\eta') > 0, \Phi(\eta'') < 0$ и, при достаточно малых ρ, ε будет настолько мало, что $\frac{1}{2}\Phi(\eta') + \varepsilon > 0, \frac{1}{2}\Phi(\eta'') + \varepsilon < 0$, т.е. в любой малой окрестности точки $\mathbf{x}^0$ имеются точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}''(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0 = \xi', \mathbf{x}'' - \mathbf{x}^0 = \xi'')$, для которых

$$f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^0) = \rho^2(\frac{1}{2}\Phi(\eta') + \varepsilon) > 0,$$

$$f(\mathbf{x}'') - f(\mathbf{x}^0) = \rho^2(\frac{1}{2}\Phi(\eta'') + \varepsilon) < 0,$$

это значит, что f не имеет в $\mathbf{x}^0$ экстремума.
В случае 4) форма $A(\xi)$ для некоторой точки $\xi' \neq 0$ равна нулю. Но тогда, в силу однородных свойств формы, $A(\alpha\xi') = 0$, при любом числе α. Следовательно, для всех точек $\mathbf{x}' = \alpha\xi'$ мы имеем

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^0) = \varepsilon\rho^2 \qquad (*)$$

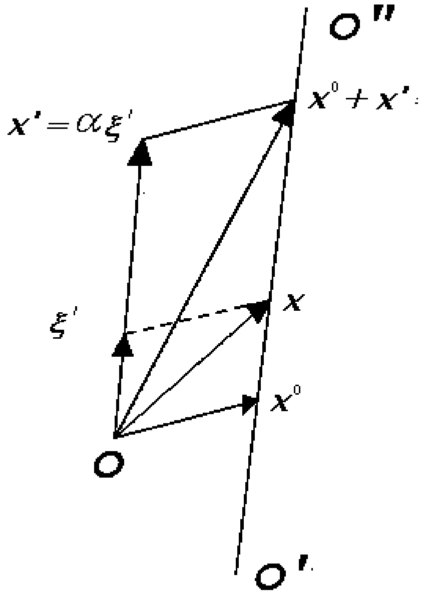


Рис. 4

(Из рис.4 видно, что все точки $\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}'$, для которых справедливо (*) лежат на луче $O'O''$.) Так как знак ε нам не известен, то для точек вида $\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}'$ мы не знаем знака разности $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}^0)$ и следовательно мы не можем сказать имеет f в $\mathbf{x}^0$ экстремум или нет. Единственное, что мы можем сказать, это то, что если форма $A(\xi) \not\equiv 0$ и неотрицательно определенна, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть максимума, или, если $A(\xi) \not\equiv 0$ и неположительно определенна, то в $\mathbf{x}$ не может быть минимума.

Действительно, в точках вида $\mathbf{x}' = \alpha\xi'$ мы не можем определить знак разности $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}^0)$, но в то же время существует точка ξ с $\rho > 0$ такая, что $A(\xi) > 0$. Следовательно, $\Phi(\eta) > 0$ и при достаточно малом ρ, ε будет таким малым, что $\frac{1}{2}\Phi(\eta) + \varepsilon > 0$, т.е. в любой малой окрестности точки $\mathbf{x}^0$ имеется точка $\mathbf{x}$, для которой $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \rho^2(\frac{1}{2}\Phi(\eta) + \varepsilon) > 0$. Это означает, что в точке $\mathbf{x}^0$ не может быть максимума. Теорема доказана.

Замечание 1. Квадратичная форма $A(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_k\xi_j =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j}(x_k - x_k^0)(x_j - x_j^0)$ есть дифференциал второго порядка функции f в точке $\mathbf{x}^0$, относительно приращений $x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0$.

Замечание 2. Составим ряд главных миноров квадратичной формы $A(\xi)$

$$\Delta_1 = a_{11}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; ...; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По теореме Сильвестра из теории квадратичных форм имеем:

1. Если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$, то форма положительно определенна.

2. Если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$, то форма отрицательно определенна.

3. Если $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, ..., \Delta_n \geq 0$ или $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, ..., (-1)^n \Delta_n \geq 0$ и существует j, при котором $\Delta_j = 0$, то форма неотрицательно определенна или (соответсвенно) неположительно определенна.

4. В остальных случаях форма не определенна.

Рассмотрим двумерный случай. Запишем

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{2}(A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2) + \varepsilon\rho^2,$$

где

$$A = \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}, C = \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}.$$

Ряд главных миноров состоит из двух членов:

$$\Delta_1 = A, \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Следовательно,

$a)$ если $A > 0, AC - B^2 > 0$, то f имеет в $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ локальный минимум;

$b)$ если $A < 0, AC - B^2 > 0$, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный максимум;

$c)$ если $AC - B^2 = 0$, то неизвестно, есть ли экстремум;

$d)$ если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет.

Доказательство пунктов $a), b), c), d)$ рекомендуется провести самостоятельно.

Глава V.
НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.

§5.1 СУЩЕСТВОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Во многих задачах естествознания возникает ситуация, когда некоторая переменная U, являющаяся функцией аргументов $x_1, ..., x_n$, задаётся посредством функционального уравнения

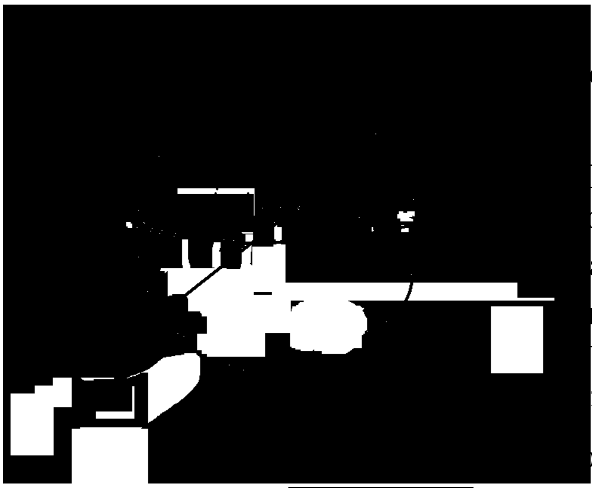
$$F(U, x_1, ..., x_n) = 0.$$

Определение. Говорят, что U как функция от $x_1, ..., x_n$ задана неявно, если зависимость U от $x_1, ..., x_n$ задается посредством функционального уравнения $F(U, x_1, ..., x_n) = 0$.

Нас будут интересовать, естественно возникающие вопросы:

1. При каких условиях уравнение $F(U, x_1, x_2) = 0$ однозначно разрешимо относительно U, то есть определяет явную функцию $U = \varphi(x_1, ..., x_n)$?
2. При каких условиях эта явная функция $U = \varphi(x_1, ..., x_n)$ является непрерывной и дифференцируемой?

Чтобы убедиться в непростоте заданных вопросов приведем пример.



ассмотрим функциональное уравение $F(U, x_1, x_2) = U^2 + x_1^2 + x_2^2 -$ $= 0$. Это уравнение определяет в ространстве переменных (U, x_1, x_2) феру S радиуса 1, с центром в ачале координат (см. рис.1). Очеидно, функциональное уравнение $(U, x_1, x_2) = 0$ определяет в круге ${}^2_1 + x_2^2 \leq 1$ бесконечно много явных ункций.

Например, $U = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$; $U = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$; $U = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

при $x_1, x_2 \geq 0$ и $U = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ при остальных $x_1, x_2 \in \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. При каких же условиях существует единственная явная функция, удовлетворяющая уравнению $F(U, x_1, x_2) = U^2 + + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Зафиксируем на сфере S произвольную точку $M_0 = (u^0, x_1^0, x_2^0)$, не лежащую в плоскости Ox_1x_2, т.е. такую, что $U^0 \neq 0$. Рассмотрим достаточно малую окрестность точки $M_0 : U(M_0)$. Очевидно, что окрестность $U(M_0)$ однозначно проектируется на плоскость Ox_1x_2 (см. рис.1). Аналитически это означает, что если функцию $F(U, x_1, x_2) = U^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ рассматривать только в $U(M_0)$, то уравнение $F(U, x_1, x_2) = U^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ однозначно разрешимо относительно U и определяет единственную явную функцию $U = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ при $U^0 > 0$ и, соответственно, $U = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, при $U^0 < 0$. Если же на сфере S взять точку $M_1 = (0, x_1, x_2)$, то очевидно, что часть сферы S, лежащая в любой окрестности точки M_1, неоднозначно проектируется на плоскость Ox_1x_2. Аналитически это означает, что если функцию $F(U, x_1, x_2) = U^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ рассматривать в любой окрестности точки M_1, то уравнение $F(U, x_1, x_2) = U^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ не является однозначно разрешимым относительно U. Заметим, что частная производная $\frac{\partial F}{\partial U} = 2U$ функции $F(U, x_1, x_2) = U^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ не равна нулю в точке M_0 и равна нулю в точке M_1. Ниже мы увидим, что для однозначной разрешимости относительно U в окрестности точки M_0 уравнения $F(U, x_1, ..., x_n) = 0$ принципиальное значение имеет, что $\frac{\partial F}{\partial U} \neq 0$ в точке M_0.

Существование и дифференцируемость неявно заданной функции

Прежде чем сформулировать теорему, договоримся с целью сокращения записи рассматривать только две переменные x_1 и x_2 и обозначать пространство переменных (U, x_1, x_2) символом R, а пространство (x_1, x_2) символом R'.

Теорема (существования и дифференцируемости неявной функции)

Пусть функция $F(U, x_1, x_2)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0 = (U^0, x_1^0, x_2^0)$, причем $\frac{\partial F}{\partial U}$ непрерывна в точке M_0. Тогда, если в точке M_0 функция $F = 0$, а $\frac{\partial F}{\partial U} \neq 0$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки $M_0' = (x_1', x_2') \in R'$, в пределах которой существует единственная функция $U = \varphi(x_1, x_2)$, удовлетворяющая условию $|U - U^0| < \varepsilon$ и являющаяся решением уравнения

$$F(U, x_1, x_2) = 0 \qquad (*)$$

Причем эта функция непрерывна и дифференцируема в указанной окрестности точки M_0'.

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на три части.

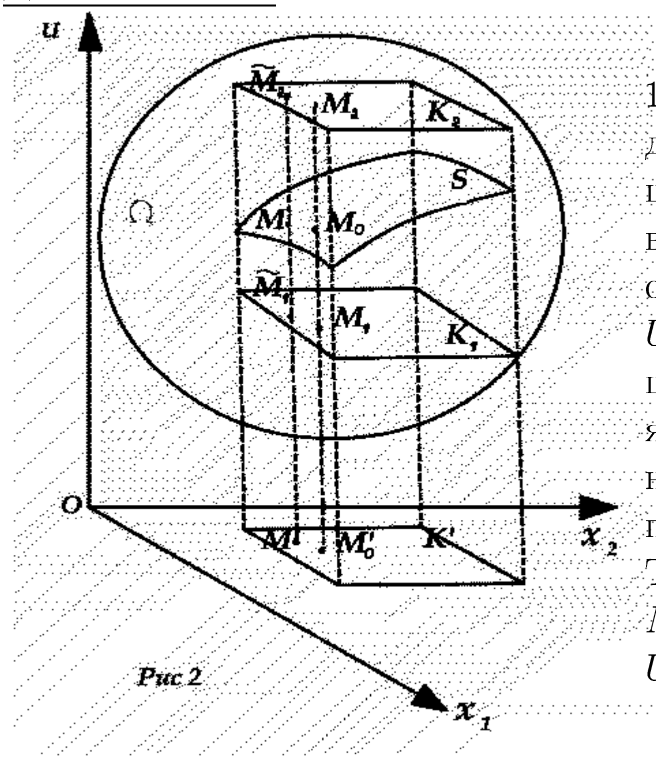


Рис 2

1. Докажем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(M_0')$, в пределах которой существует единственная функция $U = \varphi(x_1, x_2)$, удовлетворяющая условию $|U - U_0| < \varepsilon$ и являющаяся решением уравнения (*). Для определенности положим $\frac{\partial F}{\partial U} > 0$ в точке M_0. Так как $\frac{\partial F}{\partial U}$ непрерывна в точке M_0, то существует окрестность $U(M_0)$, в которой $\frac{\partial F}{\partial U} > 0$.

Пусть $U(M_0)$ имеет вид открытого шара Ω достаточно малого радиуса с центром в точке M_0. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ так, что точки $M_1 = (U^0 - \varepsilon, x_1^0, x_2^0), M_2 = (U^0 + \varepsilon, x_1^0, x_2^0) \in \Omega$.

Рассмотрим $F(U, x_1^0, x_2^0)$ как функцию одной переменной U на отрезке

$[U^0-\varepsilon, U^0+\varepsilon]$. Так как $\frac{\partial F}{\partial U} > 0$ на $[U^0-\varepsilon, U^0+\varepsilon]$, то функция $F(U, x_1^0, x_2^0)$ возрастает на этом отрезке. Но по условию теоремы $F(U, x_1^0, x_2^0) = 0$ при $U = U^0$, поэтому $F(U, x_1^0, x_2^0) < 0$ при $U = U^0 - \varepsilon, F(U, x_1^0, x_2^0) > 0$ при $U = U^0 + \varepsilon$, т.е. $F(M_1) < 0, F(M_2) > 0$. Далее рассмотрим функции $F(U^0-\varepsilon, x_1, x_2), F(U^0+\varepsilon, x_1, x_2)$ двух переменных x_1 и x_2, т.е. рассмотрим функцию $F(U, x_1^0, x_2^0)$ на двух плоскостях, параллельных координатной плоскости Ox_1x_2, первая из которых проходит через точку M_1, а вторая - через точку M_2 (см. рис.2). Так как $F(M_1) < 0, F(M_2) > 0$ и $F(U, x_1, x_2)$ непрерывна в шаре Ω, то существуют окрестности $U(M_1), U(M_2)$, в которых функция F сохраняет знаки точек M_1 и M_2. Возьмем эти окрестности в виде открытых квадратов K_1 и K_2 с центрами соответственно в точках M_1 и M_2 и сторонами, имеющими длину 2δ. Аналитически знакопостоянство F на K_1 и K_2 можно записать так:
$F(U, x_1, x_2) < 0$ при $(U, x_1, x_2) \in K_1 = \{(U, x_1, x_2) :$
$U = U^0 - \varepsilon, |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\};$
$F(U, x_1, x_2) > 0$ при $(U, x_1, x_2) \in K_2 = \{(U, x_1, x_2) :$
$U = U^0 + \varepsilon, |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\};$
δ возьмем таким, что $K_1, K_2 \subset \Omega$ (это всегда можно сделать, так как M_1 и M_2 внутренние точки открытого шара Ω). Пусть $\Pi = \{(U, x_1, x_2) : |U - U^0| < \varepsilon, |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\}$ - открытый прямоугольный параллелепипед с центром в точке M_0. Величины ε и δ подобраны таким образом, что $\Pi \subset \Omega$, поэтому всюду в Π : $\frac{\partial F}{\partial U} > 0$. Кроме этого, $F(U, x_1^0, x_2^0) < 0$ на K_1 - нижней грани Π и $F(U, x_1^0, x_2^0) > 0$ на K_2 - верхней грани Π.

Докажем, что уравнение (*) однозначно разрешимо относительно U, если функцию $F(U, x_1, x_2)$ рассматривать внутри Π. Пусть $M' = (x_1, x_2) \in R'$ удовлетворяет неравенствам

$$|x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta. \tag{1}$$

Покажем, что для координат x_1 и x_2 точки M' существует единственное число $U \in [U^0 - \varepsilon, U^0 + \varepsilon]$ такое, что $F(U, x_1, x_2) = 0$. Зафиксируем x_1 и x_2. Рассмотрим $F(U, x_1, x_2)$ только как функцию аргумента U на отрезке $[U^0-\varepsilon, U^0+\varepsilon]$, т.е. рассмотрим $F(U,x_1,x_2)$ на отрезке $[\tilde{M}_1,\tilde{M}_2]$, где $\tilde{M}_1=(U^0-\varepsilon,x_1,x_2), \tilde{M}_2=(U^0+\varepsilon,x_1,x_2)$. $\frac{\partial F}{\partial U}>0$ на $[U^0-\varepsilon, U^0+\varepsilon]$, поэтому функция F возрастает на отрезке $[\tilde{M}_1,\tilde{M}_2]$. Но у нас есть условие $F(\tilde{M}_1)<0, F(\tilde{M}_2)>0(\tilde{M}_1\in K_1, \tilde{M}_2\in K_2)$, поэтому внутри отрезка $[\tilde{M}_1,\tilde{M}_2]$ существует единственное значение U такое, что $F(U,x_1,x_2)=0$, причем $|U-U^0|<\varepsilon$. Таким образом, мы доказали, что для любой фиксированной пары чисел $(x_1,x_2)\in K'=\{(x_1,x_2):|x_1-x_1^0|<\delta, |x_2-x_2^0|<\delta\}$ существует единственное число U, для которого $F(U,x_1,x_2)=0$ и $|U-U^0|<\varepsilon$.

Описанное правило, ставящее в соответствие каждой точке $M'=(x_1,x_2)$ единственное число $U\in[U^0-\varepsilon,U^0+\varepsilon]$, для которого $F(U,x_1,x_2)=0$, определяет на K' функцию $U=\varphi(x_1,x_2)$. Поэтому нами доказано существование на K' единственной функции $U=\varphi(x_1,x_2)$, удовлетворяющей условию $|U-U^0|<\varepsilon$ и являющейся решением уравнения $F(U,x_1,x_2)=0$.

2. Докажем теперь, что функция $U=\varphi(x_1,x_2)$ непрерывна в любой точке $M'=(x_1,x_2)\in K'$. В любой точке $M'\in K'$ выполняется следующее условие: точке $M'\in K'$ соответствует точка $M=(U,x_1,x_2)\in R$ такая, что функция $F(U,x_1,x_2)$ обращается в нуль в точке M, дифференцируема в некоторой окрестности точки M и имеет в этой окрестности отличную от нуля производную $\frac{\partial F}{\partial U}$. Перечисленные условия совпадают с условиями в точке $M_0'=(x_1^0,x_2^0)$, поэтому достаточно доказать непрерывность функции $U=\varphi(x_1,x_2)$ лишь в точке M_0'. Нам требуется доказать, что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для любых x_1,x_2, удовлетворяющих неравенствам $|x_1-x_1^0|<\delta$, $|x_2-x_2^0|<\delta$, справедливо неравенство $|U-U^0|<\varepsilon$, где $U=\varphi(x_1,x_2)$. Если взять в качестве ε число, выбранное нами в п.1, то существование числа δ обеспечивается неравенствами (1). Остается заметить, что в рассуждениях п.1 число ε может быть взято как угодно малым.

3. Остается доказать дифференцируемость функции $U=\varphi(x_1,x_2)$ в лю-

бой точке $M' = (x_1, x_2)$ окрестности K'. В силу замечания, сделанного в п.2, достаточно доказать дифференцируемость функции $U = \varphi(x_1, x_2)$ в точке M_0'. Для этого вычислим полное приращение $\triangle U$ функции $U = \varphi(x_1, x_2)$ в точке $M_0' = (x_1^0, x_2^0)$, соответствующее приращениям аргументов $\triangle x_1, \triangle x_2$.

$U^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0)$, $\triangle U = \varphi(x_1^0 + \triangle x_1, x_2^0 + \triangle x_2) - \varphi(x_1^0, x_2^0)$. Отсюда следует, что точка $(U^0 + \triangle U, x_1^0 + \triangle x_1, x_2^0 + \triangle x_2) \in S$, т.е.

$F(U^0 + \triangle U, x_1^0 + \triangle x_1, x_2^0 + \triangle x_2) = 0$. Так как $F(U^0, x_1^0, x_2^0) = 0$, то

$\triangle F = F(U^0 + \triangle U, x_1^0 + \triangle x_1, x_2^0 + \triangle x_2) - F(U^0, x_1^0, x_2^0) = 0$. В силу условия дифференцируемости функции $F(U, x_1, x_2)$ в точке M_0 имеем:

$$\triangle F = \frac{\partial F}{\partial U}\triangle U + \frac{\partial F}{\partial x_1}\triangle x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\triangle x_2 + o(\rho), \tag{2}$$

где $\rho = \sqrt{\triangle U^2 + \triangle x_1^2 + \triangle x_2^2}$ и все частные производные $\frac{\partial F}{\partial U}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}$ берутся в точке $M_0 = (U^0, x_1^0, x_2^0)$.

Заметим, что $o(\rho) = \gamma\triangle U + \alpha\triangle x_1 + \beta\triangle x_2$, где $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ при $\triangle U$, $\triangle x_1$, $\triangle x_2 \to 0$. Действительно, применяя неравенство Буняковского, получим

$$\left|\frac{\gamma\triangle U + \alpha\triangle x_1 + \beta\triangle x_2}{\rho}\right| \leq \frac{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\triangle U^2 + \triangle x_1^2 + \triangle x_2^2}}{\rho} =$$

$$= \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2} \to 0 \text{ при } \triangle U, \triangle x_1, \triangle x_2 \to 0.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial U} + \gamma\right)\triangle U + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha\right)\triangle x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta\right)\triangle x_2 = 0. \tag{3}$$

Функция $U = \varphi(x_1, x_2)$ непрерывна в точке M_0', поэтому $\triangle U \to 0$ при $\triangle x_1, \triangle x_2 \to 0$. Следовательно, можно утверждать, что $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ лишь при условии $\triangle x_1, \triangle x_2 \to 0$.

По условию теоремы $\frac{\partial F}{\partial U} \neq 0$ в точке M_0. Поскольку $\gamma \to 0$ при $\triangle x_1, \triangle x_2 \to 0$, то при достаточно малых $\triangle x_1, \triangle x_2$ выражение $\frac{\partial F}{\partial U} + +\gamma \neq 0$ и из (3) мы получим

$$\triangle U = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial U} + \gamma}\right)\triangle x_1 + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial U} + \gamma}\right)\triangle x_2.$$

Так как

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial U} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial U}} + \mu,\ -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial U} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial U}} + \nu,$$

где $\mu, \nu \to 0$ при $\triangle x_1, \triangle x_2 \to 0$, то окончательно

$$\triangle U = \left(-\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial U}\right)\triangle x_1 + \left(-\frac{\partial F/\partial x_2}{\partial F/\partial U}\right)\triangle x_2 + \mu\triangle x_1 + \nu\triangle x_2 =$$

$$= \left(-\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial U}\right)\triangle x_1 + \left(-\frac{\partial F/\partial x_2}{\partial F/\partial U}\right)\triangle x_2 + o(\rho_1),\ \text{где } \rho_1 = \sqrt{\triangle x_1^2 + \triangle x_2^2}.$$

Полученная формула доказывает дифференцируемость функции $U = \varphi(x_1, x_2)$ в точке M_0'. Теорема доказана полностью.

Вычисление частных производных неявно заданных функций

Для полного приращения функции $U = \varphi(x_1, x_2)$ справедливо представление:

$$\triangle U = \left(-\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial U}\right)\triangle x_1 + \left(-\frac{\partial F/\partial x_2}{\partial F/\partial U}\right)\triangle x_2 + o(\rho_1),$$

$$\text{где } \rho_1 = \sqrt{\triangle x_1^2 + \triangle x_2^2}. \tag{1}$$

В то же время мы располагаем теоремой, в которой утверждалось, что если функция $U = \varphi(x_1, x_2)$ дифференцируема, то существуют частные производные $\partial U/\partial x_1, \partial U/\partial x_2$, равные коэффициентам при $\triangle x_1, \triangle x_2$ (соответственно) в выражении (1). Таким образом, частные производные функции $U = \varphi(x_1, x_2)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial U}, \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial F/\partial x_2}{\partial F/\partial U}.$$

Аналогичные формулы справедливы и для случая, когда $U = \varphi(x_1, ..., x_n)$. В этом случае

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial F/\partial x_k}{\partial F/\partial U}, k = 1, ..., n,$$

Если мы хотим обеспечить существование у неявно заданной функции $U = \varphi(x_1, x_2)$ частных производных 2-го порядка, то, естественно, приходится усилить требования, наложенные на функцию F в теореме существования. Приходится требовать, чтобы функция $F(U, x_1, x_2)$ была два раза дифференцируема в рассматриваемой точке. В этих предположениях вычислим частные производные 2-го порядка.

Введем полезное в дальнейшем понятие полной частной производной функции. Предположим, что $F(U, x_1, x_2)$ - дифференцируемая функция трех аргументов U, x_1, x_2 и, что $U = \varphi(x_1, x_2)$ также дифференцируемая функция от x_1, x_2. Тогда функцию $F(U, x_1, x_2)$ можно рассматривать как сложную функцию от x_1, x_2. Частные производные этой сложной функции по x_1, x_2 будем называть полными частными производными функции $F(U, x_1, x_2)$ по x_1, x_2 и обозначать символами $DF/Dx_1, DF/Dx_2$. По правилу дифференцирования сложной функции мы получим следующие формулы для указанных полных частных производных:

$$\frac{DF}{Dx_1} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{DF}{Dx_2} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Перейдем к вычислению частных производных 2-го порядка неявно заданной функции. Для определенности вычислим $\partial^2 U/\partial x_1 \partial x_2$. Принимая во внимание, что $\partial F/\partial x_1$, $\partial F/\partial x_2$ и $\partial F/\partial U$ зависят от U, x_1, x_2, причем U является функцией от x_1, x_2, запишем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{D\left(-\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial U}\right)}{Dx_2} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{D(\partial F/\partial x_1)}{Dx_2} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{D(\partial F/\partial U)}{Dx_2}}{(\partial F/\partial U)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{\partial F}{\partial U}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)+\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\left(\frac{\partial^2 F}{\partial U^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 F}{\partial U \partial x_2}\right)}{(\partial F/\partial U)^2}.$$

Вставляя в полученную формулу выражение $\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial F/\partial x_2}{\partial F/\partial U}$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial U}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial U^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial x_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial U}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^3}.$$

Совершенно аналогично вычисляются частные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$.

Пример. Вычислить $\partial^2 U/\partial x_1 \partial x_2$ функции, неявно заданной уравнением $U^2 + x_1^4 + x_2^4 - 1 = 0$.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{4x_1^3}{2U} = -\frac{2x_1^3}{U}, \ \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{2x_2^3}{U}.$$

Далее получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial U}\left(-\frac{2x_1^3}{U}\right)\cdot\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{2x_1^3}{U^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{2x_1^3}{U^2}\cdot\left(-\frac{2x_2^3}{U}\right) = -\frac{4x_1^3 x_2^3}{U^3}.$$

§5.2 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предположим, что m функций

$$\begin{cases} U_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

ищутся как решение системы m функциональных уравнений

$$\begin{cases} F_1(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Изучим вопрос о разрешимости системы (2) относительно $U_1, ...U_m$. Под термином "решение системы (2)"мы будем понимать совокупность из m

функций (1), при подстановке которых в (2) все уравнения системы (2) обращаются в тождества. Это решение мы будем называть непрерывным и дифференцируемым в некоторой области Ω изменения переменных $x_1, ..., x_n$, если каждая из функций (1) непрерывна и дифференцируема в области Ω. Будем обозначать символом R пространство $m+n$ переменных $U_1, ...U_m, x_1, ..., x_n$, а символом R' пространство n переменных $x_1, ..., x_n$.

Составим следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial U_m} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Будем называть определитель вида (3) определителем Якоби (или кратко якобианом) функций $F_1, ..., F_m$ по переменным $U_1, ..., U_m$ и кратко обозначим символом $\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_m)}$.

Существование и дифференцируемость функций, заданных неявно системой функциональных уравнений

Теорема. Пусть m функций

$$\begin{cases} F_1(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{4}$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(U_1^0, ..., U_m^0, x_1^0, ..., x_n^0)$ пространства R, причем частные производные этих функций по переменным $U_1, ..., U_m$ непрерывны в точке M_0. Тогда, если в точке M_0 все функции (4) обращаются в нуль, а якобиан

$$\frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(U_1, ..., U_m)} \neq 0,$$

то для достаточно малых чисел $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ найдется такая окрестность точки $M_0'(x_1^0, ..., x_n^0)$ пространства R', что в пределах этой окрестности существуют единственные m функций (1), которые удовлетворяют условиям

$|U_1-U_1^0|<\varepsilon,...,|U_m-U_m^0|<\varepsilon$ и являются решением системы уравнений (2), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки M_0'.

Доказательство. Будем использовать метод математической индукции. При $m=1$ теорема уже доказана (§5.1). Допустим, что наша теорема справедлива для $m-1$ функциональных уравнений. Докажем справедливость теоремы для системы m функциональных уравнений. По предположению, якобиан

$$\Delta=\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial U_m} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial U_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial U_m} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в M_0. Поэтому хотя бы один из миноров $(m-1)$-го порядка этого якобиана отличен от нуля в точке M_0. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля минор порядка $m-1$, полученный вычеркиванием m-го столбца и m-той строки. Тогда в силу предположения индукции первые $m-1$ уравнений системы (2) разрешимы относительно $U_1,...,U_{m-1}$. (Замечание: Если мы допустим, что отличен от нуля минор $(m-1)$-го порядка, получаемый вычеркиванием i-го столбца и j-й строки, то в силу предположения индукции следующие уравнения системы (2): $F_1=0,...,F_{j-1}=0,F_{j+1}=0,...,F_m=0$ будут разрешимы относительно $U_1,...,U_{i-1},U_{i+1},...,U_m$). Т.е. для достаточно малых $\varepsilon_1,...,\varepsilon_{m-1}$ существует такая окрестность точки $M_0''(U_m^0,x_1^0,...,x_n^0)$пространства R'' переменных $(U_m,x_1,...,x_n)$, что в пределах этой окрестности $m-1$ функций

$$\begin{cases} U_1=\Phi_1(U_m,x_1,...,x_n), \\ .... \\ U_{m-1}=\Phi_{m-1}(U_m,x_1,...,x_n) \end{cases} \tag{5}$$

удовлетворяют условиям $|U_1-U_1^0|<\varepsilon_1,...,|U_{m-1}-U_{m-1}^0|<\varepsilon_{m-1}$ и являются при наличии этих условий единственным и дифференцируемым решением первых $m-1$ уравнений системы (2). Подставим (5) в $F_m = 0$. Получим

$$\begin{gathered} F_m(U_1, ..., U_{m-1}, U_m, x_1, ..., x_n) = \\ = F_m(\Phi_1(U_m, x_1, ..., x_n), ..., \Phi_{m-1}(U_m, x_1, ..., x_n), U_m, x_1, ..., x_n) = \\ = \psi(U_m, x_1, ..., x_n). \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, последнее из уравнений системы (2) приводит нас к уравнению

$$\psi(U_m, x_1, ..., x_n) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, $\psi(U_m, x_1, ..., x_n)$ можно рассматривать как сложную функцию. Функции $\Phi_1, ..., \Phi_{m-1}$ являются (по предположению индукции) дифференцируемыми в некоторой окрестности $U(M_0'')$ точки M_0'', функция $F_m(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n)$ является дифференцируемой в некоторой $U(M_0)$. Поэтому по теореме о дифференцируемости сложной функции мы утверждаем, что функция $\psi(U_m, x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в некоторой $U(M_0'')$.

Из равенств (6) следует

$$\psi(U_m^0, x_1^0, ..., x_n^0) = 0.$$

Таким образом, чтобы доказать, что к уравнению (7) применима теорема о существовании неявной функции и, что уравнение (7) разрешимо относительно U_m, достаточно установить, что $\frac{\partial \psi}{\partial U_m}$ непрерывна и не равна 0 в точке M_0''. Для того, чтобы это сделать, вычислим $\frac{\partial \psi}{\partial U_m}$. Подставим в первые $m-1$ уравнений системы (2) функции (5), являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем полученные при этом тождества по U_m. Получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial U_m} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial U_{m-1}} \cdot \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial U_m} + \frac{\partial F_1}{\partial U_m} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_1} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial U_m} + ... + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_{m-1}} \cdot \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial U_m} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_m} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Далее дифференцируем по U_m равенство (6). Получим

$$\frac{\partial F_m}{\partial U_1}\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial U_m}+...+\frac{\partial F_m}{\partial U_{m-1}}\cdot\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial U_m}+\frac{\partial F_m}{\partial U_m}=\frac{\partial \psi}{\partial U_m}. \tag{9}$$

Умножим теперь равенства (8) и (9) на соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_1, ..., \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана и после этого сложим эти равенства. Получим

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \Phi_k}{\partial U_m}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial U_k}\Delta_1+...+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \Phi_k}{\partial U_m}\cdot\frac{\partial F_m}{\partial U_k}\Delta_m+$$

$$+\left(\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial U_m}+...+\Delta_{m-1}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial U_m}+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial U_m}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \Phi_k}{\partial U_m}\left[\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial U_k}+...+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial U_k}\right]+\left(\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial U_m}+...+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial U_m}\right)=$$

$$=\Delta_m\cdot\frac{\partial \psi}{\partial U_m}.$$

Известно, что сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого столбца равна определителю, а сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю. Поэтому каждая квадратная скобка равна нулю, а круглая скобка равна якобиану. Таким образом, мы получим

$$\Delta=\Delta_m\cdot\frac{\partial \psi}{\partial U_m}. \tag{10}$$

Здесь Δ - якобиан, а Δ_m - алгебраическое дополнение последнего элемента последнего столбца, которое совпадает с минором, обведенным пунктиром и, по предположению, не равно 0 в точке M_0. Исходя из сказанного, из (10) находим

$$\frac{\partial \psi}{\partial U_m}=\frac{\Delta}{\Delta_m}.$$

Эта формула, справедливая в точке M_0'', доказывает непрерывность частной производной $\frac{\partial\psi}{\partial U_m}$ в точке M_0'', т.к. Δ и Δ_m состоят из частных производных функций $F_1, ..., F_m$ по $U_1, ..., U_m$, которые непрерывны в точке M_0. Кроме того, из этой формулы следует, что $\frac{\partial\psi}{\partial U_m} \neq 0$ в точке M_0, т.к. якобиан $\Delta \neq 0$ в точке M_0. Таким образом, к уравнению (7) можно применить теорему существования неявной функции, т.е. для достаточно малого ε_m найдется окрестность точки $M_0'(x_1^0, ..., x_n^0) \in R'$ такая, что всюду в этой окрестности определена функция

$$U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n),$$

которая удовлетворяет условию $|U_m - U_m^0| < \varepsilon_m$ и является единственным, непрерывным и дифференцируемым решением уравнения (7).

Функции

$$\begin{gathered} U_1 = \Phi_1(U_m, x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{m-1} = \Phi_{m-1}(U_m, x_1, ..., x_n) \end{gathered} \tag{11}$$

являются решениями первых $m-1$ уравнений $F_1, ..., F_m = 0$ при любых $(U_m, x_1, ..., x_n) \in U(M_0'')$. Поэтому, выбрав $\varepsilon_m > 0$ таким, что $(U_m, x_1, ..., x_n) \in U(M_0'')$, где $U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n)$, и вставляя функцию $U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n)$ в уравнение (11), мы получим функции, зависящие только от $x_1, ..., x_n$:

$$U_1 = \Phi_1(\varphi_m(x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n) = \varphi_1(x_1, ..., x_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$U_m = \Phi_{m-1}(\varphi_m(x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n) = \varphi_{m-1}(x_1, ..., x_n)$$

По теореме о дифференцируемости сложной функции утверждаем, что каждая из функций $\varphi_1, ..., \varphi_{m-1}$ дифференцируема в $U(M_0')$, где $M_0' = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Таким образом, мы доказали, что m функций

$$\begin{cases} U_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n), \end{cases} \tag{12}$$

удовлетворяют в $U(M_0')$ условиям $|U_1 - U_1^0| < \varepsilon_1, ..., |U_m - U_m^0| < \varepsilon_m$ и являются при этих условиях непрерывным и дифференцируемым решением исходной системы.

Для завершения доказательства теоремы остается доказать, что функции (12) являются единственным решением системы (2), удовлетворяющим условиям $|U_1 - U_1^0| < \varepsilon_1, ..., |U_m - U_m^0| < \varepsilon_m$ (при достаточно малых и положительных $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$).

Предположим, что кроме функций (12) существуют еще m функций

$$\begin{cases} \hat{U}_1 = \hat{\varphi}_1(x_1, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \hat{U}_m = \hat{\varphi}_m(x_1, ..., x_n), \end{cases} \tag{13}$$

также являющихся решением системы (2) и удовлетворяющих условиям $|\hat{U}_1 - U_1^0| < \varepsilon_1, ..., |\hat{U}_m - U_m^0| < \varepsilon_m$. По предположению индукции первые $m-1$ функций (13) представляют собой при заданном $U_m = \hat{U}_m$ единственное и дифференцируемое решение первых $m-1$ уравнений (2). Но при заданном U_m единственное решение системы первых $m-1$ уравнений (2) дается равенствами (5), т.е. справедливы соотношения:

$$\begin{gathered} \hat{U}_1 = \Phi_1(\hat{U}_m, x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{U}_{m-1} = \Phi_{m-1}(\hat{U}_m, x_1, ..., x_n) \end{gathered} \tag{14}$$

(Здесь $\Phi_1, ..., \Phi_{m-1}$ те же функции, что и в равенстве (5)). Мы имеем последнее уравнение из системы (2):

$$F_m(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n) = 0$$

Подставляя в это уравнение вместо $U_1, ..., U_{m-1}$ функции из системы (5) и функции (14), мы получим два одинаковых уравнения $\psi(U_m, x_1, ..., x_n) = 0$, $\psi(\hat{U}_m, x_1, ..., x_n) = 0$. Таким образом, $U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n)$ и $\hat{U}_m = \hat{\varphi}_m(x_1, ..., x_n)$ являются решениями одного и того же уравнения. Но мы доказали, что уравнение $\psi(\cdot) = 0$ имеет единственное решение в

$U(M_0')$, и следовательно, $U_m = \hat{U}_m$, т.е. $\varphi_m(x_1, ..., x_n) = \hat{\varphi}_m(x_1, ..., x_n)$. Из этого равенства и из соотношений (14) следует, что $U_1 = \hat{U}_1, ..., U_m = \hat{U}_m$. Что и требовалось доказать.

Вычисление частных производных функций, неявно задаваемых системой функциональных уравнений

Допустим, что выполнены условия теоремы о существовании решения системы функциональных уравнений. Нам необходимо вычислить частные производные функций

$$\begin{cases} U_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{1}$$

Подставим эти функции в исходную систему функциональных уравнений, решением которой эти функции являются, и продифференцируем получившиеся тождества по $x_l, l = 1, ..., n$. Получим

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial x_l} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial U_m} \cdot \frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_1}{\partial x_l} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_1} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial x_l} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial U_m} \cdot \frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_m}{\partial x_l} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Эти равенства представляют собой линейную систему уравнений относительно m неизвестных $\frac{\partial U_1}{\partial x_l}, ..., \frac{\partial U_m}{\partial x_l}$. Определитель этой системы якобиан $\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_m)} \neq 0$ в $U(M_0)$. Следовательно, система (2) имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_l} = \frac{\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_{k-1},x_l,U_{k+1},...,U_m)}}{\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_m)}}. \tag{3}$$

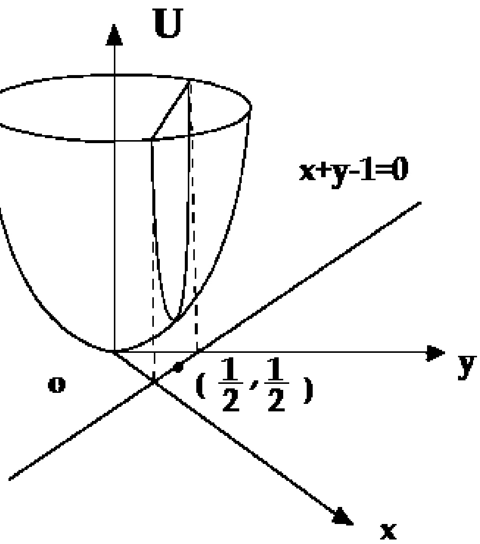
Замечание. $\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_{k-1},x_l,U_{k+1},...,U_m)}$ получается из якобиана $\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(U_1,...,U_m)}$ заменой соответствующего столбца $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_k} \end{pmatrix}$ на столбец из свободных членов

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}.$$

Выражения для частных производных высшего порядка можно получить посредством дифференцирования формул (3), но для этого необходимо, чтобы функции $F_1(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n), ..., F_m(U_1, ..., U_m, x_1, ..., x_n)$ были дифференцируемы соответствующее число раз.

§5.3 УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Мы уже занимались отысканием локальных экстремумов функции, аргументы которой не связаны никакими дополнительными условиями. Вместе с тем часто в математике и в ее приложениях встречается задача об отыскании экстремумов функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным условиям связи. Экстремумы такого рода мы будем называть условными.



Приведем пример задачи об отыскании условного экстремума. Требуется найти экстремум функции $U = x^2 + y^2$ при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют условиям связи $x + y - 1 = 0$.

Таким образом, экстремумы функции $U = x^2 + y^2$ ищутся не на всей плоскости Oxy, а лишь на прямой $x+y-1=0$. Подставим в $U = x^2+y^2$ значение y, определенное из условия $x+y-1=0$, и сведем таким образом поставленную задачу к задаче об отыскании безусловного экстремума функции $U = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$.

$U' = 4(x - \frac{1}{2}) = 0; U'' = 4 \Rightarrow$ функция $U = 2x^2 - 2x + 1$ имеет минимум $U = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, функция $U = x^2 + y^2$ при наличии условия связи $x + y - 1 = 0$ имеет условный минимум в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Заметим, что безусловный минимум функции $U = x^2 + y^2$ достигается в точке $(0, 0)$ и равен $U = 0$.

Перейдем к общей постановке задачи. Пусть требуется найти экстремум функции $m + n$ переменных

$$U = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \tag{1}$$

при наличии m условий связи

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Определение. Говорят, что функция (1) при наличии связей (2) имеет условный максимум (минимум) в точке $M_0(x_1^0, ..., x_n^0, y_1^0, ..., y_m^0)$, координаты которой удовлетворяют условиям связи (2), если существует такая окрестность $U(M_0)$, в пределах которой значение функции (1) в точке M_0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках, координаты которых удовлетворяют условиями связи.

Иначе говоря, условный максимум (минимум) - это наибольшее (наименьшее)значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой $U(M_0)$, а только к тем из них, которые связаны между собой условием связи.

Рассмотрим два метода решения задачи об условном экстремуме функции.

1. Метод исключения переменных.

Предположим, что функции $F_1, ..., F_m$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(M_0)$, причем в точке M_0 частные производные этих функций по $y_1, ..., y_m$ непрерывны, а якобиан

$$\frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)} \neq 0.$$

Тогда, по теореме о разрешимости системы функциональных уравнений, для достаточно малых $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m > 0$ существует такая окрестность точки $M_0' = (x_1^0, ..., x_n^0)$ пространства переменных $x_1, ..., x_n$, что всюду в этой окрестности определены m функций

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_n) \\ ...., \\ y_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n) \end{gathered} \tag{3}$$

удовлетворяющие условиям $|y_1 - y_1^0| < \varepsilon_1, ..., |y_m - y_m^0| < \varepsilon_m$ и являющиеся единственным и дифференцируемым решением системы (2). Подставляя найденные функции (3) в (1), мы получим функцию n независимых переменных:

$$U = f(x_1, ..., x_n, \varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_n)) = \Phi(x_1, ..., x_n).$$

В пределах $U(M_0)$ значение функции $\Phi(x_1, ..., x_n)$ в любой точке $(x_1, ..., x_n)$ совпадает со значением функции $f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ в соответствующей точке $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$, удовлетворяющей уравнениям связи (2). Поэтому вопрос об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) сводится к вопросу о безусловном экстремуме функции $\Phi(x_1, ..., x_n)$.

Если нахождение функции (3) в явном виде затруднительно (или невозможно), то можно поступить следующим образом. Пусть функция $U = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при наличии связей (2) или, что то же самое, функция $\Phi(x_1, ..., x_n)$ имеет в точке M_0' безусловный экстремум. Необходимым условием существования безусловного экстремума функции $U = \Phi(x_1, ..., x_n)$ в точке M_0' является равенство нулю в этой точке частных производных этой функции или равенство нулю дифференциала этой функции, т.е.

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}dx_n = 0, \tag{4}$$

$\Phi(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n, \varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_n))$, поэтому $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$. Подставляя эти формулы в (4), получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\right)dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}dx_i + ... + \frac{\partial f}{\partial y_m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}dx_i = \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j = 0$$

Из (5) нельзя заключить о равенстве нулю коэффициентов при дифференциалах, т.к. не все эти дифференциалы произвольны (dy_j - дифференциалы зависимых переменных). Поэтому нужно исключить $dy_1, ...,$ dy_m из (5). Сделаем это следующим образом.

Предположим, что в уравнения связи (2) мы подставим функции (3), являющиеся решением системы (2). При этом уравнения (2) обратятся в тождества, и мы получим, дифференцируя эти тождества:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

Так как якобиан $\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(y_1,...,y_m)} \neq 0$ в точке M_0, то из линейной системы (6) дифференциалы $dy_1, ..., dy_m$ могут быть выражены как линейные функции от $dx_1, ..., dx_n$ дифференциалов независимых переменных. Подставляя полученные выражения для $dy_1, ..., dy_m$ в (5), придем к равенству

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) dx_i, \tag{7}$$

где $A_1, ..., A_n$ - некоторые рациональные функции частных производных $f, F_1, ..., F_m$.

Если в точке $M_0'(x_1^0, ..., x_n^0)$ функция $\Phi(x_1, ..., x_n)$ имеет экстремум, то $d\Phi|_{M_0'} = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1^0, ..., x_n^0, y_1^0, ..., y_m^0) dx_i = 0, \tag{8}$$

где $y_j^0 = \varphi_j(x_1^0, ..., x_n^0),\ j = 1, ..., m$. Так как $dx_i, i = 1, ..., n$ - дифференциалы независимых переменных, то из (8) получаем

$$A_i(x_1^0, ..., x_n^0, y_1^0, ..., y_m^0) = 0, i = 1, ..., n. \tag{9}$$

Равенства (9) являются, таким образом,необходимыми условиями экстремума функции $\Phi(x_1, ..., x_n)$ в точке M_0' или, что то же самое, необходимыми условиями условного экстремума функции $f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ в точке M_0 при условиях связи (2).

Отсюда следует, что для отыскания точки M_0 возможного экстремума нужно решить систему $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных:

$$\begin{cases} F_j(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, & \text{j=1,...,m} \\ A_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, & \text{i=1,...,n} \end{cases}$$

Если точка M_0 возможного экстремума найдена, то ее дальнейшее исследование связано с рассмотрением второго дифференциала $d^2\Phi|_{M_0'}$. Его можно вычислить (функции (1) и (2) предполагаются дважды дифференцируемыми), дифференцируя равенство (7) для $d\Phi$ и используя выражения для дифференциалов $dy_1, ..., dy_m$, найденные из системы (6). В итоге находим $d^2\Phi|_{M_0'}$ - квадратичную форму от переменных $dx_1, ..., dx_n$.

Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определенна, то функция (1) имеет в точке M_0 условный минимум (максимум) при условиях связи (2).

2. Метод Лагранжа.

Рассмотрим другой метод отыскания условного экстремума, предложенный Лагранжем. Умножим равенства (см. (6)):

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+...+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1+...+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m=0 \end{cases}$$

на произвольные (и пока еще неопределенные) постоянные множители $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Полученные после умножения равенства сложим почленно с равенством (см. (5)):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+...+\frac{\partial f}{\partial y_m}dy_m=0$$

В результате получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial \psi}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1+...+\frac{\partial \psi}{\partial y_m}dy_m=0, \qquad (10)$$

где символом $\psi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ обозначена функция $\psi = f + \lambda_1 F_1 + ... + \lambda_m F_m$, которую мы будем называть функцией Лагранжа. Считая, что для функций $F_1, ..., F_m$ выполнены условия теоремы о разрешимости функциональных уравнений (см. начало п.1) и что функция f дифференцируема, выберем множители $\lambda_1, ..., \lambda_m$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}=0, ..., \frac{\partial \psi}{\partial y_m}=0. \qquad (11)$$

Это заведомо можно сделать, так как равенства эти приводят к линейной системе

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+...+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial f}{\partial y_m}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m}+...+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m}=0 \end{cases}$$

определитель которой (якобиан $\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(y_1,...,y_m)}$) отличен от нуля. В силу равенств $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}=0,...,\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0$ равенство (10) принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{12}$$

При сделанных выше предложениях (при них система

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0, \\ ...., \\ F_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0 \end{cases}$$

единственным образом разрешима относительно $y_1,...,y_m$) переменные $x_1,...,x_n$ являются независимыми, поэтому из равенства (12) следует

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,...,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0.$$

К уравнениям

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}=0,...,\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0,\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,...,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0$$

присоединим уравнения связи

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0, \\ .... \\ F_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0 \end{cases}$$

В результате получим систему из $n+2m$ уравнений (необходимое условие Лагранжа условного экстремума) для определения $n+m$ координат точек возможного условного экстремума и m множителей $\lambda_1,...,\lambda_m$.

Замечание. Практически при реализации метода Лагранжа поступают следующим образом. Составляют функцию Лагранжа и для этой функции находят точки возможного безусловного экстремума. Для исключения множителей $\lambda_1,...,\lambda_m$ привлекают условия связи.

Допустим, что в точке M_0 выполнены необходимые условия Лагранжа условного экстремума

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}=0,...,\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0,\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,...,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0,F_1=0,...,F_m=0. \qquad (13)$$

Дополнительно потребуем, чтобы функции f и $F_1,...,F_m$ были дважды дифференцируемы в $U(M_0)$ и чтобы имели в точке M_0 непрерывные частные производные второго порядка.

Вопрос о качестве в точке M_0 условного экстремума зависит от знака разности $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)-f(x_1^0,...,x_n^0,y_1^0,...,y_m^0)$ в некоторой $U(M_0)$ с существенной оговоркой о том, что точки $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)\in U(M_0)$ удовлетворяют уравнениям (условиям) связи $F_1=0,...F_m=0$. Из конструкции функции Лагранжа следует, что в точках, удовлетворяющих условиям связи, разность $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)-f(x_1^0,...,x_n^0,\ y_1^0,...,y_m^0)$ совпадает с разностью $\psi(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)-\psi(x_1^0,...,x_n^0,\ y_1^0,...,y_m^0)$, т.е. при наличии условий связи экстремумы функций f и ψ совпадают.

Из всего сказанного следует, что если $x_1^0,...,x_n^0,y_1^0,...,y_m^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0$ - решение системы (13) (таких решений может быть несколько), то $M_0(x_1^0,...,x_n^0,y_1^0,...,y_m^0)$ является точкой возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2) и дальнейшее исследование этой точки связано, как и в методе исключения переменных, с рассмотрением второго дифференциала $d^2F|_{M_0'}$ функции $F(M')=F(x_1,...,\ x_n)=\psi(x_1,...,x_n,\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_m(x_1,...,x_n))$, где $\psi=f+\lambda_1^0F_1+...+\lambda_m^0F_m$. Указанный дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2F|_{M_0'}=\sum_{i=1}^{n+m}\sum_{j=1}^{n+m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)dx_idx_j, \qquad (14)$$

где $dx_1,...,dx_n$ - дифференциалы независимых переменных, а $dx_{n+1},...,dx_{n+m}$ - дифференциалы неявных функций (3) в точке M_0'. Формула (14) показывает, что для нахождения $d^2F|_{M_0'}$ сначала вычисляется второй дифференциал функции Лагранжа в точке M_0, причем так, как если бы все аргументы $x_1,...x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}$ были независимыми переменными, а затем $dx_{n+1} = dy_1, ..., dx_{n+m} = dy_m$ заменяются дифференциалами неявных функций в точке M_0'. В результате получается $d^2F|_{M_0'}$ - квадратичная форма от $dx_1, ..., dx_n$. Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то в точке M_0 функция (1) имеет условный минимум (максимум) при условиях связи (2), а если $d^2F|_{M_0'}$ - неопределенная (знакопеременная) квадратичная форма, то в точке M_0 функция (1) не имеет условного экстремума.

<u>3. Пример.</u>

1) Методом исключения переменных найти экстремум функции

$$U = x + y + z^2. \tag{1}$$

При условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y - zx = 1 \end{cases} \tag{2}$$

<u>Решение.</u> Из (2) находим

$$y = x^2 + x + 1, z = x + 1.$$

Подставим найденные y и z в (1). Получим функцию одной переменной x $U(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. $U' = 4x = 4$ при $x = -1$. Следовательно, функция $U(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума $x = -1$. Поскольку $U''(-1) = 4 > 0$, то в точке $x = -1$ функция $U(x)$ имеет минимум. Из (2) находим соответствующие $x = -1$ значения y и $z : y = 1, z = 0$. Таким образом, функция (1) при условиях связи (2) имеет в точке $(-1, 1, 0)$ минимум, причем $U(-1, 1, 0) = 0$.

2) Схемой метода исключения переменных, не связанной с нахождением в явном виде переменных y и z, найти экстремум функции (1) при условиях связи (2).

<u>Решение.</u> Вычисляя дифференциалы от обеих частей (2), получим

$$\begin{cases} dz = dx \\ dy - zdx - xdz = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} dy = (z+x)dz \\ dz = dx \end{cases} \tag{3}$$

Подставим эти выражения для dy, dz в выражение для дифференциала функции (1) $dU = dx + dy + 2zdz$. Получим $dU = (1 + x + 3z)dx = Adx$.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из уравнений (2) и уравнения $A = 0$:

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y - xz = 1 \\ 1 + x + 3z = 0 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $(-1, 1, 0)$, т.е. $M_0(-1, 1, 0)$ - единственная точка возможного экстремума функции (1) при условиях связи (2). Дифференцируя Adx, получим

$$d^2U = (dx + 3dz)dx.$$

Учитывая, что $dz = dx$, находим

$$d^2U|_{M_0} = 4(dx)^2 > 0.$$

Следовательно, $M_0(-1, 1, 0)$ - точка условного минимума.
3) Методом Лагранжа найти экстемум функции (1) при условиях связи (2).
Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\psi = x + y + 2z + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - zx - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ F_1 = z - x - 1 = 0 \\ F_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение: $x = -1, y = 1, z = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, т.е. $M_0(-1, 1, 0)$ - единственная точка возможного экстремума функции (1) при условиях (2). Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\psi = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dxdz.$$

Подставляя $\lambda_2 = -1$ и $dz = dx$ (см. (3)), получим положительно определенную квадратичную форму от одной переменной dx : $4(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (1) при условиях связи (2) имеет в точке $M_0(-1, 1, 0)$ условный минимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, 1966, М: "Наука".

2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1, 1975, М: "Наука".

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть1, 1982, М: "Наука".

4. Шерстнев А.Н. Конспект лекция по математическому анализу. Казанское матем. общество. Казань УНИПРЕСС, 1998.

5. Кудрявцев Л.Д Курс математическог анализа. Т.1, 1981, М: "Высшая школа".

6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. 1979, М: "Наука".

7. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубаринов В.Н., Лекции по математическому анализу. 1999, М: "Высшая школа".

8. Дубровин В.Т Лекции по математическому анализу, Ч.1, Казань: Казанский гос. университет, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ