Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Д.В. БЕРЕЖНОЙ, Л.Р. СЕКАЕВА

ВОПРОСЫ ТЕРМОДИНАМИКИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Часть II. Основы термодинамики необратимых процессов

Учебное пособие

Казань

2012

УДК 539.3

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 10 от 28 июня 2012 г.

совместного заседания кафедр теоретической механики и аэрогидромеханики
Протокол № 9 от 16 июня 2012 г.

Авторы:

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.В. Бережной

канд. физ.-мат. наук, доц. Л.Р. Секаева

Научный редактор

доктор физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Коноплев

Рецензент

доктор физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической механики и сопротивления материалов ФГБОУВПО «КНИТУ-КАИ»

М.Н. Серазутдинов

Вопросы термодинамики в механике деформируемого твердого тела. Часть II. Основы термодинамики необратимых процессов: Учебное пособие / Д.В. Бережной, Л.Р. Секаева. – Казань: Казанский университет, 2012. – 54 с.

Данное пособие предназначено для студентов 4-го курса по специальности «Механика деформируемого твердого тела».

Содержание

1. Основные понятия термодинамики

Термодинамика в современном представлении – феноменологическая теория общих закономерностей процессов, протекающих в макроскопических телах и связанных с взаимным превращением механической энергии, теплоты и других форм движения.

В рамках термодинамики сплошных сред материальное тело, а также любую его часть – конечную или бесконечно малую – можно рассматривать как термодинамическую систему. Термодинамическая система, которая обменивается массой и энергией с окружающей средой, называется открытой термодинамической системой. Если обмен массы с окружающей средой отсутствует, но существует обмен энергии (механической, тепловой и пр.), система называется закрытой, а если одновременно отсутствуют и обмен массы, и обмен энергии, – изолированной. Мы будем рассматривать материальное тело как замкнутую термодинамическую систему, за исключением тех случаев, когда специально оговорено противное.

Состояние термодинамической системы в данный момент характеризуется определенным числом величин – параметров термодинамического состояния, которые меняются вместе с изменением системы при ее взаимодействии с окружающей средой. Если в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния не меняются, то система находится в термодинамически равновесном состоянии. Если параметры термодинамического состояния имеют конечную скорость изменения, то система находится в неравновесном состоянии. Равновесное состояние является устойчивым, если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, возвращает систему в ее исходное состояние. Если возврата к исходному состоянию не происходит, равновесное состояние называется неустойчивым.

Совокупность последовательных состояний, через которые термодинамическая система проходит при взаимодействии с окружающей средой, называется термодинамическим процессом. Если в любом промежуточном состоянии после фиксирования внешних воздействий для конечного интервала времени параметры термодинамического состояния остаются неизменными, т.е. система находится в термодинамическом равновесии, процесс называется равновесным. Процессы, состоящие из последовательных неравновесных состояний, называются неравновесными. При заданных внешних воздействиях реальные процессы (физические, химические и др.) всегда протекают с некоторой конечной скоростью изменения параметров термодинамического состояния, поэтому они являются неравновесными термодинамическими процессами. В ряде случаев, однако, когда состояние системы меняется достаточно медленно, можно приближенно считать процесс равновесным. Равновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело и окружающая среда приходят в исходное состояние, называется обратимым. В противном случае, когда хотя бы одно из названных условий не выполнено, термодинамический процесс называется необратимым. Необратимы, например, процессы деформации, сопровождающиеся рассеянием (диссипацией) энергии, процессы теплопроводности и т.д.

К числу параметров термодинамического состояния в зависимости от необходимости учета различных процессов, протекающих в термодинамической системе, относят, например, плотность, абсолютную температуру, тензор деформации, а также параметры, учитывающие внутреннюю структуру рассматриваемого тела, которые носят название внутренних параметров состояния системы.

Поскольку параметры термодинамического состояния системы отражают физическую структуру материала, вид связей в этих уравнениях может быть достаточно разнообразен. Однако, несмотря на это, они не могут быть произвольными: вид каждого уравнения должен подчиняться основным принципам – взаимном связи, причинности, равноприсутствия, объективности, локальности, затухающей памяти, допустимости, а также нулевому закону термодинамики. Наряду с этим должны выполняться законы сохранения и второй закон термодинамики.

Суть указанных выше принципов заключается в следующем. В соответствии с принципом взаимной связи сплошная среда имеет разные состояния, которые могут быть описаны с помощью известного числа величин (базисных), причем все остальные величины получаются из них при помощи некоторых определяющих зависимостей. Выбор базисных величин, определяющих состояние термодинамической системы, не является однозначным.

Если ввести понятия реактивных и активных переменных, причем первые характеризуют реакцию материала на внешние термодинамические воздействия, а вторые – внутренние силы, порожденные этими воздействиями, то каждое активное переменное связано с реактивными переменными с помощью определяющего уравнения. При этом также существует и обратная связь, т.е. каждое реактивное переменное зависит от активных переменных.

В соответствии с принципом причинности любое активное переменное может зависеть от настоящих и прошлых значений реактивных переменных, но не от их значении в будущем.

Принцип равноприсутствия гласит, что если какая-либо величина присутствует в определяющем уравнении в качестве независимого переменного, то она может присутствовать и в остальных определяющих зависимостях.

Принцип объективности гласит, что определяющие уравнения сохраняют свой вид при произвольном вращении и трансляции в пространстве и времени исследуемого тела как абсолютно твердого. Смысл принципа локальности заключается в том, что значения активных переменных и эволюционные уравнения для внутренних параметров состояния системы в окрестности рассматриваемой точки определяются только значениями реактивных переменных в окрестности этой точки. Если отказаться от принципа локальности, то возможно построение более сложных, нелокальных моделей сплошной среды.

Согласно принципу затухающей памяти более отдаленные в прошлом состояния термодинамической системы слабее влияют на значения активных и реактивных переменных в данный момент времени.

Согласно принципу допустимости все предложения, связанные с определяющими уравнениями и уравнениями эволюции внутренних параметров состояния, должны находиться в соответствии с законами сохранения и ограничениями, следующими из второго закона термодинамики.

Нулевой закон термодинамики гласит, что любая изолированная термодинамическая система имеет по крайней мере одно естественное состояние, в котором может находиться неограниченно долго.

2. Энергия, работа, мощность

Энергия является мерой движения материи. Так же как движение есть неотъемлемое свойство материи, так и его мера – энергия – связана с материей; каждому материальному объекту соответствует определенная энергия. Тело как материальный объект в рассматриваемом здесь случае представляет собой замкнутую термодинамическую систему.

Любое материальное тело обладает определенной энергией U, называемой внутренней. Она характеризует его энергетическое состояние. Так как любой элементарный объем тела также является материальным объектом, представляющим собой замкнутую термодинамическую систему, он в свою очередь обладает внутренней энергией, которая является частью общей внутренней энергии тела. Это дает возможность считать U абсолютно непрерывной аддитивной функцией:

$$U = \int_V u\rho dV = \int_{V_0} u\rho_0 dV_0 , \qquad (2.1)$$

где U – удельная внутренняя энергия единицы массы, являющаяся непрерывной функцией как пространственных, так и материальных координат. Материальная скорость изменения внутренней энергии находится из (2.1) и имеет вид

$$\dot{U} = \int_V \dot{u}\rho dV = \int_{V_0} \dot{u}\rho_0 dV_0 . \qquad (2.2)$$

При выводе (2.2) учитывался закон сохранения массы.

Вследствие движения материальное тело обладает кинетической энергией, которая по определению равна

$$K = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,\rho dV = \frac{1}{2}\int_{V_0} \dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}}\,\rho_0 dV_0. \qquad (2.3)$$

Отсюда материальная скорость изменения кинетической энергии имеет вид

$$\dot{K} = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \rho dV = \int_{V_0} \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} \rho_0 dV_0. \qquad (2.4)$$

При взаимодействии тела с окружающей средой действующие на него обобщенные массовые силы $\mathbf{b}^{(\alpha)}$ и поверхностные силы $\mathbf{t}^{(\alpha)}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}$ разного типа $(\alpha = 1, 2, \ldots N)$, когда число типов взаимодействий (механических, термических и др.) равно N, сообщают телу обобщенные термодинамические перемещения $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ и совершают работу

$$A^{(\alpha)} = \int_V \mathbf{b}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{u}^{(\alpha)} \rho dV + \int_S \left(\mathbf{t}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{u}^{(\alpha)} dS. \qquad (2.5)$$

Соответствующая этой работе мощность выражается как

$$W^{(\alpha)} = \int_V \mathbf{b}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{v}^{(\alpha)} \rho dV + \int_S \left(\mathbf{t}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{v}^{(\alpha)} dS, \qquad (2.6)$$

где $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ – обобщенная термодинамическая скорость, соответствующая перемещению, вызванному взаимодействием типа α.

Если рассмотреть случай, когда к телу приложены только механические ($a = 1$) и термические ($a = 2$) воздействия, то получим

$\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}$ – (массовая сила);

$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}$ – (вектор механического перемещения);

$\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{t}$ – (тензор напряжений Коши);

$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}$ – (вектор скорости материальной частицы);

$\mathbf{b}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} = r$ – (удельное внутреннее производство тепла);

$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{h}$ – (энтропийное перемещение);

$\mathbf{t}^{(2)} = \theta \mathbf{I}$ – (абсолютная температура);

$\mathbf{v}^{(2)} = \dot{\mathbf{h}}$ – (скорость энтропийного перемещения);

$W^{(1)} = W$ – (механическая мощность);

$W^{(2)} = Q$ – (тепловая мощность).

Тогда из (2.6) для механической мощности получаем

$$W = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \rho dV + \int_S [\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} dS. \tag{2.7}$$

Механическую мощность также можно выразить через интегралы по материальным координатам

$$W = \int_{V_0} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rho_0 dV + \int_{S_0} [\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}] \cdot \dot{\mathbf{x}} dS_0. \tag{2.8}$$

Первые интегралы в правых частях (2.7) и (2.8) выражают мощность массовых сил, а вторые интегралы – мощность поверхностных сил.

Тепловую мощность Q находим из (2.6):

$$Q = \int_V r \rho dV - \int_S \theta \dot{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n} dS. \tag{2.9}$$

Тепловая мощность, записанная при помощи интегралов по материальным координатам, получается аналогично

$$Q = \int_{V_0} r \rho_0 dV_0 - \int_{S_0} \theta \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{N} dS_0. \tag{2.10}$$

Первые интегралы в (2.9) и (2.10) выражают количество тепла, выделяемое или поглощаемое в объеме материального тела в единицу времени, а вторые интегралы – приток тепла, проходящего через поверхность тела в единицу времени. Эта интерпретация становится яснее, если воспользоваться векторами потока тепла $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$. Тогда

$$Q = \int_V r\rho dV - \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{V_0} r\rho_0 dV_0 - \int_{S_0} \mathbf{Q}\cdot\mathbf{N}\,dS_0. \tag{2.11}$$

3. Первый принцип термодинамики

Первый принцип термодинамики утверждает, что сумма изменений кинетической и внутренней энергий тела в единицу времени равна сумме разных по характеру мощностей, соответствующих разным типам взаимодействий тела со средой, т.е.

$$\dot{K} + \dot{U} = \sum_{\alpha=1}^{N} W^{(\alpha)}. \tag{3.1}$$

Когда имеются только механические и термические воздействия, соотношение (3.1) принимает вид

$$\dot{K} + \dot{U} = Q + W. \tag{3.2}$$

Переходя к интегралам, соотношение (3.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\int_V \dot{u}\rho dV + \int_V \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\rho dV = \int_V \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\rho dV + \\ &+\int_S [\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}]\cdot\mathbf{v}dS + \int_V r\rho dV - \int_S \theta\dot{\mathbf{h}}\cdot\mathbf{n}dS \end{aligned} \tag{3.3}$$

в пространственных переменных и в виде

$$\begin{aligned} &\int_{V_0} \dot{u}\rho_0 dV_0 + \int_{V_0} \dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}\rho_0 dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{x}}\rho_0 dV + \\ &\int_{S_0} [\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}]\cdot\dot{\mathbf{x}}\,dS_0 + \int_{V_0} r\rho_0 dV_0 - \int_{S_0} \theta\dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{N}dS_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

в материальных переменных. Так как первый принцип термодинамики применим к произвольному объему и поскольку рассматривается случай достаточно гладких подынтегральных функций, то после замены поверхностных интегралов объемными из (3.3) получаем локальную форму первого принципа термодинамики:

$$\begin{gathered}\dot{u}\rho+\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\rho=\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\rho+\left[\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}\right]\cdot\mathbf{v}+\\+t\cdot\cdot\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right)+r\rho-\nabla_{\mathbf{x}}\theta\cdot\dot{\mathbf{h}}-\theta\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{h}}.\end{gathered}\tag{3.5}$$

В материальных переменных получим соответственно

$$\begin{gathered}\dot{u}\rho_0+\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}\rho_0=\mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{x}}\rho_0+\left[\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{T}\right]\cdot\dot{\mathbf{x}}+\\+\mathbf{T}\cdot\cdot\left(\nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{x}}\right)+r\rho_0-\nabla_{\mathbf{X}}\theta\cdot\dot{\mathbf{H}}-\theta\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\dot{\mathbf{H}}.\end{gathered}\tag{3.6}$$

С учетом уравнения движения соотношения (3.5) и (3.6) можно записать в виде

$$\dot{u}\rho=\mathbf{t}\cdot\cdot\mathbf{l}+r\rho-\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{h}}-\theta\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{h}}\tag{3.7}$$

и

$$\dot{u}\rho_0=\mathbf{T}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}^T+r\rho_0-\mathbf{G}\cdot\dot{\mathbf{H}}-\theta\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\dot{\mathbf{H}}.\tag{3.8}$$

Принимая во внимание соотношения

$$\begin{gathered}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{h}}+\theta\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{h}},\ \nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{G}\cdot\dot{\mathbf{H}}-\theta\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\dot{\mathbf{H}},\\\mathbf{t}\cdot\cdot\mathbf{l}=t\cdot\cdot\left(\mathbf{d}+\mathbf{w}\right)=\mathbf{t}\cdot\cdot\mathbf{d},\ \mathbf{T}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}^T=\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{T}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{C}}=\tilde{\mathbf{T}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{E}},\end{gathered}\tag{3.9}$$

первый принцип термодинамики можно записать в виде

$$\dot{u}\rho=\mathbf{t}\cdot\cdot\mathbf{d}+r\rho-\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{q}\tag{3.10}$$

в пространственных переменных и

$$\dot{u}\rho_0=\tilde{\mathbf{T}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{E}}+r\rho_0-\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{Q}\tag{3.11}$$

в материальных переменных.

4. Второй принцип термодинамики

Протекание термодинамического процесса в материальном теле в ряде случаев сопровождается превращением одного вида энергии в другой. Так, например, установлено, что при пластической деформации тел часть их механической энергии диссипируется (рассеивается) и переходит в тепло, а тело нагревается. Многолетний опыт показывает, что эти превращения осуществляются при определенных соотношениях между отдельными видами энергии и в определенном направлении. Количественные соотношения энергетических превращений определяются первым принципом термодинамики, тогда как направление этих процессов задается вторым принципом термодинамики.

Простейшая формулировка второго принципа термодинамики, данная Клаузиусом в виде постулата, непосредственно выведенного из эксперимента, утверждает, что теплота не может переходить от более холодного тела к более теплому сама по себе, т.е. при отсутствии каких бы то ни было дополнительных процессов, связанных, например, с производством механической работы. Теплота переходит от более теплого тела к более холодному сама собой, только если оба тела с разными температурами соприкасаются друг с другом. Механическая работа также может полностью, без всяких ограничений, превращаться в теплоту, тогда как превращение теплоты в механическую работу происходит при некоторых ограничениях.

В механическую работу нельзя превратить всю теплоту, так как наряду с телом с более высокой температурой, которое отдает теплоту, должно присутствовать и тело с более низкой температурой, которое при этом процессе нагревается. Таким образом, часть теплоты, которую отдает первое тело, переходит в механическую работу, а другая её часть неизбежно передается другому телу снова в форме теплоты. Отсюда следует, что тепловая мощность Q рассматриваемого материального тела, являющегося одновременно и термодинамической системой, ограничена сверху:

$$Q \le B. \tag{4.1}$$

Это утверждение можно получить также следующим образом. Обозначим через W_d ту часть механической мощности W, которая выражает скорость превращения механической работы в теплоту. Величине W_d соответствует скорость расхода тепла термодинамической системы на внутренние энергетические превращения, которую обозначим через Q', при этом $Q' = W_d$. Остальную часть механической мощности обозначим через W_e. Очевидно, $W = W_d + W_e$. Согласно первому принципу термодинамики можно записать

$$\dot{U} + \dot{K} - W_e = Q + Q'. \tag{4.2}$$

Так как равенство (4.2) имеет место быть за все время протекания термодинамического процесса, то получим

$$B = \dot{U} + \dot{K} - W_e = Q + Q'. \tag{4.3}$$

Величина Q' всегда положительна, так как опыт показывает, что производство механической работы (например, при пластической деформации) сопровождается выделением, а не поглощением тепла (тело нагревается). Из условия

$$Q' \geq 0 \tag{4.4}$$

немедленно следует, что $Q \leq B$.

Знак неравенства в (4.1) имеет место для необратимых процессов. Для обратимых процессов, например, чисто механических, при которых механическая энергия не переходит в тепловую, и наоборот, $Q' = 0$ и $Q = B$.

Верхний предел B тепловой мощности Q является функцией времени и зависит от природы рассматриваемого тела. Накопление внутренней энергии за счет одного лишь нагревания, когда механическая работа не производится, при прочих равных условиях происходит для разных тел с разными скоростями. Так как абсолютная температура θ является положительной величиной $(\theta > 0)$, это свойство тел можно охарактеризовать величиной $H = \int_{t_0}^{t} \frac{B}{\theta} dt$, где H – энтропия, имеющая размерность энергии на единицу температуры. Легко видеть, что $B = \theta H$, откуда после подстановки в (4.1) получаем второй принцип термодинамики в виде

$$Q \leq \theta \dot{H} . \tag{4.5}$$

Это – известное неравенство Клаузиуса-Планка. Пусть

$$F_e = U - \theta H. \tag{4.6}$$

Величина F_e называется свободной энергией. Это та часть внутренней энергии, которая остается в теле и не переходит в теплоту. Из (4.6) получаем

$$F_e = \dot{U} - \dot{\theta} H - \theta \dot{H}. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (3.2) для первого принципа термодинамики и учитывая второй принцип термодинамики (4.5), получаем

$$F_e + \theta \dot{H} + \dot{K} - W \leq 0. \tag{4.8}$$

Это так называемое приведенное диссипативное неравенство.

С точки зрения термодинамики сплошных сред любая часть материального тела B, конечная или бесконечная, является термодинамической системой, включая и само тело. К любой такой части также применим второй принцип термодинамики. Тогда из (4.5) можно получить

$$\theta \dot{\eta} \rho - r\rho + \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{h}} + \theta \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{h}} \geq 0. \tag{4.9}$$

В материальных переменных (4.9) записывается следующим образом

$$\theta \dot{\eta} \rho_0 - r\rho_0 + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{H}} + \theta \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{H}} \geq 0. \tag{4.10}$$

Другой формой неравенств (4.9) и (4.10) являются неравенства

$$\begin{gathered} \theta \dot{\eta} \rho - r\rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \geq 0, \\ \theta \dot{\eta} \rho_0 - r\rho_0 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} \geq 0. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Это – локальная форма неравенства Клаузиуса-Планка.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &\rho\delta = \theta\dot{\eta}\rho - r\rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}, \\ &\rho_0\delta = \theta\dot{\eta}\rho_0 - r\rho_0 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Величина δ называется внутренней диссипацией энергии. Из неравенства Клаузиуса-Планка следует, что

$$\delta \geq 0. \tag{4.13}$$

Это так называемое неравенство Планка.

Многочисленные эксперименты показали, что тепло распространяется от точек с более высокой к точкам с более низкой температурой, т.е. от более теплой области к более холодной. Эта направленность процесса распространения тепла выражается неравенством Фурье:

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0, -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \tag{4.14}$$

Неравенство Фурье является основным термодинамическим неравенством, которое применимо как к обратимым, так и к необратимым процессам в отличие от неравенства Клаузиуса-Планка, которое для обратимых процессов обращается в равенство. Неравенство Фурье обращается в равенство только в случае однородного поля температуры ($\mathbf{g} = 0$ или $\mathbf{G} = 0$) или когда отсутствует поток тепла ($\mathbf{q} = 0$ или $\mathbf{Q} = 0$).

Если неравенства Планка и Фурье выполняются одновременно, то можно получить

$$\begin{aligned} &\theta\dot{\eta}\rho - r\rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0, \\ &\theta\dot{\eta}\rho_0 - r\rho_0 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} - \frac{1}{\theta}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

С учетом соотношений (3.9) неравенства (4.15) примут вид

$$\theta\dot{\eta}\rho - r\rho + \theta\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{h}} \geq 0,$$
$$\theta\dot{\eta}\rho_0 - r\rho_0 + \theta\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{H}} \geq 0. \quad (4.16)$$

Это неравенство Клаузиса-Дюгема в локальной форме.

5. Основные предпосылки получения определяющих уравнений в механике деформируемого твердого тела

Получение основной системы уравнений, описывающих термомеханические процессы, протекающие в телах, равно как и методов решения этой системы в конкретных практически важных случаях, является главной целью механики твердых деформируемых тел. Полученные ранее уравнения сохранения массы, движения, сохранения энергии и соотношения геометрических связей между перемещениями и деформациями недостаточны для получения полной системы, из которой можно определить искомые величины. Нужно добавить так называемые определяющие уравнения, содержащие информацию об особенностях термомеханического поведения рассматриваемого материала. Свойства материала существенным образом зависят от условий работы тела (типа и программы внешних воздействий) и начального состояния (технологии получения материала, технологии изготовления тела, истории процессов в теле до начального состояния и т.п.).

Будем рассматривать большую группу однокомпонентных (некомпозитных) конструкционных материалов, которые при определенных условиях претерпевают структурные изменения, вызванные протекающим в теле процессом. В качестве частных случаев получим результаты и для некоторых материалов с неизменной структурой.

Будем рассматривать термомеханические процессы, при которых исследуемое тело испытывает механические и термические воздействия. Не будем анализировать массообменные, химические, электромагнитные и другие процессы. Будем предполагать, что в исследуемых однородных телах не возникают локальные эффекты типа концентрации напряжений, распространения трещин и т.п. (для которых может понадобиться теория моментных напряжений) и, кроме того, не существуют внутренние нелокальные взаимные влияния (для которых может понадобиться применение теории сплошных сред, использующей производные более высокого порядка от перемещений). Термомеханические процессы, протекающие в телах, будем рассматривать вообще как сложные процессы, состоящие из взаимосвязанных, разных по характеру процессов: механического, термического и процесса изменения структуры, которые изменяют соответственно механическое, термическое и структурное состояние тела.

Мы знаем, что два количества материала одного размера, веса цвета и формы могут вести себя совершенно различно при одинаковых воздействиях внешних сил и потоков тепла, следовательно, поведение данного образца зависит от физических свойств материала, которые можно определить в лабораторных испытаниях. Однако полученная на основе экспериментальных данных эмпирическая формула может описывать поведение материала для довольно специальных процессов деформирования, воспроизводимых в лаборатории, но та же самая формула может давать совершенно неудовлетворительные результаты при других деформациях. Для того, чтобы избежать таких трудностей, надо установить некоторые правила, которым должны удовлетворять уравнения состояния материала, чтобы они давали удовлетворительные результаты для всех классов деформаций и температур, которые предполагается исследовать. Во-вторых, нужно иметь точный вид уравнений состояния, согласующийся с этими правилами, для того чтобы знать, что измерять в лаборатории при исследовании имеющихся в распоряжении образцов материала. Следует, конечно, иметь в виду, что уравнения состояния характеризуют идеальные материалы, действительные материалы лишь приближенно отвечают различным классификациям по форме уравнений состояния. Кроме того, надо иметь в виду, что можно построить уравнения состояния, описывающие заданный материал лишь приближенно – только в определенном диапазоне температур и деформаций.

6. Общий вид определяющих уравнений

Рассмотрим материальное тело, к которому приложены внешние механические и термические воздействия, меняющиеся по заданной программе в интервале времени (t_0, t_1). Примем, что состояние тела в момент времени t_0 известно, и будем искать основную систему уравнений, описывающую термомеханический процесс, происходящий в теле в интервале времени (t_0, t_1). Для этой цели представим себе, что тело составлено из бесконечного множества локальных термомеханических систем.

В качестве локальной термодинамической системы будем рассматривать бесконечно малую окрестность материальной точки $\mathbf{X}$ и связанную с ней элементарную массу dm. В этой системе происходит локальный термодинамический процесс, изменяющий ее состояние в интервале времени (t_0, t_1). Полное состояние локальной термодинамической системы $(\mathbf{X}, dm)$ в момент времени t определяется следующими факторами:

1) положением системы;

2) внутренним состоянием системы;

3) экстранзитивным состоянием системы.

Положение системы вполне задано, если известны закон движения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ и плотность $\rho(\mathbf{X}, t)$ определяемая при помощи начальной плотности $\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X}, t_0)$ и закона сохранения массы $\rho = \rho_0 / J$. Положение системы будем отсчитывать по отношению к основной конфигурации тела в момент времени t_0.

Внутреннее состояние системы характеризуется разными по характеру состояниями – механическим, термическим, структурным и энергетическим. Примем принцип детерминизма энергетического состояния, согласно которому внутреннее энергетическое состояние в момент времени t вполне определено, если известны остальные так называемые основные состояния – механическое, термическое и структурное – в тот же момент времени t. При более общем рассмотрении можно принять, что энергетическое состояние зависит, кроме того, и от предыстории этих состояний. Такое рассмотрение ведет к функциональным определяющим соотношениям. Ограничимся рассмотрением широко используемого в практических применениях случая, когда все эффекты истории актуального состояния можно раскрыть путем анализа структурного состояния системы в момент времени t. Каждое из основных состояний можно отнести к одной из двух разновидностей: активной и реактивной.

а) Активные состояния связаны с внешними воздействиями и характеризуются так называемыми обобщенными термодинамическими силами. В нашем случае это будут напряженное, температурное и диссипативно-силовое состояния системы. В качестве макромасштабных мер активных состояний примем второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа $\tilde{\mathbf{T}}$, абсолютную температуру θ и обобщенные диссипативные силы $P_a^{(\alpha)}$, соответствующие внутренним параметрам состояния. Примем, что число этих сил является конечным $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, и, кроме того, что они могут быть скалярными, векторными или тензорными величинами, что обозначается нижним индексом a. Характеристики активных определяющих состояний (упорядоченную совокупность функций) будем обозначать через $\mathrm{A}\left(\mathbf{X}, t\right)$, а именно

$$\mathrm{A}\left(\mathbf{X},t\right)=\left\{\tilde{\mathbf{T}},\theta,P_a^{(\alpha)}\right\},\ \alpha=1,2,\ldots,N. \qquad (6.1)$$

б) Реактивные состояния связаны с внутренней реакцией материала на внешние воздействия, они характеризуются так называемыми обобщенными термодинамическими перемещениями. В нашем случае реактивными будут деформированное, энтропийное и структурное состояния системы. В качестве макромасштабных мер реактивных состояний примем тензор конечных деформаций Грина $\mathbf{L}$, удельную энтропию η и внутренние параметры состояния $\aleph_a^{(\alpha)}$. Внутренние параметры должны характеризовать структурное состояние системы. Характеристики реактивных определяющих состояний будем обозначать через $\Re\left(\mathbf{X},t\right)$, т.е. через $\Re\left(\mathbf{X},t\right)$ обозначим упорядоченную совокупность функций

$$\Re\left(\mathbf{X},t\right)=\left\{L,\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right\},\ \alpha=1,2,\ldots,N. \qquad (6.2)$$

Будем считать воздействия на систему и реакции материала взаимно связанными и зависящими соответственно от типа воздействия и типа материала:

$$\mathrm{A}\left(\mathbf{X},t\right)=\Im\left\{\Re\left(\mathbf{X},t\right)\right\},\ t\in\left(t_0,t_1\right), \qquad (6.3)$$

причем эта зависимость однозначная и непрерывная.

Если принять в качестве характеристики энергетического состояния удельную внутреннюю энергию $u\left(\mathbf{X},t\right)$ и учесть (6.3), то и $u\left(\mathbf{X},t\right)$ можно выразить через параметры $\mathbf{L}$, η и $\aleph_a^{(\alpha)}$ зависимостью вида

$$u\left(\mathbf{X},t\right)=\hat{u}\left\{L,\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right\},\ t\in\left(t_0,t_1\right), \qquad (6.4)$$

в которой считается, что $\hat{u}(\mathbf{X},t)$ есть однозначная и непрерывная функция своих аргументов. Предполагая однозначность и обратимость функций $\Im\{\Re(\mathbf{X},t)\}$ из (6.3), к уравнению (6.4) можно применить преобразование Лежандра и получить другие эквивалентные макромасштабные характеристики энергетического состояния локальной системы. Ниже перечислим их.

$$\psi = u - \theta\eta, \tag{6.5}$$

где удельная свободная энергия ψ есть однозначная функция деформации $\mathbf{L}$, абсолютной температуры θ и внутренних параметров состояния $\aleph_a^{(\alpha)}$.

$$\varphi = u - \tilde{\mathbf{T}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{L}}/\rho_0, \tag{6.6}$$

где удельная энтальпия φ есть однозначная функция напряжений $\tilde{\mathbf{T}}$, удельной энтропии η и внутренних параметров состояния $\aleph_a^{(\alpha)}$.

$$z = u - \tilde{\mathbf{T}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{L}}/\rho_0 - \theta\eta, \tag{6.7}$$

где удельная свободная энтальпия z есть однозначная функция напряжений $\tilde{\mathbf{T}}$, абсолютной температуры θ и внутренних параметров состояния $\aleph_a^{(\alpha)}$.

Уравнение (6.4) или соответственно (6.5–6.7) относятся к первой группе определяющих уравнений, связывающих макромасштабные меры внутреннего состояния локальной термодинамической системы $(\mathbf{X},dm)$.

Экстранзитивное состояние системы характеризует эффект переноса через нее зарядов определенного типа (термического, массового, электромагнитного и т.п.), в связи с чем получается диссипация энергии. Таковы, например, процессы тепло- и массопереноса. В нашем случае рассматривается только перенос тепла. Вот почему экстранзитивное состояние системы в момент времени t выражается эффектом теплопередачи между системой $(\mathbf{X}, dm)$ и соседними ее элементарными системами. Она характеризуется макромасштабными мерами: вектором энтропийного перемещения $\mathbf{H}$, которое играет роль обобщенного термодинамического перемещения, и материальным градиентом температуры $\mathbf{G}$, играющим роль обобщенной термодинамической силы. Вместо вектора $\mathbf{H}$ в качестве макромасштабной характеристики часто берут связанный с ним вектор потока тепла $\mathbf{Q}$.

Подводя итоги, замечаем, что в качестве макромасштабных мер приняты: для положения системы – функции $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ и $\rho(\mathbf{X},t)$, для внутреннего состояния системы при активных основных состояниях – совокупность функций $\mathrm{A}(\mathbf{X},t)$; при реактивных основных состояниях – совокупность функций $\Re(\mathbf{X},t)$ и при энергетическом состоянии – функция $u(\mathbf{X},t)$; для экстранзитивного состояния – функции $\mathbf{H}(\mathbf{X},t)$ и $\mathbf{G}(\mathbf{X},t)$. Определим полное состояние локальной системы следующей совокупностью функций переменных $\mathbf{X}$ и t:

$$\wp(\mathbf{X},t)=\{\mathbf{x}(\mathbf{X},t),\rho(\mathbf{X},t),\mathrm{A}(\mathbf{X},t),\\ \Re(\mathbf{X},t),u(\mathbf{X},t),\mathbf{H}(\mathbf{X},t),\mathbf{G}(\mathbf{X},t)\}. \tag{6.8}$$

Итак, для определения изменения этого состояния в интервале (t_0,t_1) нужно определить изменение $\wp(\mathbf{X},t)$ в том же интервале времени. Для этой цели нужно знать начальное состояние системы в момент времени t_0, т.е. $\wp(\mathbf{X},t_0)=\wp_0(\mathbf{X})$, и законы, по которым это состояние меняется. Изменение состояния подчиняется, с одной стороны, законам механики и термодинамики, а с другой, зависит от характерных особенностей материала, которые учитываются второй группой определяющих уравнений. В рассматриваемом случае вторая группа определяющих уравнений состоит из уравнений, описывающих изменение внутренних параметров и называемых уравнениями эволюции. К ним нужно добавить еще уравнение теплопроводности, дающее изменение энтропийного перемещения во времени.

На основании феноменологического, экспериментального или структурно-физического анализа можно определить уравнения эволюции, принимающие общий вид:

$$\dot{\aleph}_a^{(\alpha)}=\Phi^{(\alpha)}\left[\Re(\mathbf{X},t)\right],t\in(t_0,t_1),\alpha=1,2,\ldots,N, \tag{6.9}$$

где $\Phi^{(\alpha)}$ – суть однозначные функции переменных $\mathbf{L}$, η и $\aleph_a^{(\alpha)}$. Часто эти уравнения задаются при помощи других переменных, например, $\tilde{\mathbf{T}}$, θ и $\aleph_a^{(\alpha)}$, т.е.

$$\dot{\aleph}_a^{(\alpha)}=\Phi^{(\alpha)}\left[\tilde{\mathbf{T}},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right],t\in(t_0,t_1),\ \alpha=1,2,\ldots,N. \tag{6.10}$$

Выбор этих уравнений определяется конкретными свойствами материала, которые должны быть тщательно установлены экспериментальным путем. Нахождение определяющих уравнений для различных групп материалов есть одна из важнейших целей механики деформируемых тел, физики твердого тела, материаловедения, физической химии и других наук. Вид этих уравнений зависит не только от типа рассматриваемого материала, но и от условий, в которых этот материал находится. Один и тот же материал при различных начальных условиях и при различных условиях работы может иметь различные свойства, которые характеризуются различными определяющими уравнениями. Структура материала имеет решающее значение для его поведения, поэтому при выводе определяющих уравнений современная механика стремится объединить феноменологический и структурный подходы. Для описания действительного поведения деформируемых тел нужно, чтобы дифференциальные уравнения (6.9) или (6.10) имели единственное решение при заданных начальных условиях: $\mathbf{L}(\mathbf{X},t_0)$, $\eta(\mathbf{X},t_0)$ и $\aleph_a^{(\alpha)}(\mathbf{X},t_0)$ или $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X},t_0)$, $\theta(\mathbf{X},t_0)$ и $\aleph_a^{(\alpha)}(\mathbf{X},t_0)$.

Это приводит к следующим ограничениям:

а) функции $\Phi^{(\alpha)}$ должны быть непрерывными в смысле Липшица по отношению к $\aleph_a^{(\alpha)}(\mathbf{X},t)$;

б) те же функции должны быть непрерывными по отношению к $\mathbf{L}(\mathbf{X},t)$, $\eta(\mathbf{X},t)$ или $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X},t)$, $\theta(\mathbf{X},t)$.

Уравнение теплопроводности в самом общем случае имеет вид

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}\left[\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \mathbf{G}, \aleph_a^{(\alpha)}\right] \tag{6.11}$$

или

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\theta}\hat{\mathbf{Q}}\left[\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \mathbf{G}, \aleph_a^{(\alpha)}\right]. \tag{6.12}$$

Во многих практически важных случаях принимают, что процесс теплопроводности подчиняется линейному закону Фурье, который в материальных переменных имеет вид

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\theta}\lambda_t \mathbf{G} \tag{6.13}$$

или

$$\mathbf{Q} = -\lambda_t \mathbf{G}. \tag{6.14}$$

В пространственной записи тот же закон имеет вид

$$\dot{\mathbf{h}} = -\frac{1}{\theta}\lambda_t \mathbf{g} \tag{6.15}$$

или

$$\mathbf{q} = -\lambda_t \mathbf{g}, \tag{6.16}$$

где λ_t – коэффициент теплопроводности.

Локальный термодинамический процесс, протекающий в системе $(\mathbf{X}, dm)$, описывается значениями совокупности функций $\wp(\mathbf{X}, t)$, которые для любого $t \in (t_0, t_1)$ должны удовлетворять:

А. Уравнениям, связывающим характеристики полного состояния системы:

1) уравнению сохранения массы

$$\rho = \rho_0 / J,$$

2) первой группе определяющих уравнений

$$u(\mathbf{X},t) = \hat{u}\{\Re(\mathbf{X},t)\},$$

$$\mathrm{A}(\mathbf{X},t) = \Im\{\Re(\mathbf{X},t)\},$$

3) уравнениям геометрии

$$\mathbf{L} = \left[\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}\right] / 2.$$

Б. Уравнениям, дающим изменения этих характеристик во времени:

1) уравнению сохранения массы в скоростях

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v},$$

2) уравнению движения

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \left[\mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{T}}\right] + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}},$$

3) уравнению баланса энергии

$$\rho_0 \dot{u} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{L}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} + \rho_0 r,$$

4) уравнению геометрии скоростей

$$\dot{\mathbf{L}} = \left[\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}\right] / 2,$$

5) второй группе определяющих уравнений

$$\dot{\aleph}_a^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)}\left[\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \aleph_a^{(\alpha)}\right],$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\theta} \hat{\mathbf{Q}}\left[\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \mathbf{G}, \aleph_a^{(\alpha)}\right].$$

В. Второму принципу термодинамики, ведущему к удовлетворению неравенства Клаузиуса-Дюгема

$$\theta\dot{\eta}\rho_0 - r\rho_0 + \theta\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\dot{\mathbf{H}} \geq 0 .$$

а) при заданных начальных значениях функций $\wp\left(\mathbf{X},t_0\right)$, характеризующих состояние,

б) при заданной программе изменения внешних воздействий, т.е. при заданных функциях $\mathbf{b}\left(\mathbf{X},t\right)$ и $r\left(\mathbf{X},t\right)$ для любого $t\in\left(t_0,t_1\right)$ и граничных условиях на S_0, если $\mathbf{X}\in S_0$.

Из представленной выше схемы видна роль двух групп определяющих уравнений для определения локальных термодинамических процессов. Однако неравенства второго принципа термодинамики накладывают некоторые ограничения на возможный вид этих групп уравнений. Действительно, если в (6.19) подставить (3.11), то получим

$$\rho_0\theta\dot{\eta} - \rho_0\dot{u} + \tilde{\mathbf{T}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{L}} + \dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{G} \geq 0 . \tag{6.17}$$

Формально дифференцируя (6.4) по времени, получим

$$\dot{u} = \frac{\partial\hat{u}}{\partial\mathbf{L}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{L}} + \frac{\partial\hat{u}}{\partial\eta}\dot{\eta} + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\aleph_a^{(\alpha)}}\cdot\cdot\dot{\aleph}_a^{(\alpha)} . \tag{6.18}$$

Подставляя (6.18) в (6.17), получаем

$$\begin{gathered}\rho_0\left[\theta - \frac{\partial\hat{u}}{\partial\eta}\right]\dot{\eta} + \left[\tilde{\mathbf{T}} - \rho_0\frac{\partial\hat{u}}{\partial\mathbf{L}}\right]\cdot\cdot\dot{\mathbf{L}} - \\ -\rho_0\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\aleph_a^{(\alpha)}}\cdot\cdot\dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{G} \geq 0.\end{gathered} \tag{6.19}$$

Если в неравенстве (6.19) учесть, что $\dot{\mathbf{L}}$ и $\dot{\eta}$ могут изменяться независимым образом, то для его удовлетворения при любых значениях $\dot{\mathbf{L}}$ и $\dot{\eta}$ нужно положить

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{L}}, \theta = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} \tag{6.20}$$

при

$$-\rho_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \tag{6.21}$$

Первая группа определяющих уравнений (6.3) дает для напряжений $\tilde{\mathbf{T}}$ и температуры θ уравнения типа

$$\tilde{\mathbf{T}} = \Im_T \left[\mathbf{L}, \eta, \aleph_a^{(\alpha)} \right], \theta = \Im_\theta \left[\mathbf{L}, \eta, \aleph_a^{(\alpha)} \right]. \tag{6.22}$$

Из требования удовлетворения неравенства Клаузиуса-Дюгема получаем, что функции $\Im_T$ и $\Im_\theta$ должны иметь вид (6.20). Следует, кроме того, учесть, что удельная внутренняя энергия и играет роль функции потенциала для $\tilde{\mathbf{T}}$ и θ. Если подставить (6.10) и (6.12) в (6.21), то получим ограничения для второй группы определяющих уравнений, выражаемое неравенством

$$-\rho_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}} \cdot\cdot \Phi^{(\alpha)} + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \tag{6.23}$$

По аналогии с полученной связью типа (6.20) между активными мерами $\tilde{\mathbf{T}}$, θ и реактивными мерами $\mathbf{L}$, η и $\aleph_a^{(\alpha)}$ определяем обобщенные диссипативные силы $P_a^{(\alpha)}$ при помощи выражения

$$P_a^{(\alpha)} = -\rho_0 \frac{\partial \hat{u} \left[\mathbf{L}, \eta, \aleph_a^{(\alpha)} \right]}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}}. \tag{6.24}$$

Из (6.20) и (6.24) видно, что для определения первой группы определяющих уравнений достаточно знать функцию внутренней энергии $\hat{u}\left\{\mathbf{L},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right\}$, которая в данном случае функций, характеризующих свойства рассматриваемого материала. Определяющие уравнения (6.20) дают иногда однозначную обратимую связь между термодинамическими характеристиками состояния, тогда можно воспользоваться и другими характеристиками энергетического состояния. Такими характеристиками являются удельная свободная энергия ψ (6.5), удельная энтальпия φ (6.6) и удельная свободная энтальпия z (6.7). Если повторить ту же процедуру, которая применялась для $\hat{u}$, то для ψ, φ и z, можно получить аналогичные уравнения

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{L}}, \eta = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta}, \tag{6.25}$$

при

$$-\rho_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{G} \geq 0, \tag{6.26}$$

$$\mathbf{L} = -\rho_0 \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}}, \theta = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \eta}, \tag{6.27}$$

при

$$-\rho_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{G} \geq 0, \tag{6.28}$$

$$\mathbf{L} = -\rho_0 \frac{\partial \hat{z}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}}, \eta = -\frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta}, \tag{6.29}$$

при

$$-\rho_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \tag{6.30}$$

Из этих формул видно, что удельная свободная энергия ψ, удельная энтальпия φ и удельная свободная энтальпия z также являются потенциальными функциями для различных переменных.

Если в (4.12) подставить (3.11), а также (6.18), (6.20) и (6.22), то получим следующее выражение для внутренней диссипации

$$\rho_0\delta = \sum_{\alpha=1}^{N} P_a^{(\alpha)} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)}. \tag{6.31}$$

Подставляя (6.23) в (6.21), получаем

$$\rho_0\overline{\delta} = \sum_{\alpha=1}^{N} P_a^{(\alpha)} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{G} = \rho_0\delta + \dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{G} \geq 0. \tag{6.32}$$

Величина $\overline{\delta}$ называется диссипацией энергии. Она состоит из внутренней диссипации, обусловленной изменением внутренних параметров состояния (первое слагаемое в (6.32)), и диссипации, вызванной теплопроводностью (второе слагаемое). Изменение энтропии можно записать в виде

$$\rho_0\theta\dot{\eta} = -\theta\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\dot{\mathbf{H}} + \rho_0 r + \sum_{\alpha=1}^{N} P_a^{(\alpha)} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{G} \tag{6.33}$$

или через поток тепла

$$\rho_0\theta\dot{\eta} = -\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{Q} + \rho_0 r + \sum_{\alpha=1}^{N} P_a^{(\alpha)} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)}. \tag{6.34}$$

Если в (6.34) подставить выражение для $\dot{\eta}$, полученное, например, из (6.25) путем материального дифференцирования по времени,

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{L}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta}\dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \eta}{\partial \aleph_a^{(\alpha)}} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} = -\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{L} \partial \theta} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} - \\ -\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2}\dot{\theta} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)} \partial \theta} \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} \tag{6.35}$$

и заменить $\mathbf{Q}$ на $\hat{\mathbf{Q}}$ из (6.11), то получим

$$-\rho_0 \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2}\dot{\theta} = \rho_0 \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{L} \partial \theta} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} + \\ + \rho_0 r + \sum_{\alpha=1}^{N} \left[P_a^{(\alpha)} - \rho_0 \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \aleph_a^{(\alpha)} \partial \theta} \right] \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)}. \tag{6.36}$$

Если принять обозначения вида

$$c_t = -\theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2}, \; \mathbf{A}^t = \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{L} \partial \theta}, \tag{6.37}$$

и учесть соотношение типа (6.24), но для удельной свободной энергии, то получим уравнение для определения температуры

$$\rho_0 c_t \dot{\theta} = -\theta \mathbf{A}^t \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} + \\ + \rho_0 r + \sum_{\alpha=1}^{N} \left[P_a^{(\alpha)} - \theta \frac{\partial P_a^{(\alpha)}}{\partial \theta} \right] \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)}. \tag{6.38}$$

Слагаемое $\sum_{\alpha=1}^{N} \left[P_a^{(\alpha)} - \theta \frac{\partial P_a^{(\alpha)}}{\partial \theta} \right] \cdot\cdot \dot{\aleph}_a^{(\alpha)}$ дает внутренний источник тепла, образованного за счет диссипативных эффектов, порождаемых изменением параметров внутреннего состояния.

Все определяющие уравнения получаются и в пространственной записи, если сделать переход от материальных макромасштабных мер термодинамического процесса к пространственным мерам.

7. Определяющие уравнения при малых деформациях

Если рассматриваются твердые деформируемые тела, в которых протекает соответствующий термодинамический процесс, сопровождаемый малыми деформациями, то можно сделать некоторые упрощения. Будем говорить, что процесс сопровождается малыми деформациями, если за все время процесса (t_0, t_1) перемещения и деформации малы, т.е. $\max\{u_i / L, F_{k\alpha}\} << 1$ для любого $t \in (t_0, t_1)$, где L – характерный размер тела, u_i – компоненты вектора перемещений, а $F_{k\alpha}$ – компоненты градиента деформаций. В этом случае можно принять предположение о малости изменения геометрии тела и в дальнейшем не отличать материальную запись от пространственной. Все меры процесса рассматриваются как функции пространственных координат точек тела $\mathbf{x}$ и времени t. Координаты точек тела x_i определяются в прямоугольной системе координат для начального положения тела в момент $t = t_0$, а изменение положения тела во время процесса описывается вектором перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Между этим случаем и случаем больших деформаций можно сформулировать ряд промежуточных случаев, при которых, например, перемещения велики, а градиенты деформаций малы; деформации малы, но повороты велики; деформации не совсем малы – случай так называемых больших деформаций и др. Перечисленные только что случаи не будут рассматриваться.

Бесконечно близкая окрестность точки $\mathbf{x}$ и связанная с нею масса dm определяют локальную термодинамическую систему $(\mathbf{x}, dm)$. Полное состояние локальной термодинамической системы в момент времени t при протекании термодинамического процесса в теле в интервале времени (t_0, t_1) определяется следующими факторами:

а) Положением системы, характеризующимся вектором перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ – координаты тела в момент t_0. Изменения объема тела при деформации учитываются, но с достаточной для приложений точностью принимается, что плотность тела приближенно не меняется, т.е. $\rho(\mathbf{x}, t) \approx \rho_0(\mathbf{x})$ для любого $t \in (t_0, t_1)$.

б) Внутренним состоянием системы в момент времени t, характеризующимся макромасштабными мерами тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ (для деформированного состояния), тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ (для напряженного состояния), абсолютной температурой $\theta(\mathbf{x}, t)$ (для термического состояния), удельной энтропией $\eta(\mathbf{x}, t)$ (для энтропийного состояния), конечным числом внутренних параметров состояния $\aleph_a^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$ и связанными с ними обобщенными диссипативными силами $P_a^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$ (для внутреннего структурно-диссипативного состояния).

в) Экстранзитивным состоянием, характеризующимся теплопроводностью и ее макромасштабными мерами – энтропийным перемещением $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ или вектором потока тепла $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$, и градиентом температуры $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$.

Вводится удельная внутренняя энергия как функция от мер определяющих состояний – тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ удельной энтропии $\eta(\mathbf{x},t)$ и внутренних параметров состояния $\aleph_a^{(\alpha)}(\mathbf{x},t)$ любого $t \in (t_0,t_1)$

$$u = \hat{u}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]. \tag{7.1}$$

Если ввести первую группу определяющих уравнений термодинамическим путем, то получим

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \rho\,\partial\hat{u}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]\big/\partial\boldsymbol{\varepsilon}, \\ &\theta = \partial\hat{u}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]\big/\partial\eta, \\ &\left(P_a^{(\alpha)}\right) = \partial\hat{u}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]\big/\partial\aleph_a^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Если принять существование однозначной и обратимой связи между переменными в (7.2), то в качестве характеристик внутреннего энергетического состояния можно использовать удельную свободную энергию $\psi\left(\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right)$, удельную энтальпию $\varphi\left(\boldsymbol{\sigma},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right)$, и удельную свободную энтальпию $z\left(\boldsymbol{\sigma},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right)$и получить определяющие уравнения, подобные уравнениям (7.2). Так, например, первая группа определяющих уравнений, если принять в качестве такой характеристики удельную свободную энергию ψ, примет вид

$$\begin{aligned}&\psi=\hat{\psi}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right),\ \boldsymbol{\sigma}=\rho\partial\hat{\psi}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]\big/\partial\boldsymbol{\varepsilon},\\&\eta=\partial\hat{\psi}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]\big/\partial\theta,\ P_a^{(\alpha)}=\partial\hat{\psi}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right]\big/\partial\aleph_a^{(\alpha)}.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Вторую группу определяющих уравнений выразим аналогичным образом, как и в случае больших деформаций, т.е.

$$\dot{\vec{h}}=\hat{\vec{q}}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\mathbf{g},\aleph_a^{(\alpha)}\right)\big/\theta\tag{7.4}$$

или

$$\dot{\mathbf{h}}=-\frac{1}{\theta}\lambda_t\mathbf{g},\tag{7.5}$$

и уравнение эволюции параметров состояния

$$\dot{\aleph}_a^{(\alpha)}=\Phi^{(\alpha)}\left[\boldsymbol{\varepsilon},\theta,\aleph_a^{(\alpha)}\right],\ \alpha=1,2,\ldots N.\tag{7.6}$$

Локальный термодинамический процесс, протекающий в системе $(\mathbf{x},dm)$ и изменяющий ее состояние в интервале времени (t_0,t_1), задается совокупностью функций переменных $\mathbf{x}$ и t, а именно $\left\{u_i,\sigma_{ij},\theta,P_a^{(\alpha)},\varepsilon_{ij},\eta,\aleph_a^{(\alpha)},h_i,g_i\right\}$, которые в любой момент удовлетворяют следующим уравнениям:

а) первой группе определяющих уравнений

$$\begin{aligned}&u=\hat{u}\left(\varepsilon_{ij},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right),\\&\sigma_{ij}=\rho\partial\hat{u}\left(\varepsilon_{ij},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right)\big/\partial\varepsilon_{ij},\\&\theta=\partial\hat{u}\left(\varepsilon_{ij},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right)\big/\partial\eta,\\&P_a^{(\alpha)}=\partial\hat{u}\left(\varepsilon_{ij},\eta,\aleph_a^{(\alpha)}\right)\big/\partial\aleph_a^{(\alpha)};\end{aligned}\tag{7.6}$$

б) уравнениям движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i, \ a_i = \ddot{u}_i; \tag{7.7}$$

в) уравнениям геометрии

$$\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2 \tag{7.8}$$

и

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)/2, \ v_i = \dot{u}_i; \tag{7.9}$$

г) уравнению баланса энергии

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho r - q_{i,i}; \tag{7.10}$$

д) второй группе определяющих уравнений

$$\dot{\aleph}_a^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)}\left(\sigma_{ij}, \theta, \dot{\aleph}_a^{(\alpha)}\right), \alpha = 1, 2, \ldots N \tag{7.11}$$

и

$$q_i = \hat{q}_i\left(\sigma_{ij}, \theta, g_i, \aleph_a^{(\alpha)}\right) \text{ или } \dot{h}_i = \hat{q}_i\left(\sigma_{ij}, \theta, g_i, \aleph_a^{(\alpha)}\right)/\theta; \tag{7.12}$$

е) второму принципу термодинамики, ведущему к неравенству

$$\bar{\delta} = g_i \dot{h}_i \Big/ \rho - \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\partial \hat{u} / \partial \aleph_a^{(\alpha)}\right) \dot{\aleph}_a^{(\alpha)} \geq 0. \tag{7.13}$$

Здесь предполагается, что начальное состояние системы в момент $t = t_0 = 0$ задано, т.е. задана совокупность

$$\begin{gathered}\left\{u_i\left(x_k, 0\right), \sigma_{ij}\left(x_k, 0\right), \theta\left(x_k, 0\right), P_a^{(\alpha)}\left(x_k, 0\right),\right. \\ \left.\varepsilon_{ij}\left(x_k, 0\right), \eta\left(x_k, 0\right), \aleph_a^{(\alpha)}\left(x_k, 0\right), h_i\left(x_k, 0\right), g_i\left(x_k, 0\right)\right\}\end{gathered} \tag{7.14}$$

и, кроме того, задана программа нагружения, т.е. заданы функции $b_i\left(x_k, t\right)$ и $r\left(x_k, t\right)$ для любого $t \in \left(t_0, t_1\right)$ и граничные условия на S, если $x_k \in S$.

Принимая конкретный тип определяющих уравнений первой и второй группы, мы определяем заданную механико-математическую модель. Механико-математическая модель характеризует идеализированное тело, механические свойства которого определяются системой исходных предположений, моделирующих реальное поведение материалов при определенных условиях работы и нагрузки и позволяющих выразить математически определяющие уравнения. Механико-математические модели создаются теоретическим и экспериментальным путем. На основании экспериментов, раскрывающих механические свойства материалов при разных условиях работы и нагрузки, при помощи теоретико-феноменологического или структурно-физического подхода создается исходная система гипотез модели. На основании этой системы гипотез выводятся определяющие уравнения. При их помощи нужно решить краевые задачи с начальными условиями для нагрузок и элементов, которые могут быть проверены экспериментально. Далее делается экспериментальная проверка теоретических результатов, полученных из принятых определяющих уравнений. Важно найти область применимости соответствующей механико-математической модели, т.е. найти класс материалов и условия работы и нагружения, для которых эта модель является подходящей.

Тестовые вопросы

Для лучшего закрепления знаний в процессе изучения курса предлагаются тестовые вопросы. Среди приводимых ответов – один или несколько (но не все) правильные.

1. Какая термодинамическая система называется открытой?

    1 – которая обменивается массой и энергией с окружающей средой;

    2 – которая обменивается с окружающей средой только массой;

    3 – которая обменивается с окружающей средой только энергией;

    4 – которая не обменивается массой и энергией с окружающей средой.

2. Какая термодинамическая система называется замкнутой?

    1 – которая обменивается массой и энергией с окружающей средой;

    2 – которая обменивается с окружающей средой только массой;

    3 – которая обменивается с окружающей средой только энергией;

    4 – которая не обменивается массой и энергией с окружающей средой.

3. Чем характеризуется состояние термодинамической системы?

    1 – параметрами термодинамического состояния;

2 – геометрией материального тела;

3 – принципами термодинамики.

4. Когда термодинамическая система находится в термодинамически равновесном состоянии?

1 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния не меняются;

2 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния имеют конечную скорость изменения;

3 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, возвращает систему в ее исходное состояние;

4 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, не возвращает систему в ее исходное состояние.

5. Когда термодинамическая система находится в термодинамически неравновесном состоянии?

1 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния не меняются;

2 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния имеют конечную скорость изменения;

3 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, возвращает систему в ее исходное состояние;

4 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, не возвращает систему в ее исходное состояние.

6. Когда равновесное состояние является устойчивым?

1 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния не меняются;

2 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния имеют конечную скорость изменения;

3 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, возвращает систему в ее исходное состояние;

4 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, не возвращает систему в ее исходное состояние.

7. Когда равновесное состояние является неустойчивым?

1 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния не меняются;

2 – в течение некоторого интервала времени при постоянных внешних условиях параметры термодинамического состояния имеют конечную скорость изменения;

3 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, возвращает систему в ее исходное состояние;

4 – если процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, не возвращает систему в ее исходное состояние.

8. Что называется термодинамическим процессом?

1 – совокупность термодинамических систем;

2 – совокупность последовательных состояний, через которые термодинамическая система проходит при взаимодействии с окружающей средой.

9. Какие из этих процессов обратимые?

1 – равновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело приходит в исходное состояние;

2 – неравновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело и окружающая среда приходят в исходное состояние;

3 – равновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, толь-

ко в обратной последовательности, после чего тело и окружающая среда приходят в исходное состояние;

4 – неравновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело приходит в исходное состояние.

10. Какие из этих процессов необратимые?

1 – равновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело приходит в исходное состояние;

2 – неравновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело и окружающая среда приходят в исходное состояние;

3 – равновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело и окружающая среда приходят в исходное состояние;

4 – неравновесный процесс, который проходит через те же состояния в обратном направлении, что и в прямом, только в обратной последовательности, после чего тело приходит в исходное состояние.

11. Первый принцип термодинамики:

1 – сумма изменений кинетической и потенциальной энергий тела в единицу времени равна сумме равных по характеру мощностей;

2 – сумма изменений кинетической и внутренней энергий тела в единицу времени равна сумме равных по характеру мощностей;

3 – сумма изменений внутренней и потенциальной энергий тела в единицу времени равна сумме равных по характеру мощностей.

12. Первый принцип термодинамики определяет:

1 – количественные соотношения энергетических превращений;

2 – направление процессов энергетических превращений.

13. Второй принцип термодинамики определяет:

1 – количественные соотношения энергетических превращений;

2 – направление процессов энергетических превращений.

14. Может ли вся механическая работа без всяких дополнительных условий переходить в теплоту?

1 – да;

2 – нет.

15. Может ли вся теплота без всяких дополнительных условий переходить в механическую работу?

1 – да;

2 – нет.

16. Тепловая мощность рассматриваемого тела ограничена:

1 – сверху;

2 – снизу;

3 – не ограничена.

17. Какое из этих неравенств является неравенством Клаузиуса-Планка?

1 $\delta \geq 0$;

2 $Q \leq \theta \dot{H}$;

3 $-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0$;

4 $\dot{F}_e + \theta \dot{H} + \dot{K} - W \leq 0$;

5 – здесь нет такого.

18. Какое из этих неравенств является неравенством Планка?

1 $\delta \geq 0$;

2 $Q \leq \theta \dot{H}$;

3 $-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0$;

4 $\dot{F}_e + \theta \dot{H} + \dot{K} - W \leq 0$;

5 – здесь нет такого.

19. Какое из этих неравенств является приведенным диссипативным неравенством?

1 $\delta \geq 0$;

2 $Q \leq \theta \dot{H}$;

3 $-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0$;

4 $\dot{F}_e + \theta \dot{H} + \dot{K} - W \leq 0$;

5 – здесь нет такого.

20. Какое из этих неравенств является неравенством Фурье?

1 $\delta \ge 0$;

2 $Q \le \theta \dot{H}$;

3 $-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \ge 0$;

4 $\dot{F}_e + \theta \dot{H} + \dot{K} - W \le 0$;

5 – здесь нет такого.

21. Какое из этих неравенств является неравенством Клаузиуса-Дюгема?

1 $\delta \ge 0$;

2 $Q \le \theta \dot{H}$;

3 $-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \ge 0$;

4 $\dot{F}_e + \theta \dot{H} + \dot{K} - W \le 0$;

5 – здесь нет такого.

22. Обращается ли неравенство Клаузиуса-Планка в равенство при обратимых процессах?

1 – да;

2 – нет.

23. Обращается ли неравенство Планка в равенство при обратимых процессах?

1 – да;

2 – нет.

24. Обращается ли неравенство Клаузиуса-Дюгема в равенство при обратимых процессах?

1 – да;

2 – нет.

25. Обращается ли неравенство Фурье в равенство при обратимых процессах?

1 – да;

2 – нет.

26. Активные состояния связаны:

1 – с внешними воздействиями;

2 – с внутренней реакцией материала.

27. Реактивные состояния связаны:

1 – с внешними воздействиями;

2 – с внутренней реакцией материала.

28. Макромасштабные меры активных состояний:

1 – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

2 – тензор конечных деформаций Грина;

3 – удельная энтропия;

4 – абсолютная температура;

5 – поток тепла;

6 – градиент температуры.

29. Макромасштабные меры реактивных состояний:

1 – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

2 – тензор конечных деформаций Грина;

3 – удельная энтропия;

4 – абсолютная температура;

5 – поток тепла;

6 – градиент температуры.

30. Макромасштабные меры экстранзитивных состояний:

1 – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

2 – тензор конечных деформаций Грина;

3 – удельная энтропия;

4 – абсолютная температура;

5 – поток тепла;

6 – градиент температуры.

31. Какая из этих функций внутренняя энергия?

1 $\psi = u - \theta\eta$;

2 $z = u - \theta\eta - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$;

3 u;

4 $\varphi = u - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$.

32. Какая из этих функций свободная энергия?

1 $\psi = u - \theta\eta$;

2 $z = u - \theta\eta - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$;

3 u;

4 $\varphi = u - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$.

33. Какая из этих функций энтальпия?

1 $\psi = u - \theta\eta$;

2 $z = u - \theta\eta - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$;

3 u;

4 $\varphi = u - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$.

34. Какая из этих функций свободная энтальпия?

1 $\psi = u - \theta\eta$;

2 $z = u - \theta\eta - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$;

3 u;

4 $\varphi = u - \tilde{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{L}} / \rho_0$.

35. Что относится к первой группе определяющих уравнений?

1 – уравнение движения;

2 – функциональная связь между макропараметрами активного и реактивного состояния системы;

3 – уравнения эволюции параметров внутреннего состояния;

4 – уравнение теплопроводности;

5 – уравнение баланса энергии;

6 – энергетическая функция.

36. Что относится ко второй группе определяющих уравнений?

1 – уравнение движения;

2 – функциональная связь между макропараметрами активного и реактивного состояния системы;

3 – уравнения эволюции параметров внутреннего состояния;

4 – уравнение теплопроводности;

5 – уравнение баланса энергии;

6 – энергетическая функция.

37. Закон теплопроводности Фурье связывает между собой:

1 – поток тепла и температуру;

2 – поток тепла и градиент температуры;

3 – поток тепла и скорость энтропийного перемещения;

4 – градиент температуры и температуру.

38. Скорость энтропийного перемещения выражается через:

1 – поток тепла и температуру;

2 – поток тепла и градиент температуры;

3 – градиент температуры и температуру.

Литература

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Бабкин А.В. Основы механики сплошных сред / А.В. Бабкин, В.В. Селиванов. Учебник для втузов. – 2-е изд., испр., ил. (Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. / Науч. ред. В.В. Селиванов; Т. 1). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 376 с.
3. Горшков А.Г. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды / А.Г. Горшков, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
4. Горшков А.Г. Теория упругости и пластичности: Учебник для вузов / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с.
5. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов / С.П. Демидов. – М.: Высшая школа, 1987. – 432 с.

6. Жермен П. Курс механики сплошных сред / П. Жермен. – М.: Высшая школа, 1983.
7. Зарубин В.С. Математические модели термомеханики / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
8. Илюшин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Илюшин. – М.: Изд-во Московского Университета, 1990. – 310 с.
9. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В.Г. Карнаухов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 260 с.
10. Коларов Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
11. Куликовский А.Г. Лекции по механике сплошной среды / А.Г. Куликовский. – М: – Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1985.
12. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
13. Победря Б.Е. Лекции по теории упругости / Б.Е. Победря, Д.В. Георгиевский. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 208 с.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1994. – Т. 1. – 528 с.
15. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
16. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
17. Эглит М.Э. Лекции по механике сплошных сред / М.Э. Эглит. – М.: Издательство Московского университета, 2008. – 318 с.