

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Куштанова Г.Г.

## Физика геосферы

(методическое пособие к курсу лекций)

Казань 2004

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета

УДК 532+536

**Куштанова Г.Г.** Физика геосферы. Учебное пособие для магистрантов физического факультета по специальности «Физика атмосферы и гидросферы». Казань 2004, 44 с.

Аннотация:

Рассматриваются вопросы конвективного теплообмена, в частности, в трубах и плоском слое, уравнение энергии для пористой среды и частные случаи его решения. Дается представление о теории подобия, термодинамических эффектах и фазовых переходах в системе пласт-скважина и возможностях их использования для определения интересных параметров.

**Рецензент:**

Чекалин А.Н. - д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник НИИММ.

© Физический факультет Казанского государственного университета, 2004.

# КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН.

## Общие понятия и определения

Конвективным теплообменом или теплоотдачей называется процесс переноса теплоты между поверхностью твердого тела и жидкой средой. При этом перенос теплоты осуществляется одновременным действием теплопроводности и конвекции.

По природе возникновения различают два вида движения – свободное и вынужденное. Свободным (естественной конвекцией) называется движение, происходящее вследствие разности плотностей нагретых и холодных частиц жидкости в гравитационном поле. Возникновение и интенсивность свободного движения определяются тепловыми условиями процесса и зависят от рода жидкости, разности температур, напряженности гравитационного поля и объема пространства, в котором протекает процесс. Вынужденным называется движение, возникающее под действием посторонних возбудителей, например насоса, вентилятора и пр. В общем случае наряду с вынужденным движением одновременно может развиваться и свободное. Относительное влияние последнего тем больше, чем больше разность температур в отдельных точках жидкости и чем меньше скорость вынужденного движения.

Интенсивность конвективного теплообмена характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ , который определяется по формуле Ньютона – Рихмана  $Q = \alpha(t_c - t_{ж})F$

Согласно этому закону тепловой поток  $Q$  пропорционален поверхности теплообмена  $F$  и разности температур стенки и жидкости

В общем случае коэффициент теплоотдачи может изменяться вдоль поверхности теплообмена, и поэтому различают средний по поверхности коэффициент теплоотдачи и местный (локальный) коэффициент теплоотдачи, соответствующий единичному элементу поверхности.

Процессы теплоотдачи неразрывно связаны с условиями движения жидкости. Как известно, имеются два основных режима течения: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме течение имеет спокойный, струйчатый характер. При турбулентном – движение неупорядоченное, вихревое. Изменение режима движения происходит при некоторой «критической» скорости, которая в каждом конкретном случае различна.

В результате специальных исследований О. Рейнольдс в 1883 г. установил, что в общем случае режим течения жидкости определяется не только одной скоростью, а особым безразмерным комплексом  $Re$ .

При турбулентном движении весь поток насыщен беспорядочно движущимися вихрями, которые непрерывно возникают и исчезают. Благодаря непрерывному образованию вихрей и их диффузии происходит сильное перемешивание жидкости, называемое турбулентным смешением.

Различают естественную и искусственную турбулентность. Однако при любом виде турбулентности в тонком слое у поверхности из-за наличия вязкого трения течение жидкости затормаживается и скорость падает до нуля. Этот слой принято называть вязким подслоем.

Для процессов теплоотдачи режим движения рабочей жидкости имеет очень большое значение, так как им определяется механизм переноса теплоты. При ламинарном режиме перенос теплоты в направлении нормали к стенке в основном осуществляется путем теплопроводности. При турбулентном режиме такой способ переноса теплоты сохраняется лишь в вязком подслое, а внутри турбулентного ядра перенос осуществляется путем интенсивного перемешивания частиц жидкости. В этих условиях для газов и обычных жидкостей интенсивность теплоотдачи определяется в основном термическим сопротивлением пристенного подслоя, которое по сравнению с термическим сопротивлением ядра оказывается определяющим. Следовательно, и для ламинарного и для турбулентного режима вблизи самой поверхности применим закон Фурье. Коэффициент теплоотдачи в общем случае является функцией формы, размеров, температур, скорости жидкости, свойств жидкости и др.

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Теория подобия – это учение о подобии явлений. Впервые с понятием подобия мы встречаемся в геометрии, откуда этот термин и заимствован. Как известно, геометрически подобные фигуры обладают тем свойством, что их соответственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны.

$$x''=cx', y''=cy' \tag{1}$$

Условие (1) является математической формулировкой геометрического подобия. Оно справедливо для любых сходственных отрезков подобных фигур, например высот, медиан и др.

Понятие подобия может быть распространено на любые физические явления. Можно говорить, например, о подобии картины движения двух потоков жидкости – кинематическом подобии; о подобии сил, вызывающих подобные между собой движения – динамическом подобии; о подобии картины распределения температур и тепловых потоков – тепловом подобии и т. д. В общем случае понятие подобия физических явлений сводится к следующим положениям:

а) Понятие подобия в отношении физических явлений применимо только к явлениям одного и того же рода, которые качественно одинаковы и аналитически описываются уравнениями, одинаковыми как по форме, так и по содержанию.

Если же математическое описание двух каких-либо явлений одинаково по форме, но различно, по физическому содержанию, то такие

явления называются аналогичными. Аналогия существует между процессами теплопроводности, диффузии и электропроводности.

б) Обязательной предпосылкой подобия физических явлений должно быть геометрическое подобие. Последнее означает, что подобные явления всегда протекают в геометрически подобных системах.

в) При анализе подобных явлений сопоставлять между собой можно только величины, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность и лишь в сходственных точках пространства и в сходственных моменты времени.

г) Наконец, подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления. Это значит, что в сходственных точках пространства и в сходственных моменты времени любая величина  $\varphi$  первого явления пропорциональна однородной с ней величине второго явления  $\varphi'$ .

Таким образом, сущность подобия двух явлений означает подобие полей одноименных физических величин, определяющих эти явления.

Постоянные подобия для различных величин в подобных явлениях нельзя назначать или выбирать произвольно. Между ними имеются строго определенные соотношения, которые выводятся из анализа математического описания процессов. Эти соотношения имеют центральное значение в теории подобия, так как они устанавливают существование особых величин, называемые числами подобия (инвариантами), которые для всех подобных между собой явлений сохраняют одно и то же числовое значение. Числа подобия являются безразмерными комплексами, составленными из величин, характеризующих явление. Числа подобия принято называть именами ученых, работающих в соответствующей области наук, и обозначать двумя начальными буквами их фамилий, например: Re (Reynold), Eu (Euler), Nu (Nusselt).

Основные положения теории подобия можно сформулировать в виде теорем.

Первая теорема устанавливает связь между постоянными подобия: подобные между собой процессы имеют одинаковые числа подобия.

Вторая теорема. Зависимость между переменными, характеризующими какой-либо процесс может быть представлена в виде зависимости между числами подобия  $K_1, K_2$  и ...:  $f(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0$ . Зависимость такого вида называется уравнением подобия. Так как для всех подобных между собой процессов числа подобия сохраняют одно и то же значение, то уравнения подобия для них тоже одинаковы. Следовательно, представляя результаты какого-либо опыта в числах подобия, мы получим обобщенную зависимость, которая справедлива для всех подобных процессов.

Третья. Подобны те процессы условия однозначности (геометрические, физические свойства, граничные и временные) которых подобны и числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, имеют одинаковые численные значения.

Такие числа называются определяющими или критериями. Одинаковость же чисел подобия, содержащие и другие величины, получается как следствие.

Пусть среди размерных величин существует  $k$  величин независимой размерности  $a_1, \dots, a_k$ .

П-теорема. Связь между  $n+1$  размерными величинами  $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ , из которых  $k$  имеют независимые размерности, независимая от выбора системы единиц измерения принимает вид соотношения между  $n+1-k$  величинами  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$  представляющими собой безразмерные комбинации из  $n+1$  размерных величин.  $\Pi = f(1, 1, 1, \dots, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})$ .

Т.е. выбирается система единиц измерения таким образом, чтобы значения первых  $k$  аргументов равнялись 1. (Систему безразмерных параметров  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$  можно заменять другой системой безразмерных параметров.)

Всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. В этом источник полезных приложений метода теории размерности. Чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, тем больше ограничена функциональная зависимость и тем проще вести исследования.

### **Подобие процессов конвективного теплообмена**

#### **Условия подобия конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя.**

Прежде всего, подобными могут быть лишь процессы теплообмена, протекающие в геометрически подобных системах. Далее необходимой предпосылкой подобия должно быть подобие полей скорости, температур и давлений во входном или начальном сечении таких систем. При выполнении этих условий стационарные процессы конвективного теплообмена при вынужденном движении будут подобны, если выполняется условие:  $Re = \text{item}$   $Pr = \text{item}$

Число Рейнольдса определяет гидромеханическое подобие течений теплоносителей:  $Re = \frac{wl}{\nu}$

где  $w$  – характерная, обычно средняя скорость жидкости или газа в начальном сечении системы;  $l$  – характерный геометрический размер

системы (например, диаметр канала, длина пластины и т. д.);  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости теплоносителя.

Число Прандтля является теплофизической характеристикой теплоносителя.  $Pr = \frac{\nu}{a}$ ,  $a$  - коэффициент температуропроводности.

При равенстве чисел  $Re$  условие одинаковости чисел  $Pr$  обеспечивает тепловое подобие, т. е. подобие полей температурных напоров и тепловых потоков во всем объеме рассматриваемых систем.

Согласно теории подобия у подобных процессов должны быть одинаковы также и определяемые числа подобия. В процессах конвективного теплообмена в качестве определяемого выступает число Нуссельта и, характеризующее интенсивность процесса конвективного теплообмена:  $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$

Уравнение подобия для процессов конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя:  $Nu = f(Re, Pr)$

Для свободно-конвективного движения среды число Грасгофа характеризует эффективность подъемной силы  $Gr = g\beta\Delta T \frac{L^2}{\nu}$ . где  $g$  - ускорение свободного падения,  $\beta$  - температурный коэффициент объемного расширения среды,  $\Delta T$  - характерный температурный напор,  $L$  - линейный размер системы,  $\nu$  - кинематический коэффициент вязкости.

$Fo = \frac{\alpha \tau}{l^2}$  Критерий Фурье, определяет временное подобие нестационарных процессов

### **Обобщение опытных данных на основе теории подобия**

При постановке любого эксперимента всегда необходимо заранее знать: 1) какие величины надо измерять в опыте; 2) как обрабатывать результаты опыта; 3) какие явления подобны изучаемому. На эти вопросы ответ содержится в изложенных выше трех теоремах подобия.

На первый вопрос отвечает первая теорема: в опытах нужно измерять все величины, содержащиеся в числах подобия изучаемого процесса.

На второй вопрос отвечает вторая теорема: результаты опыта следует обрабатывать в числах подобия и зависимость между ними представлять в виде уравнений подобия; это позволяет найти общую закономерность, справедливую для всех процессов, подобных изучаемому.

На третий вопрос ответ дает третья теорема; подобны те явления, у которых подобны условия однозначности и равны критерии подобия.

Благодаря этим ответам теория подобия по существу является теорией эксперимента. Для того чтобы результат отдельных опытов можно было распространить на все подобные ему процессы, обработка результатов опытов должна производиться в числах подобия.

Один из путей учета состоит в осреднении физических свойств с помощью введения так называемой определяющей температуры, по которой определяются значения физических параметров, входящих в числа подобия. Довольно распространенным является выбор в качестве определяющей средней температуры  $t_{cp} = 0,5 (t_c + t_s)$ , где,  $t_c$  – температура поверхности;  $t_s$  – температура жидкости. В ряде случаев в качестве определяющей выбирается средняя температура жидкости, температура поверхности нагрева температура жидкости на входе в теплообменный аппарат и др. Однако следует помнить, что универсальной температуры, выбором которой во всех случаях автоматически учитывалась бы зависимость теплоотдачи от изменения физических свойств с температурой, не существует.

Важным является выбор определяющего размера. В круглых трубах обычно берется диаметр. Для каналов неправильной формы – эквивалентный диаметр равный учетверенной площади сечения, деленной на полный смоченный периметр.

На основании опытов по изучению теплоотдачи при движении воздуха была получена зависимость

$$Nu = 0.018 Re^{0.8} \quad \frac{\alpha d}{\lambda} = 0.018 \left( \frac{wd}{\nu} \right)^{0.8} \quad \alpha = 0.018 \frac{\lambda_{жс}}{\nu_{жс}^{0.8}} \frac{w^{0.8}}{d^{0.8}}$$

Когда исследуем зависимость представленную в таком явном виде, легко оценить роль и влияние отдельных величин в процессе теплоотдачи. Влияние каждой величины тем больше, чем выше ее показатель степени. В этом отношении в уравнении на первом месте стоит теплопроводность жидкости, затем скорость, кинематический коэффициент вязкости жидкости и, наконец, диаметр трубы  $d$ .

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ

1. **Однородная стенка.** Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) длиной  $l$ , с внутренним радиусом  $r_1$ , и внешним  $r_2$ . Коэффициент теплопроводности материала  $\lambda$  постоянен. Внутренняя и внешняя поверхности поддерживаются при постоянных температурах  $t_1$ , и  $t_2$  причем  $t_1 > t_2$ , и температура изменяется только в радиальном направлении  $r$ . Следовательно, температурное поле здесь будет одномерным, а изотермические поверхности цилиндрическими, имеющими с трубой общую ось. Выделим внутри стенки кольцевой слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ , ограниченный изотермическими



поверхностями. Согласно закону Фурье, количество теплоты, проходящее в единицу времени через этот слой, равно:  $Q = -\lambda F \frac{dt}{dr} = -2\lambda\pi r l \frac{dt}{dr}$  (2)

Разделив переменные, имеем:  $dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \frac{dr}{r}$

После интегрирования уравнения находим  $t = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln r + C$ . (3)

Подставляя значения переменных на границах стенки (при  $r = r_1$  и при  $r = r_2$ ) и исключая постоянную  $C$ , получаем следующую расчетную формулу:  $Q = \frac{2\kappa\lambda l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (t_1 - t_2) = \frac{2\kappa\lambda l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) = \frac{\pi l (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}$  (4)

Количество теплоты, проходящее через стенку трубы, может быть отнесено либо к единице длины, либо к единице внутренней, или внешней поверхности трубы. При этом расчетные формулы соответственно принимают следующий вид:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi\Delta t}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad q_1 = \frac{Q}{F_1} = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{\pi\Delta t}{2\lambda d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (5)$$

Так как площади внутренней и внешней поверхностей трубы различны, то различными получаются и значения плотностей тепловых потоков  $q_1$ , и  $q_2$ . Взаимная связь между ними определяется соотношением

$$\pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2$$

Уравнение температурной кривой внутри однородной цилиндрической стенки выводится из уравнения (3), Подставляя сюда значения  $Q$  и  $C$ ; имеем:

$$t = t_1 - \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{d}{d_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \ln \frac{d}{d_1} \quad (6)$$

Следовательно, в этом случае при постоянном значении коэффициента теплопроводности температура изменяется по логарифмической кривой.

**Многослойная стенка.** Пусть цилиндрическая стенка состоит из трех слоев. Известны температуры внешней и внутренней многослойной  $t_1$ ,  $t_4$ стенки. В местах их соприкосновения температуры неизвестны,

обозначим их  $t_2, t_3$ . При стационарном тепловом режиме через все слои проходит одно и то же количество теплоты.

$$q_l = \frac{2\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad q_l = \frac{2\pi(t_2 - t_3)}{\frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}} \quad q_l = \frac{2\pi(t_3 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}}$$

Из этих уравнений определяется температурный напор в каждом слое. Сумма напоров составляет полный температурный напор

$$t_1 - t_4 = \frac{q}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right)$$

Из этого уравнения определяем значение линейной плотности теплового потока

$$q = \frac{2\pi(t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}}$$

$$\text{Значение температур } t_2 = t_1 - \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}, \quad t_3 = t_2 - \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}$$

Согласно уравнению внутри каждого слоя температура изменяется по логарифмическому закону, а для многослойной стенки в целом кривая представляет собой ломаную кривую.

### Теплопередача через стенки

**Однородная цилиндрическая стенка.** Пусть имеется цилиндрическая стенка. Внутри трубы горячая среда с температурой  $t_{ж1}$ , снаружи холодная  $t_{ж2}$ . Температуры поверхностей стенки неизвестны  $t_{c1}$ ,  $t_{c2}$ . Коэффициенты теплоотдачи соответственно  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . При установившемся тепловом состоянии системы количество тепла, отданное холодной средой и принятое горячей одно и то же

$$q = \alpha_1 \pi d_1 (t_{ж1} - t_{c1}), \quad q = \frac{2\pi\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad q = \alpha_2 \pi d_2 (-t_{ж2} + t_{c2}).$$

Из этих соотношений определяем частные температурные напоры

$$t_{ж1} - t_{c1} = \frac{q}{\pi \alpha_1 d_1}, \quad t_{c1} - t_{c2} = \frac{q}{\pi 2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}, \quad t_{c2} - t_{ж2} = \frac{q}{\pi \alpha_2 d_2}$$

Складывая

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)$$

Отсюда плотность теплового потока

$$q = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = k\pi(t_{ж1} - t_{ж2})$$

Откуда линейный коэффициент теплоотдачи на 1 м длины трубы

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}$$

Величина обратная называется термическим сопротивлением

**Многослойная цилиндрическая стенка.** В этом случае полный температурный напор

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3} \right) \quad (7)$$

Пример. По трубе диаметром 60мм течет воздух со скоростью 5 м/с. Определить значение среднего коэффициента теплоотдачи и количество передаваемой теплоты, если средняя температура воздуха 100°C, а температура стенки 30°C.  $\lambda_{ж}=0.0321$  Вт/м °C;  $\nu_{ж}=23.13 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

$$Re = wd/\nu = 5 \cdot 0.06 / 23.13 \cdot 10^{-6} = 12970, \quad Re^{0.8} = 1955,$$

$$Nu = 0.018 \cdot 1955 = 35.2,$$

$$\alpha = Nu \cdot \lambda / d = 35.2 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{°C}),$$

$$Q = \pi \cdot d \cdot L \cdot \alpha \cdot \Delta T = 3.14 \cdot 0.06 \cdot 2.1 \cdot 18.8 \cdot 70 = 520 \text{ Вт}$$

## ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

При вынужденном движении жидкости внутри трубы различают два режима течения: ламинарный и турбулентный. Ламинарный режим наблюдается при малых скоростях движения жидкости. При скоростях потока, больших некоторого значения  $w_{кр}$ , режим течения переходит в турбулентный. Для различных жидкостей и трубопроводов критическая скорость различна.

Степень турбулентности потока принято характеризовать отношением величины средней скорости турбулентных пульсаций  $v_{п}$  к скорости движения потока  $w_0$   $k=v_{п}/w_0$ .

Режим течения жидкости определяется по величине числа Re. Если Re меньше критического  $Re_{кр}$ , то режим течения ламинарный. При движении жидкости в трубах  $Re_{кр} = 2 \cdot 10^3$ . Развитый турбулентный режим течения устанавливается при значениях  $Re > 10^4$ . Диапазон изменения 2000 до  $1 \cdot 10^4$  соответствует переходному режиму течения.

Для ламинарного изотермического режима характерно параболическое распределение скоростей по сечению (рис. 1 а)

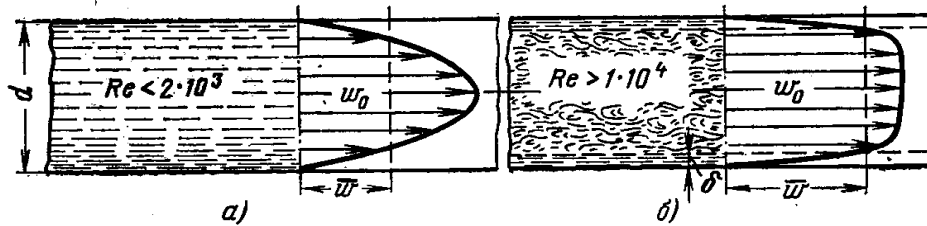


Рис.1. Распределение скоростей по сечению при ламинарном (а) и турбулентном (б)режимах движения жидкости в трубе.

$w=w_0(1-y^2/r^2)$ , где  $w_0$ , – скорость на оси трубы;  $w$  – скорость на расстоянии  $y$  от оси;  $r$  – радиус трубы.

В практических расчетах обычно имеют дело со средними значениями скорости:  $\bar{w} = \frac{1}{f} \int wdf$

Отношение средней скорости к максимальной при ламинарном режиме течения постоянно;  $\bar{w}/w_0=0,5$ .

Для развитого турбулентного режима движения жидкости распределение скорости по сечению трубы имеет вид усеченной параболы (рис. 1 б). Вблизи стенки трубы кривая изменяется резко, а в средней части сечения – турбулентном ядре потока – полого. Максимальная скорость наблюдается также на оси трубы.

Отношение средней скорости к максимальной является функцией числа  $Re$ .  $w/w_0=f(Re)$  Приведенные законы распределения скоростей по сечению трубы справедливы лишь для так называемого гидродинамически стабилизированного движения. Стабилизация наступает не сразу, а на некотором расстоянии от входа в трубу. На этом участке характер движения и распределения скорости претерпевают большие изменения. Процесс стабилизации профиля скоростей происходит следующим образом. Вблизи входного сечения на поверхности трубы образуется динамический пограничный слой, толщина которого постепенно увеличивается по мере увеличения расстояния от входа в трубу. На некотором расстоянии от входа в трубу происходит смыкание слоев и течение приобретает стабилизированный характер. На рис. 2 схематически показано такое развитие процесса. Если число  $Re$  меньше критического, то на всем протяжении гидродинамического начального участка стабилизации течение в пограничном слое имеет ламинарный характер (рис. 2, а).

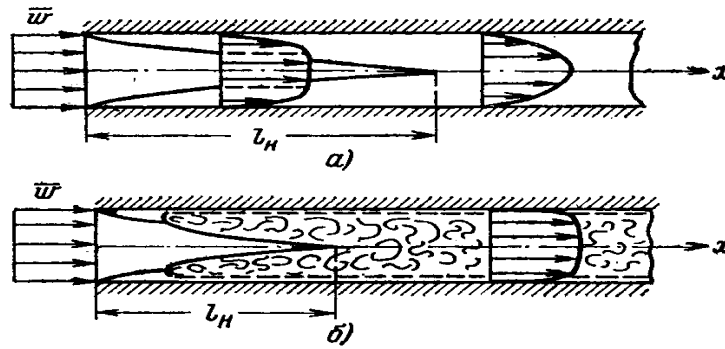


Рис.2. Гидродинамическая стабилизация течения жидкости в трубе.  
а – ламинарный режим течения, б – турбулентный режим течения.

Когда  $Re > Re_{кр}$ , вблизи входного сечения сначала формируется ламинарный пограничный слой, который затем переходит в турбулентный, и после смыкания турбулентных пограничных слоев устанавливается стабилизированное турбулентное течение жидкости (рис. 2, б). При этом у самой поверхности в очень тонком вязком подслое течение сохраняет ламинарный характер.

Длина гидродинамического начального участка стабилизации потока при ламинарном режиме определяется соотношением  $l=0.05 d Re$ .

При турбулентном течении величина  $l$  слабо зависит от  $Re$  и составляет примерно  $l \sim 15d$ .

### Теплоотдача при ламинарном режиме.

При ламинарном течении перенос теплоты от слоя к слою в направлении нормали к стенке осуществляется за счет теплопроводности. В то же время каждый слой имеет различную скорость продольного движения. Наряду с поперечным переносом тепла происходит конвективный перенос в продольном направлении. Вследствие этого теплообмен зависит от гидродинамической картины движения.

Рассмотрим развитие процесса вдоль трубы. Пусть во входном сечении температура жидкости постоянна и отличается от температуры стенки. По мере движения вначале вблизи от входного сечения изменение температуры происходит лишь в тонком слое около поверхности. Затем по мере удаления от входного сечения все большая часть потока вовлекается в процесс теплообмена. Около поверхности образуется тепловой пограничный слой, в котором температура меняется от  $t_c$  до  $t_{ж}$ . Характер формирования теплового слоя сходен с динамическим пограничным слоем. При ламинарном пограничном слое отношение толщин динамического и теплового слоев зависит только от числа  $Pr$ . При  $Pr = 1$ , толщины равны. Около поверхности трубы образуется тепловой

пограничный слой, толщина которого постепенно увеличивается в направлении движения потока. На некотором расстоянии  $l_T$  от входа трубы, тепловые пограничные слои смыкаются, и в процессе теплообмена участвует далее весь поток жидкости. Расстояние  $l_T$ , может быть приближенно оценено по зависимости  $l_T = 0.05 d Re Pr$

Обычно на практике ламинарный режим встречается при течении достаточно вязких теплоносителей, таких как различные масла, для которых значения  $Pr$  обычно значительно превышают единицу. В этих условиях длина теплового начального участка стабилизации оказывается достаточно большой. Так, например, если  $Re = 200$  и  $Pr = 500$ , то  $l \sim 5000 d$ .

На расстоянии большем, чем  $l$  профиль распределения температур по сечению трубы продолжает изменяться.

В пределах теплового начального участка стабилизации температурный градиент в жидкости у стенки  $(\partial t / \partial n)$  убывает по мере увеличения расстояния от входа быстрее, чем температурный напор  $(t_{ж} - t_c)$ , так как центральная часть потока еще не участвует в теплообмене. Поэтому из уравнения теплоотдачи

$$\alpha_{лок} = -\lambda \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n \rightarrow 0}}{t_{ж} - t_c} = \frac{q}{t_{ж} - t_c}$$

следует, что локальный коэффициент теплоотдачи постепенно уменьшается вдоль трубы. Падение локального коэффициента теплоотдачи продолжается до тех пор, пока тепловые пограничные слои не смыкаются. Далее обе величины убывают с одинаковой скоростью, а локальный коэффициент теплоотдачи принимает постоянное значение. Расстояние, на котором происходит стабилизация средних коэффициентов теплоотдачи, всегда больше расстояния, отвечающего стабилизации локальных коэффициентов теплоотдачи.

Температурные напоры в начальном и конечном сечениях трубы показаны на рис.3

Для труб весьма большой длины может быть рекомендовано приближенное соотношение

$$Nu \approx 4(Pr_{ж} / Pr_c)^{0.25}$$

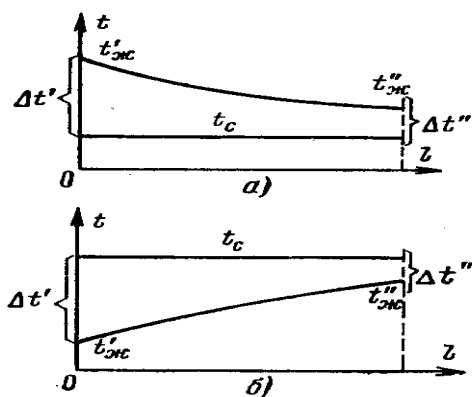


Рис.3. Изменение температурного напора вдоль трубы при  $t_c = \text{const}$ .  
 а – охлаждение жидкости, б - нагрев жидкости

Индексы показывают, что свойства теплоносителя относятся соответственно к температуре  $t_c$  или  $t_{ж}$ . Приведенные соотношения относятся к случаю отсутствия подъемных сил.

### Теплоотдача при турбулентном режиме.

При турбулентном режиме перенос теплоты внутри жидкости осуществляется в основном путем перемешивания. При этом процесс перемешивания протекает настолько интенсивно, что по сечению ядра потока температура жидкости практически постоянна. Резкое изменение температуры наблюдается лишь внутри тонкого слоя у поверхности. Для широкого рода жидкостей можно рекомендовать

$$Nu = 0.021 Re^{0.8} Pr_{жс}^{0.43} (Pr_{жс} / Pr_c^{0.25})$$

Для двухатомных газов (и воздуха)  $Pr = 0.71$  и формула сводится к

$$Nu = 0.018 Re^{0.8}$$

Эта формула для длинных труб, в противном случае необходимо ввести дополнительный коэффициент ( $>1$ ), учитывающий влияние начального участка.

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

### Особенности тепловых явлений в пористой среде

Подземные воды и скопления нефти или газа размещаются в пустотах горных пород различной структуры размеров и протяженности, образуя многокомпонентные и многофазные термодинамические системы. В случае макроскопически неоднородного коллектора показатели переноса тепла и вещества зависят также и от направления переноса.

Особый характер таких процессов обусловлен рядом факторов как интенсивный теплообмен между компонентами среды благодаря большой площади контакта, наличие конвективного переноса, сильное торможение тепловых эффектов вследствие большой инертной теплоемкости пористого тела, значительное трение при перемещении флюида в мелких порах, поверхностные, капиллярные и химические явления на контактах фаз, неизбежные тепловые потери и пр. Многое из указанного необходимо учитывать (контактными явлениями на данном этапе будем пренебрегать).

В качестве независимых переменных принимаются давление и температура.

Для относительно малых промежутков времени, соответствующих длительности разработки, будем полагать, что исходное состояние залежей нефти и газа до начала их разработки отвечает состоянию термодинамического равновесия.

### Уравнение состояния

Равновесное состояние однородной системы определяется функциональной связью между давлением  $p$ , объемом и температурой для единицы массы вещества или так называемым уравнением состояния

$$F(p, V, T) = 0 \quad (8)$$

Уравнение состояния для идеального газа имеет вид (ур.Клайперона-Менделеева)  $pV = RT$

где  $R$  – газовая постоянная в  $\text{кГ} \cdot \text{см}/\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}$ . Универсальная газовая постоянная для 1 моля, где  $m$  – молекулярный вес.  $m R = 8,314 \text{ дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) = 0.83 \text{ кГ м}/\text{моль} \cdot ^\circ\text{C}$ . Моль метана =  $16 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ ,  $R = 51.875 \text{ кГ м}/\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}$ .

Уравнение (1. 5) хорошо описывает состояние сильно разреженных реальных газов.

Состояние реальных газов удобно определять по формуле

$$pV = zRT \quad (9)$$

где  $z$  – опытный поправочный коэффициент – функция давления и температуры, – указывающий на относительное отклонение произведения  $pV$  реального газа от идеального.

Значения параметра  $z$  как функции давления и температуры определяются опытным путем и оформляются в виде графиков; они выражают итог взаимодействия между молекулярными силами притяжения и отталкивания. Для малых давлений и низких температур; значение  $z$  обычно меньше единицы, а для больших давлений и высоких температур – больше единицы. Случай  $z = 1$  отвечает такому соотношению



молекулярных сил, которое имеется в идеальном газе случай  $z < 1$  – преобладанию сил притяжения, случай  $z > 1$  преобладанию сил отталкивания

### Адиабатический процесс

Дифференциал энтропии может быть выражен следующей функцией внешних параметров

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - A \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp \quad (10)$$

Для квазистатических адиабатических процессов в изолированных системах, когда энтропия системы сохраняет постоянное значение ( $ds = 0$ ), уравнение (1. 35) дает связь между температурой и давлением, а именно

$$dT = \frac{AV}{c_p} \frac{T}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp$$

Обозначим коэффициент при  $dp$  через  $\eta = \frac{AV}{c_p} \alpha T$  (11)

Где  $\alpha$  – термическое расширение

Коэффициент  $\eta$  определяющий изменение температуры вещества в изолированной системе в зависимости от изменения давления, будем называть дифференциальным адиабатическим коэффициентом. Для небольших пределов изменений давления удобно пользоваться усредненным или так называемым интегральным значением адиабатического коэффициента  $\Delta T = \bar{\eta} \Delta p$ . (12)

Знак коэффициента  $\eta$ , зависит от знака коэффициента температурного расширения  $\alpha$ . Как правило,  $\alpha > 0$ , следовательно, и  $\eta > 0$ , т. е. всякое вещество при адиабатическом сжатии нагревается. Исключением является вода, которая в ограниченном интервале температур (от нуля до  $4^\circ\text{C}$ ) отличается отрицательным значением  $\alpha < 0$  и, очевидно, отрицательным значением коэффициента  $\eta < 0$ . В этих условиях вода при адиабатическом сжатии будет охлаждаться. При температуре воды  $4^\circ\text{C}$   $\alpha = 0$ , значит, и  $\eta = 0$ , т. е. адиабатический процесс в данном случае совпадает с изотермическим.

Представление о значениях коэффициентов, для реальных жидкостей при температуре  $20^\circ\text{C}$  можно получить по данным табл. 2.

Как видно из таблицы, адиабатическое нагревание жидкостей незначительно – от  $0,15$  до  $3^\circ\text{C}$  на  $100 \text{ кг/см}^2$  ~ повышения давления.

Коэффициент  $\eta$  минимален для металлов и воды, а максимален для нефти и нефтепродуктов.

В газовой среде адиабатический температурный эффект проявляется очень сильно особенно при невысоких давлениях. Используя уравнение состояния идеального газа, получим из (11)

$$pV=RT, \quad V=RT/p; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}, \quad \eta = \frac{AV}{c_p} \frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{V}{c_p} \frac{T}{V} \frac{R}{p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} \frac{T}{p}$$

$$\eta = \frac{k-1}{k} \frac{T}{p}$$

где  $k=c_p/c_v$ — показатель адиабаты. ( $R= c_p-c_v$ )

Например, для воздуха ( $k= 1,41$ ) при атмосферном давлении,  $p = 1 \text{ кг/см}^2$  и температуре  $20^\circ\text{C}$  или  $293^\circ\text{K}$  получим, что  $\eta= 0,83 \text{ }^\circ\text{C/ат.}$

Из уравнения состояния реальных газов (7 ) находим

$$\eta = \frac{k-1}{k} \frac{T}{p} z \left(1 + \frac{T}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p\right) \quad (13)$$

Как видно, коэффициент  $\eta$  для реальных газов может быть больше или меньше, чем для идеального газа в зависимости от знака частной производной.

На практике адиабатическими считаются два вида процессов: быстрые, за время существования которых не происходит заметного теплообмена с окружающей средой, и процессы в больших по объему системах (в атмосфере).

### Дроссельный процесс

Полный дифференциал энтальпии выражается следующей функцией

$$dI = c_p dT + AV \left(1 - \frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right) dp \quad (14)$$

Для изоэнтальпийных процессов, когда  $I=\text{const}$ , соотношение между давлением и температурой

$$dT = \frac{AV}{c_p} \left(1 - \frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right) dp \quad (15)$$

$$\text{Коэффициент } \varepsilon = \frac{AV}{c_p} (1 - \alpha T) \quad (16)$$

называют дифференциальным коэффициентом Джоуля-Томсона.

В случае небольших колебаний давления для определения температур можно пользоваться усредненным или интегральным коэффициентом.

$$\Delta T = -\bar{\varepsilon} \Delta P \quad (17)$$

Изоэнтальпийный процесс (как и адиабатический) протекает в изолированной системе без теплообмена с окружающей средой. Различие состоит в том, что в адиабатическом внешняя работа совершается за счет понижения внутренней энергии, а при изоэнтальпийном – работа, выполняемая системой превращается в тепло, которое остается в системе. Классическими примерами изоэнтальпийного процесса является движение идеальной несжимаемой жидкости и идеального газа в пористой среде без внешних теплопроводных потерь.

В идеально жесткой жидкости термическое расширение отсутствует или  $\alpha=0$ . Значит, для такой жидкости получаем  $\varepsilon = \frac{AV}{c_p}$  (18)

Несжимаемая жидкость может перемещаться в пористой среде и преодолевать гидродинамическое сопротивление только за счет работы внешних сил

$$\Delta L = V(p_2 - p_1) \quad (19),$$

где  $p_1, p_2$ , давления на двух эквипотенциальных поверхностях пористой среды.

При постоянной скорости фильтрации вся работа (19) расходуется на преодоление сил трения и целиком превращается в тепловую энергию, что приводит к повышению температуры жидкости по пути движения

Коэффициент термического расширения идеального газа  $\alpha=1/T$  после подстановки получаем  $\varepsilon=0$ .

Значит, дросселирование идеального газа является по существу изотермическим процессом. При изотермическом процессе идеального газа имеем  $\Delta L = V_2 p_2 - V_1 p_1$ , т. е. работа внешних сил в данном случае равна нулю и поэтому температура не меняется (см. уравнение состояния).

Согласно выражениям (14) и (16) коэффициент Джоуля-Томсона можно представить так  $\varepsilon = \frac{AV}{c_p} - \eta$  (20)

Первый член правой части равенства (20) определяет нагревание вещества по пути движения за счет работы сил трения, второй - охлаждение за счет адиабатического расширения,

Для жидкостей  $\frac{AV}{c_p} \gg \eta$ , или  $\alpha T \ll 1$ , следовательно, все жидкости,

насыщающие пористую среду, нагреваются по пути движения. Пределы изменений температуры жидкостей при дроссельном движении и температуре 20 С даны в табл.2. Как видно из табл.2, нагревание нефтей и

нефтепродуктов при дроссельном движении достигает  $5^{\circ}\text{C}$  на  $100 \text{ кг/см}^2$  депрессии.

Коэффициент Джоуля-Томсона для реальных газов получаем из (14) с учетом уравнения состояния (9), а именно  $\varepsilon = \frac{k-1}{k} \frac{T^2}{p} \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p$  (21)

В данном случае знак эффекта Джоуля-Томсона зависит от знака  $\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p$ . В точках, где  $\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p = 0$ , коэффициент, эти точки называются точками инверсии. В точке инверсии коэффициент меняет знак: ниже температуры инверсии  $\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p > 0$ , т.е. газ по пути движения охлаждается, выше – нагревается.

Температура инверсии нефтяных газов достаточно высока и в практике рассматривают только эффект охлаждения. Значение коэффициента для углеводородных газов в пределах от  $-0.3$  до  $-0.6 \text{ К/атм}$ , что примерно в 10 раз больше чем для жидких углеводородов.

Табл.2

	Ср ккал/кг К	$\eta * 100 \text{ К/атм}$	$\varepsilon * 100 \text{ К/атм}$
вода	1	0,15	2,2
бензин	0,41	2,96	5,1
керосин	0,52	1,49	4,13
нефть	0,5	1,37	4,14
Спирт метиловый	0,6	1,73	3,05
метан			30-60

Коэффициент Джоуля-Томсона для воды и нефти не зависит от давления в диапазоне 10-300 атм и линейно меняется от температуры.

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЖЕСТКОЙ ПЛАСТОВОЙ СИСТЕМЫ

Уравнение энергии в пласте в пренебрежении теплопроводными потоками, а это во многих практических случаях допустимо, имеет вид

$$c_{\Pi} \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \gamma v \text{ grad} T + \varepsilon v c_p \gamma \text{ grad} p - m \gamma c_p \eta \frac{\partial p}{\partial t} = \lambda \text{ div grad} T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \text{ grad} T + \varepsilon u \text{ grad} p - m \gamma \frac{c_p}{c_{\Pi}} \eta \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

где  $\gamma$  - удельный вес и  $C_p$  - теплоемкость теплоносителя при постоянном давлении.  $C_{\Pi} = C_p m \gamma + C$  - теплоемкость насыщенной пористой среды,  $u$  - скорость конвективного переноса тепла в

пористой среде  $u = \frac{\gamma c_p}{c_{II}} v$ , где  $v$  --- скорость фильтрации

Уравнение энергии (22) обуславливает определенную связь между полями давлений и температур в пористой среде. Поэтому полная стабилизация гидро- или термодинамического состояния пластовой системы возможна только после установления равновесия как давлений, так и температур. Тем не менее, поле давлений восстанавливается гораздо быстрее, чем поле температур. Случай предельно быстрого процесса перераспределения поля давлений можно наблюдать на модели идеализированной жесткой пористой системы, насыщенной несжимаемой жидкостью с постоянными физическими параметрами, независимыми от давления и температуры. В такой системе стационарное распределение давлений достигается практически мгновенно и в то же время темпы перераспределения температур остаются реальными. Таким образом, на модели несжимаемой пористой среды можно изучать закономерности перераспределения температур в пористой среде в стационарном поле давлений.

В соответствии с определениями несжимаемая жидкость отличается положительным постоянным значением коэффициента Джоуля-Томсона  $\varepsilon$  и нулевым значением коэффициента  $\eta$ . Таким образом, член, содержащий частную производную давления по времени уравнения сохранения энергии (22) для несжимаемой жидкости, исчезает. Скорость фильтрации несжимаемой жидкости в любой точке пористой среды прямо пропорциональна объемному расходу.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \operatorname{grad} T + \varepsilon u \operatorname{grad} p = 0 \quad (23)$$

Рассмотрим плоско-параллельный горизонтальный поток несжимаемой жидкости с постоянным расходом, тогда приходим к уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами.

Случай постоянной температуры нагнетаемой жидкости и начальной температуры пласта.  $T(0,t)=T_0$ ,  $T(x,0)=T_0$

Применим преобразование Лапласа по переменной  $x$

После подстановки изображений в уравнение получаем.

$$T' + su(T - \frac{T_0}{s}) + su\varepsilon(p - \frac{p_0}{s}) = 0$$

Общее решение этого линейного уравнения для изображения имеет такой вид

$$T = e^{-sut} \left\{ C - su \left[ \varepsilon p - \frac{\varepsilon p_0}{s} - \frac{T_0}{s} \right] \int_0^t e^{suv} dv \right\}$$

Постоянная  $C$  определяется из начального условия  $T(s,0)=T_0/s$  или  $C= T_0/s$

$$\text{Тогда } T = \frac{T_0}{s} + \varepsilon \left( p - \frac{p_0}{s} \right) (e^{-sut} - 1)$$

Умножение изображения функции, отличной от нуля на выражение  $e^{-sb}$  отвечает запаздыванию оригинала функции на интервал  $b$ , т. е. соответствует значению  $f(x-b)$ . Поскольку изображение  $p(s)-p_0/s$  характеризует оригинал  $p(x)-p_0$ , то изображение  $(p-p_0/s)e^{-sut}$  отвечает оригиналу  $p(x-ut)-p_0$ . И еще  $-p(x)+p_0$ . Значит, обратное преобразование изображения дает такое решение задачи для оригинала

$$T(x,t) = T_0 + \varepsilon [p(x-ut) - p(x)] \quad (24)$$

причем для отрицательных аргументов  $x-ut < 0$ ,  $p(x-ut) = p_0$ , это означает, что  $T(x,t)$  становится независимым от времени

Анализируя решение, нетрудно заметить характерное свойство дроссельного движения несжимаемой жидкости в пористой среде, которое можно описать так: температурная кривая в любой точке пористой среды в координатах «температура — время» отражает часть кривой распределения давления в пористой среде в координатах «давление — расстояние» в интервале от наблюдаемой точки до начала координат.

Температурная кривая, измеряемая во времени, на выходе пористой среды (в точке, доступной для наблюдений) отображает распределение давления вдоль всей длины пористого тела. Это замечательное свойство дроссельного процесса открывает новые возможности зондирования пористых тел, а в промышленных масштабах — возможности глубокого зондирования гидродинамического состояния призабойной зоны пласта.

Полученная простая взаимосвязь сохраняется и в случае любой более сложной неоднородности пористой среды. Влияние соосных теплопроводных потоков сказывается в первую очередь в точках излома температурных кривых.

Свойство конвективного переноса температурного профиля в пористом стержне без искажения формы позволяет рассматривать теплопроводные помехи независимо от тепловой конвекции и дроссельного эффекта, что в значительной мере упрощает аналитические исследования.

В случае когда в начальный момент времени температура пористой среды является заданной функцией координаты  $T(x,0)=T_0(x)$ ,

температура нагнетаемой жидкости сохраняется как и раньше постоянной, то решение примет вид

$$T(x,t) = T_0(x - ut) + \varepsilon [p(x - ut) - p(x)]$$

причем для отрицательных аргументов  $x-ut$  значения температуры и давления становятся постоянными. Начальный температурный профиль  $T_0(x)$  переносится конвективным потоком вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $u$ . А на начальную эпюру температур накладывается эффект дроссельного процесса. В однородном пористом пласте где  $dp/dx = \text{const}$  начальный температурный профиль переносится без деформаций (без учета теплопроводных помех).

В случае непостоянной температуры теплоносителя зависимость выглядит несколько сложнее.

В случае переменного расхода закон изменения температуры настолько сложен, что малопригоден для интерпретации

### **Основные свойства температурного поля пласта**

Исследование взаимосвязи между тепловым полем и полем давлений при движении несжимаемой жидкости в пористой среде привело к открытию чрезвычайно ценных для практики закономерностей.

Скорость конвективного переноса тепла в пористой среде зависит прямо пропорционально от скорости фильтрации, умноженной на отношение теплоемкостей жидкости и пористой среды.

Температура в точке, движущейся со скоростью конвективного переноса тепла, сохраняется постоянной, если не учитывать дроссельного эффекта и помех от теплопроводности. В этих условиях температурное поле пористой среды вдоль оси струи жидкости, построенное в зависимости от объема, охваченного конвективным переносом тепла, перемещается с постоянной объемной скоростью.

Нагнетание в пористое тело жидкости, температура которой изменяется во времени, приводит к образованию вдоль путей конвективного переноса тепла соответствующего температурного поля, фиксирующего в пространстве изменения температуры нагнетаемой жидкости во времени.

Температурное поле, обусловленное дроссельным эффектом, образующееся в пористой среде, перераспределяется со скоростью конвективного переноса тепла и, в конечном итоге, стремится точно копировать поле давлений.

Температурное поле дроссельного эффекта совершенно не зависит от начального температурного поля пласта и от температуры нагнетаемой жидкости. Оно обладает свойствами суперпозиции по отношению к температурным полям другого происхождения.

### Вертикальная фильтрация в земной коре

. На выходах крутозалегающих комплексов осадочных пород в областях питания или разгрузки подземных водонапорных систем встречаются потоки воды, близкие к вертикальным.

Исходное уравнение энергии для вертикального потока несжимаемой жидкости следует записать так

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial h^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \left( \frac{\partial T}{\partial h} + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial h} + \frac{A}{c_p} \frac{\partial z}{\partial h} \right) \quad (25)$$

Если начало координаты глубины  $h = 0$  принять на уровне поверхности земли, то потенциальная энергия  $z$ , с увеличением ординаты  $h$  будет, очевидно, уменьшаться  $\frac{\partial z}{\partial h} = -1$ . Перепад давления зависит от удельного веса жидкости  $\gamma$ , скорости фильтрации  $v$  и проницаемости пород, а именно  $\frac{\partial p}{\partial h} = \gamma - \frac{\mu}{k} v$ . Используя сказанное и зная, что для несжимаемой жидкости  $\varepsilon = \frac{A}{c_p} \frac{1}{\gamma}$ , получаем уравнение

$$\left( a \frac{\partial^2 T}{\partial h^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \left( \frac{\partial T}{\partial h} - c \right) \right) \quad c = \pm \varepsilon \frac{\mu}{k} v \quad (26)$$

Знак плюс соответствует движению по направлению ординаты  $h$ . т. е. вниз, знак минус — движению вверх. Коэффициент  $c$  отражает влияние эффекта Джоуля — Томсона (всегда нагрев жидкости).

Для заданного геотермического градиента температуры  $\Gamma$  постоянного значения коэффициента  $c$  и постоянной скорости потока без учета теплопроводности ( $a = 0$ ) уравнение (26) в преобразованиях Лапласа по переменной  $x$  представляется так

$$\frac{\partial F}{\partial t} + us \left( F - \frac{T_0}{s} \right) - \frac{uc}{s} = 0$$

Отсюда получаем известное общее решение для изображения

$$F = B e^{-ust} + \frac{T_0}{s} + \frac{c}{s^2}$$

Из начального условия  $F(h, 0) = \frac{T_0}{s} + \frac{\Gamma}{s^2}$  вытекает, что

$$F = \frac{T_0}{s} + \frac{\Gamma}{s^2} e^{-ust} + \frac{c}{s^2} (1 - e^{-ust})$$

Оригинал изображения будет следующим

$$T = T_0 + \Gamma(h - ut) + cut \quad (27)$$

В потоке, направленном вниз, в пределах глубин  $h < ut$  ( по



условиям задачи  $T = T_0$ , а для глубин  $h > ut$  справедливо решение (27).

Член решения  $\Gamma(h - ut)$  определяет конвективный перенос тепла, в результате которого геотермическая кривая температуры смещается параллельно самой себе вниз со скоростью  $u_0$ . Член  $cut$  выражает эффект нагревания пород вследствие внутреннего трения в потоке.

Равенство (27) сохраняет силу и для вертикальной миграции вверх, если изменить знаки следующим образом

$$T = T_0 + \Gamma(h + ut) - cut. \quad (28)$$

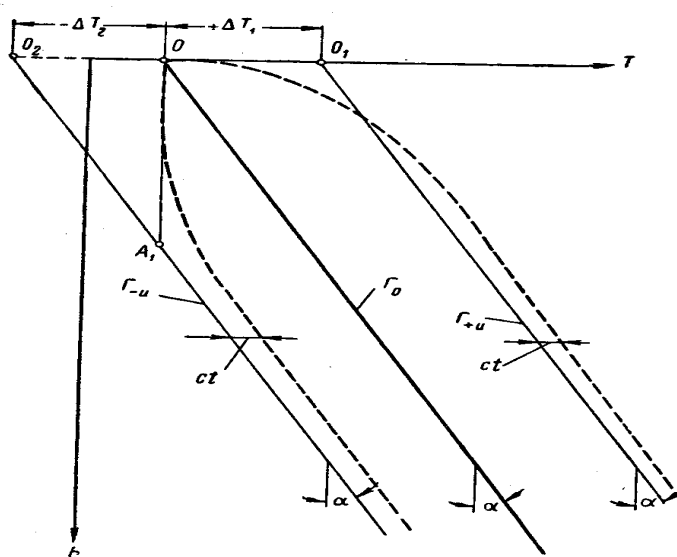


Рис.5. Невозмущенная геотерма и геотермы при наличии миграции жидкости

На рис. 5 показана нормальная геотерма  $\Gamma_0$  и две сдвинутые геотермические кривые вследствие миграции жидкости вниз и вверх. Пунктирами показан эффект нагревания пород теплом Джоуля-Томсона и качественные изменения температурной кривой вблизи поверхности земли за счет теплопроводных потоков.

Характерно, что сохраняется значение геотермического градиента ниже т.А или глубины  $h > ut$  и в тоже время заметно смещается точка 0 соответствующая температуре нейтрального слоя

### Нагнетание воды в пласт

Обычные в таких случаях допущения:

1. Коэффициент межфазного теплообмена бесконечно велик.

Чарный в 50-е годы пришел к выводу, что для сред с большой удельной поверхностью (на единицу объема) типа песчаников уже через несколько часов и на расстояниях более 4 м можно считать температуру фаз тождественной при обычных дебитах нагнетания. Нагнетание теплоносителя не сопровождается никакими процессами изменения фазового состояния пластовой жидкости.

2. Теплофизические характеристики жидкости, насыщавшей пласт, и нагнетаемой совпадают.

3. Пласт однородный, горизонтальный, конечной мощности и бесконечно глубоко залегающий в смысле отсутствия влияния дневной поверхности.

Рассматривается задача о нагнетании горячей воды в пласт мощности  $2h$  через скважину радиуса  $r_c$  с объемным дебитом  $Q$  и температурой  $T_B$ , отличной от начальной  $T_0$ . Индексы  $u$  - теплоемкостей  $v$  - для воды,  $1$  - насыщенный пласт,  $н$  - породы.

$$\begin{aligned}
 c\rho \frac{\partial T_U}{\partial \tau} &= \lambda_r \left( \frac{\partial^2 T_U}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial T_U}{\partial r_1} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 T_U}{\partial z_1^2}, \quad z_1 > h, \quad r_1 > r_c, \quad \tau > 0, \\
 c_1\rho_1 \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial \tau} &= -\frac{Qc_B\rho_B}{4\pi hr_1} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial r_1} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_{\Pi}}{\partial z_1^2}, \quad 0 < z_1 < h, \quad r_1 > r_c, \quad \tau > 0, \\
 \tau = 0, \quad T_{\Pi,U} &= T_0, \\
 r_1 = r_c, \quad T_{\Pi} &= T_B, \\
 z_1 + r_1 \rightarrow \infty, \quad T_{\Pi,U} &< \infty, \\
 z_1 = h, \quad T_U = T_{\Pi}, \quad \lambda_z \frac{\partial T_U}{\partial z_1} &= \lambda_1 \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial z_1}, \\
 z_1 = 0, \quad \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial z_1} &= 0,
 \end{aligned} \tag{29}$$

Последнее условие симметрии. Предположим, что теплопроводность пласта по вертикали очень велика, температура почти постоянна, перейдем к схеме сосредоточенной емкости. Введем

$$\tilde{T} = \frac{1}{h} \int_0^h T_{\Pi} dz_1 \quad \text{Проинтегрируем второе уравнение}$$

$$c_1\rho_1 \frac{\partial \tilde{T}_{\Pi}}{\partial \tau} = -\frac{Qc_B\rho_B}{4\pi hr_1} \frac{\partial \tilde{T}_{\Pi}}{\partial r_1} + \lambda_1 \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial z_1} \Big|_0^h$$

Учитывая условие симметрии при  $z=0$  и равенство потоков на  $z=h$

$$c_1\rho_1 \frac{\partial \tilde{T}_{\Pi}}{\partial \tau} = -\frac{Qc_B\rho_B}{4\pi hr_1} \frac{\partial \tilde{T}_{\Pi}}{\partial r_1} + \lambda_z \frac{\partial T_U}{\partial z_1} \Big|_h$$

а пласт выродился в линию. Уравнение превратилось в граничное условие. Теперь можем температуры не различить.

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_r \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial T}{\partial r_1} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z_1^2}, \quad z_1 > h, \quad r_1 > r_c, \quad \tau > 0,$$

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \frac{Q c_B \rho_B}{4\pi h r_1} \frac{\partial T}{\partial r_1} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z_1}, \quad z_1 = 0, \quad r_1 > r_c, \quad \tau > 0,$$

$$\tau = 0, \quad T = T_0,$$

$$r_1 = r_c, \quad z = 0 \quad T = T_B,$$

$$z_1 + r_1 \rightarrow \infty, \quad T < \infty,$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$t = \frac{\lambda_z \tau}{c\rho h^2} \quad z = \frac{z_1}{h} \quad r = \frac{r_1}{h} \quad r_0 = \frac{r_c}{h} \quad T = \frac{\tilde{T} - T_0}{T_B - T_0}$$

$$a = \frac{\lambda_r}{\lambda_z} \quad b = \frac{c_1 \rho_1}{c\rho} \quad d = \frac{Q c_B \rho_B}{4\pi h \lambda_z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad r > r_0, \quad t > 0,$$

$$b \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{d}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad z = 0, \quad r > r_0, \quad \tau > 0,$$

$$t = 0, \quad T = 0,$$

$$r = r_0, \quad z = 0 \quad T = 1,$$

$$z + r \rightarrow \infty, \quad T < \infty,$$

Получим решение при  $a=0$

$$sF(s) - 0 = \frac{d^2 F}{dz^2}$$

$$z = 0, \quad bsF - 0 + \frac{d}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

Общее решение

$$F = A \exp(-\sqrt{s} z) + B \exp(\sqrt{s} z)$$

Второе слагаемое не удовлетворяет условию ограниченности

$$bsA \exp(-z\sqrt{s}) = A \exp(-z\sqrt{s})(-\sqrt{s}) - \frac{d}{r} \frac{dA}{dr} \exp(-z\sqrt{s})$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} = -\frac{bs + \sqrt{s}}{d} r$$

$$\ln A = -\frac{bs + \sqrt{s}}{2d} r^2$$

$$A = D \exp\left(-\frac{bs + \sqrt{s}}{2d} r^2\right)$$

$$r = r_0, \quad z = 0, \quad T = 1/s, \Rightarrow 1 = D \exp\left(-\frac{bs + \sqrt{s}}{2d} r_0^2\right)$$

$$F = \frac{1}{s} \exp\left(-sb \frac{r^2 - r_0^2}{2d} - \sqrt{s} \left(z + b \frac{r^2 - r_0^2}{2d}\right)\right)$$

$$F = e^{-bs} F_1 \Rightarrow f(t-b) \quad \frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \Rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$f = \operatorname{erfc}\left(\frac{z + b \frac{r^2 - r_0^2}{2d}}{2\sqrt{t - b \frac{r^2 - r_0^2}{2d}}}\right) \quad (30)$$

Выполнить анимацию решения в Maple для различных времен.

Теплопроводность песчаника нефтесодержащего 2 Вт/К м, глинистого 3.4, теплоемкость 810 Дж/кг К, плотность 2600 кг/м<sup>3</sup>.

Теплоемкость воды 4100 Дж/кг К, плотность 1000 кг/м<sup>3</sup> Q= 10 м<sup>3</sup>/сут=0.0001157 м<sup>3</sup>/с,

1 ккал=4.18 кДж, d=0.0001157\*4187/4\*3.13\*1\*2=0.0193. Безразмерное время имеет коэффициент 1.614 \*10<sup>-6</sup>τ.

### ГИДРАТЫ ГАЗОВ.

Гидраты газов представляют собой кристаллические соединения – включения (клатраты), характеризующиеся строго определенной структурой для различных газов. Включенные молекулы газа удерживаются метастабильной, построенной из молекул воды кристаллической решеткой с помощью вандерваальсовских сил.

Гидраты представляют собой твердые растворы, где растворителем является вода, молекулы которой за счет водородной связи образуют объемный каркас, в полости которого внедряются легкоподвижные молекулы газов.

В зависимости от формы и размера молекул газа, находящегося в контакте с водой, молекулы воды образуют каркас определенной

структуры, степень заполнения которого определяется внешним давлением и температурой.

Структура I сооружена из 46 молекул воды, образующих 2 малые и 6 больших полостей. Если размеры молекул газа меньше  $5.2A$  ( $Ar$ ,  $CH_4$ ,  $H_2S$ ), то заполняются все полости, если больше, то только большие.

Структура II состоит из 136 молекул воды, 16 малых и 8 больших полостей.

В случае смеси газов образуются двойные гидраты. Известны гидраты и с другой структурой. Некоторые газы дают различные структуры в зависимости от температуры.

### Условия образования.

Начало процесса образования гидратов зависит от состава газа, состояния воды, давления и температуры. Зависимость между давлением и температурой образования гидратов обычно изображают диаграммой гетерогенного состояния.

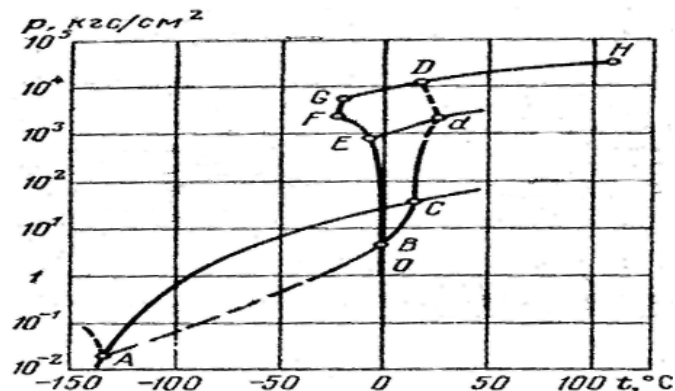


Рис. 8. Фазовая диаграмма для системы газ-вода для газа, критическая температура которого выше температуры гидратообразования

Для газа у которого критическая температура превышает температуру гидратообразования при  $t > 0^\circ C$ .

Кривая OFGH описывает зависимость температуры кристаллизации чистой воды от давления. Кривая АВ определяет условия существования гидрата при  $t < 0^\circ C$ , когда гидрат образуется из паров этана и воды, находящейся в состоянии льда.  $dt/dp > 0$  на этом участке кривой, т.е. при повышении температуры для существования гидрата необходимо возрастание давления. BC – из воды и газа. CdD- определяет условия образования гидрата из жидкой воды и газа-гидратообразователя, находящегося в жидком состоянии. OF – кривая замерзания воды. В т.С в равновесии находятся газ, вода, гидрат и сжиженный газ. GH- кривая замерзания воды при высоких давлениях. Cd- для  $C_2H_6$ ,  $H_2S$  направлена

вправо  $C_3H_8$ ,  $CHCl_3$  – направлена влево.

Для метана критическая температура ниже температуры замерзания воды.  $-d$ - является критической, выше которой при любом давлении гидрат существовать не может – практически очень важная..

Для газодобывающей промышленности наибольший интерес представляет зона, определяемая условиями образования гидратов в области умеренных давлений из жидкой воды – правее кривой замерзания, так как в этих условиях происходят интенсивное образование и накопление гидратов вследствие избытка жидкой воды.

Температура начала образования гидратов при атмосферном давлении полученная по формулам

газ	По формуле, °С	По другим данным, °С
$CH_4$	-68	-83
$C_2H_6$	-28	
$C_3H_8$	-12	
$CO_2$	-22	
$H_2S$	1.6	
Оренбургский газ	15.4	
Уренгойский	-11	

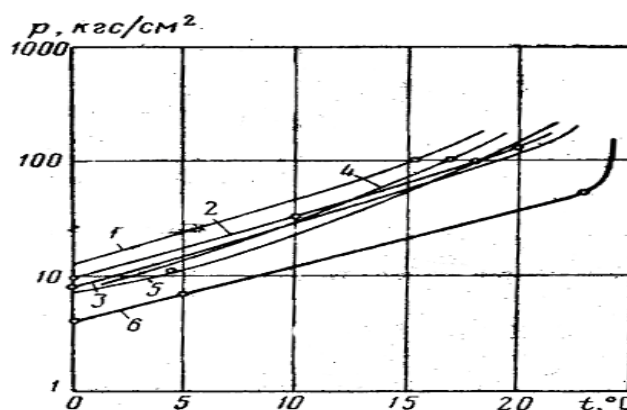


Рис.9. Условия начала образования гидратов газов месторождений  
 1 - Оренбургского (1.3 %  $H_2S$ ), 2 – Шебелинского, 3 – Оренбургского (4.5 %  $H_2S$ ), 4 – Лани, 5 – Уренгойского (скв.5), 6 - Вуктыльского

В целом с ростом молекулярного веса температура начала образования гидрата повышается.

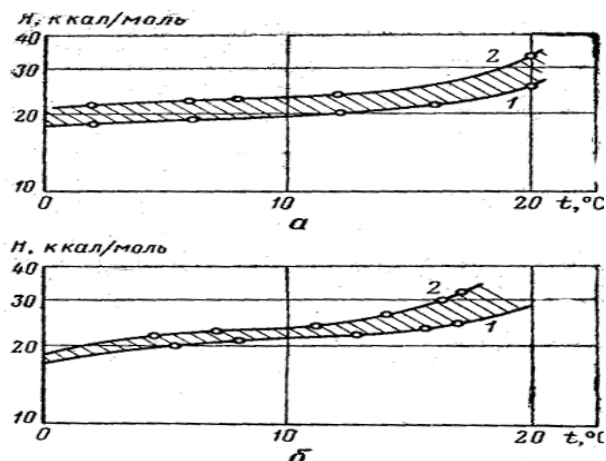


Рис.10. Теплота образования (1) и разложения гидратов (2) газа месторождений шебелинского (а) и Оренбургского (4.5 % H<sub>2</sub>S) (б)

Содержание компонентов в гидрате почти не меняется от давления и слабо меняется от температуры. Основным факторов, определяющим соотношение компонентов в гидрате является состав исходного газа.

#### Оренбургское месторождение

	Состав газа, %-объема		Состав гидрата, % объема	
	присводовая	крыльевая	присводовая	крыльевая
CH <sub>4</sub>	84	84.86	29.3	12.9
H <sub>2</sub> S	1.3	4.5	36.68	56.12

Состав газа и образованного из него гидрата сильно разнятся.

Теплота разложения гидрата отдельного компонента равна теплоте его образования. Однако, для смесей газов она определяется изменением состава исходного газа и состава гидрата. Обычно состав газов в гидратном состоянии имеет более высокий молекулярный вес и теплота разложения гидрата превышает теплоту его

Плотность гидратов 0.8-0.92 при давлении 20-420 атм.

#### Образование и разложение гидратов при t<0

Выход газовой промышленности в районы Сибири и Крайнего Севера, где температура достигает -30—60°C, выдвинула необходимость таких исследований на передний план. Магистральные газопроводы работают там в условиях годового перепада температур 100С. Газ подается и в состоянии насыщения влагой и с предварительным понижением точки росы до -30-40°C.

Гидрат метана при атмосферном давлении разлагается при -83 С.

В результате этих исследований было установлено следующее.

1. При изобарическом переводе гидратов из области положительных

температур в область отрицательных при давлениях выше упругости диссоциации гидратов перегруппировки решетки гидрата в решетку льда не наблюдается и при обратном переводе гидратов и; области отрицательных температур в область положительных происходит их обычное разложение.

2. Изотермическое снижение давления над гидратами в области отрицательных температур приводит к перегруппировке структуры гидрата в структуру льда при достижении равновесных условий разложения гидрата по схеме: гидрат – вода – (лед + газ).

3. При переводе льда из области отрицательных в область положительных температур при давлениях гидратообразования в зависимости от скорости перевода происходит частичный или полный переход льда в гидрат по схеме: лед – вода – гидрат (вода).

4. Перегруппировка решетки льда в решетку гидрата в области отрицательных температур происходит путем перехода льда через паровое состояние по схеме: лед – пар – гидрат.

5- Кристаллическая пробка при  $t < C$  в газопроводе не может быть ликвидирована простым понижением давления, так как разложившийся гидрат при снижении давления ниже давления разложения перейдет в лед (по схеме: гидрат – жидкая вода – ~ лед + газ).

6. При эксплуатации газопроводов в области отрицательных температур газ перед подачей в газопровод необходимо осушить до точки росы, исключающей конденсацию паров воды из газа.

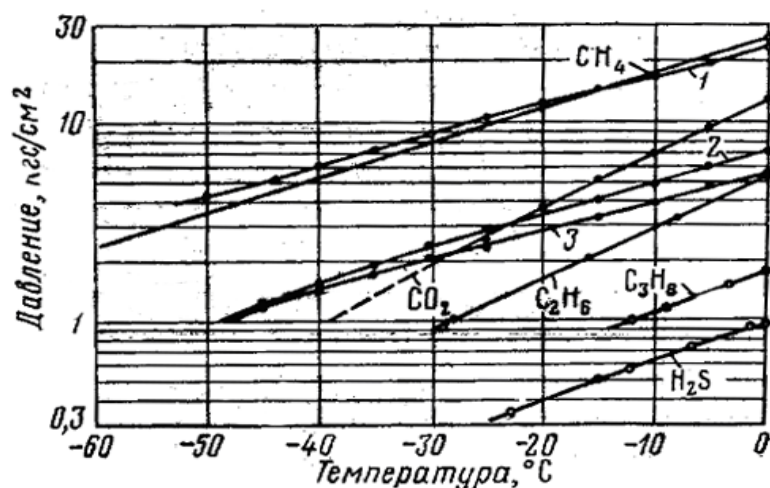


Рис.11. Условия образования гидратов при температуре ниже 0°C.  
Месторождения 1 – Уренгойское, 2 – Оренбургское, 3 – Лаки.



## Образование гидратов в пористой среде

При определении условий гидратообразования в продуктивных пластах необходимо учитывать влияние пористой среды. Данных об условиях образования гидратов в горных породах в литературе мало. Первые исследования условий образования гидратов на искусственных образцах дисперсных сред (песчаников) показали, что для перехода паровой воды в гидраты нужны более низкие температуры или более высокие давления, чем равновесные при свободном контактировании.

Отличие условий перехода паровой воды в гидраты от свободной обусловлено спецификой ее физических свойств и структуры. Физическое состояние воды, насыщающей горные породы, неоднородно.

Чем меньше диаметр частиц породы, чем меньше радиус капилляров поровой воды, тем выше депрессия упругости паров воды и больше снижение температуры начала процесса гидратообразования.

1. С уменьшением радиуса капилляра влияние пористой среды на условия начала гидратообразования возрастает.

2. С повышением давления – понижается.

Микрозоны со свободными порами радиуса на 1-2 порядка выше среднего являются центрами начала образования гидратов. При упругости паров воды над гидратом ниже упругости паров в пористой среде переход газовой залежи в газогидратную происходит у условиях образования гидрата при свободном контакте газ-вода.

На суше зона гидратообразования приурочена в первую очередь к районам многолетнемерзлых пород, хотя и выходят за пределы криолитозоны. В гидросфере зона возможного гидратообразования находится практически всюду в придонной части осадочного чехла на глубине свыше 200-500 м.

Мнолетнемерзлые породы покрывают в настоящее время около 23% общей территории суши. У нас порядка 50% страны. Глубина промерзания пород достигает 500-700 м. В Якутии были выявлены нулевые температуры на глубине 1400 м.

Вероятно, непроницаемая газогидратная оболочка в придонной части осадков акватории определенным образом повлияла не только, на формирование залежей газа, но и залежей нефти. И только в последние годы при изучении шельфовых и глубоководных зон морей и океанов в процессе поисков нефти, газа и других полезных ископаемых получены новые данные, свидетельствующие о существовании скоплений природного газа в твердом (гидратном) состоянии в придонных частях глубоководных водоемов.

Так, по данным Р. Д. Столла и др., во время буровых работ, проведенных компанией «Гломар Челленджер» на подводном хребте Блейк-Бехаме, были подняты керны, содержащие газ и разрушавшиеся

в результате бурного выделения газа. При быстром подъеме кернов на поверхность этот процесс сопровождался образованием льда, который потом таял. Подобные явления наблюдаются и при разрушении искусственно образованных гидратов. Содержащие газ осадки отмечены в горных породах, залегающих на глубине 600 м ниже морского дна под слоем воды 3000 м.

Керны из придонной части Тихого океана содержали газ в гидратном состоянии и их можно было наблюдать визуально.

Наличие гидратов в придонной части океана характерно накоплением их в непосредственной близости от границы дна. Для сохранения гидратов не требуется непроницаемой литологической покрывки, т.к. сам гидрат закупоривает поровое пространство и в свою очередь является покрывкой для нижележащего свободного газа.

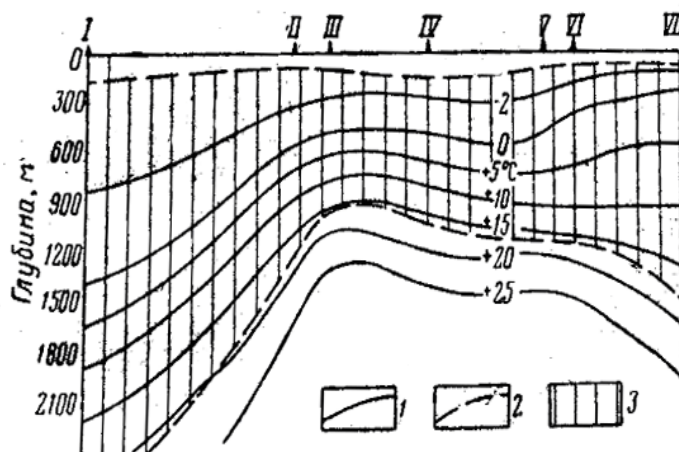


Рис.12. Фактический профиль распространения зоны залегания газогидратных залежей в Якутии.

1 - изотермы, 2 - нижняя граница образования гидратов, 3 - зона возможного образования гидратов. Площади : 1 -Маркинская, II - Вилюйская, III -Средне-Вилюйская, IV -Бес-Кюельская, V - Намская, VI - окрестности Якутии, VII - Амгинская

### Использование

1. Повышение давления газа путем перевода их через гидратное состояние и разложение в ограниченном объеме. Моль гидрата содержит 22.4 л газа (при нормальных условиях)

2. Опреснение воды путем образования гидратов газов из рассолов.

3. Хранение газа в гидратном состоянии. Например, создание хранилищ в районах многолетнемерзлых пород при незначительном их

заглублении.

4. Использование процессов гидратообразования для рассеяния туманов и облаков при относительно высоких температурах  $-3\div+3^{\circ}\text{C}$

### **КОНВЕКЦИЯ И ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ**

Постановки новых задач возникли в связи с нуждами техники и достижениями других наук. Выяснилась большая роль термоконвективных явлений в актуальных технических проблемах: кристаллизации полупроводниковых материалов из газовой фазы; выращивании совершенных кристаллов; охлаждении ядерных реакторов; конструировании высокочувствительных приборов, например хемотронов, лазеров; создании оптических газовых линз и термогидродинамических линий связи; в космических исследованиях; холодильной и нефтеперерабатывающей промышленности.

Из физических проблем можно указать на важную роль термоконвективных явлений в недавно открытом явлении самофокусировки мощных лазерных пучков, предотвращении катастрофического развития звездных объектов, происхождении магнитного поля планет и звезд.

#### **Стационарная конвекция в бесконечном горизонтальном слое при периодическом нагреве сверху**

На практике часто встречаются случаи, когда градиент температуры в жидкости направлен противоположно вектору силы тяжести. В последние годы были детально изучены условия возбуждения, структура и интенсивность конвекции при нагреве сверху. Исследовались различные геометрии областей. Приведем некоторые наиболее интересные результаты

Рассмотрим вначале простейшую геометрию — бесконечный горизонтальный плоский слой. Сформулируем и решим стационарную задачу о естественной конвекции (ЕК) в таком слое при периодическом нагреве сверху. Будем считать, что ограничивающие слой стенки неподвижны и непроницаемы, следовательно, все компоненты скорости на них обращаются в нуль, нижняя стенка ( $x_2=0$ ) поддерживается при постоянной температуре  $T(x_1, 0, x_3)=T_1$ , верхняя ( $x_2=h$ ) — при температуре  $T_2$ , на которую наложено периодическое возмущение вдоль оси  $x_1$

$$T(x_1, h, x_3) = T_2 + a \cos kx_1 \quad (31)$$

Амплитуда температурного возмущения  $a$  не может быть произвольной, при нагреве сверху она в принципе ограничена условием

$$|a| < \Delta T = T_2 - T_1, \quad (32)$$

Наложим дополнительные требования на перепад температур и амплитуду  $a$ :  $|a| \ll \Delta T \ll T_1$ , неравенства дают возможность использовать структурно и параметрически линеаризованные уравнения ЕК: уравнение движения, уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, уравнение энергии

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} - \rho_0 \beta \vec{g} \vartheta = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\nabla^2 \vartheta = 0; \vartheta = T - T_1$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_0}, \text{ коэффициент теплового расширения жидкости,}$$

$\operatorname{Pr} = \nu/a$ ,  $\nu$  - скорость,  $\vartheta$  - отклонение температуры от равновесного значения,  $\eta$ -коэффициент сдвиговой вязкости,  $\nu$ - коэффициент кинематической вязкости.

Отсутствие зависимости компонент скорости и температуры в граничных условиях от координаты  $x_3$ , а также соображения симметрии позволяют предположить, что конвекция в слое будет двумерной.

Вводятся безразмерные переменные

$$x_1^* = kx_1, \quad x_2^* = kx_2, \quad L = kh,$$

$$v_1^* = (\nu k)^{-1} v_1, \quad v_2^* = (\nu k)^{-1} v_2, \quad \psi^* = \nu^{-1} \psi,$$

$$\theta = (\vartheta - \Delta T x_2 h^{-1})(a \cos kx_1)^{-1}, \quad Gr = \beta g a k^{-3} \nu^{-2}$$

Длина волны температурного возмущения  $\lambda (k=2\pi/\lambda)$  и амплитуда “ $a$ ” выбраны в качестве характерных величин, поскольку именно они ответственны за возбуждение конвекции. В дальнейшем все звездочки у безразмерных величин опускаем.

Распределение температуры  $\theta = shx_2 / shL$

Интегрируя уравнение, находят функцию тока

$$\psi = -gr \Psi(x_2) \sin x_1, \quad \Psi(x_2) = \frac{shx_2}{8shL} (C_1 + C_2 x_2 + x_2^2 - C_1 e^{-x_2} sh^{-1} x_2)$$

$$C_c = \frac{L^2 (1 - e^{2L})^2}{1 - 2e^{2L} - 4L^2 e^{2L} + e^{4L}}, \quad C_2 = -L - C_1 \frac{1 + 2L - e^{2L}}{L(1 - e^{2L})}$$

Выпишем выражения для компонент скорости

$$v_1 = -Gr U(x_2) \sin x_1; \quad U(x_2) = \partial \Psi / \partial x_2;$$

$$v_2 = Gr V(x_2) \cos x_1; \quad V(x_2) = \Psi(x_2)$$

Поскольку по оси  $x_1$  решение периодическое достаточно рассмотреть участок размером в длину волны  $0 \leq x_1 \leq 2\pi$ .

Функция тока равна нулю при  $x = \pi n$ ,  $n=0,1,2,\dots$  т.е. там, где распределение температур экстремально, а также на границах  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = L$ .

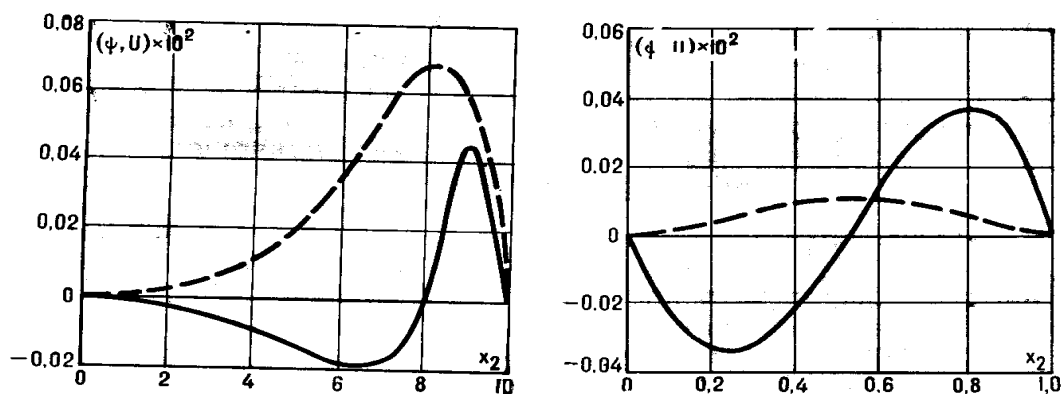
Численный анализ показал, что выражение  $\Psi(x_2)$  не обращается в нуль внутри слоя (рис. 13). Следовательно, на длине волны температурного возмущения в любом сечении  $x_3 = \text{const}$  имеется две ячейки: 1)  $0 \leq x_1 \leq \pi$ ,  $0 < x_2 < L$ ; 2)  $\pi \leq x_1 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq x_2 \leq L$  (рис. 13). Пространственная структура — два двумерных вала, параллельных оси  $x_3$ . Направление течения в валах следующее: в первом — против часовой стрелки, во втором — по часовой стрелке. Отметим, что при этом у верхней стенки жидкость всегда течет против градиента температуры.

Как и следовало ожидать, в линейном приближении интенсивность конвекции прямо пропорциональна числу Грасгофа. Зависимость интенсивности конвекции от безразмерной высоты  $L$  более сложная. При малых значениях  $L < 1$  интенсивность растет линейно, при больших — замедляется, и, наконец, появляется насыщение. Относительно формы валов можно сказать следующее. Приблизительно до  $L \approx 1$  валы имеют форму круговых цилиндров, оси которых лежат посередине слоя. С увеличением параметра  $L$  они становятся яйцеобразными и смещаются вверх. На рис. 14 схематически изображена структура конвекции в слое для  $L \approx 5$ . Так, например, для  $L = 10$  максимумы функции тока ( $v_2$  — компоненты скорости) и продольной составляющей скорости  $v_1$  расположены уже вблизи верхней стенки соответственно ( $x_2 \approx 8$ ,  $x_2 \approx 9$ ).

Совершенно ясна физическая интерпретация полученных результатов. Малые значения  $L$  соответствуют тому случаю, когда размер слоя меньше или соизмерим с характерным размером неоднородности температуры на верхней стенке. Вполне естественно, что температурное возмущение чувствуется по всей высоте слоя равномерно, а интенсивность конвекции мала из-за сильного затормаживания стенок. С увеличением параметра  $L$  стенки для той же длины волны  $\lambda$  как бы раздвигаются и их влияние ослабевает, неизотермичность верхней стенки все слабее сказывается на больших расстояниях от нее.

Таким образом ячейчатая конвекция при нагреве сверху имеет сложную многоячейковую структуру. Экстремум в распределении температуры на верхней стенке дает границу раздела между валами. Направление течения в ячейках можно определить пользуясь простым правилом — у верхней стенки скорость направлена против градиента температуры. Интенсивность конвекции при малых числах Грасгофа пропорциональна  $Gr$ . С увеличением  $L$  интенсивность растет с насыщением.

Структура конвекции не зависит от числа Грасгофа и претерпевает некоторые изменения с увеличением параметра  $L$ .



а.

б

Рис.13. Распределение функции тока  $\psi$  (пунктирная кривая) и функции  $U$  (сплошная кривая) по высоте слоя (а -  $L=10$ , б -  $L=1$ )

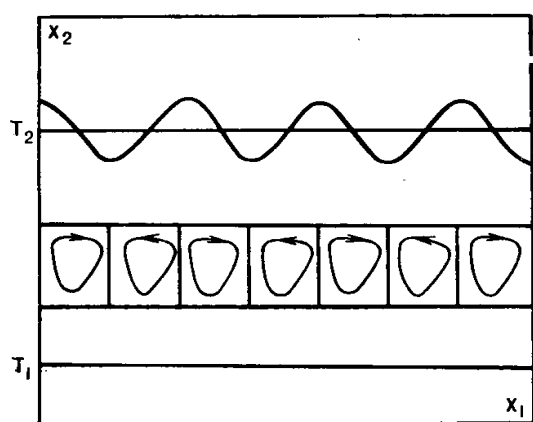


Рис.14. Качественная картина структуры конвекции в слое для  $L=5$ .

### Вязкостно-гравитационное течение в каналах.

#### Тепловая неустойчивость и теплообмен в горизонтальном плоском канале.

Рассмотрим течение жидкости в плоском горизонтальном канале, имеющем бесконечную протяженность как в направлении основного потока, так и в перпендикулярном ему направлении. В таком потоке в условиях неустойчивой стратификации влияние сил плавучести может не сказываться в некотором диапазоне малых параметров массовых сил и формирует лишь

потенциал неустойчивости. Если параметр массовых сил превышает критическое значение, то происходит нарушение устойчивости, и развиваются вторичные течения. Установившееся вторичное течение принимает форму вихревых шнуров, оси которых совпадают с направлением основного потока.

Гейдж и Рид теоретически решили задачу об устойчивости ламинарного течения для случая постоянных, но различных температур на верхней и нижней поверхностях канала.

Схема возможной картины вторичных течений показана на рис. 17. В предельном случае  $Re \rightarrow \infty$  реализуются конвективные ячейки Бенара. В случае устойчивого распределения плотности термическая устойчивость потока приводит к увеличению его сдвиговой устойчивости и при достижении значения числа Ричардсона  $Ri = 0.0554$  течение становится совершенно устойчивым, т.е. при любых больших  $Re$  не происходит нарушения устойчивости стратифицированного ламинарного течения.

$$Ri = \frac{g\beta H\Delta T}{16w_0^2} \quad \beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \Delta T = T_B - T_H$$

$\beta$ - коэффициент объемного расширения,  $\delta$  - масштаб длины,  $w$ - скорость

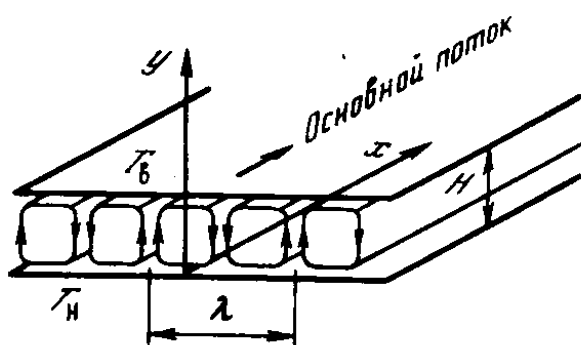


Рис.15 Развитие термической неустойчивости в плоском горизонтальном канале.

Один из примечательных результатов состоит в том, что при неустойчивой стратификации разность температур, необходимая для начала развития вторичного течения, уменьшается по мере увеличения скорости основного потока, градиента температуры в направлении движения жидкости в канале и числа  $Pr$  (рост числа Прандля означает меньший вклад теплопроводности по отношению к вязкости, тепло не отводится за счет теплопроводности и его неравномерное распределение вызывает конвекцию постольку поскольку этому не препятствует вязкость).

**Случай сильно устойчивой стратификации.** При этом турбулентное

перемешивание жидкости крайне затруднено, переносы между слоями малы, пульсационное движение реализуется в виде случайных внутренних гравитационных волн, а турбулентность локализована в форме отдельных случайных «пятен турбулентности». Здесь уместно упомянуть, что развитая Баренблаттом Г.И., и Мониным А.С. теория пятен турбулентности явилась основой для объяснения необычайного атмосферного явления, связанного с рассеянием солнечного света на оптических неоднородностях, переносимых турбулентностью в пятне. Установлено, что дискообразные пятна турбулентности деформируются (схлопываются) очень медленно. Это позволило объяснить большое число наблюдений «летающих тарелок», которые широко обсуждались в популярной литературе в 70-х годах.

### **Тепловая конвекция как прототип явлений самоорганизации в физике.**

Эксперимент, впервые реализованный Бенаром.

Представим себе слой жидкости между двумя горизонтальными параллельными плоскостями, латеральные размеры которых значительно превосходят толщину. Предоставленная сама себе жидкость быстро устремится к однородному состоянию. Нагреем жидкость снизу, равновесие нарушится. Если воздействие мало, жидкость снова устремится в состояние при котором весь процесс сводится к переносу тепла от одного слоя к другому за счет теплопроводности. Состояние будет стабильным. Если перепад температур увеличить, то при некотором критическом перепаде температур между пластинами объем вещества приходит в движение. Жидкость структурируется в виде небольших ячеек, называемых ячейками Бенара. Характерные ячейки Бенара в обычных лабораторных условиях находятся в миллиметровом диапазоне. Каждая ячейка содержит  $10^{21}$  молекул и то, что такое число молекул демонстрирует когерентное поведение и есть возникновение сложного поведения. Кроме того, ячейки чередуются с лево- и правовращательным движением – явление дуализма. В некоторой области значений перепада температур ячейки будут существовать, а после перехода через новое критическое значение  $\Delta T$  структура станет размытой и возникнет новый режим, характеризующийся неупорядоченной зависимостью переменных от времени. Этот режим предшествует турбулентному.



## Преобразование Лапласа

Определение. Пусть  $f(t)$  – однозначная функция действительного переменного  $t$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Преобразование Лапласа

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

ставит в соответствие каждой такой функции (оригиналу), для которой несобственный интеграл (1) сходится единственную функцию  $F(s)$  комплексной переменной  $s = \sigma + i\omega$ , называемой изображением.

Т. Если интеграл

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_0^b |f(t)|e^{-st} dt = a \rightarrow 0 \int_0^b |f(t)|e^{-st} dt \quad (2)$$

сходится для  $\sigma = \sigma_0$ , преобразование Лапласа существует для  $\sigma \geq \sigma_0$ , изображение – аналитическая функция для  $\sigma > \sigma_0$ .

Точная нижняя грань  $\sigma_a$  чисел  $\sigma_0$ , для которых это условие соблюдается, называется абсциссой абсолютной сходимости преобразования Лапласа.

Теорема обращения. Пусть  $F(s) = L(f(t))$ ,  $\sigma > \sigma_0$ , тогда в каждом открытом интервале, где  $f(t)$  ограничена и имеет конечное число точек максимума, минимума и точек разрыва

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - iR}^{\sigma_1 + iR} F(s)e^{st} ds = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] & \text{для } t > 0 \\ \frac{1}{2} [f(0+0)] & \text{для } t = 0 \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases} \quad (\sigma_1 > \sigma_a) \quad (3)$$

В частности для каждого  $t > 0$ , где  $f(t)$  непрерывна,

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - iR}^{\sigma_1 + iR} F(s)e^{st} ds = f(t) \quad (\sigma_1 > \sigma_a) \quad (3b)$$

Путь интегрирования в формулах (3) лежит справа от всех особых точек  $F(s)$ .

Единственность преобразования и его обращения. Преобразование Лапласа (1) единственно для каждой функции  $f(t)$ , имеющей такое преобразование. Обратное, две функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  имеющие одинаковые преобразования Лапласа совпадают для всех  $t > 0$ , за исключением, возможно, множества меры нуль;  $f_1(t) = f_2(t)$  для всех  $t > 0$ , где обе функции непрерывны (теорема Лерха).

$f(t)$  определяется единственным образом по преобразованию Лапласа для почти для всех  $t > 0$ ; данная функция не может иметь более одного

обратного преобразования Лапласа, непрерывного для всех  $t > 0$ . (Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа. В частности единичная функция  $f(t)=0$  для  $t < 0$  и  $f(t)=1$  для  $t > 0$  имеет преобразование Лапласа  $1/s$  независимо от значения принимаемого  $f(t)$  при  $t = 0$ .)

Теорема о свертке. Пусть

$$F_1(s) = L(f_1(t)) \quad (\sigma > \sigma_1)$$

$$F_2(s) = L(f_2(t)) \quad (\sigma > \sigma_2)$$

Тогда

$$L(f_1(t)f_2(t)) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F_1(\lambda) F_2(s - \lambda) d\lambda & (\lambda > \sigma_1) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F_2(\lambda) F_1(s - \lambda) d\lambda & (\lambda > \sigma_2) \end{cases} \quad (4)$$

В обеих формулах следует считать, что  $\text{Re } s > \sigma_1 + \sigma_2$ . Это значит, что изображение произведения  $f_1(t)f_2(t)$ - аналитическая функция в полуплоскости  $\text{Re } s > \sigma_1 + \sigma_2$ .

(Однозначная функция называется аналитической (регулярной, голоморфной) в  $t.z=a$ , если она дифференцируема в некоторой окрестности  $t.a$ ))

Теорема о свертке 2. Если интегралы

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt$$

$$F_2(s) = \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt$$

сходятся абсолютно при  $\text{Re } s > \sigma_a$ , то  $F(s) = F_1(s)F_2(s)$  является преобразованием Лапласа от  $f(t) = \int_0^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$  (5)

и сходимость интеграла  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

при  $\text{Re } s > \sigma_a$  абсолютна.

### Некоторые свойства преобразования Лапласа.

1. Свойство линейности. Пусть  $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$  где  $c_k$  любые

комплексные постоянные. Тогда  $F(s) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(s)$  (6)

На основании (6) формально имеем

$$L\left(\frac{d}{d\lambda} f(t, \lambda)\right) = \frac{d}{d\lambda} F(s, \lambda) \quad (7)$$

$$L\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(t, \lambda) d\lambda\right) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(s, \lambda) d\lambda \quad (8)$$

2. Свойство подобия. Для любого постоянного  $\alpha$  имеем

$$L\left(f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\alpha\tau} d\tau = \alpha F(\alpha s) \quad (9)$$

3. Преобразование производных. С помощью интегрирования по частям легко получить

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (10)$$

$n$ - целое положительное число.

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt = -f(0) + sF(s)$$

4. Дифференцирование преобразования Лапласа.

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n L(t^n f(t)) \quad (11)$$

5. Преобразование интегралов.

$$L\left(\int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1}\right) = \frac{F(s)}{s^n} \quad (12)$$

6. Интегрирование преобразования Лапласа.

$$\int_s^{\infty} dq \int_q^{\infty} dq_1 \dots \int_{q_{n-2}}^{\infty} F(q_{n-1}) dq_{n-1} = L\left(\frac{f(t)}{t^n}\right) \quad (13)$$

Предельные теоремы. Если  $F(s)$ - преобразование Лапласа для  $f(t)$  и  $L(f'(t))$  существует, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0+0), \quad (14)$$

если предел справа существует.

Если в дополнении к первым двум условиям существует предел  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (15)$$

Таблица некоторых преобразований Лапласа.

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
$t$	$1/s^2$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$

$\text{Exp}(at)$	$1/(s-a)$
$\text{Exp}(a^2t)\text{erfc}(a\sqrt{t})$	$1/(\sqrt{s}(\sqrt{s+a}))$
$1/a f(t/a)$	$F(as)$
$\text{Exp}(at)f(t)$	$F(s-a)$

Преобразование Лапласа применяется при решении дифференциальных и интегральных уравнений.

**Формулы Дюамеля.** Пусть  $M$  – однородный линейный оператор с производными и коэффициентами, не содержащими переменную  $t$ . Пусть  $\Phi(x,t)$  есть решение задачи с начальными и краевыми условиями

$$M\Phi + A_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < H, \quad t > 0)$$

$$\Phi(x, 0+0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{0+0} = 0 \quad (0 < x < H)$$

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \Phi = b(t) \quad (x = 0, t > 0)$$

И пусть  $\Psi(x,t)$  - решение этой задачи для  $b(t)=1$  ( $t>0$ ). Тогда

$$\Phi(x,t) = \Psi(x,t)b(0+0) + \int_0^t \Psi(x,t-\tau)b'(\tau)d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Psi(x,t-\tau)b(\tau)d\tau \quad (16)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. - М.: Энергия, 1977. - 344 с.
2. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. - М.: Недра, 1965.-238 с.
3. Куштанова Г.Г. Температурный контроль разработки месторождений нефти и газа.- Казань: Новое знание, 2003.-180 с.
4. Макогон Ю.Ф. Гидраты природных газов. М.: Недра,1974, - 208с
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное счисление. М.: Наука, 1974.-542 с.
6. Петухов Б.С., Поляков А.Ф. Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986.-192 с.
7. Лыков А.В., Берковский Б.М. Конвекция и тепловые волны М: Энергия,1974.-336 с.